CAPITOLO

3

Limiti di funzioni

Non serve arrivare in un punto per sapere dove si sta andando: il limite descrive la meta guardando soltanto il cammino. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere intorni e punti di accumulazione e capire dove ha senso un limite.
2. Leggere e scrivere le definizioni di limite, verificarle nei casi semplici e distinguere i limiti destro e sinistro.
3. Conoscere i teoremi di unicità, della permanenza del segno e del confronto.
4. Calcolare limiti con l'algebra dei limiti e sciogliere le forme indeterminate nei casi semplici.
5. Dimostrare il limite notevole di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ per $x \to 0$ e usare gli altri limiti notevoli e la gerarchia degli infiniti.
6. Collegare la nascita del concetto di limite alla critica di Berkeley e al rigore dell'Ottocento.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Avvicinarsi a un punto 2
3.2 Le definizioni di limite 3
3.3 Tre teoremi sui limiti 8
3.4 Calcolare i limiti 9
3.5 Limiti notevoli 13

Matematica 5 · Parte II · Successioni, limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 3: Limiti di funzioni · pagine 75–100 del volume completo · estratto per lo studio

Che cosa fa una funzione «vicino» a un punto in cui non è definita? Che cosa fa quando la variabile diventa grandissima? In *Matematica 4* abbiamo risposto con tabelle di valori: calcolando $\frac{x^2-1}{x-1}$ per $x = 0{,}9,\ 0{,}99,\ 1{,}01,\ 1{,}1$ si ottiene 1,9, 1,99, 2,01, 2,1, e abbiamo detto che, vicino a 1, la funzione «si avvicina» a 2. Una tabella però mostra pochi numeri, e non può escludere che più vicino a 1 accada qualcosa di imprevisto.

Nel capitolo 2 abbiamo trasformato l'idea di «avvicinarsi» in una definizione precisa per le successioni: a_n tende a l se, fissata una tolleranza ε, da un certo indice in poi tutti i termini distano da l meno di ε. In questo capitolo facciamo lo stesso per le funzioni di variabile reale. Sarà il linguaggio di tutto il calcolo infinitesimale: la continuità (capitolo 4), la derivata (capitolo 5) e l'integrale (capitolo 9) sono tutti definiti con un limite.

3.1 Avvicinarsi a un punto

3.1.1 Che cosa sappiamo già

Conosciamo i grafici delle funzioni elementari: le funzioni polinomiali e razionali (*Matematica 4*, cap. 1), le funzioni circolari $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ (cap. 4), l'esponenziale $y = a^x$ (cap. 7) e il logaritmo $y = \log_a x$ (cap. 8). Di ciascuna sappiamo trovare il dominio, il segno, le intersezioni con gli assi. Sappiamo anche che vicino a un punto escluso dal dominio una funzione razionale può assumere valori grandi quanto si vuole, come $\frac{1}{x}$ vicino a 0, oppure avvicinarsi a un numero, come $\frac{x^2-1}{x-1}$ vicino a 1. Quello che ci manca è un modo per dire con esattezza, e non solo leggendo una tabella, che cosa significa «avvicinarsi».

3.1.2 Intorni

Per parlare di punti «vicini» a x_0 serve una misura della vicinanza. Si chiama **intorno** di un numero reale x_0 un intervallo aperto che contiene x_0; useremo soprattutto gli intorni simmetrici $]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$, con $\delta > 0$, cioè l'insieme dei numeri x tali che $|x - x_0| < \delta$. Più piccolo è δ, più l'intorno è «stretto». L'intervallo $[x_0;\ x_0 + \delta[$ è un **intorno destro** di x_0, l'intervallo $]x_0 - \delta;\ x_0]$ un **intorno sinistro**: servono quando si vuole guardare un solo lato del punto.

Anche $+\infty$ e $-\infty$ hanno i loro intorni, benché non siano numeri. Un **intorno di $+\infty$** è una semiretta $]M;\ +\infty[$: i numeri «abbastanza grandi», maggiori di una soglia M. Un intorno di $-\infty$ è una semiretta $]-\infty;\ -M[$. Ancora una volta, l'intorno è tanto più «piccolo» quanto più la soglia è lontana.

3.1.3 Dove ha senso un limite

Per chiederci che cosa fa $f(x)$ quando x si avvicina a x_0, occorre che x possa davvero avvicinarsi a x_0 restando nel dominio. Un numero x_0 è un **punto di accumulazione** del dominio D se ogni suo intorno contiene punti di D diversi da x_0. Il punto x_0 può appartenere a D oppure no: 0 non appartiene al dominio di $\frac{1}{x}$, ma ne è punto di accumulazione, perché ogni intervallo $]-\delta;\,\delta[$ contiene numeri diversi da 0. Invece se $D = \mathbb{N}$ nessun numero è punto di accumulazione: tra due naturali c'è sempre un «vuoto». Per questo, per una successione, l'unico limite che si può studiare è quello per $n \to +\infty$, come nel capitolo 2.

D'ora in poi, quando scriveremo un limite per $x \to x_0$, sottintenderemo che x_0 sia un punto di accumulazione del dominio; per $x \to +\infty$, che il dominio non sia limitato superiormente.

3.2 Le definizioni di limite

3.2.1 Limite finito per x che tende a un numero

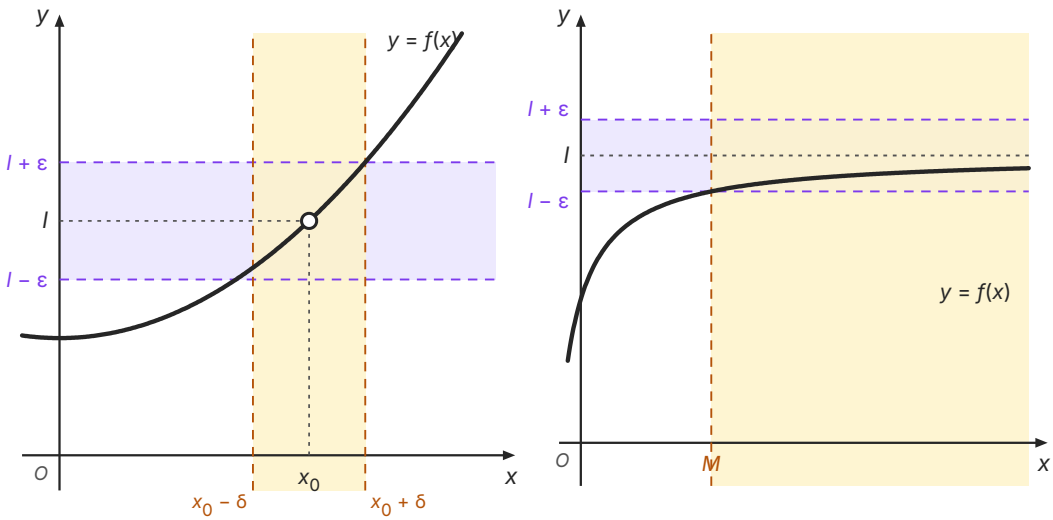
Consideriamo $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ con $x \neq 2$ e chiediamoci che cosa accade vicino a 2. Per $x = 1{,}9$ si ha $f(x) = 1{,}9025$; per $x = 1{,}99$, $f(x) = 1{,}990025$; per $x = 2{,}01$, $f(x) = 2{,}010025$. I valori si avvicinano a 2. Che cosa vuol dire, però, in modo che non dipenda dagli esempi scelti? Rovesciamo la domanda, come nel capitolo 2: qualcuno fissa una *tolleranza* $\varepsilon > 0$ e pretende che $f(x)$ disti da 2 meno di ε; noi dobbiamo rispondere indicando un intorno di 2 in cui la pretesa è soddisfatta.

Nella Figura 3.1 a) la tolleranza è $\varepsilon = 0{,}5$: la striscia orizzontale tra $l - \varepsilon = 1{,}5$ e $l + \varepsilon = 2{,}5$. La curva vi entra per $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ e ne esce per $x = \sqrt{6} \approx 2{,}449$. Se prendiamo $\delta = \sqrt{6} - 2 \approx 0{,}449$, il più piccolo dei due tratti, per ogni x con $|x - 2| < \delta$ il punto del grafico sta dentro la striscia. Con una tolleranza più piccola servirà un δ più piccolo; ma, comunque piccola sia ε, un δ adatto esiste. Questo è il contenuto della definizione.

Si dice che $f(x)$ **tende al limite** l per x che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni x del dominio con $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$. La condizione $0 < |x - x_0|$ esclude proprio $x = x_0$: il limite descrive i valori *vicini* a x_0, non il valore *in* x_0, che può anche non esistere.



a) $x \to x_0$: limite finito l — *b*) $x \to +\infty$: limite finito l

Figura 3.1 a) Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ per $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$, $x_0 = 2$, $l = 2$ (pallino vuoto: il valore in x_0 non conta): con $\varepsilon = 0{,}5$ basta $\delta = \sqrt{6} - 2 \approx 0{,}449$; la striscia verticale degli x con $|x - x_0| < \delta$ ha il grafico tutto dentro la striscia orizzontale. b) Il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ per $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, $l = 2$: con $\varepsilon = 0{,}25$ basta $M = 3$. Unità diverse sui due assi.

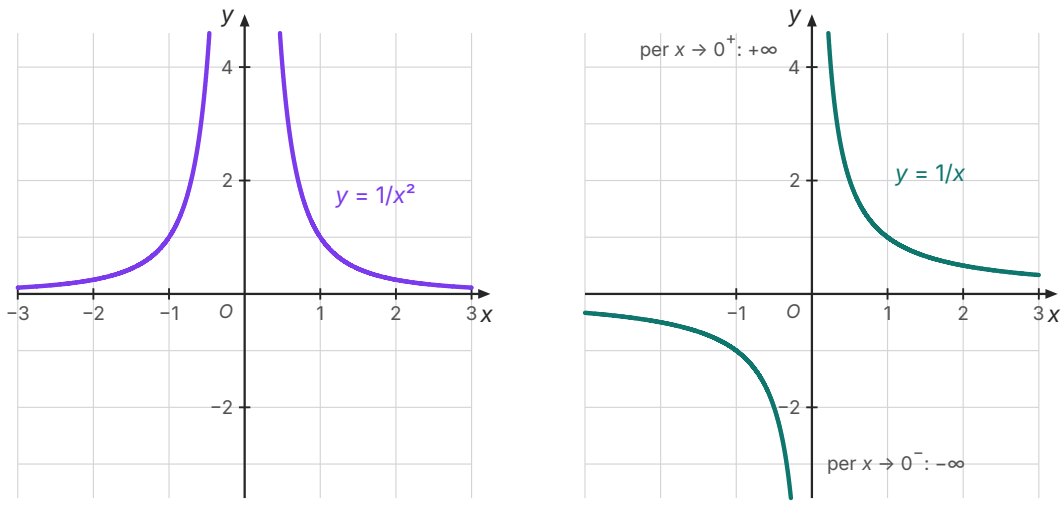
DA RICORDARE

Il limite non dipende da $f(x_0)$. Se modifichiamo il valore di una funzione nel solo punto x_0, o lo togliamo dal dominio, il limite per $x \to x_0$ non cambia. Le funzioni $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ coincidono per $x \neq 1$; la prima vale 2 in 1, la seconda non vi è definita, ma entrambe hanno limite 2 per $x \to 1$. Quando il limite coincide con il valore della funzione, la funzione si dice continua in quel punto: sarà l'argomento del capitolo 4.

3.2.2 Limite infinito per x che tende a un numero

Vicino a 0 la funzione $\frac{1}{x^2}$ non si avvicina a nessun numero: $\frac{1}{0{,}1^2} = 100$, $\frac{1}{0{,}01^2} = 10\,000$, $\frac{1}{0{,}001^2} = 1\,000\,000$. Supera qualunque soglia, purché x sia abbastanza vicino a 0 (Figura 3.2 a). Ora la tolleranza è sostituita da una soglia K: si scrive $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $K > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni x del dominio con $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $f(x) > K$. In modo analogo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ significa che $f(x) < -K$ in un opportuno intorno di x_0, escluso x_0. In questi casi la

retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale** del grafico, come la retta $x = 0$ per $y = \frac{1}{x^2}$; gli asintoti saranno ripresi nel capitolo 4.



a) da entrambi *i* lati: $+\infty$ — *b*) *a* sinistra $-\infty$, *a* destra $+\infty$

Figura 3.2 Due comportamenti vicino a $x = 0$. a) $y = \frac{1}{x^2}$ tende a $+\infty$ da entrambi i lati: il limite per $x \to 0$ è $+\infty$. b) $y = \frac{1}{x}$ tende a $-\infty$ da sinistra e a $+\infty$ da destra: il limite per $x \to 0$ non esiste, ma esistono i limiti destro e sinistro. Unità diverse sui due assi.

3.2.3 Limiti per x che tende a +∞ o a −∞

Quando x diventa grandissimo, la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$ si avvicina a 2, perché $\frac{1}{x+1}$ diventa piccolo. Ora non c'è un x_0 da cui stare vicini: «vicino a $+\infty$» vuol dire «oltre una soglia M». Si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che, per ogni $x > M$ del dominio, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Nella Figura 3.1 b) con $\varepsilon = 0{,}25$ si trova $\frac{1}{x+1} < 0{,}25 \Leftrightarrow x + 1 > 4 \Leftrightarrow x > 3$: basta $M = 3$. La retta $y = l$ è un **asintoto orizzontale**. Infine $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni $K > 0$ esiste M tale che $f(x) > K$ per ogni $x > M$: è il caso di x^2, di e^x, di $\ln x$. Per $x \to -\infty$ si sostituisce «$x > M$» con «$x < -M$».

Le definizioni sembrano quattro, ma l'idea è una sola, e si esprime con gli intorni: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (dove x_0 e l possono essere numeri oppure $\pm\infty$) se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni x del dominio che sta in U ed è diverso da x_0, $f(x)$ sta in V. Il gioco è sempre lo stesso: la richiesta riguarda i valori, la risposta riguarda la variabile.

IN SINTESI

Le definizioni di limite. Per ogni richiesta sui valori di f esiste un intorno della variabile (escluso il punto) in cui la richiesta è soddisfatta.

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$: per ogni $K > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K$.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che $x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: per ogni $K > 0$ esiste $M > 0$ tale che $x > M \Rightarrow f(x) > K$.

Con $-\infty$ si cambia il verso delle disuguaglianze: $f(x) < -K$, oppure $x < -M$.

3.2.4 Verificare un limite

Verificare un limite significa dimostrare, con la definizione, che un valore già noto (o intuito) è davvero il limite: si parte dalla disuguaglianza sui valori e la si risolve rispetto a x. Lo faremo solo per funzioni molto semplici; per tutte le altre i limiti si *calcolano* con i teoremi e le regole dei paragrafi seguenti.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Verifica che a) $\lim_{x\to 2} (3x - 1) = 5$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. In ciascun caso calcola l'intorno per un valore numerico della richiesta.

a) Fissato $\varepsilon > 0$, vogliamo $|3x - 1 - 5| < \varepsilon$, cioè $|3x - 6| < \varepsilon$, cioè $3|x - 2| < \varepsilon$, cioè $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Basta dunque $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Con $\varepsilon = 0{,}03$: $\delta = 0{,}01$; infatti per $x = 2{,}009$ si ha $3x - 1 = 5{,}027$, che dista da 5 meno di 0,03.

b) Fissato $\varepsilon > 0$, per $x > 0$ vogliamo $\frac{1}{x} < \varepsilon$, cioè $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Basta $M = \frac{1}{\varepsilon}$: con $\varepsilon = 0{,}001$, ogni $x > 1000$ va bene.

c) Fissato $K > 0$, vogliamo $\frac{1}{x^2} > K$, cioè $x^2 < \frac{1}{K}$, cioè $|x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$. Basta $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$: con $K = 1\,000\,000$, $\delta = 0{,}001$.

Osservazione. In tutti e tre i casi abbiamo trovato una formula che dà l'intorno per *ogni* richiesta, non solo per quella numerica: è questo che una verifica deve mostrare.

3.2.5 Limite destro e limite sinistro

Talvolta una funzione si comporta in modo diverso ai due lati di un punto. Consideriamo la funzione definita a tratti $f(x) = x + 1$ per $x < 1$, $f(x) = 5 - 2x$ per $x \geq 1$ (Figura 3.3). Avvicinandoci a 1 da

sinistra i valori tendono a 2 ($f(0{,}99) = 1{,}99$, $f(0{,}999) = 1{,}999$); da destra tendono a 3 ($f(1{,}01) = 2{,}98$, $f(1{,}001) = 2{,}998$). Si dice che il **limite sinistro** è 2 e il **limite destro** è 3, e si scrive

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

Nella definizione basta sostituire l'intorno di x_0 con un intorno sinistro o destro: per il limite destro si considerano solo gli x con $x_0 < x < x_0 + \delta$. Il limite (senza aggettivi) esiste se e solo se esistono il limite destro e il limite sinistro e sono uguali; qui sono diversi, e $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste. Anche $y = \dfrac{1}{x}$ (Figura 3.2 b) ha limiti laterali diversi in 0: $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, quindi il limite per $x \to 0$ non esiste.

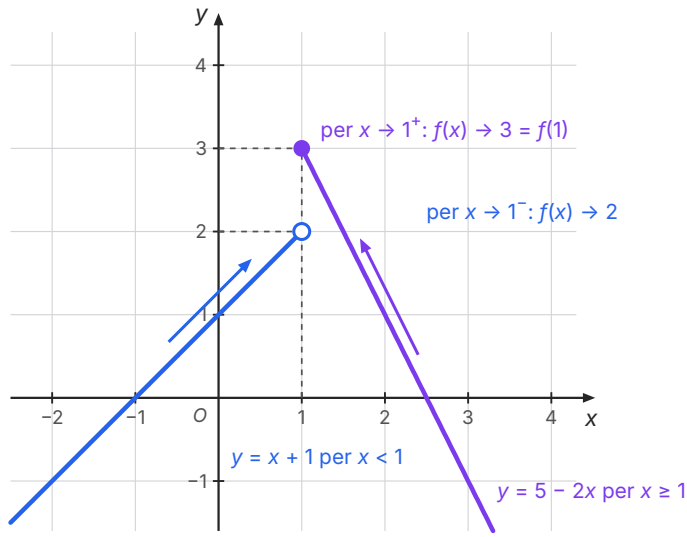


Figura 3.3 La funzione $f(x) = x + 1$ per $x < 1$, $f(x) = 5 - 2x$ per $x \geq 1$: il limite sinistro in 1 è 2 (pallino vuoto), il limite destro è 3 e coincide con $f(1)$ (pallino pieno). I due limiti sono diversi, quindi $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste. Stessa unità sui due assi.

3.2.6 Un limite che non esiste in nessun senso

Esistono funzioni che, vicino a un punto, non si avvicinano a niente, neppure da un lato solo. La funzione $y = \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$, quando x si avvicina a 0 ha l'argomento $\dfrac{1}{x}$ che cresce senza limite, e il seno di un numero che cresce oscilla tra -1 e 1 senza fermarsi. Le oscillazioni si fanno sempre più fitte (Figura 3.4): in ogni intorno destro di 0, per quanto piccolo, la funzione assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore -1. Nessun numero l può soddisfare la definizione, perché una striscia di ampiezza $2\varepsilon < 2$ non può contenere insieme 1 e -1.

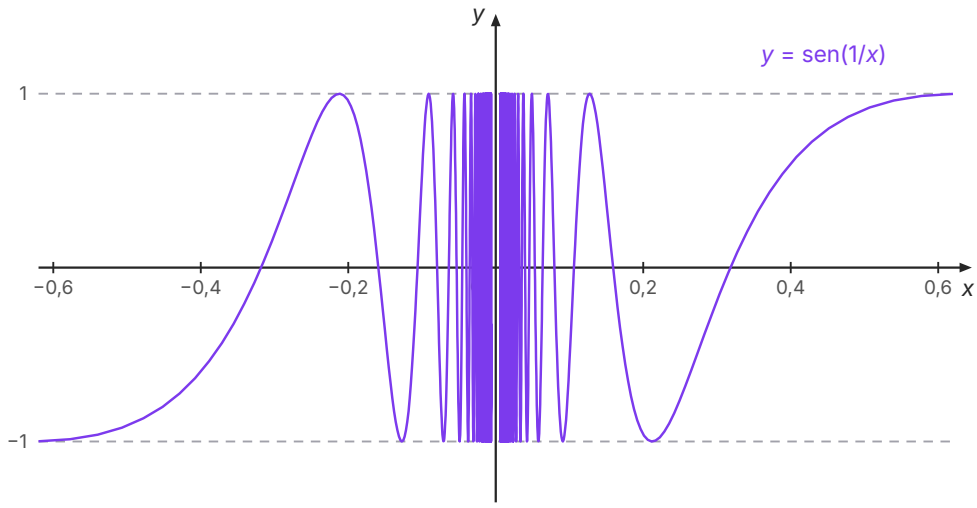


Figura 3.4 Il grafico di $y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$ per $-0{,}62 \le x \le 0{,}62$, $x \neq 0$ (calcolato fino a $|x| = \frac{1}{160}$: più vicino a 0 le oscillazioni sono troppo fitte per essere disegnate). Il limite per $x \to 0$ non esiste, né da destra né da sinistra. Unità diverse sui due assi.

3.3 Tre teoremi sui limiti

Dalla definizione seguono alcune proprietà generali, valide per ogni funzione. Le enunciamo per $x \to x_0$; valgono allo stesso modo per i limiti destro e sinistro e per $x \to \pm\infty$.

3.3.1 Unicità del limite

Una funzione non può avvicinarsi contemporaneamente a due numeri diversi: se lo facesse, prima o poi i suoi valori dovrebbero stare insieme in due strisce che non si toccano. È il **teorema di unicità del limite**. Senza di esso il simbolo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non avrebbe senso, perché non indicherebbe un solo oggetto.

3.3.2 Permanenza del segno

Se $f(x)$ tende a un numero positivo, per esempio 3, prima o poi i suoi valori stanno nella striscia tra 2,9 e 3,1, e quindi sono positivi. È il **teorema della permanenza del segno**: una funzione con limite diverso da 0 ha, vicino al punto, lo stesso segno del limite. Attenzione al viceversa: se $f(x) > 0$ vicino a x_0 e il limite esiste, si può solo concludere $l \ge 0$. Per esempio $x^2 > 0$ per $x \neq 0$, ma $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

3.3.3 Il teorema del confronto

Se una funzione è «stretta» tra due funzioni che tendono allo stesso limite, non ha scelta: tende anch'essa a quel limite. È il **teorema del confronto**, detto anche «dei carabinieri» come quello per le successioni del capitolo 2: due carabinieri che camminano verso la stessa porta vi portano anche chi sta in mezzo a loro. Per esempio, poiché $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, per $x > 0$ si ha $-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$; le due funzioni esterne tendono a 0 per $x \to +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$. Lo useremo nel paragrafo sui limiti notevoli per il limite più importante del capitolo.

IN SINTESI

Teorema (unicità). *Ipotesi:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$. *Tesi:* $l_1 = l_2$.

Teorema (permanenza del segno). *Ipotesi:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0$. *Tesi:* esiste un intorno di x_0 in cui, per $x \neq x_0$ del dominio, $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Teorema (confronto). *Ipotesi:* in un intorno di x_0, per $x \neq x_0$, si ha $g(x) \le f(x) \le h(x)$, e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$. *Tesi:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

APPROFONDIMENTO · PERCHÉ IL LIMITE È UNICO

Supponiamo, per assurdo, che $f(x)$ tenda sia a l_1 sia a l_2, con $l_1 < l_2$. Scegliamo $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$, metà della distanza tra i due numeri: le strisce $]l_1 - \varepsilon;\, l_1 + \varepsilon[$ e $]l_2 - \varepsilon;\, l_2 + \varepsilon[$ non hanno punti in comune, perché la prima finisce dove comincia la seconda, nel punto medio $\frac{l_1 + l_2}{2}$.

Per la definizione esiste δ_1 tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_1$ il valore $f(x)$ sta nella prima striscia, ed esiste δ_2 tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_2$ sta nella seconda. Sia δ il più piccolo tra δ_1 e δ_2. Poiché x_0 è punto di accumulazione del dominio, c'è almeno un x del dominio con $0 < |x - x_0| < \delta$: per quell'x il numero $f(x)$ dovrebbe stare in entrambe le strisce, che sono disgiunte. È impossibile; quindi $l_1 = l_2$. c.v.d.

Si noti dove interviene l'ipotesi sul punto di accumulazione: senza di essa potrebbe non esserci *nessun* x da usare, e la contraddizione non scatterebbe.

3.4 Calcolare i limiti

La definizione serve a capire che cosa sia un limite e a verificarlo nei casi semplici, ma per calcolarlo si procede diversamente: si parte da pochi limiti noti, quelli delle funzioni elementari, e li si combina con regole generali.

3.4.1 I limiti delle funzioni elementari

Se x_0 appartiene al dominio di una funzione elementare (polinomi, funzioni razionali, radici, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni circolari), il limite per $x \to x_0$ è semplicemente il valore $f(x_0)$: per esempio $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x) = -2$ e $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$. È una proprietà che chiameremo continuità e che nel capitolo 4 accetteremo come teorema. Restano da conoscere i comportamenti agli *estremi* del dominio, che si leggono sui grafici noti dagli anni precedenti e sono raccolti nella Tabella 3.1.

Tabella 3.1 Limiti delle funzioni elementari agli estremi del dominio.

Funzione	Limiti
$y = x^n$, n pari	$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
$y = x^n$, n dispari	$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$
$y = a^x$, $a > 1$	$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
$y = a^x$, $0 < a < 1$	$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
$y = \log_a x$, $a > 1$	$\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
$y = \log_a x$, $0 < a < 1$	$\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$
$y = \operatorname{tg} x$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ (e così in ogni $\frac{\pi}{2} + k\pi$)
$y = \operatorname{arctg} x$	$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$	per $x \to \pm\infty$ il limite non esiste (oscillano tra −1 e 1)

3.4.2 L'algebra dei limiti

Se $\lim f(x) = l$ e $\lim g(x) = m$ (per lo stesso $x \to x_0$, oppure $x \to \pm\infty$), con l e m numeri, allora il limite della somma è $l + m$, quello del prodotto è $l \cdot m$ e quello del quoziente è $\frac{l}{m}$, purché $m \neq 0$. Sono le regole dell'**algebra dei limiti**, che si accettano come teoremi. Valgono, con le dovute precauzioni, anche quando uno dei limiti è infinito: se $f(x) \to 3$ e $g(x) \to +\infty$, la somma supera qualunque soglia, e si scrive in breve «$3 + (+\infty) = +\infty$». La Tabella 3.2 raccoglie queste abbreviazioni. Non sono operazioni tra numeri, perché $+\infty$ non è un numero: sono promemoria di teoremi sui limiti.

Tabella 3.2 L'aritmetica di ±∞: l indica un numero reale; le regole valgono anche scambiando l'ordine degli addendi o dei fattori.

Operazione	Risultato	Esempio
$l + (+\infty)$, $(+\infty) + (+\infty)$	$+\infty$	$x^2 + 5 \to +\infty$ per $x \to +\infty$
$l + (-\infty)$, $(-\infty) + (-\infty)$	$-\infty$	$-x^3 - x \to -\infty$ per $x \to +\infty$
$l \cdot (\pm\infty)$ con $l \neq 0$; $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty)$	$\pm\infty$, con la regola dei segni	$-2x \to -\infty$ per $x \to +\infty$
$\frac{l}{\pm\infty}$	0	$\frac{3}{x} \to 0$ per $x \to -\infty$
$\frac{\pm\infty}{l}$ con $l \neq 0$	$\pm\infty$, con la regola dei segni	$\frac{x^2}{-4} \to -\infty$ per $x \to +\infty$
$\frac{l}{0}$ con $l \neq 0$	$\pm\infty$: il segno dipende dal segno di l e del denominatore	$\frac{1}{x^2} \to +\infty$ per $x \to 0$

L'ultima riga merita attenzione. Per $x \to 2$ il quoziente $\frac{x+3}{x-2}$ ha numeratore che tende a 5 e denominatore che tende a 0. Da destra il denominatore è positivo, da sinistra è negativo, quindi

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = -\infty$$

e la retta $x = 2$ è un asintoto verticale. Ci sono invece quattro casi in cui le regole non dicono nulla, e il risultato dipende dalle funzioni: sono le **forme indeterminate**

$$+\infty - \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad 0 \cdot \infty$$

Per $x \to +\infty$, per esempio, $x + 1$ e x tendono entrambe a $+\infty$, e la differenza vale sempre 1; x^2 e x tendono a $+\infty$, ma $x^2 - x \to +\infty$; x e x^2 tendono a $+\infty$, ma $x - x^2 \to -\infty$. Una forma indeterminata non è un limite che non esiste: è un limite che le regole non sanno ancora calcolare, e che si scioglie trasformando l'espressione.

ERRORE FREQUENTE

«$\frac{0}{0} = 1$», «$\infty - \infty = 0$», «$\frac{l}{0}$ è indeterminato». Sono tutte false. Le prime due sono forme indeterminate: $\frac{x^2}{x}$, $\frac{x}{x}$ e $\frac{x}{x^2}$ sono tutte del tipo $\frac{0}{0}$ per $x \to 0^+$, ma tendono a 0, a 1 e a $+\infty$. La terza non lo è: se il numeratore tende a $l \neq 0$ e il denominatore a 0, il quoziente tende a $+\infty$ o a $-\infty$, e resta solo da stabilire il segno, lato per lato.

3.4.3 Polinomi e funzioni razionali per x → ±∞

Un polinomio come $x^3 - 5x^2$, per $x \to +\infty$, dà la forma $+\infty - \infty$. Raccogliamo la potenza di grado massimo: $x^3 - 5x^2 = x^3\left(1 - \frac{5}{x}\right)$. Il primo fattore tende a $+\infty$, il secondo a 1, quindi il prodotto tende a $+\infty$. Lo stesso ragionamento vale per ogni polinomio: **per $x \to \pm\infty$ un polinomio ha lo stesso limite del suo termine di grado massimo**, perché tutti gli altri, divisi per quello, tendono a 0.

Per un quoziente di polinomi, la forma è $\frac{\infty}{\infty}$; si divide numeratore e denominatore per la potenza di grado massimo del denominatore (o di entrambi). Per esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x}{5x^3 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{4}{x^3}} = \frac{2}{5}$$

In *Matematica 4*, cap. 1, avevamo osservato dalle tabelle che una funzione razionale, per $|x|$ grande, «si comporta come» il rapporto dei termini di grado massimo: ora è un teorema, e il risultato dipende solo dal confronto dei gradi.

IN SINTESI

Funzioni razionali per $x \to \pm\infty$. Sia $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ con N di grado n e coefficiente direttivo a, D di grado d e coefficiente direttivo b.

- se $n > d$, il limite è $+\infty$ o $-\infty$: il segno è quello di $\frac{a}{b}\,x^{n-d}$;
- se $n = d$, il limite è $\frac{a}{b}$, e la retta $y = \frac{a}{b}$ è asintoto orizzontale;
- se $n < d$, il limite è 0, e l'asse x è asintoto orizzontale.

3.4.4 La forma 0/0 nelle funzioni razionali

Se numeratore e denominatore di una funzione razionale si annullano entrambi in x_0, il teorema di Ruffini (*Matematica 4*, cap. 1) dice che entrambi sono divisibili per $x - x_0$. Si scompongono, si semplifica il fattore comune (lecito, perché nel limite $x \neq x_0$) e si calcola il limite di ciò che resta. Così $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ per $x \neq 3$, e il limite per $x \to 3$ è 6. Quando compaiono radici quadrate si può invece *razionalizzare*, moltiplicando numeratore e denominatore per l'espressione «coniugata».

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + 5x^2)$; b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-3}$; c) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$; d) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

a) Forma $-\infty+\infty$. Il polinomio si comporta come x^3, che tende a $-\infty$: il limite è $-\infty$.

b) Forma $\frac{\infty}{\infty}$, grado 2 contro grado 1. Si comporta come $\frac{x^2}{x} = x$, quindi tende a $-\infty$.

c) Forma $\frac{0}{0}$. Con Ruffini, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ e $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Per $x \neq 1$ la funzione vale $\frac{x^2+x+1}{x+1}$, che per $x \to 1$ tende a $\frac{3}{2}$.

d) Forma $\frac{0}{0}$. Moltiplichiamo per $\sqrt{x+1}+1$: $\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$, che per $x \to 0$ tende a $\frac{1}{2}$. **Controllo:** per $x = 0{,}01$ la funzione vale circa 0,4988.

La forma $0 \cdot \infty$ si riconduce alle altre scrivendo il prodotto come quoziente: $x^2 \cdot \frac{1}{x}$, per $x \to +\infty$, è $\frac{x^2}{x}$ e tende a $+\infty$.

3.5 Limiti notevoli

Alcuni limiti in forma $\frac{0}{0}$ non si sciolgono con l'algebra, perché coinvolgono funzioni non polinomiali, e vanno studiati una volta per tutte. Si chiamano **limiti notevoli**; il primo è il più importante del capitolo. In tutto il paragrafo gli angoli sono misurati in **radianti**.

3.5.1 Il limite di sen x / x

La funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è definita in 0, dove dà la forma $\frac{0}{0}$. La Tabella 3.3 e il grafico della Figura 3.5 suggeriscono che il limite sia 1: per $x = 0{,}1$ si ha già 0,998334, per $x = 0{,}001$ si ha 0,9999998. La funzione è pari, quindi a sinistra di 0 si comporta come a destra. Dimostriamolo.

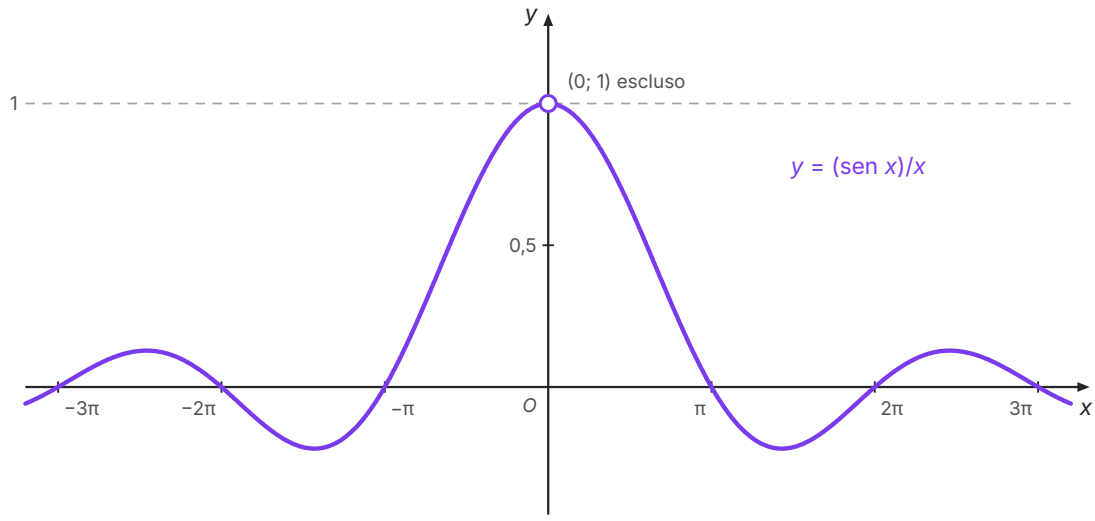


Figura 3.5 Il grafico di $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (x in radianti): la funzione non è definita in 0 (pallino vuoto), ma tende a 1. Lontano da 0 oscilla, con oscillazioni che si smorzano, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Unità diverse sui due assi.

Sia $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Sulla circonferenza goniometrica (Figura 3.6) l'arco AP misura x, il segmento PH misura sen x e il segmento AT, sulla tangente in A, misura tg x. Il triangolo OAP è contenuto nel settore circolare OAP, che è contenuto nel triangolo OAT; quindi le aree sono in ordine crescente. Il triangolo OAP ha base $OA = 1$ e altezza sen x; il settore di un cerchio di raggio 1 con angolo x ha area $\dfrac{x}{2}$; il triangolo OAT ha base 1 e altezza tg x. Dunque

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

Dividiamo per sen x, che è positivo: $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$; passando ai reciproci, le disuguaglianze si invertono: $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Per $x \to 0^+$ la funzione $\cos x$ tende a $\cos 0 = 1$ e la costante 1 tende a 1: per il teorema del confronto anche $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ tende a 1. Poiché $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, lo stesso vale per $x \to 0^-$. c.v.d.

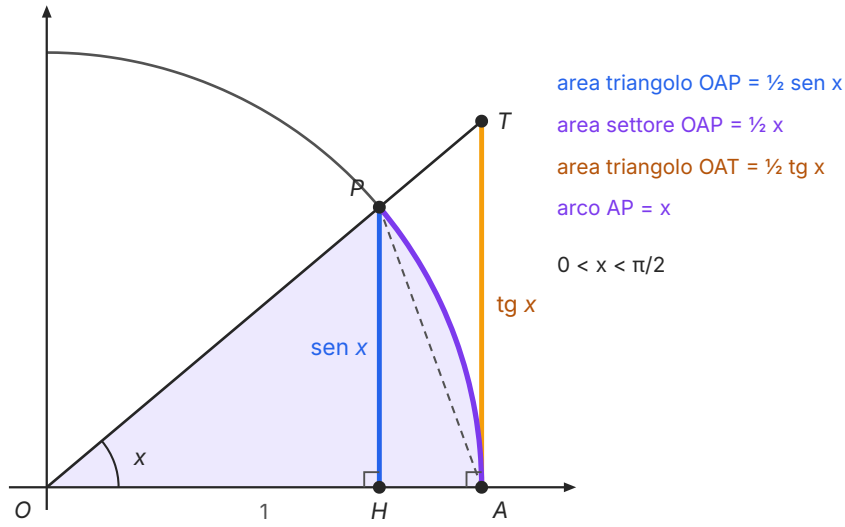


Figura 3.6 La dimostrazione di $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$: per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ il triangolo *OAP*, il settore *OAP* (in viola) e il triangolo *OAT* sono uno dentro l'altro, quindi $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$. Disegno con $x = 0{,}7$ rad: $\operatorname{sen} x \approx 0{,}644$, $\operatorname{tg} x \approx 0{,}842$.

Il risultato dice che, vicino a 0, $\operatorname{sen} x \approx x$: per angoli piccoli il seno è quasi uguale all'arco. Vale però solo in radianti. Se l'angolo è misurato in gradi, il settore ha area $\frac{\pi x}{360}$ e il limite diventa $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$: è uno dei motivi per cui l'analisi usa i radianti.

Dal primo limite ne seguono altri. Con la sostituzione $t = kx$, $\frac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = k \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{t} \to k$. Poiché $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$, anche $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$. Infine, moltiplicando per $1 + \cos x$ e usando $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3.5.2 I limiti legati al numero e

Nel capitolo 2 abbiamo visto che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ per $n \to +\infty$. Lo stesso vale per la variabile reale, e anche per $x \to -\infty$; lo accettiamo senza dimostrazione:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}718281828$$

Per $x = 10, 100, 1000$ si ottiene 2,593742, 2,704814, 2,716924 (valori minori di e); per $x = -10, -100, -1000$ si ottiene 2,867972, 2,731999, 2,719642 (valori maggiori). Da questo limite discendono altri due limiti notevoli in forma $\frac{0}{0}$, che controlliamo con la Tabella 3.3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Il secondo è plausibile così: $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\,(1+x)^{\frac{1}{x}}$, e ponendo $x = \frac{1}{t}$ la potenza diventa $(1+\frac{1}{t})^t$, che tende a e; il logaritmo tende allora a $\ln e = 1$. Anche questi limiti si leggono come approssimazioni: vicino a 0, $e^x \approx 1 + x$ e $\ln(1+x) \approx x$, così come $\operatorname{sen} x \approx x$ e $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Nel capitolo 5 vedremo che le rette $y = 1 + x$ e $y = x$ sono le tangenti in 0 ai grafici di e^x, di $\ln(1+x)$ e di $\operatorname{sen} x$; quella di $\cos x$ è invece una parabola, che approssima il coseno meglio della sua tangente $y = 1$.

Tabella 3.3 Valori numerici dei limiti notevoli in forma $\frac{0}{0}$ (x in radianti, arrotondati alla sesta cifra decimale; l'ultimo valore della prima colonna alla settima).

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$\frac{1-\cos x}{x^2}$	$\frac{e^x-1}{x}$	$\frac{\ln(1+x)}{x}$
0,5	0,958851	0,489670	1,297443	0,810930
0,1	0,998334	0,499583	1,051709	0,953102
0,01	0,999983	0,499996	1,005017	0,995033
0,001	0,9999998	0,500000	1,000500	0,999500
limite	1	$\frac{1}{2}$	1	1

3.5.3 La gerarchia degli infiniti

Per $x \to +\infty$ le funzioni $\ln x$, x^a (con $a > 0$) ed e^x tendono tutte a $+\infty$, ma con velocità molto diverse (Figura 3.7). Diremo che una funzione è un **infinito** per $x \to x_0$ se tende a $\pm\infty$, e un **infinitesimo** se tende a 0. I quozienti tra questi infiniti sono forme $\frac{\infty}{\infty}$, e i valori numerici mostrano che cosa accade: $\frac{\ln x}{x}$ vale circa 0,230 per $x = 10$ e 0,046 per $x = 100$; $\frac{x^2}{e^x}$ vale circa 0,0045 per $x = 10$, $8{,}2 \cdot 10^{-7}$ per $x = 20$ e $4{,}8 \cdot 10^{-19}$ per $x = 50$. Vale la **gerarchia degli infiniti**: per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=0 \qquad (a>0)$$

cioè il logaritmo è «più lento» di ogni potenza, e ogni potenza è «più lenta» dell'esponenziale. La gerarchia vale alla lunga, non subito: per $x = 10$ si ha $x^{10} = 10^{10}$, mentre $e^{10} \approx 22\,026$; ma l'esponenziale supera x^{10} da $x \approx 35{,}8$ in poi, e il loro quoziente tende a 0. Con la gerarchia si sciolgono, per esempio, $\lim_{x\to+\infty} (e^x - x^5) = \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{x^5}{e^x}\right) = +\infty$. Nel capitolo 7 servirà per tracciare i grafici di funzioni come $x\,e^{-x}$ o $x \ln x$.

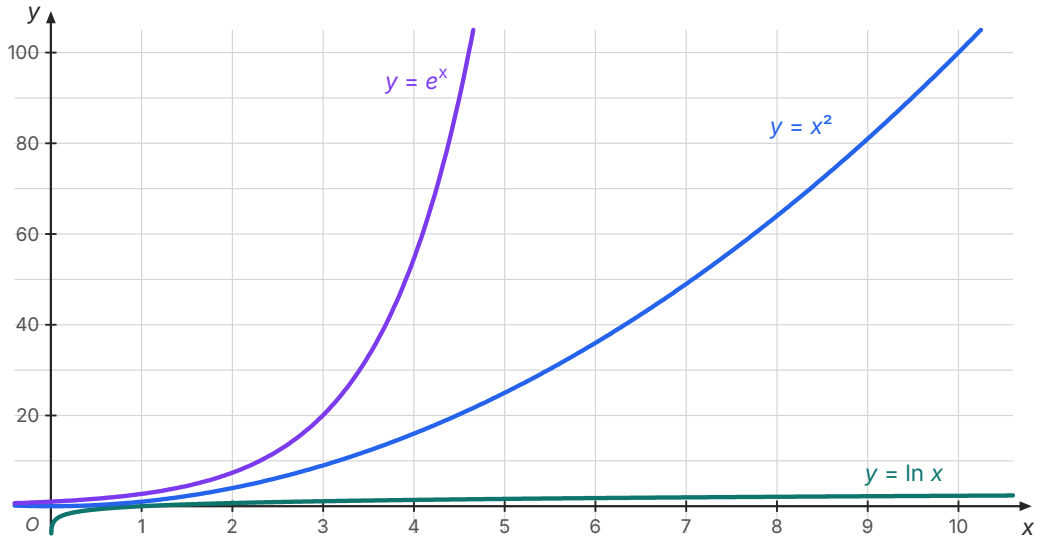


Figura 3.7 La gerarchia degli infiniti: per $x \to +\infty$ le tre funzioni tendono a $+\infty$, ma e^x cresce molto più in fretta di x^2, che cresce molto più in fretta di $\ln x$. Unità diverse sui due assi (una tacca su y vale 10).

IN SINTESI

Limiti notevoli (x in radianti).

- $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; $\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = k$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- gerarchia per $x \to +\infty$: $\lim \frac{\ln x}{x^a} = 0$ e $\lim \frac{x^a}{e^x} = 0$ per ogni $a > 0$

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(5x)}{x}$; b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$; d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$.

a) Con $t = 5x$: $\dfrac{\text{sen}(5x)}{x} = 5 \cdot \dfrac{\text{sen}(5x)}{5x} \to 5 \cdot 1 = 5$.

b) Con $t = 2x$: $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = 4 \cdot \dfrac{1-\cos t}{t^2} \to 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$.

c) Con $t = 3x$: $\dfrac{e^{3x}-1}{x} = 3 \cdot \dfrac{e^t-1}{t} \to 3$.

d) Forma $\dfrac{\infty}{\infty}$: per la gerarchia degli infiniti, con $a = 3$, il limite è 0.

Controllo numerico. Per $x = 0{,}001$: a) 4,99998; b) 1,9999993; c) 3,0045. Per $x = 50$: d) circa $2{,}4 \cdot 10^{-17}$.

COLLEGAMENTI · LA LENTE E GLI OGGETTI LONTANI

Per una lente sottile convergente di distanza focale f, la distanza q dell'immagine dalla lente e la distanza p dell'oggetto sono legate da $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f}$, cioè $q = \dfrac{pf}{p-f}$ per $p > f$. Con $f = 10$ cm: per $p = 100$ cm si ha $q \approx 11{,}1$ cm; per $p = 1000$ cm, $q \approx 10{,}1$ cm; e $\lim_{p\to+\infty} q = f$. Per questo una macchina fotografica «messa a fuoco all'infinito» ha il sensore nel piano focale. All'altro estremo, $\lim_{p\to f^+} q = +\infty$ (forma $\dfrac{l}{0}$ con $l = f^2 > 0$): un oggetto posto nel fuoco non forma immagine, perché i raggi escono paralleli. In fisica un limite all'infinito descrive spesso un *regime*, ciò che accade «quando si è aspettato abbastanza» o «quando si è abbastanza lontani».

APPROFONDIMENTO · BERKELEY E IL RIGORE DELL'OTTOCENTO

Newton e Leibniz (la *Nova methodus* di Leibniz è del 1684, i *Principia* di Newton del 1687) calcolavano con quantità «infinitamente piccole». Per la velocità di un corpo che percorre $s = t^2$ si prendeva un incremento h del tempo e si calcolava $\dfrac{(t+h)^2 - t^2}{h} = 2t + h$; poi si poneva $h = 0$ e si otteneva $2t$. Il metodo dava risultati corretti e potentissimi.

Nel 1734 il filosofo George Berkeley, vescovo anglicano e teorico dell'empirismo, pubblicò *The Analyst*, una critica serrata a questo modo di ragionare: l'incremento h deve essere diverso da 0 per poter dividere, e uguale a 0 per poter essere trascurato; non può essere le due cose insieme. Gli incrementi evanescenti, scrisse, sono «the ghosts of departed quantities», fantasmi di quantità scomparse. L'obiezione era logicamente giusta, anche se i risultati del calcolo lo erano altrettanto.

La risposta arrivò solo nell'Ottocento. Nel *Cours d'analyse* (1821) Cauchy pose il concetto di limite a fondamento dell'analisi, e Weierstrass ne diede la formulazione con ε e δ che abbiamo usato in questo capitolo. Ora h non viene mai «posto uguale a 0»: si dice che $2t + h$ tende a $2t$ per $h \to 0$, e la definizione di limite non richiede mai di calcolare la funzione in $h = 0$. È un esempio della «svolta» del pensiero matematico ottocentesco: il rigore nasce come risposta a un'obiezione filosofica.

SINTESI

- Un intorno di x_0 è un intervallo aperto che lo contiene; un intorno di $+\infty$ è una semiretta $]M; +\infty[$. Un limite per $x \to x_0$ ha senso se x_0 è punto di accumulazione del dominio, anche se non vi appartiene.
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Le altre definizioni (limite infinito, $x \to \pm\infty$) cambiano solo il tipo di intorno.
- Il limite non dipende dal valore $f(x_0)$, che può anche non esistere.
- Il limite esiste se e solo se esistono il limite destro e il limite sinistro e sono uguali; $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$ da nessun lato.
- Teoremi: unicità del limite, permanenza del segno (un limite $l \neq 0$ impone il suo segno vicino al punto), confronto (una funzione stretta tra due con lo stesso limite ha quel limite).
- Nei punti del dominio delle funzioni elementari il limite è il valore della funzione; agli estremi del dominio si leggono sui grafici noti.
- Algebra dei limiti: $l + (+\infty) = +\infty$, $l \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ ($l \neq 0$, regola dei segni), $\frac{l}{\pm\infty} = 0$, $\frac{l}{0} = \pm\infty$ ($l \neq 0$, segno lato per lato). Forme indeterminate: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$.
- Per $x \to \pm\infty$ un polinomio si comporta come il termine di grado massimo; una funzione razionale tende a $\pm\infty$, al rapporto dei coefficienti direttivi o a 0 secondo che il grado del numeratore sia maggiore, uguale o minore.
- La forma $\frac{0}{0}$ nelle funzioni razionali si scioglie scomponendo con Ruffini e semplificando; con le radici, razionalizzando.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (in radianti; dimostrato con $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ e il confronto); $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.
- Gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$: $\ln x$ è trascurabile rispetto a ogni x^a ($a > 0$), e ogni x^a rispetto a e^x.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La scrittura $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$ significa che:
   - **A.** $f(3) = 5$
   - **B.** $f(x) = 5$ per ogni x abbastanza vicino a 3
   - **C.** fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, per ogni $x \neq 3$ del dominio abbastanza vicino a 3 si ha $|f(x) - 5| < \varepsilon$
   - **D.** f è definita in 3 e vi vale circa 5

2. ● Quale delle seguenti è una forma indeterminata?
   - **A.** $+\infty + \infty$
   - **B.** $\frac{0}{0}$
   - **C.** $\frac{3}{0}$
   - **D.** $\frac{0}{\infty}$

3. ● $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ vale:
   - **A.** $-\infty$
   - **B.** $+\infty$
   - **C.** 0
   - **D.** non esiste

4. ● $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - x}{1 - 6x^2}$ vale:
   - **A.** 3
   - **B.** $\frac{1}{2}$
   - **C.** $-\infty$
   - **D.** $-\frac{1}{2}$

5. ● $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x}$, con x in radianti, vale:
   - **A.** 4
   - **B.** 1
   - **C.** $\frac{1}{4}$
   - **D.** 0

6. ●● Quale funzione tende a 0 per $x \to +\infty$?

   A. $\frac{x}{\ln x}$

   B. $\frac{x^5}{e^x}$

   C. $\frac{e^x}{x^2}$

   D. $x \ln x$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Se $f(2)$ non esiste, allora non esiste neppure $\lim_{x\to 2} f(x)$.

   b) Se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$, allora $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$.

   c) Per $x \to +\infty$, se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to +\infty$, allora $f(x) - g(x) \to 0$.

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ anche se x è misurato in gradi.

   e) $\lim_{x\to+\infty} \text{sen } x$ non esiste.

8. ● Completa.

   a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ se per ogni _____ > 0 esiste un numero $M > 0$ tale che, per ogni x del dominio con x _____ M, si ha $|f(x) - l|$ _____ ε.

   b) Un numero x_0 è punto di accumulazione del dominio D se ogni _____ di x_0 contiene punti di D _____ da x_0.

   c) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, la retta $x = x_0$ è un _____ .

Calcolare

9. ● Calcola i limiti, usando i limiti delle funzioni elementari.

   a) $\lim_{x\to 2} (x^3 - 4x + 1)$; b) $\lim_{x\to-\infty} 3^x$; c) $\lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$; d) $\lim_{x\to+\infty} (2 - e^{-x})$.

10. ●● Verifica con la definizione e rispondi alla richiesta numerica.

    a) $\lim_{x\to 3} (2x + 1) = 7$; trova δ per $\varepsilon = 0{,}1$.

    b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0$; trova M per $\varepsilon = 0{,}01$.

11. ● Calcola: a) $\lim_{x\to+\infty} (x^4 - 3x^3 + 1)$; b) $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - x^2 + 7)$; c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 5}$; d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}$; e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x^3}{x^2 + 4}$.

12. ●● Calcola, scomponendo con il teorema di Ruffini: a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$; b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$; c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$; d) $\lim_{x\to-3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x}$.

13. ●● Calcola il limite destro e il limite sinistro e stabilisci se il limite esiste: a) $\frac{2x}{x - 1}$ per $x \to 1$; b) $\frac{x^2 + x}{|x|}$ per $x \to 0$; c) $\frac{x}{(x + 1)^2}$ per $x \to -1$.

14. ●● Calcola razionalizzando: a) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$.

15. ●● Calcola con i limiti notevoli: a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(6x)}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \text{ sen } x}$; d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } \frac{x}{2}}$.

16. ●● Calcola: a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\text{sen } x}$.

17. ●● Calcola con la gerarchia degli infiniti: a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x}$; b) $\lim_{x\to+\infty} (e^x - x^3)$; c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; d) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - \ln x)$; e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x}$.

18. ●●● Calcola con il teorema del confronto: a) $\lim_{x\to 0} x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\text{sen } x}{x}$.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Spiega perché $\lim_{x\to 0^+} \text{sen } \frac{1}{x}$ non esiste. Suggerimento: trova numeri positivi, vicini a 0 quanto si vuole, in cui la funzione vale 1, e altri in cui vale −1; poi usa la definizione con $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

20. ●● Trova l'errore in ciascun ragionamento e correggilo.
a) «$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = +\infty - \infty = 0$.»
b) «$\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x}$ è la forma indeterminata $\frac{2}{0}$; scomponendo si trova il limite.»

21. ●● a) Sapendo che $\lim_{x\to 2} f(x) = -3$, spiega perché $f(x) < 0$ per ogni $x \neq 2$ del dominio abbastanza vicino a 2. b) Se $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$ esiste, si può concludere che il limite è positivo? Rispondi con un esempio.

22. ●●● Partendo da $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ e da $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, dimostra che a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$. Spiega che cosa dice b) sul grafico di $y = \cos x$ vicino a $x = 0$.

Problemi

23. ●● Un laboratorio artigiano (dati inventati) sostiene una spesa fissa di 2000 euro e un costo di 15 euro per ogni pezzo prodotto; il costo medio per pezzo, se si producono q pezzi, è $c(q) = \frac{2000}{q} + 15$. a) Calcola $c(100)$, $c(1000)$, $c(10\,000)$. b) Calcola $\lim_{q\to+\infty} c(q)$ e spiegane il significato. c) Da quanti pezzi in su il costo medio è minore di 15,50 euro?

24. ●● Una tazza di tè (dati simulati) si raffredda secondo la legge $T(t) = 20 + 70\,e^{-t/10}$, con T in gradi Celsius e t in minuti. a) Qual è la temperatura iniziale? b) Calcola $\lim_{t\to+\infty} T(t)$ e interpretalo. c) Dopo quanti minuti la temperatura scende sotto i 21 °C?

25. ●● Una lente convergente ha distanza focale $f = 20$ cm, quindi $q = \dfrac{20\,p}{p-20}$ per $p > 20$ (vedi il box *Collegamenti* sulla lente sottile). a) Calcola q per $p = 30, 60, 220$ cm. b) Calcola $\lim_{p\to20^+} q$ e $\lim_{p\to+\infty} q$. c) Per quali p l'immagine si forma a meno di 21 cm dalla lente?

26. ●●● Un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio 1 è formato da n triangoli isosceli con angolo al vertice $\dfrac{2\pi}{n}$, quindi ha area $A_n = \dfrac{n}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$. a) Calcola A_6, A_{12}, A_{96} (Archimede usò il poligono di 96 lati). b) Con la sostituzione $t = \dfrac{2\pi}{n}$ e il limite notevole del seno, calcola $\lim_{n\to+\infty} A_n$ e interpreta il risultato.

Verso l'esame

27. ●● Nello stile delle prove nazionali. Di una funzione f si conoscono i valori della tabella: x: 0,9 · 0,99 · 0,999 · 1,001 · 1,01 · 1,1; $f(x)$: 1,9 · 1,99 · 1,999 · 2,998 · 2,98 · 2,8. Quale conclusione è suggerita dai dati?

A. $\lim_{x\to1} f(x) = 2$
B. la retta $x = 1$ è un asintoto verticale del grafico
C. $f(1) = 2$
D. $\lim_{x\to1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = 3$, quindi $\lim_{x\to1} f(x)$ non esiste

28. ●● Nello stile delle prove nazionali. Dopo l'assunzione di un farmaco (dati simulati) la sua concentrazione nel sangue, in mg/L, è $C(t) = \dfrac{8t}{t^2+4}$, con t in ore. a) Tra $t = 1, 2, 5, 10$, in quale istante la concentrazione è più alta? b) Calcola $\lim_{t\to+\infty} C(t)$ e spiega che cosa significa per il paziente.

29. ●● Spunto per il colloquio. Nel 1734 George Berkeley rimproverò ai matematici del suo tempo di trattare gli incrementi «evanescenti» ora come quantità diverse da zero, ora come nulle, e li chiamò «the ghosts of departed quantities». Spiega l'obiezione su un esempio, mostra come la risolve la definizione di limite e collega la vicenda alla filosofia (l'empirismo, Zenone e l'infinito del capitolo 2) e alla storia della cultura ottocentesca.

30. ●●● Sfida. Calcola a) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$; b) $\lim_{x\to0} \dfrac{\text{sen}\,x\,(1-\cos x)}{x^3}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$ (suggerimento: poni $x = 2t$).

PER APPROFONDIRE

- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: gli infinitesimi di Newton e Leibniz, la critica di Berkeley e la rifondazione di Cauchy e Weierstrass.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sulle funzioni e i limiti, con il limite di $\frac{\text{sen } x}{x}$.
- [MAOE] Maor, *e: The Story of a Number*: il limite che definisce e e la storia delle sue approssimazioni.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli sul Settecento e sull'Ottocento.

Glossario del capitolo

Algebra dei limiti
Le regole che danno il limite di somme, prodotti e quozienti dai limiti degli addendi, dei fattori, del numeratore e del denominatore.

Gerarchia degli infiniti
Per $x \to +\infty$: $\frac{\ln x}{x^a} \to 0$ e $\frac{x^a}{e^x} \to 0$ per ogni $a > 0$.

Infinitesimo
Una funzione che tende a 0 per $x \to x_0$ (o per $x \to \pm\infty$).

Infinito
Una funzione che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ per $x \to x_0$ (o per $x \to \pm\infty$).

Intorno
Un intervallo aperto che contiene il punto x_0; l'intorno simmetrico di raggio δ è $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$.

Intorno destro, sinistro
Gli intervalli $[x_0; x_0 + \delta[$ e $]x_0 - \delta; x_0]$, usati per guardare un solo lato del punto.

Intorno di +∞
Una semiretta $]M; +\infty[$; un intorno di $-\infty$ è una semiretta $]-\infty; -M[$.

Limite
Il numero l ($\pm\infty$) tale che, per ogni intorno di l, esiste un intorno di x_0 in cui, per $x \neq x_0$ del dominio, $f(x)$ sta nell'intorno di l.

Limite destro, sinistro
Il limite calcolato considerando solo gli $x > x_0$ (destro, $x \to x_0^+$) o solo gli $x < x_0$ (sinistro, $x \to x_0^-$).

Limite notevole
Un limite fondamentale in forma indeterminata, calcolato una volta per tutte, come
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Punto di accumulazione
Un numero x_0 tale che ogni suo intorno contiene punti del dominio diversi da x_0; solo in un tale punto ha senso il limite per $x \to x_0$.

Teorema del confronto per le funzioni
Se $g(x) \le f(x) \le h(x)$ vicino a x_0 e g, h hanno lo stesso limite l, anche f tende a l.

Teorema della permanenza del segno
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$, in un intorno di x_0 (escluso x_0) $f(x)$ ha lo stesso segno di l.

Teorema di unicità del limite
Se il limite esiste, è unico.

Verifica di un limite
La dimostrazione, con la definizione, che un valore dato è il limite: si risolve la disuguaglianza sui valori rispetto a x.

Soluzioni

1. C. È la definizione; il valore $f(3)$ non conta.

2. B. $+\infty + \infty = +\infty$, $\frac{3}{0}$ dà $\pm\infty$, $\frac{0}{\infty}$ dà 0; solo $\frac{0}{0}$ è indeterminata.

3. A. Per $x < 0$ vicino a 0, $\frac{1}{x}$ è negativo e grande in valore assoluto.

4. D. Stesso grado: rapporto dei coefficienti direttivi $\frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$.

5. A. $\frac{\text{sen}(4x)}{x} = 4 \cdot \frac{\text{sen}(4x)}{4x} \to 4$.

6. B. Per la gerarchia degli infiniti $\frac{x^5}{e^x} \to 0$; le altre tendono a $+\infty$.

7. a) Falso: il limite non dipende da $f(2)$; per esempio $\frac{x^2-4}{x-2} \to 4$. b) Vero. c) Falso: $+\infty - \infty$ è indeterminata ($(x+1) - x \to 1$, $x^2 - x \to +\infty$). d) Falso: in gradi il limite è $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$. e) Vero: sen x oscilla tra -1 e 1.

8. a) ε; $>$; $<$. b) intorno; diversi. c) asintoto verticale.

9. a) 1 (per sostituzione: $8 - 8 + 1$). b) 0. c) $+\infty$ (base minore di 1). d) 2, perché $e^{-x} \to 0$.

10. a) $|2x + 1 - 7| = 2|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$: basta $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$; per $\varepsilon = 0{,}1$, $\delta = 0{,}05$. b) Per $x > 0$: $\frac{5}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{5}{\varepsilon}$; basta $M = \frac{5}{\varepsilon}$; per $\varepsilon = 0{,}01$, $M = 500$.

11. a) $+\infty$ (come x^4). b) $-\infty$ (come $2x^3$). c) $\frac{3}{2}$. d) 0 (grado minore al numeratore). e) $+\infty$ (come $\frac{-x^3}{x^2} = -x$, che tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$).

12. a) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \to 4$. b) $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$, quindi $\frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \to 0$. c) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x^2-1)$, quindi il limite è $2^2 - 1 = 3$. d) $\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} = \frac{x-2}{x} \to \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$.

13. a) Numeratore $\to 2$; $\lim_{x\to 1^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} = -\infty$: il limite non esiste. b) Per $x > 0$ vale $x + 1 \to 1$; per $x < 0$ vale $-(x+1) \to -1$: limiti laterali 1 e -1, il limite non esiste. c) Numeratore $\to -1$, denominatore $\to 0$ restando positivo: entrambi i limiti laterali sono $-\infty$, quindi $\lim_{x\to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$.

14. a) $\frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \to \frac{1}{6}$. b) $\frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \to \frac{1}{4}$. c) $\frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \to \frac{1}{2}$.

15. a) $\frac{\text{sen}(3x)}{3x} \cdot \frac{6x}{\text{sen}(6x)} \cdot \frac{3}{6} \to \frac{1}{2}$. b) $2 \cdot \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \cdot \frac{1}{\cos(2x)} \to 2$. c) $\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\text{sen } x} \to \frac{1}{2}$. d) $2 \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\text{sen } \frac{x}{2}} \to 2$.

16. a) $2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \to 2$. b) $3 \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x} \to 3$. c) $\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\text{sen } x} \to 1$.

17. a) 0. b) $e^x\left(1 - \frac{x^3}{e^x}\right) \to +\infty$. c) 0. d) $x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) \to +\infty$. e) $1 + \frac{\ln x}{x} \to 1$.

18. a) Per $x \neq 0$: $-x^2 \le x^2 \text{ sen } \frac{1}{x} \le x^2$ e $\pm x^2 \to 0$: il limite è 0. b) $\frac{x + \text{sen } x}{x} = 1 + \frac{\text{sen } x}{x}$; per $x > 0$,

$-\frac{1}{x} \le \frac{\text{sen } x}{x} \le \frac{1}{x}$, quindi $\frac{\text{sen } x}{x} \to 0$ e il limite è 1.

19. Per $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ si ha $\text{sen } \frac{1}{x_k} = 1$; per $y_k = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$ si ha -1; entrambi sono positivi e vicini a 0 quanto si vuole. Se il limite fosse l, con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ in un intorno destro di 0 tutti i valori dovrebbero stare in $]l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}[$, un intervallo di ampiezza 1 che non può contenere sia 1 sia -1 (distanti 2). Quindi nessun l va bene.

20. a) $+\infty - \infty$ non vale 0: è indeterminata. Si raccoglie $x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, che tende a $+\infty$. b) $\frac{2}{0}$ non è indeterminata: il numeratore tende a 2, quindi il quoziente tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a $-\infty$ per $x \to 0^-$; il limite non esiste. Non c'è nulla da scomporre.

21. a) Per il teorema della permanenza del segno: con $\varepsilon = 3$ esiste un intorno di 2 in cui, per $x \neq 2$, $-6 < f(x) < 0$. b) No: si può concludere solo $l \ge 0$. Esempio: $f(x) = x^2$ è positiva per $x \neq 0$ ma tende a 0.

22. a) $\frac{\text{tg } x}{x} = \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1 \cdot 1 = 1$. b) $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \to \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Traccia: le corde tra (0; 1) e i punti vicini del grafico hanno pendenza $\frac{\cos x - 1}{x} \to 0$: vicino a 0 il grafico è «piatto», con tangente orizzontale $y = 1$ (capitolo 5).

23. a) $c(100) = 35$, $c(1000) = 17$, $c(10\,000) = 15{,}20$ euro. b) 15 euro: producendo moltissimi pezzi la spesa fissa si ripartisce su un numero enorme di pezzi e il costo medio si avvicina al costo di ciascun pezzo, senza raggiungerlo. c) $\frac{2000}{q} < 0{,}5 \Leftrightarrow q > 4000$: da 4001 pezzi in su.

24. a) $T(0) = 90$ °C. b) 20 °C: è la temperatura dell'ambiente, a cui il tè si avvicina senza raggiungerla. c) $70\,e^{-t/10} < 1 \Leftrightarrow t > 10 \ln 70 \approx 42{,}5$: dopo circa 42,5 minuti.

25. a) $q = 60, 30, 22$ cm. b) $\lim_{p \to 20^+} q = +\infty$ (numeratore $\to 400$, denominatore $\to 0^+$); $\lim_{p \to +\infty} q = 20$ cm. c) $\frac{20p}{p - 20} < 21 \Leftrightarrow 20p < 21p - 420 \Leftrightarrow p > 420$ cm (per $p > 20$).

26. a) $A_6 = 3 \text{ sen } \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}598$; $A_{12} = 6 \text{ sen } \frac{\pi}{6} = 3$; $A_{96} = 48 \text{ sen } \frac{\pi}{48} \approx 3{,}1394$. b) $A_n = \pi \cdot \frac{\text{sen } t}{t}$ con $t = \frac{2\pi}{n} \to 0^+$: il limite è π, l'area del cerchio di raggio 1. I poligoni inscritti «esauriscono» il cerchio.

27. D. A sinistra di 1 i valori si avvicinano a 2, a destra a 3: limiti laterali diversi. Una tabella non dimostra un limite, ma lo suggerisce; nulla si sa di $f(1)$, e i valori restano limitati (niente asintoto).

28. a) $C(1) = 1{,}6$; $C(2) = 2$; $C(5) \approx 1{,}38$; $C(10) \approx 0{,}77$ mg/L: è più alta per $t = 2$. b) 0 (grado del numeratore minore di quello del denominatore): col passare del tempo il farmaco viene eliminato e la concentrazione tende ad annullarsi.

29. Traccia: 1) l'esempio $\frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = 2t + h$: per dividere serve $h \neq 0$, per ottenere $2t$ si pone $h = 0$; 2) l'obiezione è logica, non riguarda i risultati, che erano corretti; 3) con il limite (Cauchy, *Cours d'analyse*, 1821; Weierstrass) si dice che $2t + h \to 2t$ per $h \to 0$, senza mai porre $h = 0$; 4) Berkeley filosofo empirista: diffidava di enti non percepibili come gli infinitesimi; 5) legame con Zenone e con l'infinito potenziale (capitolo 2): il limite parla dell'infinito attraverso passi finiti; 6) l'Ottocento come secolo del rigore e della rifondazione dell'analisi.

30. a) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \to \frac{1}{2}$. b) $\frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. c) Con $x = 2t$: $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 \to e^2 \approx 7{,}389$.