CAPITOLO

2

Successioni e limite di una successione

Un passo dopo l'altro non si arriva mai all'infinito; ma si può sapere con certezza dove si sta andando. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire una successione con una formula o per ricorrenza e riconoscere successioni monotone e limitate.
2. Calcolare termini e somme di progressioni aritmetiche e geometriche.
3. Comprendere e usare la definizione di limite di una successione, distinguendo successioni convergenti, divergenti e irregolari.
4. Calcolare limiti di successioni con l'algebra dei limiti, il teorema del confronto e il teorema delle successioni monotone.
5. Sommare la serie geometrica e applicarla ai numeri periodici, al paradosso di Achille e all'area del segmento parabolico.
6. Collegare il concetto di limite alla distinzione tra infinito potenziale e infinito attuale.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Le successioni 2
2.2 Progressioni aritmetiche e geometriche 4
2.3 Il limite di una successione 6
2.4 Calcolare i limiti 9
2.5 La serie geometrica 13

Matematica 5 · Parte II · Successioni, limiti e continuità · versione 1.0
Capitolo 2: Successioni e limite di una successione · pagine 51–74 del volume completo · estratto per lo studio

Nel 1202 Leonardo Pisano, detto Fibonacci, propose nel *Liber abaci* un problema di conigli che si moltiplicano mese dopo mese; un banchiere accredita gli interessi anno dopo anno; un algoritmo antico migliora un'approssimazione di $\sqrt{2}$ passo dopo passo. In tutti questi casi non c'è una funzione che varia con continuità, ma una lista di numeri, un primo, un secondo, un terzo, che non finisce mai: una *successione*.

In questo capitolo studiamo le successioni e poniamo la domanda che apre il calcolo infinitesimale: che cosa succede ai termini di una successione quando si va «sempre più avanti»? La risposta è il concetto di *limite*, la prima idea veramente nuova di questo volume. Lo costruiremo prima sui numeri naturali, dove l'immagine di «avvicinarsi indefinitamente» si vede meglio, e lo useremo per dare un senso preciso a una somma di infiniti addendi. Ritroveremo così, con strumenti nuovi, problemi antichi: il paradosso di Achille e la tartaruga, il segmento parabolico di Archimede, il numero 0,999..., che molti studenti sospettano essere «un po' meno» di 1.

2.1 Le successioni

2.1.1 Una funzione definita sui numeri naturali

Una **successione** di numeri reali è una funzione che a ogni numero naturale n associa un numero reale a_n. I valori a_1, a_2, a_3, … sono i *termini* della successione e n è il loro *indice*, cioè il posto che occupano nella lista; l'espressione a_n si chiama **termine generale**. La successione si indica con (a_n) oppure scrivendo i primi termini. Di solito l'indice parte da 1, ma a volte conviene partire da 0, come faremo per le serie: quello che conta è dire sempre da dove si comincia.

Il modo più semplice di assegnare una successione è una formula esplicita, che permette di calcolare direttamente qualunque termine. Per esempio:

- $a_n = \dfrac{1}{n}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$;
- $a_n = \dfrac{n+1}{n}$: $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \ldots$;
- $a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$, che salta tra due valori;
- $a_n = 2n - 1$: $1, 3, 5, 7, \ldots$, i numeri dispari.

Ognuna di queste formule definisce una funzione $f(n) = a_n$ il cui dominio è $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{N}$ senza lo 0). Per questo il grafico di una successione non è una linea continua ma una fila di *punti isolati* $(n; a_n)$, uno per ogni indice: ne vedi tre esempi nella Figura 2.1. Tra un indice e il successivo non c'è nulla da disegnare.

2.1.2 Successioni definite per ricorrenza

Spesso un termine si conosce solo a partire da quello che lo precede. Una successione è **definita per ricorrenza** quando si assegnano il primo termine e una regola che dà ogni termine in funzione del precedente (o dei precedenti). In *Matematica 4*, cap. 7, hai incontrato la crescita discreta $a_{n+1} = q \cdot a_n$: un capitale che ogni anno si moltiplica per $q = 1{,}03$, una popolazione di batteri che raddoppia a ogni generazione. Un altro esempio celebre è la successione di Fibonacci, in cui ogni termine è la somma dei due precedenti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Un altro esempio lo conosci da *Matematica 2*, cap. 1: il metodo di Erone. Per approssimare $\sqrt{2}$ si parte da un valore qualunque, per esempio $a_1 = 1$, e si applica ripetutamente la regola

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

L'idea è semplice: se a_n è un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{2}$, allora $\frac{2}{a_n}$ lo è per difetto, e la loro media è migliore di entrambe. Si ottengono $a_2 = 1{,}5$, $a_3 = \frac{17}{12} \approx 1{,}416667$, $a_4 = \frac{577}{408} \approx 1{,}4142157$, $a_5 \approx 1{,}41421356237$: già il quinto termine coincide con $\sqrt{2}$ in undici cifre decimali. Il procedimento è descritto da Erone di Alessandria (vissuto probabilmente nel I secolo d.C.), e la stessa idea, generalizzata, si ritrova nei metodi numerici moderni. Il calcolo con la formula esplicita e quello per ricorrenza sono due modi diversi di «programmare» una successione: il primo salta direttamente al termine voluto, il secondo deve percorrere tutti quelli prima.

2.1.3 Successioni monotone e limitate

Come per le funzioni (*Matematica 4*, cap. 1), ci interessa sapere se i termini crescono o decrescono. Una successione è **crescente** se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n, *strettamente crescente* se $a_{n+1} > a_n$; è **decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n (strettamente se vale $<$). Una successione crescente o decrescente si dice **monotona**. La successione $\frac{1}{n}$ è strettamente decrescente, quella dei dispari è strettamente crescente, $(-1)^n$ non è monotona.

Una successione è **limitata superiormente** se esiste un numero K, detto **maggiorante**, tale che $a_n \leq K$ per ogni n; è *limitata inferiormente* se esiste h (un *minorante*) con $a_n \geq h$ per ogni n; è **limitata** se lo è da entrambe le parti, cioè se tutti i termini stanno in un intervallo $[h; K]$. $(-1)^n$ è limitata (tutti i termini sono in $[-1; 1]$) ma non è monotona; i numeri dispari formano una successione limitata inferiormente da 1 ma non superiormente: superano qualunque numero fissato.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Studia la monotonia della successione $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ $(n \geq 1)$ e mostra che è limitata.

Soluzione. I primi termini sono $\dfrac{3}{4}$, 1, $\dfrac{7}{6}$, $\dfrac{9}{7}$, …: sembrano crescere. Per dimostrarlo scriviamo il termine generale in un'altra forma, dividendo il numeratore per il denominatore: $2n+1 = 2(n+3) - 5$, quindi

$$a_n = 2 - \frac{5}{n+3}.$$

Al crescere di n il denominatore $n+3$ cresce, la frazione $\dfrac{5}{n+3}$ diminuisce e la si toglie da 2: dunque a_n cresce strettamente. Inoltre $\dfrac{5}{n+3}$ è sempre positiva, quindi $a_n < 2$ per ogni n; e poiché la successione cresce, il termine più piccolo è il primo, $a_1 = \dfrac{3}{4}$. Tutti i termini stanno nell'intervallo $[\dfrac{3}{4}; 2[$: la successione è limitata. Il numero 2 non è mai raggiunto, ma i termini gli si avvicinano quanto si vuole: è il primo esempio del concetto di limite che studieremo tra poco.

2.2 Progressioni aritmetiche e geometriche

Due famiglie di successioni hanno un posto speciale perché si sanno sommare in modo esatto. Le useremo soprattutto come esempi di limiti; la seconda ci darà, alla fine del capitolo, la serie geometrica.

2.2.1 Le progressioni aritmetiche

Una **progressione aritmetica** è una successione in cui ogni termine si ottiene dal precedente aggiungendo sempre lo stesso numero d, detto **ragione**: $a_{n+1} = a_n + d$. I numeri dispari sono una progressione aritmetica di ragione 2; le temperature 20, 17, 14, 11 °C lette ogni ora durante un raffreddamento regolare (dati inventati), una di ragione -3. Per arrivare da a_1 ad a_n si aggiunge d per $n-1$ volte:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Per la somma dei primi n termini usiamo l'idea attribuita al giovane Gauss (*Matematica 4*, cap. 9): scriviamo la somma $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ due volte, una in ordine crescente e una in ordine decrescente, e sommiamo in colonna. Ogni coppia $a_1 + a_n$, $a_2 + a_{n-1}$, … vale sempre $a_1 + a_n$, perché passando alla coppia successiva il primo addendo cresce di d e il secondo diminuisce di d. Le coppie sono n, quindi $2S_n = n(a_1 + a_n)$:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

In parole: la somma è il numero dei termini per la media del primo e dell'ultimo. Con $a_1 = 1$ e $d = 1$ si ritrova $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.2.2 Le progressioni geometriche

Una **progressione geometrica** è una successione di termini non nulli in cui ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicando per lo stesso numero $q \neq 0$, la *ragione*: $a_{n+1} = q \cdot a_n$. È la crescita discreta di *Matematica 4*, cap. 7, indicizzata ora da 1: per arrivare da a_1 ad a_n si moltiplica per q per $n - 1$ volte, e

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Per la somma $S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}$ c'è un trucco altrettanto elegante di quello di Gauss: moltiplicare per q e sottrarre. Si ha

$$S_n - q \cdot S_n = (a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}) - (a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n) = a_1 - a_1 q^n,$$

perché tutti i termini intermedi compaiono una volta con il segno + e una volta con il segno − e si cancellano. Raccogliendo, $S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$ e, se $q \neq 1$, si può dividere per $1 - q$. Se invece $q = 1$ i termini sono tutti uguali ad a_1 e $S_n = n \cdot a_1$.

IN SINTESI

Progressione aritmetica di ragione d: $a_n = a_1 + (n-1)d$; $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Progressione geometrica di ragione q: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ per $q \neq 1$ (per $q = 1$: $S_n = n \cdot a_1$).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Un teatro ha 20 file di poltrone: 16 nella prima e 2 in più in ogni fila rispetto alla precedente. Quante poltrone ci sono nell'ultima fila e quante in tutto? b) Calcola la somma dei primi 8 termini della progressione geometrica 2, 6, 18, 54, ...

Soluzione. a) È una progressione aritmetica con $a_1 = 16$ e $d = 2$. L'ultima fila ha $a_{20} = 16 + 19 \cdot 2 = 54$ poltrone; il totale è $S_{20} = \frac{20 \cdot (16 + 54)}{2} = 700$.

b) Qui $a_1 = 2$ e $q = 3$: $S_8 = 2 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 6561}{-2} = 6560$. Controllo: $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374 = 6560$.

La leggenda della scacchiera, raccontata in *Matematica 4*, cap. 7, chiedeva proprio una somma geometrica: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, e così via raddoppiando. Il totale è $1 + 2 + \ldots + 2^{63} = \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$ chicchi. Una progressione geometrica di ragione maggiore di 1, prima o poi, travolge qualunque progressione aritmetica.

2.3 Il limite di una successione

2.3.1 Che cosa vuol dire «avvicinarsi»

Torniamo alle successioni $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{n+1}{n}$ e $\dfrac{(-1)^n}{n}$. La Tabella 2.1 ne raccoglie alcuni termini.

Tabella 2.1 Alcuni termini di tre successioni.

n	1	2	3	4	10	11	100	1000
$\dfrac{1}{n}$	1	0,5	0,333…	0,25	0,1	0,0909…	0,01	0,001
$\dfrac{n+1}{n}$	2	1,5	1,333…	1,25	1,1	1,0909…	1,01	1,001
$\dfrac{(-1)^n}{n}$	−1	0,5	−0,333…	0,25	0,1	−0,0909…	0,01	0,001

I termini della prima si avvicinano a 0, quelli della seconda a 1, quelli della terza di nuovo a 0, ma saltando da una parte all'altra: un termine è positivo, il successivo negativo. Che cosa hanno in comune? Non il modo di avvicinarsi: le prime due scendono verso il valore restando sempre dalla stessa parte, la terza lo scavalca a ogni passo. E nemmeno il fatto di avvicinarsi «a ogni passo»: una successione che vale 0 nei posti pari e $\dfrac{1}{n}$ nei posti dispari tende anch'essa a 0, eppure dopo ogni termine nullo il successivo si allontana da 0. Né il fatto di raggiungere il valore: nessun termine di $\dfrac{1}{n}$ vale 0. Quello che conta è un'altra cosa: per quanto stretta sia la tolleranza che fissiamo intorno al valore 0 (o 1), *da un certo indice in poi* tutti i termini cadono dentro quella tolleranza.

La Figura 2.1 rende visibile questa idea. Intorno al valore l disegniamo una striscia orizzontale di semiampiezza $\varepsilon = 0{,}2$, cioè tra $l - 0{,}2$ e $l + 0{,}2$. Per ciascuna delle tre successioni i primi termini possono stare fuori, ma dal sesto in poi sono tutti dentro: infatti $|a_n - l| = \dfrac{1}{n}$ in tutti e tre i casi, e $\dfrac{1}{n} < 0{,}2$ per $n > 5$. Se restringiamo la striscia, l'indice da cui in poi i termini sono dentro si sposta più avanti, ma esiste sempre.

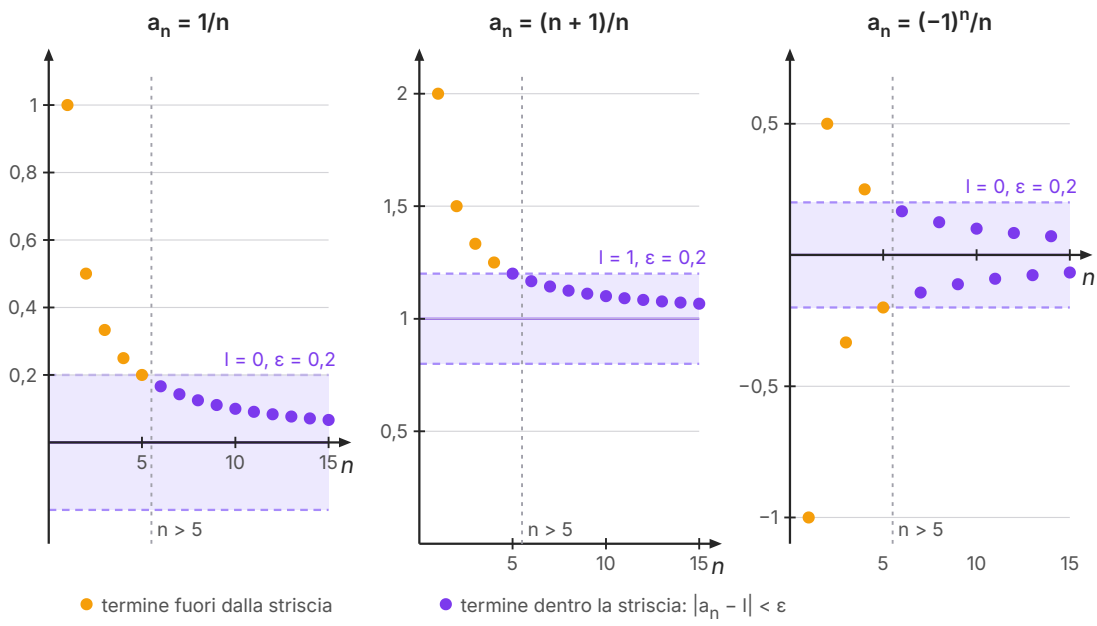

Figura 2.1 Tre successioni e la striscia di semiampiezza $\varepsilon = 0{,}2$ intorno al limite (punti calcolati per $n = 1, \ldots, 15$). In tutti e tre i casi, per $n > 5$ i termini cadono nella striscia: in viola i termini dentro, in arancio quelli fuori.

2.3.2 La definizione

Diciamo che una proprietà vale **definitivamente** se vale per tutti i termini da un certo indice in poi, cioè per ogni $n > N$, con N opportuno: i primi N termini, che sono in numero finito, non contano. Con questa parola la definizione si scrive in una riga.

IN SINTESI

Definizione. La successione (a_n) ha **limite** l (o *tende* a l, o *converge* a l), e si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, se **per ogni** $\varepsilon > 0$ **esiste** un indice N tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon \text{ per ogni } n > N.$$

In parole: fissata una qualunque tolleranza ε, i termini sono definitivamente nella striscia $]l - \varepsilon;\, l + \varepsilon[$.

Una successione che ha limite finito si dice **convergente**. Conviene leggere la definizione come un gioco a due. Uno sfidante sceglie la tolleranza ε, piccola quanto vuole; noi dobbiamo rispondere con un indice N oltre il quale la richiesta è soddisfatta. Il limite è l se riusciamo a rispondere a *ogni* sfida. In generale N dipende da ε: più la tolleranza è stretta, più avanti bisogna andare.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Verifica che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$ e trova da quale indice in poi i termini distano da 2 meno di $\varepsilon = 0{,}01$.

Soluzione. Nel primo esempio svolto del capitolo abbiamo scritto $a_n = 2 - \frac{5}{n+3}$, dunque $|a_n - 2| = \frac{5}{n+3}$. La condizione $|a_n - 2| < \varepsilon$ diventa

$$\frac{5}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n+3 > \frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3.$$

Per qualunque $\varepsilon > 0$ basta allora prendere come N un intero maggiore o uguale a $\frac{5}{\varepsilon} - 3$: la definizione è soddisfatta e il limite è 2. Per $\varepsilon = 0{,}01$ si ha $\frac{5}{0{,}01} - 3 = 497$: i termini con $n > 497$ distano da 2 meno di un centesimo. Controllo: $a_{497} = \frac{995}{500} = 1{,}99$ dista esattamente 0,01 (non meno), mentre $a_{498} = \frac{997}{501} \approx 1{,}99002$ dista meno.

2.3.3 Successioni divergenti e irregolari

Non tutte le successioni si avvicinano a un numero. I numeri dispari, o i quadrati n^2, superano definitivamente qualunque soglia: si dice che la successione **diverge** a $+\infty$ e si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se **per ogni** $M > 0$ esiste N tale che $a_n > M$ per ogni $n > N$. Per esempio $n^2 > 1\,000\,000$ per ogni $n > 1000$. In modo analogo $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se per ogni $M > 0$ si ha definitivamente $a_n < -M$, come per $a_n = -3n$.

Infine ci sono successioni che non convergono e non divergono: si dicono **irregolari** (o *indeterminate*). L'esempio tipico è $(-1)^n$, che alterna -1 e 1: per qualunque candidato l, una striscia di semiampiezza $\varepsilon = 0{,}5$ intorno a l non può contenere sia -1 sia 1, che distano 2, quindi infiniti termini restano sempre fuori. Ogni successione, dunque, ricade in uno solo di tre casi: *convergente*, *divergente* (a $+\infty$ o a $-\infty$), *irregolare*. Studiarne il *carattere* vuol dire stabilire in quale.

ERRORE FREQUENTE

«Limitata» non vuol dire «convergente». $(-1)^n$ è limitata, eppure non ha limite. E una successione crescente non è per forza divergente: $1 - \frac{1}{n}$ cresce sempre ma tende a 1. Per contro, una successione convergente è sempre limitata: definitivamente i termini sono nella striscia, e quelli che restano fuori sono in numero finito. Attenzione anche alle potenze di base negativa: $(-2)^n$ non diverge a $+\infty$, perché metà dei suoi termini sono negativi; è irregolare.

Può una successione avere due limiti diversi? No: il limite, se esiste, è **unico**. È plausibile: se $l \neq l'$, prendiamo ε minore della metà della loro distanza; le due strisce di semiampiezza ε intorno a l e a l' non si toccano, e i termini non possono stare definitivamente in entrambe. Questo *teorema di unicità del limite* è ciò che autorizza a parlare de «il» limite e a usare il segno =.

2.4 Calcolare i limiti

2.4.1 I limiti di base

Verificare un limite con la definizione è istruttivo ma lungo. Per calcolarli ci appoggiamo a pochi limiti di base, che si verificano una volta per tutte, e a regole per combinarli.

- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$: dato $\varepsilon > 0$, si ha $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ per ogni $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
- $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ per ogni $k > 0$, in particolare n, n^2, n^3 e $\sqrt{n}$: dato M, si ha $\sqrt{n} > M$ per $n > M^2$.
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ per ogni $k > 0$.

Più interessante è la successione geometrica q^n, il cui comportamento dipende dalla ragione. La Figura 2.2 ne mostra tre casi e la Tabella 2.2 li riassume tutti.

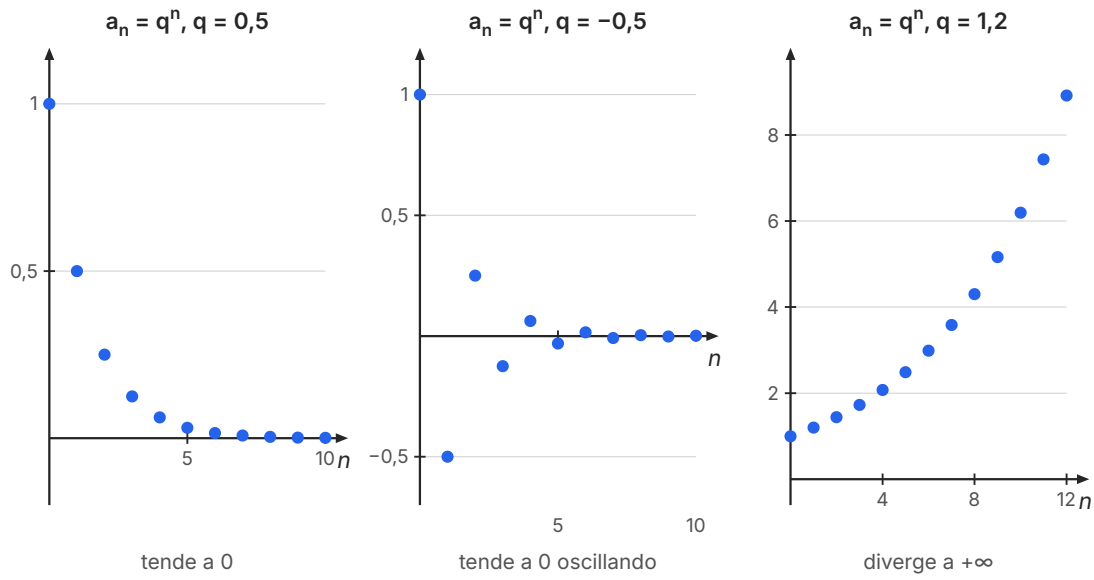

Figura 2.2 La successione $a_n = q^n$ per tre valori della ragione (punti calcolati). Per $q = 0{,}5$ i termini tendono a 0; per $q = -0{,}5$ tendono a 0 cambiando segno a ogni passo; per $q = 1{,}2$ crescono senza limite.

Tabella 2.2 Il carattere della successione q^n.

ragione	esempio	carattere
$q > 1$	2^n: 2, 4, 8, 16, …	diverge a $+\infty$
$q = 1$	1^n: 1, 1, 1, …	converge a 1
$-1 < q < 1$	$(\frac{1}{2})^n$, $(-\frac{1}{2})^n$	converge a 0
$q = -1$	$(-1)^n$: −1, 1, −1, …	irregolare
$q < -1$	$(-2)^n$: −2, 4, −8, 16, …	irregolare ($\lvert q^n\rvert \to +\infty$)

Il caso $|q| < 1$ si giustifica così: $|q^n| = |q|^n$, e $|q|^n < \varepsilon$ equivale a $n \cdot \ln|q| < \ln \varepsilon$, cioè, poiché $\ln|q| < 0$, a $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$; per $q \neq 0$ esiste dunque sempre un N. Per esempio $0{,}9^n < 0{,}001$ per $n > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}9} \approx 65{,}6$, cioè dal 66° termine in poi: anche una ragione vicina a 1 porta a 0, solo più lentamente.

2.4.2 L'algebra dei limiti

Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, con a e b finiti, allora $a_n + b_n \to a + b$, $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ e, se $b \neq 0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$: il limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente è la somma, il prodotto, il quoziente dei limiti. Le regole si estendono ai limiti infiniti con le convenzioni della Tabella 2.3, che si giustificano tutte con l'intuizione: un numero enorme più un numero fissato resta enorme, un numero fissato diviso per un numero enorme è quasi zero.

Tabella 2.3 Algebra dei limiti infiniti (l è un numero reale; con $-\infty$ al posto di $+\infty$ nella prima riga il risultato è $-\infty$).

operazione	risultato	esempio
$l + (+\infty)$, $(+\infty) + (+\infty)$	$+\infty$	$n^2 + 5 \to +\infty$
$l \cdot (\pm\infty)$ $(l \neq 0)$, $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty)$	$\pm\infty$, con la regola dei segni	$-3n \to -\infty$
$\dfrac{l}{\pm\infty}$	0	$\dfrac{7}{n^2} \to 0$
$\dfrac{\pm\infty}{l}$ $(l \neq 0)$	$\pm\infty$, con la regola dei segni	$\dfrac{n}{2} \to +\infty$

Restano fuori quattro casi, nei quali le regole non bastano: $+\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ e $\dfrac{0}{0}$. Si chiamano **forme indeterminate**, non perché il limite non esista, ma perché il risultato dipende dalle suc-

cessioni coinvolte. Per esempio $n^2 - n$, $n - n^2$ e $(n + 3) - n$ sono tutte della forma $+\infty - \infty$, ma tendono rispettivamente a $+\infty$, a $-\infty$ e a 3. Per «sciogliere» una forma indeterminata bisogna trasformare l'espressione. Con le successioni razionali in n il metodo è uno solo: **raccogliere la potenza di n di grado massimo**, al numeratore e al denominatore.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola a) $\lim_{n\to+\infty} (n^3 - 5n^2)$; b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{2n^2 + 5}$; c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1}$; d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+1}{4n^2+n}$.

Soluzione. a) Forma $+\infty - \infty$. Raccogliendo n^3: $n^3(1 - \frac{5}{n})$; la parentesi tende a 1, quindi il limite è $+\infty$.

b) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Raccogliamo n^2 sopra e sotto: $\dfrac{n^2(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(2 + \frac{5}{n^2})} = \dfrac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}} \to \dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{n(1 + \frac{1}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \to 0 \cdot 1 = 0$.

d) $\dfrac{n^3(1 + \frac{1}{n^3})}{n^2(4 + \frac{1}{n})} = n \cdot \dfrac{1 + \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{1}{n}} \to +\infty$, perché il primo fattore diverge e il secondo tende a $\frac{1}{4} > 0$.

In tutti i casi decide il confronto dei gradi: gradi uguali danno il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo, numeratore di grado minore dà 0, numeratore di grado maggiore dà $\pm\infty$.

2.4.3 Il teorema del confronto

Che cosa fa $\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$? Il numeratore oscilla senza regola tra -1 e 1 (l'argomento n è inteso in radianti), il denominatore cresce. Non possiamo usare l'algebra dei limiti, perché $\operatorname{sen} n$ non ha limite. Però sappiamo che $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$, quindi, dividendo per $n > 0$,

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Le due successioni esterne tendono entrambe a 0, e quella in mezzo è «stretta» tra loro: non può che tendere anch'essa a 0. È il *teorema del confronto*, detto familiarmente *dei due carabinieri*:

due carabinieri che accompagnano un prigioniero verso la stessa porta ci portano anche lui.

2.4.4 Successioni monotone e limitate

Una successione crescente e limitata superiormente non può né divergere, perché è limitata, né oscillare, perché sale sempre. È naturale pensare che si fermi su un numero «tetto», il più piccolo dei suoi maggioranti. Ma quel numero esiste davvero? Nei razionali no: la successione di Erone vista all'inizio del capitolo è fatta di razionali e si avvicina a $\sqrt{2}$, che razionale non è. Nei reali sì, ed è la stessa proprietà di completezza che in *Matematica 2*, cap. 1, garantiva un elemento separatore a ogni coppia di classi contigue. L'enunciato che segue è dunque un modo di dire che la retta reale «non ha buchi».

IN SINTESI

Teorema del confronto. *Ipotesi:* definitivamente $a_n \le b_n \le c_n$, e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$. *Tesi:* $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.

Teorema delle successioni monotone. *Ipotesi:* (a_n) è crescente e limitata superiormente (oppure decrescente e limitata inferiormente). *Tesi:* (a_n) converge.

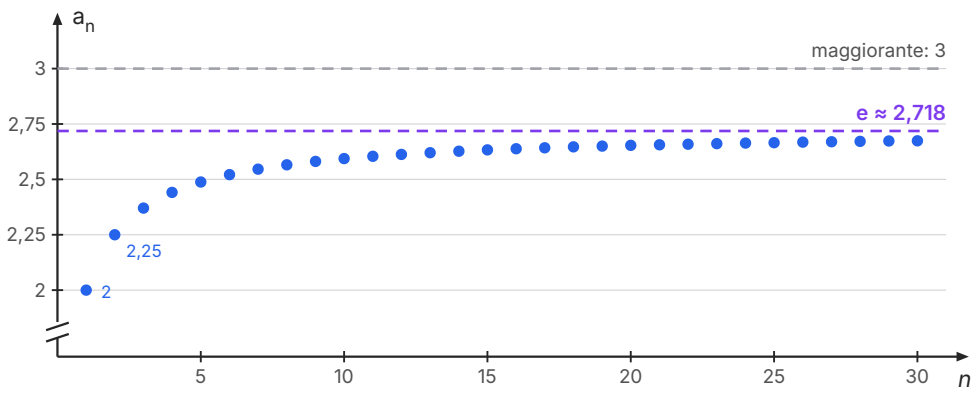

Figura 2.3 I primi trenta termini di $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (punti calcolati; l'asse verticale parte da 1,7). La successione è crescente e limitata dal maggiorante 3; il suo limite è $e \approx 2{,}718$.

L'esempio più importante di questo teorema lo conosci già. In *Matematica 4*, cap. 7, l'interesse composto con accrediti sempre più frequenti ci ha condotto alla successione $(1 + \frac{1}{n})^n$: 2; 2,25; 2,594 (per $n = 10$); 2,705 (per $n = 100$); 2,7169 (per $n = 1000$); 2,7182805 (per $n = 10^6$). Si dimostra che questa successione è strettamente crescente e che tutti i suoi termini sono minori di 3 (Figura 2.3). Per il teorema delle successioni monotone, allora, converge: il suo limite è il numero e,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281828.$$

Quello che in quel capitolo era un'osservazione su una tabella è ora un limite in senso preciso. Nota anche che, poiché la successione cresce strettamente, ogni suo termine è minore di e: nessun accredito, per quanto frequente, fa superare e euro a chi ha depositato 1 euro al 100 %.

2.5 La serie geometrica

2.5.1 Sommare infiniti numeri

Che senso può avere una somma con infiniti addendi, come $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$? Nessuno, se la intendiamo come un'addizione da eseguire: non finiremmo mai. Ma possiamo sommare i primi termini e osservare che cosa succede alle somme via via più lunghe. Questa è l'idea di serie: ricondurre l'infinito a una successione di operazioni finite, e poi a un limite.

Data una successione a_0, a_1, a_2, ..., le sue **somme parziali** (o *ridotte*) sono $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, ..., $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. La **serie** di termine generale a_n, che si scrive $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n$, è la successione delle somme parziali. Se S_n converge a un numero S, la serie si dice **convergente** e S si chiama la sua *somma*: si scrive $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. Se S_n diverge, anche la serie si dice divergente; se S_n è irregolare, la serie è irregolare.

Per $a_n = \frac{1}{2^n}$ le somme parziali sono 1, 1,5, 1,75, 1,875, ...: ogni volta si aggiunge metà di quello che manca per arrivare a 2, come si vede nella Figura 2.4. Dalla formula della progressione geometrica, con $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$ e $n + 1$ termini, $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$, e poiché $\frac{1}{2^n} \to 0$ la serie converge e ha somma 2.

La Figura 2.5 dà della stessa somma un'immagine geometrica, togliendo il primo termine: un quadrato di area 1 viene riempito da un rettangolo di area $\frac{1}{2}$, poi da uno di area $\frac{1}{4}$, e così via; i pezzi non escono mai dal quadrato e lasciano scoperta una parte piccola quanto si vuole, purché se ne prendano abbastanza: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$.

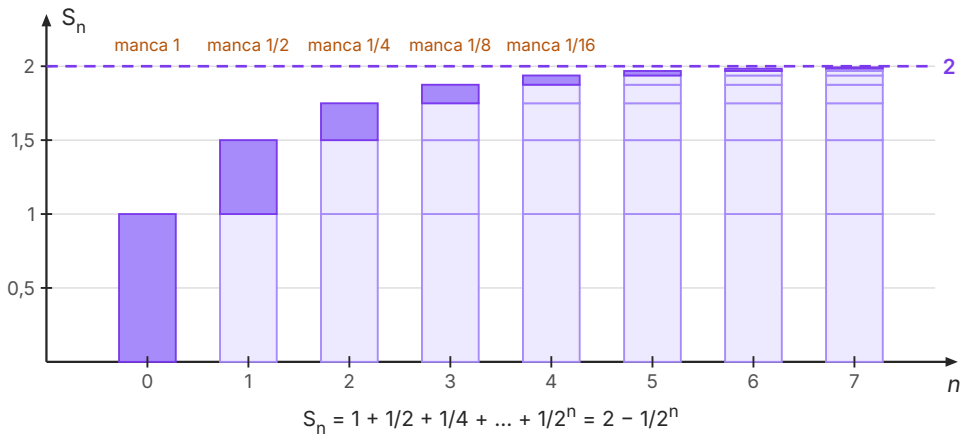

Figura 2.4 Le somme parziali di $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ come colonne di blocchi (ogni blocco è un termine, il più scuro è l'ultimo aggiunto). La differenza dalla retta tratteggiata $S = 2$ si dimezza a ogni passo.

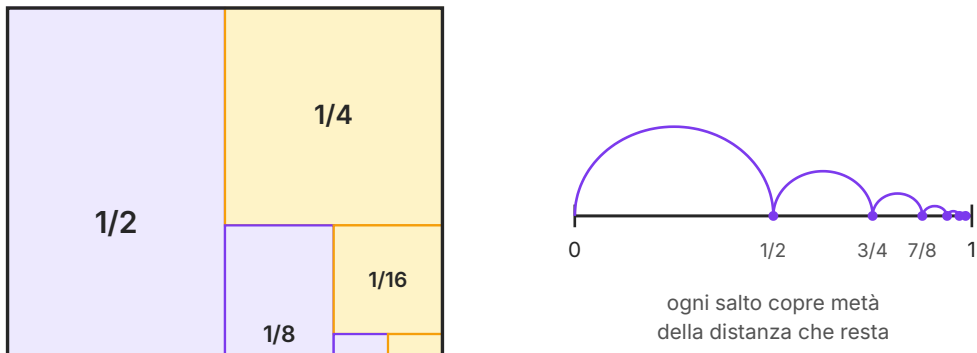

Figura 2.5 A sinistra, il quadrato di area 1 riempito da rettangoli di aree $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ A destra, la stessa somma sul segmento $[0; 1]$: ogni salto copre metà della distanza che resta, e le posizioni $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ tendono a 1.

2.5.2 La somma della serie geometrica

Lo stesso ragionamento vale per qualunque ragione. La **serie geometrica** di ragione q è $\Sigma_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$; le sue somme parziali sono $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ per $q \neq 1$. Il comportamento di S_n dipende soltanto da quello di q^{n+1}, che conosciamo dalla Tabella 2.2: se $|q| < 1$, $q^{n+1} \to 0$ e $S_n \to \dfrac{1}{1 - q}$; se $q \geq 1$ le somme crescono senza limite; se $q \leq -1$ oscillano.

IN SINTESI

Serie geometrica.

$$\Sigma_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1 - q} \text{ se } -1 < q < 1.$$

Se $q \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$; se $q \leq -1$ è irregolare. Più in generale, se il primo termine è a: $a + aq + aq^2 + \ldots = \dfrac{a}{1 - q}$ per $|q| < 1$.

ERRORE FREQUENTE

La formula vale solo per $|q| < 1$. Applicata a $q = 2$ darebbe $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = \dfrac{1}{1 - 2} = -1$: una somma di numeri positivi uguale a un numero negativo. L'assurdo mostra che una serie si può manipolare come una somma ordinaria solo dopo aver stabilito che converge. Lo stesso vale per $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ ($q = -1$): le somme parziali valgono alternativamente 1 e 0, la serie è irregolare e non ha senso attribuirle «somma $\dfrac{1}{2}$».

2.5.3 Numeri periodici: perché 0,999… = 1

Un numero decimale periodico è una serie geometrica travestita. Per esempio $0{,}999\ldots = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{100} + \dfrac{9}{1000} + \ldots$ è la serie di primo termine $\dfrac{9}{10}$ e ragione $\dfrac{1}{10}$, quindi

$$0{,}999\ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Non è un'approssimazione: 0,999… e 1 sono due scritture dello stesso numero reale. Il disagio che molti provano nasce dal pensare 0,999… come un processo che «non arriva mai»; ma la scrittura con infinite cifre indica il *limite* delle approssimazioni 0,9; 0,99; 0,999; …, e quel limite è 1. Del resto, se fossero numeri diversi, tra loro dovrebbe esserci almeno un altro numero, per

esempio la loro media; ma nessun decimale sta tra 0,999… e 1. Con lo stesso metodo si ritrova la regola per la frazione generatrice che hai imparato alle medie: per esempio

$$2{,}1\overline{36} = 2{,}1 + \frac{36}{1000} + \frac{36}{100\,000} + \ldots = \frac{21}{10} + \frac{\frac{36}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{21}{10} + \frac{36}{990} = \frac{47}{22}.$$

2.5.4 Achille e la tartaruga

In *Matematica 3*, cap. 4, hai incontrato il più celebre degli argomenti di Zenone di Elea, che conosciamo soprattutto attraverso la *Fisica* di Aristotele. Achille insegue una tartaruga che ha un vantaggio; quando arriva dove era la tartaruga, questa si è spostata un po' più avanti; e così all'infinito. (Zenone propose anche altri argomenti contro il moto, come quello della *dicotomia*, per cui prima di arrivare in fondo bisogna percorrere metà del cammino, e prima ancora metà della metà, e quello della *freccia*.) Riprendiamo gli stessi dati di fantasia: Achille corre a 10 m/s, la tartaruga a 1 m/s e parte con 100 m di vantaggio (Figura 2.6).

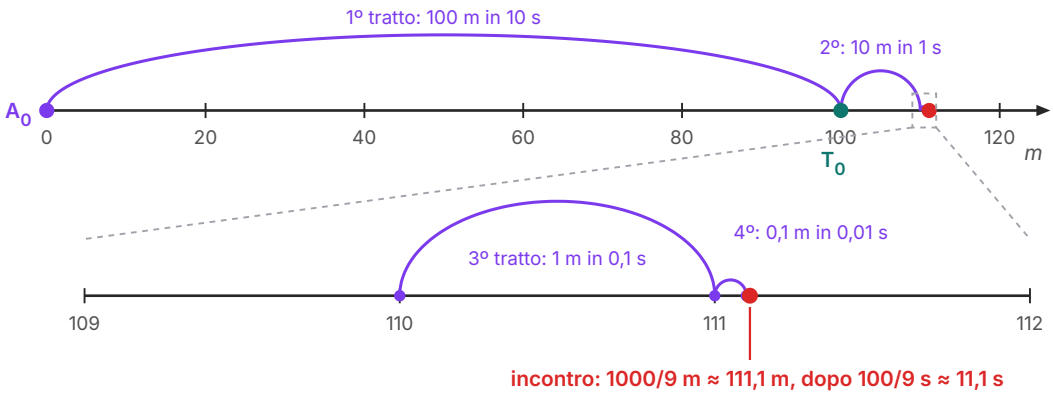

Figura 2.6 Achille e la tartaruga (dati di fantasia: 10 m/s, 1 m/s, 100 m di vantaggio). In alto, i primi tratti percorsi da Achille; in basso, l'ingrandimento della zona tra 109 m e 112 m. Le posizioni A_0 = 0, 100, 110, 111, 111,1, … tendono al punto di incontro $\frac{1000}{9}$ m ≈ 111,1 m.

Achille impiega 10 s a coprire i primi 100 m; intanto la tartaruga avanza di 10 m, che Achille copre in 1 s; poi la tartaruga avanza di 1 m, coperto in 0,1 s; e così via. I tempi dei tratti formano una progressione geometrica di primo termine 10 e ragione $\frac{1}{10}$, e il tempo totale è la somma della serie

$$10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} \approx 11{,}1 \text{ s}.$$

Allo stesso modo le posizioni di Achille sono le somme parziali 100, 110, 111, 111,1, … della serie $100 + 10 + 1 + \ldots$, che converge a $\frac{1000}{9} \approx 111{,}1$ m. Infiniti tratti, ciascuno di durata positiva, richiedono un tempo complessivo finito: dopo $\frac{100}{9}$ secondi Achille raggiunge la tartaruga, come conferma il calcolo diretto $10t = 100 + t$. In *Matematica 3* avevamo letto questi numeri come approssimazioni di un numero periodico; ora sappiamo che sono le ridotte di una serie convergente.

Questo «risolve» il paradosso? Risolve la parte matematica: mostra che una suddivisione in infiniti passi non obbliga un tempo infinito, e dà un significato preciso alla somma. Ma la domanda filosofica di Zenone, se un moto possa davvero *compiere* una successione infinita di tappe, riguarda la natura dello spazio, del tempo e dell'infinito, non solo il valore di una serie; filosofi e matematici continuano a discuterla. Quello che la matematica offre è uno strumento per parlare dell'infinito senza contraddirsi.

2.5.5 Il segmento parabolico di Archimede

In *Matematica 3*, cap. 6, abbiamo visto che il segmento parabolico vale i $\frac{4}{3}$ del triangolo di Archimede T. Il ragionamento era questo: si inscrive nel segmento il triangolo T, poi nei due segmenti residui due triangoli che insieme valgono $\frac{T}{4}$, poi quattro triangoli che valgono $\frac{T}{16}$, e così via. Avevamo concluso ponendo S uguale alla somma e osservando che $S - T = \frac{S}{4}$; e avevamo notato che il ragionamento dava per scontato che la somma avesse un valore. Ora quel dubbio è sciolto: la somma è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, che converge, e

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \ldots = \frac{T}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}T.$$

Archimede, che non usava somme infinite, otteneva lo stesso risultato con la doppia riduzione all'assurdo del metodo di esaustione. Le due strade arrivano allo stesso numero; la nostra, quella delle serie, sarà anche il punto di partenza del calcolo delle aree con l'integrale nel capitolo 9.

COLLEGAMENTI · FILOSOFIA E LETTERATURA

Aristotele, nella *Fisica*, distingue l'**infinito potenziale**, quello di un processo che si può sempre proseguire (aggiungere un termine, dimezzare ancora una distanza), dall'**infinito attuale**, una totalità infinita data tutta insieme; ammette il primo e respinge il secondo. La sua risposta a Zenone fa leva proprio su questa distinzione: un segmento è divisibile all'infinito in potenza, non è composto di infinite parti in atto.

Il limite è, in un certo senso, una rivincita dell'infinito potenziale. La definizione non chiede mai di «eseguire» infinite operazioni: parla di una tolleranza ε e di un indice N, cioè di oggetti finiti, e di una promessa che vale per ogni scelta. Sarà Georg Cantor, nell'Ottocento, a trattare gli insiemi infiniti come totalità compiute, come hai visto in *Matematica 3*, cap. 4. In letteratura, la tensione tra il limite e ciò che lo supera è il tema dell'*Infinito* di Leopardi, dove la siepe «da tanta parte / dell'ultimo orizzonte il guardo esclude» e proprio per questo apre il pensiero agli «interminati spazi».

APPROFONDIMENTO · LA SERIE ARMONICA

Perché una serie converga i suoi termini devono tendere a 0: se non fosse così, si aggiungerebbe definitivamente una quantità non trascurabile. Ma la condizione non basta. La **serie armonica** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ha termini che tendono a 0, eppure diverge a $+\infty$. Lo dimostrò nel XIV secolo Nicole Oresme raggruppando i termini:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Ogni gruppo tra parentesi contiene il doppio dei termini del precedente, ciascuno non minore dell'ultimo; quindi ogni gruppo vale almeno $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, e così via). Sommando abbastanza gruppi si supera qualunque numero. La crescita però è lentissima: per superare 5 servono 83 termini, per superare 10 ne servono 12 367. Un foglio di calcolo, che si fermi dopo qualche migliaio di termini, farebbe pensare a una serie convergente; solo il ragionamento rivela il contrario.

SINTESI

- Una successione è una funzione $n \mapsto a_n$ definita sui naturali; si assegna con una formula esplicita o per ricorrenza, e il suo grafico è fatto di punti isolati.
- Monotona: crescente o decrescente. Limitata: tutti i termini in un intervallo $[h; K]$. Le due proprietà sono indipendenti.
- Progressione aritmetica: $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$. Progressione geometrica: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ $(q \neq 1)$.
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n > N$; i termini stanno definitivamente in ogni striscia intorno a l.
- Ogni successione è convergente, divergente ($+\infty$ o $-\infty$) oppure irregolare; il limite, se esiste, è unico. Convergente implica limitata, non viceversa.
- $\frac{1}{n} \to 0$, $n^k \to +\infty$ $(k > 0)$; q^n tende a 0 per $|q| < 1$, a 1 per $q = 1$, a $+\infty$ per $q > 1$, è irregolare per $q \leq -1$.
- L'algebra dei limiti vale anche con $\pm\infty$, tranne nelle forme indeterminate $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$; nelle espressioni razionali in n si raccoglie la potenza di grado massimo.
- Teorema del confronto: una successione stretta tra due che tendono a l tende a l. Una successione monotona e limitata converge (completezza di $\mathbb{R}$); così $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$.
- Una serie è la successione delle somme parziali; converge se queste hanno limite finito, che si chiama somma.
- Serie geometrica: $\Sigma_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ per $|q| < 1$; diverge per $q \geq 1$, è irregolare per $q \leq -1$. Dà i numeri periodici ($0,\overline{9} = 1$), il tempo di Achille e i $\frac{4}{3}$ di Archimede.
- Termini che tendono a 0 non bastano: la serie armonica diverge (Oresme).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La successione $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$:

   A. converge a 1

   B. converge a 0

   C. è limitata ma non ha limite

   D. diverge a $+\infty$

2. ● Quale delle seguenti è una progressione geometrica?

   A. 3, 6, 9, 12, …

   B. 2, −6, 18, −54, …

   C. 1, 4, 9, 16, …

   D. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

3. ● $\lim_{n\to+\infty} 0{,}9^n$ vale:

   A. 1

   B. 0,9

   C. $+\infty$

   D. 0

4. ● La scrittura $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$ significa che:

   A. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $|a_n - 3| < \varepsilon$ per ogni $n > N$

   B. $a_n < 3$ per ogni n

   C. esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|a_n - 3| < \varepsilon$ per ogni n

   D. ogni termine è più vicino a 3 del precedente

5. ●● La somma della serie $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ è:

   A. 2

   B. $\frac{2}{3}$

   C. $\frac{1}{2}$

   D. non esiste, perché la serie è irregolare

6. ●● Quale delle seguenti **non** è una forma indeterminata?

   A. $+\infty - \infty$

   B. $\frac{\infty}{\infty}$

   C. $(+\infty) \cdot (+\infty)$

   D. $0 \cdot \infty$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Ogni successione limitata è convergente.

   b) Ogni successione crescente diverge a $+\infty$.

   c) Se $a_n \to 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ converge.

   d) La successione $(-1)^n$ è irregolare.

   e) $0{,}999\ldots < 1$.

8. ● Completa le definizioni.
   a) Una successione è limitata superiormente se esiste un numero K tale che _____ per ogni n.
   b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste N tale che _____ per ogni $n > N$.
   c) Una serie si dice convergente se la successione delle sue _____ ha limite finito.
   d) La serie geometrica di ragione q converge se e solo se _____ .

Calcolare

9. ● Scrivi i primi cinque termini e stabilisci se la successione è monotona e se è limitata.
   a) $a_n = 3n - 2$; b) $a_n = 2 \cdot (-1)^n$; c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

10. ● In una progressione aritmetica $a_1 = 7$ e $d = -3$. Calcola a_{20} e la somma S_{20} dei primi venti termini.

11. ●● In una progressione aritmetica $a_3 = 11$ e $a_{10} = 32$. Trova la ragione, il primo termine, a_{25} e la somma dei primi 25 termini.

12. ● In una progressione geometrica $a_1 = 5$ e $q = 2$. Calcola a_8 e la somma dei primi otto termini.

13. ●● Calcola la somma $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{10}$.

14. ●● La successione $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$ tende a 0. Da quale indice in poi i suoi termini sono minori di 10^{-4}?

15. ●● Calcola i limiti.
   a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1}$; b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n + 5}{n^2 - 2}$; c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - 2n}{5n^2 + n}$; d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(1 - 2n)^3}{n^3 + 4}$.

16. ●● Calcola i limiti.
   a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{3^n}$; c) $\lim_{n\to+\infty} (n^2 - 10n)$; d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5 \cdot 2^n - 1}{2^n}$; e) $\lim_{n\to+\infty} (-1{,}5)^n$.

17. ●● Usa il teorema del confronto per calcolare a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$; b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n + \operatorname{sen} n}{n}$.

18. ● Stabilisci se la serie converge e, in caso affermativo, calcolane la somma.
   a) $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; b) $4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots$; c) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{25} + \dfrac{2}{125} + \ldots$; d) $1 + 1{,}1 + 1{,}21 + 1{,}331 + \ldots$

19. ●● Trasforma in frazione, usando la serie geometrica: a) $0{,}\overline{7}$; b) $1{,}\overline{25}$; c) $0{,}4\overline{3}$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra per induzione che, per $q \neq 1$ e per ogni $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

21. ●● Verifica con la definizione che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3n - 1}{n + 2} = 3$. Da quale indice in poi i termini distano da 3 meno di 0,001?

22. ●● *Trova l'errore.* Uno studente scrive: «Sia $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Allora $S = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S$, quindi $S = \frac{1}{2}$». Dov'è l'errore? Perché invece in *Matematica 3* il ragionamento $S - 1 = \frac{S}{4}$ per il segmento parabolico porta al risultato giusto?

23. ●● Spiega perché a) una successione convergente è sempre limitata; b) una successione limitata può convergere senza essere monotona: fai un esempio.

Problemi

24. ●● Una pallina cade da un'altezza di 2 m e, a ogni rimbalzo, risale a $\frac{3}{4}$ dell'altezza da cui è caduta (modello ideale).
    a) A che altezza arriva dopo il quinto rimbalzo?
    b) Qual è la distanza totale percorsa, se i rimbalzi proseguono indefinitamente?
    c) Dopo quanti rimbalzi la pallina risale per la prima volta a meno di 10 cm?

25. ●● Un paziente assume ogni giorno, alla stessa ora, una compressa con 100 mg di un farmaco; nelle 24 ore successive l'organismo ne elimina metà della quantità presente (dati inventati).
    a) Mostra che la quantità presente subito dopo la n-esima dose è
    $a_n = 100\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 200\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ mg.
    b) Quanto farmaco è presente subito dopo la quinta dose?
    c) Che cosa succede a lungo andare?

26. ●● Un laboratorio artigiano produce 1200 pezzi nel primo mese di attività e aumenta la produzione di 150 pezzi ogni mese (dati inventati).
    a) Quanti pezzi produce nel dodicesimo mese?
    b) Quanti nel primo anno?
    c) In quale mese supera per la prima volta i 2000 pezzi?

27. ●● All'inizio di ogni anno si versano 1000 euro su un conto che rende il 2 % annuo composto (dati inventati). Quanto vale il conto alla fine del decimo anno?

Con il computer

28. ●● In un foglio di calcolo scrivi nella colonna A i numeri n da 1 a 1000, nella colonna B i valori di $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e nella colonna C le somme parziali della serie armonica, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ (ogni cella è la precedente più $\frac{1}{n}$).
    a) Da quale n in poi il valore della colonna B differisce da $e \approx 2{,}718282$ meno di 0,01?
    b) Quanto vale la somma della colonna C per $n = 100$ e per $n = 1000$?
    c) Guardando solo i numeri, si potrebbe credere che la serie armonica converga? Che cosa mostra invece il ragionamento di Oresme?

Verso l'esame

29. ●● *Nello stile delle prove nazionali.* Il valore di un'automobile (dati inventati) diminuisce del 15 % ogni anno rispetto al valore dell'anno precedente. Dopo quanti anni il valore scende per la prima volta sotto la metà di quello iniziale?

    A. 3 anni
    B. 4 anni
    C. 7 anni
    D. 5 anni

30. ●● *Nello stile delle prove nazionali.* Si disegna un quadrato di lato 4 cm; unendo i punti medi dei suoi lati si ottiene un secondo quadrato, da questo un terzo, e così via all'infinito.
    a) Di quanto si riduce l'area passando da un quadrato al successivo?
    b) Qual è la somma delle aree di tutti i quadrati?
    c) Qual è la somma dei perimetri?

31. ●● *Spunto per il colloquio.* Aristotele, discutendo gli argomenti di Zenone nella *Fisica*, sostiene in sostanza che un segmento è divisibile all'infinito solo «in potenza»: la divisione si può sempre proseguire, ma il segmento non è fatto di infinite parti già date. Spiega come la serie geometrica descrive la corsa di Achille e collega la discussione alla filosofia (infinito potenziale e attuale, Cantor), alla fisica (moto uniforme) e, se vuoi, alla letteratura.

32. ●●● *Sfida.* Si parte da un triangolo equilatero di area A e perimetro p. A ogni passo si divide ogni lato in tre parti uguali e sulla parte centrale si costruisce, verso l'esterno, un triangolo equilatero, cancellando la base: dopo infiniti passi si ottiene il «fiocco di neve» di Koch.
    a) Mostra che al passo k ($k \geq 1$) si aggiungono $3 \cdot 4^{k-1}$ triangoli, ciascuno di area $\frac{A}{9^k}$.
    b) Calcola l'area del fiocco.
    c) Mostra che il perimetro dopo k passi è $p \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$ e che tende a $+\infty$.

PER APPROFONDIRE

- [MAOE] Maor, *e: The Story of a Number*: l'interesse composto, il limite di $(1 + 1/n)^n$ e le serie che portano a e.
- [BOYC] Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*: Zenone, il metodo di esaustione, le serie nel Medioevo (Oresme) e nel Seicento.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sulle successioni, sul limite e sulla serie geometrica.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli sulla matematica greca e su quella medievale.

Glossario del capitolo

Definitivamente
Detto di una proprietà che vale per tutti i termini da un certo indice in poi.

Forma indeterminata
Caso in cui l'algebra dei limiti non decide il risultato: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$.

Infinito potenziale, attuale
Distinzione di Aristotele tra l'infinito di un processo che si può sempre proseguire e un infinito dato come totalità compiuta.

Limite di una successione
Il numero l tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha definitivamente $|a_n - l| < \varepsilon$; si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

Progressione aritmetica
Successione in cui ogni termine è il precedente più una costante d, la ragione: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Progressione geometrica
Successione in cui ogni termine è il precedente per una costante $q \neq 0$, la ragione: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Serie
La successione delle somme parziali $S_n = a_0 + \ldots + a_n$ di una successione; si scrive $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Serie armonica
La serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$: i termini tendono a 0 ma la serie diverge.

Serie geometrica
La serie $\Sigma_{n=0}^{+\infty} q^n$; converge a $\frac{1}{1-q}$ se e solo se $|q| < 1$.

Somma di una serie
Il limite finito delle somme parziali, quando esiste; la serie si dice allora convergente.

Successione
Funzione che a ogni numero naturale n associa un numero reale a_n, il termine di indice n.

Successione convergente
Successione che ha limite finito.

Successione divergente
Successione che tende a $+\infty$ (per ogni M definitivamente $a_n > M$) o a $-\infty$.

Successione irregolare
Successione che non converge e non diverge, come $(-1)^n$.

Successione limitata
Successione i cui termini stanno tutti in un intervallo $[h; K]$; K è un maggiorante, h un minorante.

Successione monotona
Successione crescente ($a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n) o decrescente ($a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n).

Successione per ricorrenza
Successione assegnata dando il primo termine (o i primi) e una regola che ricava ogni termine dai precedenti.

Teorema del confronto
Se definitivamente $a_n \leq b_n \leq c_n$ e a_n, c_n tendono a l, anche b_n tende a l (teorema «dei carabinieri»).

Termine generale
L'espressione a_n che dà il termine di indice n di una successione.

Soluzioni

1. C. I termini di indice pari tendono a 1, quelli di indice dispari a −1; tutti stanno in [−1; 1].

2. B. Ragione $q = -3$. La A è aritmetica ($d = 3$), la C sono i quadrati, la D è la successione $\frac{1}{n}$.

3. D. $|q| = 0{,}9 < 1$, quindi $q^n \to 0$.

4. A. È la definizione. La B è falsa (i termini possono superare 3), la C dice solo che la successione è limitata, la D non è né necessaria (la successione che vale 3 nei posti pari e $3 + \frac{1}{n}$ nei posti dispari tende a 3, ma ogni termine di posto dispari è più lontano da 3 del precedente) né sufficiente ($4 + \frac{1}{n}$ si avvicina a 3 a ogni passo, ma tende a 4).

5. B. $|q| = \frac{1}{2} < 1$: la somma è $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

6. C. Il prodotto di due successioni che divergono a $+\infty$ diverge a $+\infty$.

7. a) F: $(-1)^n$ è limitata e irregolare; è vero invece che ogni successione convergente è limitata. b) F: $1 - \frac{1}{n}$ è crescente e tende a 1; una successione crescente o converge o diverge a $+\infty$. c) F: la serie armonica ha termini che tendono a 0 e diverge; la condizione $a_n \to 0$ è necessaria, non sufficiente. d) V. e) F: 0,999... = 1.

8. a) $a_n \le K$; b) $a_n > M$; c) somme parziali (ridotte); d) $-1 < q < 1$, e allora la somma è $\frac{1}{1 - q}$.

9. a) 1, 4, 7, 10, 13: strettamente crescente (progressione aritmetica di ragione 3), limitata inferiormente da 1 ma non superiormente. b) −2, 2, −2, 2, −2: non monotona, limitata in [−2; 2]. c) 2, 5, 14, 41, 122: strettamente crescente (ogni differenza $a_{n+1} - a_n = 2a_n - 1$ è positiva perché $a_n \ge 2$), non limitata superiormente.

10. $a_{20} = 7 + 19 \cdot (-3) = -50$; $S_{20} = \frac{20 \cdot (7 - 50)}{2} = -430$.

11. $a_{10} - a_3 = 7d = 21$, quindi $d = 3$; $a_1 = a_3 - 2d = 5$; $a_{25} = 5 + 24 \cdot 3 = 77$; $S_{25} = \frac{25 \cdot (5 + 77)}{2} = 1025$.

12. $a_8 = 5 \cdot 2^7 = 640$; $S_8 = 5 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 5 \cdot 255 = 1275$.

13. Sono 11 termini di una progressione geometrica con $a_1 = 1$ e $q = 3$:
$S = \frac{3^{11} - 1}{3 - 1} = \frac{177\,147 - 1}{2} = 88\,573$.

14. $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{10\,000} \Leftrightarrow n^2 + 1 > 10\,000 \Leftrightarrow n^2 > 9999$, cioè $n \ge 100$ ($99^2 + 1 = 9802$ non basta, $100^2 + 1 = 10\,001$ sì). Si può prendere $N = 99$.

15. a) Gradi uguali: $\frac{4}{2} = 2$. b) Grado del numeratore minore: 0. c) Grado del numeratore maggiore: $n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}} \to +\infty$. d) Il numeratore è $n^3(\frac{1}{n} - 2)^3$, con $(\frac{1}{n} - 2)^3 \to -8$; il limite è $\frac{-8}{1} = -8$.

16. a) 0, perché $|q| < 1$. b) $1 + (\frac{2}{3})^n \to 1$. c) Forma $+\infty - \infty$: $n^2(1 - \frac{10}{n}) \to +\infty$. d) $5 - \frac{1}{2^n} \to 5$. e) Non esiste: $q = -1{,}5 < -1$, la successione è irregolare (i termini cambiano segno e crescono in valore assoluto).

17. a) $-\frac{1}{n^2} \le \frac{\cos n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ e gli estremi tendono a 0: il limite è 0. b) $\frac{n + \operatorname{sen} n}{n} = 1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n}$ e $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$ è compresa tra $-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$, quindi tende a 0: il limite è 1.

18. a) $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. b) $a = 4$, $q = \frac{1}{2}$: somma $\frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$. c) $a = \frac{2}{5}$, $q = \frac{1}{5}$: somma $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$. d) $q = 1{,}1 > 1$: diverge a $+\infty$.

19. a) $\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$. b) $1 + \frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{25}{99} = \frac{124}{99}$. c) $\frac{4}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{1}{30} = \frac{13}{30}$.

20. *Passo base* ($n = 1$): il primo membro è 1, il secondo $\frac{1-q}{1-q} = 1$. *Passo induttivo*: supposto vero per n, si ha $1 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, che è la formula per $n+1$. c.v.d.

21. $\frac{3n-1}{n+2} = 3 - \frac{7}{n+2}$, quindi $|a_n - 3| = \frac{7}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 2$: per ogni ε esiste N, e il limite è 3. Per $\varepsilon = 0{,}001$: $n > 6998$, cioè dal termine di indice 6999 in poi.

22. Lo studente tratta S come un numero, ma la serie è irregolare: le somme parziali valgono 1, 0, 1, 0, ... e non hanno limite, quindi S non esiste e ogni calcolo con S è privo di senso. Per il segmento parabolico la serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$ è geometrica con $|q| < 1$, quindi converge: solo dopo averlo stabilito è lecito manipolarne la somma, e il risultato $\frac{4}{3}$ è corretto.

23. a) Se $a_n \to l$, con $\varepsilon = 1$ esiste N tale che per $n > N$ i termini stanno in $]l-1; l+1[$; i termini $a_1, \ldots, a_N$ sono in numero finito, quindi hanno un massimo e un minimo. Il più grande e il più piccolo tra questi valori e $l \pm 1$ delimitano tutti i termini. b) $\frac{(-1)^n}{n}$ non è monotona (cambia segno a ogni passo) ma è limitata e tende a 0.

24. a) $2 \cdot (\frac{3}{4})^5 \approx 0{,}47$ m. b) Discesa iniziale 2 m, poi ogni rimbalzo è percorso in salita e in discesa: le salite sommano $\frac{1{,}5}{1-\frac{3}{4}} = 6$ m, quindi la distanza è $2 + 2 \cdot 6 = 14$ m. c) $2 \cdot 0{,}75^n < 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}75^n < 0{,}05 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}75} \approx 10{,}4$: all'undicesimo rimbalzo ($\approx 8{,}4$ cm; dopo il decimo risale ancora a circa 11,3 cm).

25. a) $a_1 = 100$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 100$; ripetendo, la dose presa k giorni prima pesa $\frac{100}{2^k}$, e la somma geometrica di n termini con $q = \frac{1}{2}$ vale $100 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 200(1 - \frac{1}{2^n})$. b) $200(1 - \frac{1}{32}) = 193{,}75$ mg. c) $a_n \to 200$ mg: la quantità si stabilizza sotto i 200 mg (livello di equilibrio), senza crescere senza limite.

26. a) $1200 + 11 \cdot 150 = 2850$. b) $\frac{12 \cdot (1200 + 2850)}{2} = 24\,300$. c) $1200 + (n-1) \cdot 150 > 2000 \Leftrightarrow n - 1 > 5{,}\overline{3} \Leftrightarrow n \geq 7$: nel settimo mese (2100 pezzi).

27. Il versamento del primo anno frutta per 10 anni, quello dell'ultimo per 1: il valore è $1000 \cdot (1{,}02 + 1{,}02^2 + \ldots + 1{,}02^{10}) = 1000 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{10} - 1}{0{,}02} \approx 11\,168{,}72$ euro.

28. a) Da $n = 135$ $((1 + \frac{1}{135})^{135} \approx 2{,}708282$; per $n = 134$ la differenza è ancora circa 0,01007). b) $\approx 5{,}187$ e $\approx 7{,}485$. c) La crescita è così lenta (circa 2,3 unità ogni volta che n si moltiplica per 10) che i numeri sembrano assestarsi; il raggruppamento di Oresme mostra invece che ogni blocco di termini aggiunge almeno $\frac{1}{2}$, quindi le somme superano qualunque numero.

29. D. Il valore dopo n anni è $V_0 \cdot 0{,}85^n$: $0{,}85^4 \approx 0{,}522$, $0{,}85^5 \approx 0{,}444$. Chi risponde 4 ragiona come se il 15 % si togliesse sempre dal valore iniziale (dopo 4 anni resterebbe il 40 %), ma dopo 4 anni resta in realtà circa il 52,2 %.

30. a) Il lato si moltiplica per $\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi l'area si dimezza. b) $16 + 8 + 4 + \ldots = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32\ \text{cm}^2$. c) $16 + 8\sqrt{2} + 8 + \ldots = \frac{16}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 32 + 16\sqrt{2} \approx 54{,}6\ \text{cm}$.

31. *Traccia.* 1) Il paradosso: infinite tappe, ciascuna di durata positiva. 2) Il modello con i dati di fantasia: tempi $10 + 1 + 0{,}1 + \ldots = \frac{100}{9}$ s, posizioni che tendono a $\frac{1000}{9}$ m; conferma con il moto uniforme ($10t = 100 + t$). 3) La definizione di limite usa solo passi finiti (ε, N): è un modo rigoroso di trattare l'infinito potenziale. 4) Cantor e l'infinito attuale (*Matematica 3*, cap. 4). 5) Limite del «risolvere»: la matematica mostra che non c'è contraddizione nel calcolo; resta aperta la domanda sulla struttura reale di spazio e tempo. 6) Eventuale collegamento con l'*Infinito* di Leopardi.

32. a) Al passo k ci sono tanti nuovi triangoli quanti lati aveva la figura precedente: i lati sono 3 e ogni passo li moltiplica per 4, quindi $3 \cdot 4^{k-1}$; il lato dei nuovi triangoli è $\frac{1}{3^k}$ di quello iniziale, quindi l'area è $\frac{A}{9^k}$. b) $A + \Sigma_{k=1}^{+\infty}\, 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \frac{A}{9^k} = A + \frac{A}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = A + \frac{3}{5}A = \frac{8}{5}A$. c) Ogni lato è sostituito da 4 segmenti lunghi $\frac{1}{3}$: il perimetro si moltiplica per $\frac{4}{3}$ a ogni passo, e $(\frac{4}{3})^k \to +\infty$. Una figura di area finita ha perimetro infinito.