CAPITOLO

# 1

# Geometria analitica dello spazio

*Tre numeri bastano per dire dove si trova un punto; un'equazione basta per descrivere un'intera superficie. (testo della redazione)*

**OBIETTIVI**

1. Usare un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio, leggere e disegnare le coordinate di un punto.
2. Calcolare distanze, punti medi, baricentri; operare con i vettori dello spazio e con il prodotto scalare.
3. Scrivere e interpretare l'equazione di un piano, riconoscere piani paralleli e perpendicolari, calcolare la distanza di un punto da un piano.
4. Descrivere una retta con equazioni parametriche e stabilire la posizione di due rette o di una retta e un piano.
5. Ricavare centro e raggio di una sfera e studiarne le intersezioni con piani e rette.
6. Confrontare il metodo sintetico e il metodo analitico sullo stesso problema e collegarli alla storia delle idee.

**INDICE DEL CAPITOLO**


1.1 Il riferimento cartesiano nello spazio ..... 2
1.2 I vettori nello spazio ..... 5
1.3 Il piano ..... 7
1.4 La retta ..... 10
1.5 La sfera ..... 13
1.6 Due metodi per lo stesso problema ..... 17

**Matematica 5** · Parte I · Lo spazio in coordinate · versione 1.0
Capitolo 1: Geometria analitica dello spazio · pagine 21–44 del volume completo · estratto per lo studio

Un drone che consegna un pacco non si muove su un foglio: avanza, si sposta di lato, sale e scende. Per dirgli dove andare non bastano due numeri, ne servono tre. Lo stesso vale per un aereo in avvicinamento, per la punta di un braccio robotico, per un atomo in un cristallo o per un punto di una scena disegnata al computer: ogni volta che descriviamo con numeri una posizione nello spazio, usiamo coordinate.

In *Matematica 4* (cap. 6) hai studiato rette e piani nello spazio con il metodo **sintetico** di Euclide: postulati, teoremi, triangoli rettangoli nascosti in un cubo o in una piramide. In questo capitolo portiamo nello spazio l'altro metodo che conosci, quello delle coordinate, che dal primo anno usi nel piano cartesiano. Un punto diventerà una terna di numeri, un piano un'equazione di primo grado, una sfera un'equazione di secondo grado. Gli strumenti sono pochi e già noti: il teorema di Pitagora, i vettori e il prodotto scalare di *Matematica 4* (cap. 5), i sistemi lineari. Alla fine confronteremo i due metodi sullo stesso problema, per capire che cosa vede bene ciascuno.

## 1.1 Il riferimento cartesiano nello spazio

### 1.1.1 Tre assi perpendicolari

Fissiamo nello spazio un punto $O$, l'**origine**, e tre rette per $O$ a due a due perpendicolari, ciascuna orientata e con la stessa unità di misura: sono gli **assi** $x$, $y$ e $z$. L'insieme dell'origine e dei tre assi orientati è un **riferimento cartesiano ortogonale** $Oxyz$. Due assi alla volta determinano tre piani, i **piani coordinati**: il piano $xy$, il piano $xz$ e il piano $yz$. Pensa all'angolo di una stanza: il pavimento è il piano $xy$, le due pareti sono i piani $xz$ e $yz$, e i tre spigoli che si incontrano nell'angolo sono gli assi.

Gli assi non si scelgono a caso: si dispongono in modo che la terna sia **destrorsa**. La **regola della mano destra** dice come: se il pollice della mano destra indica il verso positivo dell'asse $x$ e l'indice quello dell'asse $y$, il medio, piegato perpendicolarmente agli altri due, indica il verso positivo dell'asse $z$. In modo equivalente: guardando il piano $xy$ dall'alto, cioè dalla parte delle $z$ positive, la rotazione di 90° che porta il semiasse positivo delle $x$ sul semiasse positivo delle $y$ è antioraria (Figura 1.1, a). È la convenzione della fisica, dove la useremo per orientare le grandezze vettoriali; una terna sinistrorsa sarebbe la sua immagine allo specchio.

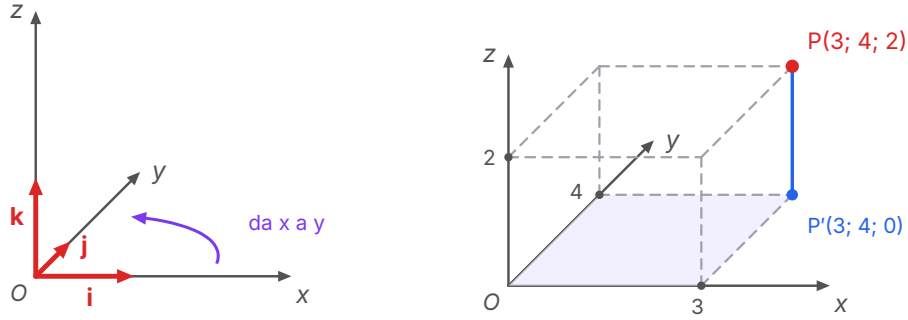
Su ciascun asse chiamiamo **versore** il vettore di lunghezza 1 diretto nel verso positivo: $\mathbf{i}$ sull'asse $x$, $\mathbf{j}$ sull'asse $y$, $\mathbf{k}$ sull'asse $z$. Li useremo tra poco per scrivere i vettori.

### 1.1.2 Le coordinate di un punto

Dato un punto $P$, conduciamo per $P$ i tre piani paralleli ai piani coordinati: essi tagliano gli assi in tre punti, le cui misure con segno, ciascuna sul proprio asse, sono le **coordinate** di $P$. Scriviamo $P(x; y; z)$: $x$ è l'**ascissa**, $y$ l'**ordinata**, $z$ la **quota**. Viceversa, a ogni terna ordinata di numeri reali corrisponde uno e un solo punto: il riferimento stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne di $\mathbb{R}^3$, come nel piano la stabiliva tra i punti e le coppie.

I tre piani coordinati dividono lo spazio in otto regioni, gli **ottanti**, distinti dai segni delle coordinate: nel primo ottante le tre coordinate sono positive. I punti particolari si riconoscono subito. Un punto dell'asse $x$ ha le altre due coordinate nulle, $(a; 0; 0)$; un punto del piano $xy$ ha quota nulla, $(a; b; 0)$; un punto del piano $yz$ ha ascissa nulla, $(0; b; c)$. In generale, **stare su un piano coordinato vuol dire avere nulla una coordinata, stare su un asse vuol dire averne nulle due**.

Per disegnare un punto usiamo l'assonometria cavaliera di *Matematica 4* (cap. 6): l'asse $x$ orizzontale, l'asse $z$ verticale, l'asse $y$, che va «in profondità», tracciato a 45° e con le lunghezze dimezzate. Per disegnare $P(3; 4; 2)$ si parte da $O$, si avanza di 3 lungo $x$, poi di 4 parallelamente a $y$, e si arriva nel punto $P'(3; 4; 0)$ del piano $xy$, la **proiezione ortogonale** di $P$ sul pavimento; da lì si sale di 2. I tre spostamenti sono gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo, la «scatola» di $P$, che ha un vertice in $O$ e il vertice opposto in $P$ (Figura 1.1, b). La scatola aiuta a leggere il disegno: senza di essa, un punto disegnato sul foglio potrebbe rappresentare infiniti punti dello spazio.




a) Assi, versori e verso di rotazione

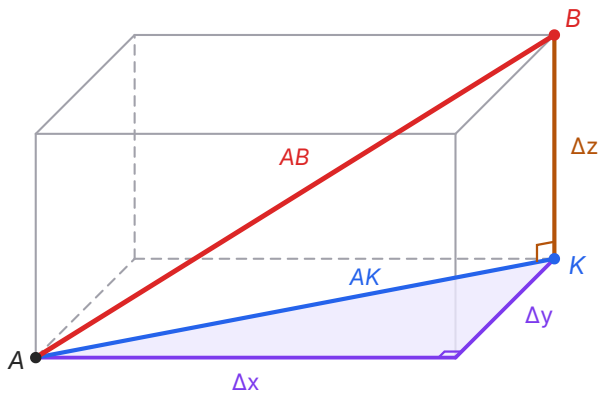
b) Il punto P e la sua «scatola»

**Figura 1.1** a) La terna destrorsa: gli assi $x$, $y$, $z$ con i versori **i**, **j**, **k**; vista dall'alto, la rotazione che porta l'asse $x$ sull'asse $y$ è antioraria. b) Il punto $P(3; 4; 2)$ in assonometria cavaliera (asse $y$ a 45°, lunghezze in profondità dimezzate): $P'(3; 4; 0)$ è la sua proiezione sul piano $xy$; gli spigoli tratteggiati della scatola sono linee di costruzione.

### 1.1.3 Distanza tra due punti e punto medio

Siano $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$. Costruiamo la scatola che ha $AB$ come diagonale e gli spigoli paralleli agli assi: i suoi spigoli misurano $|\Delta x| = |x_B - x_A|$, $|\Delta y|$ e $|\Delta z|$ (Figura 1.2). È il parallelepipedo di *Matematica 4* (cap. 6), di cui avevamo calcolato la diagonale; ora i lati sono differenze di coordinate. Sia $K$ il punto con l'ascissa e l'ordinata di $B$ e la quota di $A$. Il triangolo con i cateti $\Delta x$ e $\Delta y$ è orizzontale e rettangolo, quindi per il teorema di Pitagora $AK^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Il segmento $KB$ è verticale, perciò perpendicolare a ogni retta orizzontale e in particolare ad $AK$: anche $AKB$ è rettangolo, in $K$, e $AB^2 = AK^2 + \Delta z^2$. Mettendo insieme le due uguaglianze otteniamo la **distanza tra due punti**:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$




**1° triangolo, orizzontale:**

$AK^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

**2° triangolo, verticale:**

$AB^2 = AK^2 + \Delta z^2$

**$AB^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$**

**Figura 1.2** La distanza $AB$ con il teorema di Pitagora applicato due volte: prima nel triangolo orizzontale con cateti $\Delta x$ e $\Delta y$, che dà $AK$; poi nel triangolo verticale $AKB$, rettangolo in $K$.

È la formula del piano con un termine in più, e se $A$ e $B$ hanno la stessa quota si riduce proprio a quella. In particolare la distanza di $P(x; y; z)$ dall'origine è $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: per il punto della Figura 1.1 vale $\sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$.

Il **punto medio** $M$ del segmento $AB$ ha per coordinate le medie delle coordinate degli estremi. Basta proiettare sugli assi: le proiezioni di $A$, $M$, $B$ sull'asse $x$ formano un segmento di cui la proiezione di $M$ è il punto medio, perché proiezioni parallele conservano i rapporti tra segmenti allineati (il teorema di Talete). Allo stesso modo si trova il **baricentro** di un triangolo, che si trova sulle mediane a due terzi da ciascun vertice: le sue coordinate sono le medie delle coordinate dei tre vertici. Per il triangolo di vertici $A(1; 2; 3)$, $B(3; -1; 0)$, $C(5; 5; 6)$ il baricentro è $G(3; 2; 3)$.

**IN SINTESI**

**Distanza:** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$; in particolare $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Punto medio di *AB*:** $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$. **Baricentro del triangolo *ABC*:** $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

**ESEMPIO SVOLTO**

Dati $A(1; -2; 3)$ e $B(4; 2; -9)$, calcola la lunghezza di $AB$ e il suo punto medio.

Le differenze delle coordinate sono $\Delta x = 3$, $\Delta y = 4$, $\Delta z = -12$. Quindi $AB = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Il segno di $\Delta z$ non conta, perché compare al quadrato.

Il punto medio è $M\left(\frac{1+4}{2}; \frac{-2+2}{2}; \frac{3-9}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}; 0; -3\right)$. Verifica: $AM = \sqrt{(3/2)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{2{,}25 + 4 + 36} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$, che è proprio metà di 13.

## 1.2 I vettori nello spazio

### 1.2.1 Componenti e operazioni

Un vettore dello spazio, come nel piano, è individuato da direzione, verso e modulo, ed è rappresentato da qualsiasi segmento orientato che li abbia. Se lo rappresentiamo con il segmento orientato $AB$, le sue **componenti** sono le differenze delle coordinate: $\mathbf{v} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Con i versori degli assi si scrive $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, e il **modulo** è la lunghezza di $AB$: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Le operazioni di *Matematica 4* (cap. 5) si fanno componente per componente: la **somma** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x; u_y + v_y; u_z + v_z)$ e il **prodotto per un numero** $k\mathbf{v} = (kv_x; kv_y; kv_z)$. Un vettore di modulo 1 si chiama, in generale, **versore**; dividendo un vettore non nullo per il suo modulo si ottiene il versore con la sua direzione e il suo verso. Due vettori non nulli sono **paralleli** se e solo se uno è multiplo dell'altro, cioè se hanno le **componenti proporzionali**: (2; 0; −4) e (−1; 0; 2) sono paralleli, perché il secondo è $-\frac{1}{2}$ volte il primo, e hanno verso opposto.

### 1.2.2 Il prodotto scalare

Il **prodotto scalare** di due vettori è il numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$, dove $\theta \in [0°; 180°]$ è l'angolo tra i due vettori. La definizione non usa coordinate, quindi vale nello spazio come nel piano. Anche la formula con le componenti si dimostra come in *Matematica 4* (cap. 5). Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non sono nulli

né paralleli e partono dallo stesso punto, insieme a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ formano un triangolo in cui l'angolo opposto al lato $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ è $\theta$; il teorema del coseno dà

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

A sinistra, scritto con le componenti, compare $(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2 + (u_z - v_z)^2$. Sviluppando i quadrati, i termini $u_x^2$, $v_x^2$, … si semplificano con quelli di destra e resta $-2(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) = -2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Nei casi esclusi la formula si verifica direttamente. c.v.d.

### IN SINTESI

**Vettori nello spazio.** $\mathbf{v} = (v_x; v_y; v_z) = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$; somma e prodotto per un numero componente per componente.

**Prodotto scalare:** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$. **Angolo:** $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$.

Per vettori non nulli: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$; $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow$ componenti proporzionali ($\mathbf{u} = k\mathbf{v}$).

### ESEMPIO SVOLTO

Calcola l'angolo tra $\mathbf{u}(1; 2; 2)$ e $\mathbf{v}(2; -1; 2)$, e l'angolo tra la diagonale di un cubo e uno spigolo.

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2 - 2 + 4 = 4$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+1+4} = 3$. Quindi $\cos\theta = \dfrac{4}{9}$ e $\theta = \arccos\dfrac{4}{9} \approx 63{,}61°$. Il prodotto positivo dice già che l'angolo è acuto.

Mettiamo un cubo di spigolo 1 con un vertice in $O$ e tre spigoli sugli assi. La diagonale uscente da $O$ è rappresentata da $(1; 1; 1)$, lo spigolo sull'asse $x$ da $(1; 0; 0)$: $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot 1}$, $\theta \approx 54{,}74°$. Con il metodo sintetico avremmo dovuto individuare un triangolo rettangolo con i lati 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; qui bastano tre prodotti.

### COLLEGAMENTI

**Fisica: le grandezze vettoriali nello spazio.** Forze, velocità, campi elettrici e magnetici sono vettori dello spazio, e la fisica li tratta proprio con tre componenti. Il campo elettrico generato da più cariche in un punto è la somma vettoriale dei campi delle singole cariche (principio di sovrapposizione): si sommano le componenti. Il **lavoro** di una forza costante è un prodotto scalare: se $\mathbf{F} = (2; -1; 3)$ N e lo spostamento è $\mathbf{s} = (4; 2; 1)$ m, allora $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = 8 - 2 + 3 = 9$ J. Nel quinto anno incontrerai anche grandezze, come la forza su una carica in moto in un campo magnetico, che richiedono un altro prodotto tra vettori, il prodotto vettoriale: lo studierai nel corso di fisica.

## 1.3 Il piano

### 1.3.1 L'equazione di un piano

Nel piano cartesiano una retta passa per un punto e ha una direzione; nello spazio, il modo più semplice di fissare un piano è dare un suo punto e la direzione **perpendicolare** al piano. Pensa a un tavolo: il piano del tavolo è l'insieme dei punti che si raggiungono dal centro muovendosi in tutte le direzioni perpendicolari alla gamba verticale. Un vettore non nullo perpendicolare a un piano si chiama **vettore normale** al piano.

Siano dati il punto $A(x_0; y_0; z_0)$ e il vettore $\mathbf{n} = (a; b; c)$. Un punto $P(x; y; z)$ appartiene al piano per $A$ perpendicolare a $\mathbf{n}$ se e solo se il vettore $AP$ è perpendicolare a $\mathbf{n}$ (oppure $P = A$), cioè se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Poiché $AP = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, la condizione è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Sviluppando e ponendo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ si ottiene l'**equazione cartesiana del piano**

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } a, b, c \text{ non tutti nulli.}$$

Vale anche il viceversa: ogni equazione di primo grado in $x, y, z$ rappresenta un piano, con vettore normale $(a; b; c)$. Basta trovare una sua soluzione $(x_0; y_0; z_0)$: sottraendo $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ dall'equazione, essa assume la forma del riquadro sopra. I coefficienti sono determinati a meno di un fattore non nullo: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ e $4x + 6y + 8z - 24 = 0$ descrivono lo stesso piano, come nel piano cartesiano $y = 2x$ e $2y = 4x$ descrivevano la stessa retta.

Prendiamo proprio il piano $\alpha$: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, di vettore normale $\mathbf{n}(2; 3; 4)$ (Figura 1.3). Per disegnarlo cerchiamo le intersezioni con gli assi, annullando due coordinate alla volta: per $y = z = 0$ si ha $x = 6$, e allo stesso modo si trovano $(0; 4; 0)$ e $(0; 0; 3)$. I segmenti che uniscono questi tre punti stanno sulle **tracce** del piano, cioè sulle rette in cui $\alpha$ taglia i piani coordinati: la traccia sul piano $xy$ si ottiene ponendo $z = 0$ ed è la retta $2x + 3y = 12$ del pavimento. Dividendo l'equazione per 12 si ottiene $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$, in cui si leggono direttamente le tre intersezioni con gli assi. Il triangolo disegnato è solo la parte di $\alpha$ che sta nel primo ottante: il piano, come la retta, è illimitato.

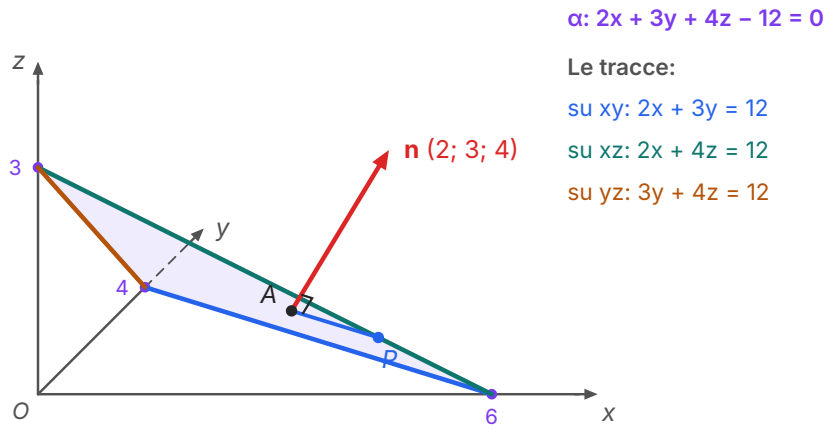



**Figura 1.3** Il piano α: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ nel primo ottante, con le sue tracce sui piani coordinati. Il vettore normale **n**(2; 3; 4) è perpendicolare a ogni segmento del piano, come $AP$, con $A(3; 1; \frac{3}{4})$ e $P(\frac{9}{2}; 0; \frac{3}{4})$ punti di α.

### 1.3.2 Piani particolari

Leggiamo l'equazione quando qualche coefficiente è nullo. Se $d = 0$ il piano passa per l'origine. Se manca una variabile, per esempio $z$, l'equazione è $ax + by + d = 0$ e il vettore normale $(a; b; 0)$ è perpendicolare a **k**: il piano è **parallelo all'asse *z***. Infatti, se $(x_0; y_0; z_0)$ soddisfa l'equazione, la soddisfa anche $(x_0; y_0; z)$ per ogni $z$: il piano contiene la retta verticale per ciascun suo punto, come una parete che si alza sulla retta $ax + by + d = 0$ del pavimento. Se mancano due variabili si ha un piano parallelo a un piano coordinato: $z = k$ è il piano orizzontale «alla quota $k$», $x = k$ è parallelo al piano $yz$, $y = k$ al piano $xz$; per $k = 0$ si ritrovano i piani coordinati stessi.

### 1.3.3 Il piano per tre punti

Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano (*Matematica 4*, cap. 6). Per trovarne l'equazione si sostituiscono le coordinate dei tre punti in $ax + by + cz + d = 0$: si ottiene un sistema lineare di tre equazioni nelle quattro incognite $a$, $b$, $c$, $d$, che si risolve con i metodi dei sistemi già noti. Il sistema ha infinite soluzioni, tutte proporzionali tra loro, perché l'equazione di un piano è determinata a meno di un fattore: si esprimono tre incognite in funzione della quarta e poi si sceglie per questa un valore comodo. Se i tre punti sono allineati, i vettori $AB$ e $AC$ hanno componenti proporzionali e i piani che li contengono sono infiniti: tutti quelli che passano per la retta $AB$.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** a) Scrivi l'equazione del piano π passante per $A(1;2;0)$, $B(3;0;1)$, $C(0;1;3)$. b) Calcola la distanza del punto $P(4;5;6)$ da π e controllala trovando il piede della perpendicolare.

a) $AB = (2;-2;1)$ e $AC = (-1;-1;3)$ non sono proporzionali, quindi i punti non sono allineati. Sostituendo le coordinate in $ax + by + cz + d = 0$:

$$a + 2b + d = 0, \qquad 3a + c + d = 0, \qquad b + 3c + d = 0.$$

Dalla prima $a = -2b - d$; nella seconda, $c = 6b + 2d$; nella terza, $b + 18b + 6d + d = 0$, cioè $b = -\frac{7}{19}d$. Allora $a = -\frac{5}{19}d$ e $c = -\frac{4}{19}d$. Con $d = -19$ si ottiene π: $5x + 7y + 4z - 19 = 0$. Verifica: $5 + 14 - 19 = 0$, $15 + 4 - 19 = 0$, $7 + 12 - 19 = 0$. Il vettore normale $(5;7;4)$ è perpendicolare ad $AB$ $(10 - 14 + 4 = 0)$ e ad $AC$ $(-5 - 7 + 12 = 0)$.

b) Con la formula della distanza: $\frac{|20 + 35 + 24 - 19|}{\sqrt{25 + 49 + 16}} = \frac{60}{\sqrt{90}} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$. Controllo: la retta per $P$ perpendicolare a π ha la direzione di $\mathbf{n}$, quindi i suoi punti sono $(4 + 5t;\ 5 + 7t;\ 6 + 4t)$. Sostituendo nell'equazione di π si trova $60 + 90t = 0$, $t = -\frac{2}{3}$, e il piede è $H(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{10}{3})$. Allora $PH = \frac{2}{3}|\mathbf{n}| = \frac{2}{3}\sqrt{90} = 2\sqrt{10}$, come previsto.

### 1.3.4 Piani paralleli e piani perpendicolari

Due piani sono paralleli se e solo se sono perpendicolari a una stessa direzione, cioè se i loro vettori normali sono paralleli. Per i piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$:

- sono **piani paralleli** se $(a;b;c) = k(a';b';c')$ per un numero $k \neq 0$; se anche $d = kd'$, le due equazioni sono proporzionali e i piani **coincidono**;
- sono **piani perpendicolari** se i vettori normali sono perpendicolari: $aa' + bb' + cc' = 0$.

Per esempio $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ è parallelo ad α e distinto da esso, mentre $x - 2y + z = 0$ è perpendicolare ad α, perché $2 - 6 + 4 = 0$. Più in generale, l'angolo tra i vettori normali dà l'ampiezza dei diedri formati dai due piani, che in *Matematica 4* (cap. 6) misuravamo sulla sezione normale: è un'altra misura che con le coordinate si ottiene con un solo prodotto scalare.

### 1.3.5 Distanza di un punto da un piano

La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento di perpendicolare $P_0H$ condotto dal punto al piano. Per calcolarla senza trovare $H$, prendiamo un punto qualsiasi $A$ del piano. Nel triangolo rettangolo $AHP_0$ il cateto $P_0H$ è la proiezione di $AP_0$ sulla direzione di $\mathbf{n}$,

quindi $P_0H = |AP_0| \cdot |\cos\theta|$, dove $\theta$ è l'angolo tra $AP_0$ e $\mathbf{n}$. Dalla definizione di prodotto scalare, $|AP_0| \cdot |\cos\theta| = \dfrac{|AP_0 \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$. Infine, se $P_0(x_0; y_0; z_0)$,

$$AP_0 \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) + c(z_0 - z_A) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

perché $A$ appartiene al piano, e quindi $-(ax_A + by_A + cz_A) = d$. Si ottiene la formula

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

È la stessa formula della distanza di un punto da una retta nel piano cartesiano, con un termine in più. Per esempio, l'origine dista da $\alpha$: $\dfrac{|-12|}{\sqrt{4+9+16}} = \dfrac{12}{\sqrt{29}} \approx 2{,}23$. Il numeratore, senza valore assoluto, dice anche **da che parte** del piano sta il punto: i punti in cui $ax + by + cz + d$ è positivo formano uno dei due semispazi individuati dal piano, quelli in cui è negativo l'altro.

**IN SINTESI**

**Piano** per $A(x_0; y_0; z_0)$ con vettore normale $\mathbf{n}(a; b; c)$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$; in generale $ax + by + cz + d = 0$.

**Piani particolari:** $d = 0$ passa per $O$; manca $z$: parallelo all'asse $z$; $z = k$: parallelo al piano $xy$.

**Paralleli:** $(a; b; c) = k(a'; b'; c')$; coincidenti se anche $d = kd'$. **Perpendicolari:** $aa' + bb' + cc' = 0$.

**Distanza punto–piano:** $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

**ERRORE FREQUENTE**

**«Nello spazio $x + y = 3$ è una retta».** No: nello spazio un'equazione di primo grado rappresenta sempre un piano. $x + y = 3$ è il piano parallelo all'asse $z$ che taglia il pavimento lungo la retta $x + y = 3$; per descrivere una retta servono due equazioni (paragrafo successivo).

**«$x - 2y + z - 1 = 0$ e $2x - 4y + 2z - 2 = 0$ sono paralleli».** I vettori normali sono proporzionali, ma lo è anche il termine noto: le equazioni sono una il doppio dell'altra, e i piani coincidono. Infine, il vettore normale si legge sui coefficienti di $x$, $y$, $z$: il termine noto $d$ non c'entra, e se una variabile manca la componente corrispondente è 0.

## 1.4 La retta

### 1.4.1 Equazioni parametriche

Una retta è individuata da un suo punto $A$ e da un vettore non nullo $\mathbf{v}$ che ne indica la direzione, il **vettore direzione**. Un punto $P$ appartiene alla retta se e solo se il vettore $AP$ è parallelo a $\mathbf{v}$,

cioè se $AP = t\mathbf{v}$ per qualche numero reale $t$. Scrivendo $P = A + t\mathbf{v}$ componente per componente si ottengono le **equazioni parametriche** della retta:

$$x = x_A + v_x t, \qquad y = y_A + v_y t, \qquad z = z_A + v_z t, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}\,.$$

A ogni valore del **parametro** $t$ corrisponde un punto della retta, e viceversa. Puoi pensare a $t$ come al tempo: le equazioni descrivono un punto che all'istante 0 è in $A$ e si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v}$. La stessa retta ha infinite rappresentazioni parametriche, perché si può partire da un altro suo punto e prendere un multiplo non nullo di $\mathbf{v}$.

La retta per due punti $A$ e $B$ ha vettore direzione $\mathbf{v} = AB$. Per $A(1;\,2;\,3)$ e $B(2;\,0;\,0)$ è $\mathbf{v} = (1;\,-2;\,-3)$ e la retta $r$ ha equazioni $x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = 3 - 3t$. Per $t = 0$ si ha $A$, per $t = 1$ si ha $B$, i valori $0 \le t \le 1$ danno il segmento $AB$ e $t = \dfrac{1}{2}$ il suo punto medio. Per stabilire se un punto appartiene alla retta si ricava $t$ da un'equazione e si controllano le altre due: per $Q(3;\,-2;\,-3)$ la prima dà $t = 2$, e infatti $2 - 4 = -2$ e $3 - 6 = -3$, quindi $Q \in r$.

### 1.4.2 La retta come intersezione di due piani

Due piani non paralleli si tagliano lungo una retta: perciò una retta si può descrivere anche con il sistema delle equazioni di due piani che la contengono. Per esempio

$$x + y - z - 1 = 0, \qquad x - y + 2z - 3 = 0.$$

Per passare alla forma parametrica si pone $z = t$ e si risolve il sistema nelle incognite $x$ e $y$: sommando le equazioni $2x + z - 4 = 0$, cioè $x = 2 - \dfrac{t}{2}$; sottraendole $2y - 3z + 2 = 0$, cioè $y = -1 + \dfrac{3}{2}t$. La retta passa per $(2;\,-1;\,0)$, che si ottiene per $t = 0$, e ha vettore direzione $\left(-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{2};\,1\right)$ o, moltiplicando per 2, $(-1;\,3;\,2)$. Controllo: questo vettore è perpendicolare ai due vettori normali, $(1;\,1;\,-1)$ e $(1;\,-1;\,2)$, perché la retta sta in entrambi i piani: $-1 + 3 - 2 = 0$ e $-1 - 3 + 4 = 0$.

### 1.4.3 Retta e piano

La posizione di una retta $r$, di vettore direzione $\mathbf{v}$, rispetto a un piano $\pi$, di vettore normale $\mathbf{n}$, si legge sui due vettori:

- se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, la retta è **parallela** al piano: giace in $\pi$ se un suo punto sta in $\pi$, altrimenti non ha punti in comune con $\pi$;
- se $\mathbf{v}$ è parallelo a $\mathbf{n}$, la retta è **perpendicolare** al piano;
- se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, la retta è **incidente**: il punto comune si trova sostituendo le equazioni parametriche nell'equazione del piano, che diventa un'equazione di primo grado in $t$.

La retta $r$ per $A(1;\,2;\,3)$ e $B(2;\,0;\,0)$ incontra il piano $\alpha$: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, perché $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2 - 6 - 12 = -16 \neq 0$. Sostituendo, $2(1 + t) + 3(2 - 2t) + 4(3 - 3t) - 12 = 0$, cioè $8 - 16t = 0$ e

$t = \frac{1}{2}$: il punto d'intersezione è $P(\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{2})$ (Figura 1.4). È proprio il punto medio di $AB$, e il motivo si vede sostituendo gli estremi nel primo membro dell'equazione di α: per $A$ si ottiene +8, per $B$ si ottiene −8. I due punti stanno da parti opposte del piano e alla stessa distanza da esso, $\frac{8}{\sqrt{29}}$.

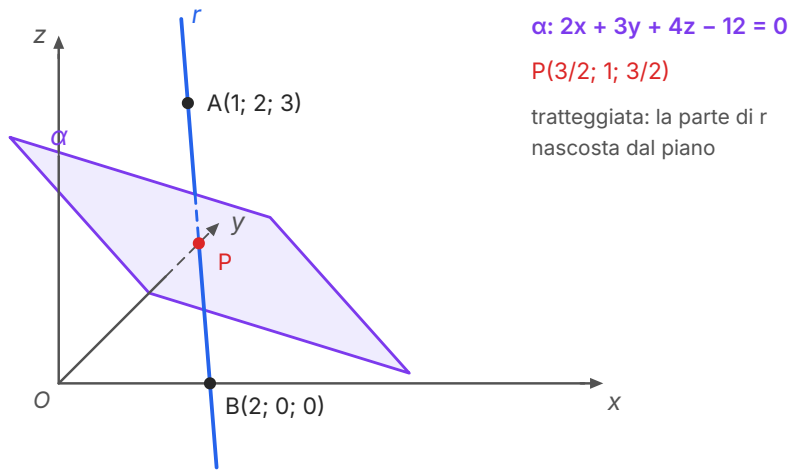



**Figura 1.4** La retta $r$ per $A(1; 2; 3)$ e $B(2; 0; 0)$ attraversa il piano α nel punto $P(\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{2})$, punto medio di $AB$. Del piano è disegnata solo una parte; il tratto di $r$ nascosto da essa è tratteggiato.

### 1.4.4 Due rette nello spazio

In *Matematica 4* (cap. 6) abbiamo visto che due rette distinte dello spazio possono essere incidenti, parallele oppure **sghembe**, cioè né incidenti né parallele, e quindi non complanari. Con le coordinate la distinzione diventa un calcolo. Se i vettori direzione sono proporzionali, le rette sono parallele (o coincidenti, se hanno un punto in comune). Altrimenti si cercano i punti comuni: si scrivono le due rette con **parametri diversi**, $t$ e $s$, e si uguagliano le coordinate. Si ottengono tre equazioni in due incognite: se ne risolvono due e si controlla la terza. Se il sistema ha soluzione le rette sono incidenti, se non ne ha sono sghembe.

**ESEMPIO SVOLTO**

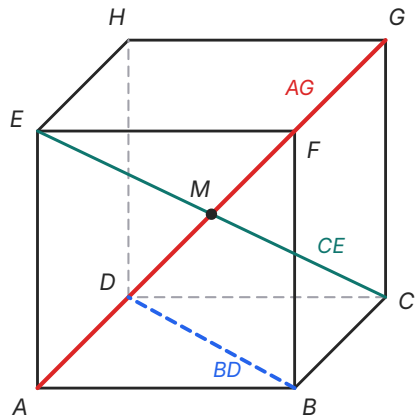
**Problema.** Nel cubo $ABCDEFGH$ di spigolo 2 della Figura 1.5 (a), stabilisci la posizione della diagonale $AG$ rispetto alla diagonale di base $BD$ e alla diagonale $CE$.

Fissiamo il riferimento con l'origine in $A$ e gli spigoli $AB$, $AD$, $AE$ sugli assi: $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(2;2;0)$, $D(0;2;0)$, $E(0;0;2)$, $G(2;2;2)$. Le tre rette sono

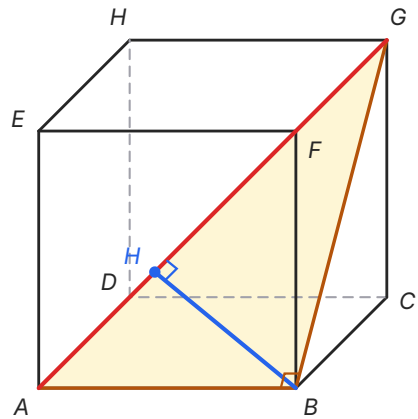
$$AG\colon (t;t;t), \qquad BD\colon (2-s;s;0), \qquad CE\colon (2-u;2-u;u).$$

$AG$ e $BD$: le direzioni $(1;1;1)$ e $(-1;1;0)$ non sono proporzionali. Uguagliando le coordinate, $t = 2-s$, $t = s$, $t = 0$: dalla terza $t = 0$, dalla seconda $s = 0$, ma allora la prima diventa $0 = 2$, che è falso. Nessun punto comune: le rette sono **sghembe**. In più $(1;1;1)\cdot(-1;1;0) = 0$: sono sghembe e ortogonali, un fatto che con il metodo sintetico richiederebbe un ragionamento apposito.

$AG$ e $CE$: $t = 2-u$ (due volte) e $t = u$ danno $u = t = 1$. Le rette sono **incidenti** nel punto $M(1;1;1)$, il centro del cubo.




a) AG e BD sghembe, AG e CE incidenti




b) La distanza di B dalla diagonale AG

**Figura 1.5** a) Nel cubo di spigolo 2 la diagonale $AG$ è sghemba con la diagonale di base $BD$ e incide la diagonale $CE$ nel centro $M$. b) La distanza di $B$ dalla diagonale $AG$: il piede della perpendicolare è $H$, nel triangolo $ABG$ rettangolo in $B$.

## 1.5 La sfera

### 1.5.1 L'equazione della sfera

La **sfera** di centro $C$ e raggio $r > 0$ è l'insieme dei punti dello spazio che distano $r$ da $C$. (In geometria si parla anche di *superficie sferica*, per distinguerla dal solido che essa racchiude; qui

«sfera» indica sempre la superficie.) Scrivendo la condizione $PC = r$ con la formula della distanza e elevando al quadrato si ottiene l'equazione

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2.$$

Sviluppando i quadrati si arriva alla forma $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, con $\alpha = -2x_C$, $\beta = -2y_C$, $\gamma = -2z_C$. Il viceversa richiede una verifica, come per la circonferenza nel piano. Data un'equazione di questo tipo, si completano i quadrati:

$$(x + \frac{\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\beta}{2})^2 + (z + \frac{\gamma}{2})^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \delta.$$

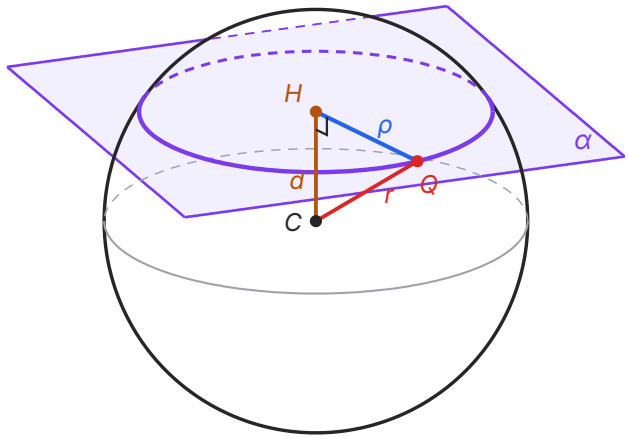
Se il secondo membro è positivo, l'equazione rappresenta la sfera di centro $C(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}; -\frac{\gamma}{2})$ e raggio uguale alla radice del secondo membro. Se è nullo, l'unico punto che la soddisfa è $C$; se è negativo, nessun punto la soddisfa, perché una somma di quadrati non può essere negativa. Per riconoscere una sfera, inoltre, i coefficienti di $x^2$, $y^2$, $z^2$ devono essere uguali (si divide per il loro valore comune) e non devono comparire prodotti come $xy$.

### 1.5.2 Sfera e piano

La posizione di un piano $\pi$ rispetto a una sfera di centro $C$ e raggio $r$ dipende dalla distanza $d$ di $C$ da $\pi$, che sappiamo calcolare. Se $d > r$ il piano è **esterno** e non ha punti in comune con la sfera. Se $d < r$ il piano è **secante**: lo taglia lungo una circonferenza, il cui centro è il piede $H$ della perpendicolare condotta da $C$ al piano. Il raggio $\rho$ della sezione si ricava con il teorema di Pitagora nel triangolo $CHQ$, rettangolo in $H$, dove $Q$ è un punto qualsiasi della sezione (Figura 1.6):

$$\rho = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Per $d = 0$ il piano passa per il centro e taglia un **cerchio massimo**, con raggio uguale a quello della sfera. Se $d = r$ la sezione si riduce a un punto $T$ e il piano è **piano tangente** alla sfera in $T$. Il piano tangente è perpendicolare al raggio $CT$: infatti $T$ è il punto del piano più vicino a $C$ (tutti gli altri sono esterni alla sfera), quindi $CT$ è proprio il segmento di perpendicolare condotto da $C$ al piano. È l'analogo, nello spazio, della retta tangente a una circonferenza, perpendicolare al raggio nel punto di contatto. Per scriverne l'equazione basta prendere come vettore normale il vettore $CT$.




**Nel triangolo rettangolo CHQ:**

d = distanza di C dal piano α

**$\rho^2 = r^2 - d^2$**

d < r: il piano taglia la sfera

d = r: piano tangente (ρ = 0)

d > r: nessun punto comune

**Figura 1.6** Un piano α a distanza *d* dal centro *C* di una sfera di raggio *r*, con $d < r$, la taglia lungo una circonferenza di centro *H* e raggio $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$. Proiezione ortogonale; le parti nascoste dalla sfera sono tratteggiate.

Anche l'intersezione con una retta si trova per sostituzione: le equazioni parametriche della retta, sostituite in quella della sfera, danno un'equazione di secondo grado in $t$. Se il discriminante è positivo la retta è secante in due punti, se è nullo è tangente, se è negativo è esterna.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** È data l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. a) Verifica che rappresenta una sfera e trovane centro e raggio. b) Trova centro e raggio della sezione con il piano $\pi$: $2x - y + 2z - 1 = 0$. c) Scrivi il piano tangente nel punto $T(1; 2; 6)$. d) Trova i punti in cui l'asse $z$ incontra la sfera.

a) Completando i quadrati: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 11 + 1 + 4 + 9 = 25$. È la sfera di centro $C(1; -2; 3)$ e raggio 5.

b) $d(C, \pi) = \dfrac{|2 + 2 + 6 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{9}{3} = 3 < 5$: $\pi$ è secante e $\rho = \sqrt{25 - 9} = 4$. Il centro $H$ della sezione sta sulla retta per $C$ perpendicolare a $\pi$, di punti $(1 + 2t; -2 - t; 3 + 2t)$; sostituendo in $\pi$ si ottiene $9 + 9t = 0$, $t = -1$, quindi $H(-1; -1; 1)$.

c) $T$ appartiene alla sfera: $0 + 16 + 9 = 25$. Il vettore $CT = (0; 4; 3)$ è normale al piano tangente: $4(y - 2) + 3(z - 6) = 0$, cioè $4y + 3z - 26 = 0$. Controllo: la distanza di $C$ da questo piano è $\dfrac{|-8 + 9 - 26|}{5} = 5$, uguale al raggio.

d) Sull'asse $z$ è $x = y = 0$, $z = t$: $t^2 - 6t - 11 = 0$, $t = 3 \pm 2\sqrt{5}$. I punti sono $(0; 0; 3 + 2\sqrt{5})$ e $(0; 0; 3 - 2\sqrt{5})$, cioè circa a quota 7,47 e −1,47.

### 1.5.3 La Terra come sfera

Con buona approssimazione la Terra è una sfera, con un raggio medio di circa 6371 km. Mettiamo l'origine nel suo centro, l'asse $z$ lungo l'asse di rotazione, verso il polo Nord, e il piano $xy$ nel piano dell'equatore. Un punto $P$ della superficie si individua con due angoli, le **coordinate geografiche**. La **latitudine** è l'angolo tra il raggio $OP$ e il piano dell'equatore: va da 0° a 90°, verso nord o verso sud. La **longitudine** è l'angolo tra il semipiano che contiene l'asse terrestre e passa per $P$, cioè il meridiano di $P$, e il semipiano del meridiano fondamentale, quello di Greenwich: va da 0° a 180°, verso est o verso ovest. Raggio, latitudine e longitudine sono tre numeri, come $x$, $y$, $z$, ma due di essi sono angoli.

I **paralleli** sono le sezioni della sfera con piani perpendicolari all'asse, cioè con i piani $z = k$. Il parallelo di latitudine $\varphi$ sta nel piano a distanza $R \operatorname{sen} \varphi$ dal centro, e la formula della sezione dà il suo raggio: $\rho = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = R \cos \varphi$. Il parallelo di 60° ha un raggio di circa 3186 km, la metà di quello dell'equatore. I **meridiani** invece sono semicirconferenze di cerchi massimi, perché i loro piani passano per il centro. Tra i paralleli, il solo cerchio massimo è l'equatore: è per questo che la rotta più breve tra due città alla stessa latitudine non segue il parallelo, come vedremo nel capitolo 12.

**IN SINTESI**

**Retta** per $A$ con vettore direzione $\mathbf{v}$: $x = x_A + v_x t$, $y = y_A + v_y t$, $z = z_A + v_z t$; per due punti: $\mathbf{v} = AB$.

**Retta e piano:** parallela se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, perpendicolare se $\mathbf{v} = k\mathbf{n}$, altrimenti incidente (si sostituisce). **Due rette:** parallele se le direzioni sono proporzionali; altrimenti incidenti o sghembe, secondo che il sistema in $t$ e $s$ abbia o no soluzione.

**Sfera:** $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$; da $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$: $C(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}; -\frac{\gamma}{2})$, $r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \delta$, che deve essere positivo.

**Sfera e piano:** $d > r$ esterno; $d = r$ tangente (normale $CT$); $d < r$ secante, sezione di raggio $\sqrt{r^2 - d^2}$.

## 1.6 Due metodi per lo stesso problema

In *Matematica 4* la geometria dello spazio era sintetica; ora disponiamo anche delle coordinate. Mettiamo i due metodi alla prova sullo stesso problema: **in un cubo di spigolo *l*, quanto dista il vertice *B* dalla diagonale *AG*?** (Figura 1.5, b).

### 1.6.1 Con il metodo sintetico

Bisogna vedere il triangolo giusto. Lo spigolo $AB$ è perpendicolare alla faccia $BCGF$, perché è perpendicolare a due rette incidenti di quella faccia, $BC$ e $BF$; quindi è perpendicolare anche alla retta $BG$, che sta nella faccia. Il triangolo $ABG$ è dunque rettangolo in $B$, con cateti $AB = l$ e $BG = l\sqrt{2}$ (diagonale di una faccia) e ipotenusa $AG = l\sqrt{3}$ (diagonale del cubo). La distanza cercata è l'altezza $BH$ relativa all'ipotenusa, e si ottiene calcolando due volte l'area del triangolo: $AB \cdot BG = AG \cdot BH$, da cui

$$BH = \frac{l \cdot l\sqrt{2}}{l\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

### 1.6.2 Con le coordinate

Fissiamo $A(0; 0; 0)$, $B(l; 0; 0)$, $G(l; l; l)$. I punti della diagonale $AG$ sono $(t; t; t)$, e il piede $H$ della perpendicolare è il punto per cui il vettore $BH = (t - l; t; t)$ è perpendicolare alla direzione $(1; 1; 1)$: $(t - l) + t + t = 0$, cioè $t = \frac{l}{3}$. Quindi $H(\frac{l}{3}; \frac{l}{3}; \frac{l}{3})$ e

$$BH = \sqrt{(\frac{2l}{3})^2 + (\frac{l}{3})^2 + (\frac{l}{3})^2} = \sqrt{\frac{6l^2}{9}} = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Il risultato è lo stesso, e per $l = 2$ il punto $H(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ è quello della figura. Il calcolo dice anche, senza sforzo, che $H$ sta a un terzo della diagonale a partire da $A$: con il metodo sintetico ci vorrebbe un passo in più, il primo teorema di Euclide ($AH = \frac{AB^2}{AG}$).

### 1.6.3 Che cosa vede ciascun metodo

Il metodo sintetico richiede un'idea, qui il triangolo $ABG$ e il motivo per cui è rettangolo, ma in cambio fa capire **perché** il risultato è quello: la distanza è l'altezza di un triangolo rettangolo i cui lati sono lo spigolo, la diagonale di una faccia e la diagonale del cubo. Il metodo analitico è un procedimento che si applica sempre allo stesso modo, quasi senza bisogno di vedere la figura: è ciò che lo rende potente quando l'intuizione si ferma, come nel caso delle diagonali sghembe e ortogonali, e ciò che permette di affidarlo a un computer. Ha però un prezzo: i conti possono diventare pesanti, il risultato va interpretato e la scelta del riferimento conta. Mettere un vertice del cubo nell'origine e gli spigoli sugli assi è già un'idea geometrica: i due metodi lavorano meglio insieme che separati.

Lo stesso equilibrio si ritrova fuori dalla matematica. I pittori del Rinascimento costruivano la prospettiva disegnando una «scatola», una stanza vista in profondità entro cui collocare figure e architetture; oggi i programmi di grafica tridimensionale, i videogiochi e i progetti degli ingegneri descrivono ogni vertice di una scena con una terna di coordinate, che il computer trasforma nel punto da accendere sullo schermo.

**APPROFONDIMENTO · DESCARTES, FERMAT E IL METODO**

Il metodo delle coordinate nacque nella Francia del Seicento, quasi contemporaneamente in due opere. René Descartes (in latino *Cartesius*, da cui l'aggettivo «cartesiano») pubblicò nel 1637 *La Géométrie*, uno dei saggi che accompagnavano il *Discours de la méthode*. Pierre de Fermat, negli stessi anni, aveva scritto un'introduzione ai luoghi geometrici piani e solidi che circolò manoscritta e fu stampata solo dopo la sua morte. In entrambi l'idea è la stessa: a una curva corrisponde un'equazione, e un problema geometrico si traduce in un problema algebrico. Nessuno dei due usava però il sistema di assi perpendicolari dei nostri libri, e il loro lavoro riguardava soprattutto le curve del piano. Lo studio sistematico delle curve e delle superfici nello spazio con tre coordinate si sviluppò nel Settecento: nel 1731 Alexis Clairaut pubblicò una ricerca sulle curve «a doppia curvatura», cioè non contenute in un piano.

Per Descartes la geometria analitica non era soltanto una tecnica. Nel *Discours* egli propone poche regole per guidare la ragione: accettare solo ciò che appare evidente, dividere ogni difficoltà in parti più semplici, procedere con ordine dal semplice al complesso, fare enumerazioni complete. La *Géométrie* mostra il metodo all'opera: un problema difficile diventa una catena di passaggi algebrici controllabili. E poiché per Descartes l'essenza della materia è l'estensione, la *res extensa*, descrivere lo spazio con numeri significa poter descrivere con numeri il mondo fisico: è uno dei passi che portano alla matematizzazione della natura del Seicento, di cui le derivate e gli integrali dei prossimi capitoli sono gli strumenti principali.

**SINTESI**

- In un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, con terna destrorsa, ogni punto corrisponde a una terna di coordinate $P(x; y; z)$; i piani coordinati dividono lo spazio in otto ottanti.
- Un punto di un piano coordinato ha una coordinata nulla, un punto di un asse ne ha due nulle. Per disegnare un punto in assonometria cavaliera si costruisce la sua «scatola».
- La distanza tra due punti è $AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ (Pitagora due volte); il punto medio e il baricentro hanno per coordinate le medie delle coordinate.
- I vettori dello spazio hanno tre componenti; somma e prodotto per un numero si fanno componente per componente. Il prodotto scalare $u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta$ dà angoli e perpendicolarità.
- Il piano per $A$ perpendicolare a $\mathbf{n}(a; b; c)$ ha equazione $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$; ogni equazione $ax + by + cz + d = 0$ è un piano con vettore normale $(a; b; c)$.
- Il piano per tre punti non allineati si trova risolvendo un sistema lineare; due piani sono paralleli se hanno i vettori normali paralleli, perpendicolari se il prodotto scalare dei vettori normali è nullo.
- La distanza di un punto da un piano è $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- Una retta ha equazioni parametriche $P = A + t\mathbf{v}$; si può scrivere anche come intersezione di due piani.
- Retta e piano: parallela se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, perpendicolare se $\mathbf{v}$ è parallelo a $\mathbf{n}$, altrimenti incidente. Due rette non parallele sono incidenti o sghembe, secondo che il sistema in $t$ e $s$ abbia o no soluzione.
- La sfera di centro $C$ e raggio $r$ ha equazione $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$; dalla forma sviluppata si risale a centro e raggio completando i quadrati.
- Un piano a distanza $d$ dal centro è esterno, tangente o secante secondo che $d$ sia maggiore, uguale o minore di $r$; la sezione ha raggio $\sqrt{r^2 - d^2}$ e il piano tangente in $T$ ha vettore normale $CT$.
- Metodo sintetico e metodo analitico risolvono gli stessi problemi: il primo spiega e richiede un'idea, il secondo procede per calcolo e si affida a un algoritmo.

## ESERCIZI

### Comprendere

1. ● Il punto $P(0; -3; 5)$ appartiene:
   **A.** all'asse $y$
   **B.** al piano $xy$
   **C.** al piano $yz$
   **D.** al piano $xz$

2. ● Un vettore normale al piano $3x - z + 2 = 0$ è:
   **A.** $(3; -1; 2)$
   **B.** $(3; 0; -1)$
   **C.** $(3; 1; 0)$
   **D.** $(0; 3; -1)$

3. ● Il piano $2x - y + 4 = 0$:
   **A.** è parallelo al piano $xy$
   **B.** passa per l'origine
   **C.** è perpendicolare all'asse $z$
   **D.** è parallelo all'asse $z$

4. ● La distanza dall'origine del punto $P(2; -1; 2)$ è:
   **A.** 3
   **B.** $\sqrt{5}$
   **C.** 9
   **D.** $\sqrt{3}$

5. ● L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ rappresenta la sfera di:
   **A.** centro $(-2; 1; 0)$ e raggio 3
   **B.** centro $(2; -1; 0)$ e raggio 2
   **C.** centro $(4; -2; 0)$ e raggio $\sqrt{24}$
   **D.** centro $(2; -1; 0)$ e raggio 3

6. ● I vettori $\mathbf{u}(1; 2; -1)$ e $\mathbf{v}(3; k; 1)$ sono perpendicolari per:
   **A.** $k = 1$
   **B.** $k = -1$
   **C.** $k = 2$
   **D.** nessun valore di $k$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
a) Due rette dello spazio che non hanno punti in comune sono parallele. b) Il piano $z = 3$ è parallelo al piano $xy$. c) I vettori $(2; -4; 6)$ e $(-1; 2; -3)$ sono paralleli. d) L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ rappresenta una sfera di raggio 1. e) Se il vettore direzione di una retta è perpendicolare al vettore normale di un piano, la retta è perpendicolare al piano.

8. ● Completa.
a) Il piano per $A(x_0; y_0; z_0)$ perpendicolare al vettore $\mathbf{n}(a; b; c)$ ha equazione _____ $= 0$. b) Due piani sono perpendicolari se il _____ dei loro vettori normali è nullo. c) Un piano a distanza $d$ dal centro di una sfera di raggio $r > d$ la taglia lungo una circonferenza di raggio _____ . d) Due rette non parallele e senza punti comuni si dicono _____ .

### Calcolare

9. ● Calcola la lunghezza del segmento e le coordinate del suo punto medio.
a) $A(2; -1; 3)$, $B(-4; 1; 0)$; b) $C(1; 3; -2)$, $D(5; 0; 10)$.

10. ● Sono dati $\mathbf{u}(2; -1; 2)$, $\mathbf{v}(-2; 2; 1)$, $\mathbf{w}(4; -2; 4)$, $\mathbf{t}(1; 2; 0)$. a) Calcola $|\mathbf{u}|$ e $|\mathbf{v}|$. b) Calcola $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. c) Quali coppie di vettori sono parallele e quali perpendicolari? d) Scrivi il versore di $\mathbf{u}$.

11. ● Scrivi l'equazione del piano: a) per $A(1; -2; 3)$ con vettore normale $\mathbf{n}(2; 1; -1)$; b) per $B(0; 1; -1)$ parallelo al piano $3x - y + 2z - 5 = 0$; c) per $C(2; -3; 5)$ parallelo al piano $xz$.

12. ●● a) Scrivi l'equazione del piano per $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$ e controlla il risultato. b) Spiega perché per i punti $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 0)$, $C(4; 7; -2)$ passano infiniti piani.

13. ●● Stabilisci la posizione reciproca del piano $\alpha$: $2x - y + 3z - 1 = 0$ e di ciascuno dei piani $\beta$: $4x - 2y + 6z + 5 = 0$; $\gamma$: $x + 5y + z = 0$; $\delta$: $-6x + 3y - 9z + 3 = 0$.

14. ●● a) Calcola la distanza del punto $P(1; 2; -1)$ dal piano $2x - 2y + z + 5 = 0$. b) Calcola la distanza dell'origine dal piano $x + 2y + 2z - 9 = 0$ e trova il piede $H$ della perpendicolare. c) Calcola la distanza tra i piani paralleli $x + 2y - 2z + 1 = 0$ e $x + 2y - 2z - 8 = 0$.

15. ●● a) Scrivi le equazioni parametriche della retta $r$ per $A(2; -1; 0)$ e $B(4; 0; 3)$. b) Stabilisci se i punti $C(8; 2; 9)$ e $D(0; -2; -2)$ appartengono a $r$. c) Trova il punto in cui $r$ incontra il piano $yz$.

16. ●● La retta $r$ ha equazioni $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3 + t$. Stabilisci la sua posizione rispetto a ciascun piano e, se è incidente, trova il punto comune: $\alpha$: $x + y - z + 4 = 0$; $\beta$: $x - 2y + z - 2 = 0$; $\gamma$: $4x - 2y + 2z - 7 = 0$.

17. ●● La retta $r$ ha equazioni $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 2 + t$. Stabilisci se è incidente, parallela o sghemba rispetto a ciascuna retta e, se è incidente, trova il punto comune.
a) $s$: $x = 2$, $y = 1 + u$, $z = -2u$; b) $p$: $x = 3 - 2u$, $y = 2u$, $z = 4 - 2u$; c) $q$: $x = u$, $y = -3 + u$, $z = 3$.

18. ●● a) Trova centro e raggio delle sfere $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8z = 0$; della seconda spiega perché passa per l'origine. b) Spiega perché $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4 = 0$ non rappresenta una sfera. c) Scrivi l'equazione della sfera che ha per diametro il segmento di estremi $A(1; 2; -1)$ e $B(3; -2; 3)$.

19. ●● È data la sfera $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$. a) Stabilisci se i piani $\alpha$: $2x + y - 2z + 5 = 0$, $\beta$: $x - 2y + 2z + 6 = 0$, $\gamma$: $z = 5$ sono secanti, tangenti o esterni; per quello secante calcola il raggio della sezione, per quello tangente il punto di tangenza. b) Scrivi il piano tangente alla sfera nel punto $T(1; -1; 3)$.

### Dimostrare e argomentare

20. ● Dimostra che il triangolo di vertici $A(1; 2; 0)$, $B(3; 3; 2)$, $C(-1; 4; 1)$ è rettangolo e isoscele; calcolane l'area e trova il baricentro.

21. ●● Trova l'errore e correggilo.
a) «Il piano per $A(1; 2; 3)$ con vettore normale $(2; 0; 1)$ è $2x + z + 5 = 0$.» b) «I piani $x + y + z - 1 = 0$ e $2x + 2y + 2z - 2 = 0$ sono paralleli e distinti.» c) «L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6 = 0$ rappresenta una sfera di centro $(1; 0; 0)$.»

22. ●● Spiega perché un piano la cui equazione non contiene la variabile $z$ è parallelo all'asse $z$, e perché un piano la cui equazione non ha termine noto passa per l'origine. Che cosa rappresenta, nello spazio, l'equazione $x = 0$?

23. ●● Dimostra con le coordinate che le quattro diagonali di un cubo passano per uno stesso punto, e calcola l'angolo acuto formato da due di esse. Suggerimento: usa un cubo di spigolo 1 con un vertice nell'origine.

24. ●●● Dimostra che l'insieme dei punti $P$ equidistanti da $A(1; 0; 2)$ e $B(3; 4; 0)$ è un piano: imponi $PA^2 = PB^2$ e semplifica. Verifica che è il piano perpendicolare ad $AB$ nel suo punto medio.

### Problemi

25. ●● Un drone parte dalla base $O(0; 0; 0)$ e vola in linea retta fino al punto $D(120; 90; 80)$ (coordinate in metri, asse $z$ verticale). a) Quanti metri percorre? b) Scrivi le equazioni parametriche della traiettoria. c) In quale punto si trova quando raggiunge la quota di 60 m? d) In quel momento, qual è la sua distanza orizzontale dalla base?

26. ●● Una forza costante $\mathbf{F}(3; -2; 6)$, in newton, sposta un corpo di $\mathbf{s}(2; 2; 1)$, in metri. a) Calcola il lavoro della forza. b) Calcola l'angolo tra forza e spostamento. c) Quanto vale la componente di $\mathbf{F}$ nella direzione dello spostamento?

27. ●● In una mansarda (unità: metri) il pavimento è il piano $z = 0$ e il soffitto inclinato sta sul piano $x + 2z - 10 = 0$. Una lampada è nel punto $L(2; 3; 2)$. a) A che altezza si trova il soffitto sulla verticale della lampada? b) Qual è la distanza della lampada dal soffitto? c) Spiega perché le due risposte sono diverse.

28. ●● Considera la Terra come una sfera di raggio $R = 6371$ km. a) A quale distanza dal piano dell'equatore si trova il piano del parallelo di latitudine 60°? b) Calcola il raggio e la lunghezza di quel parallelo con la formula della sezione di una sfera. c) Confronta la lunghezza con quella dell'equatore.

### Verso l'esame

29. ●● Nello stile delle prove nazionali. Un furgone ha un vano di carico a forma di parallelepipedo rettangolo, lungo 2,4 m, largo 1,8 m e alto 1,6 m. Qual è la lunghezza massima di un'asta rigida (di spessore trascurabile) che si può sistemare nel vano?

**A.** 3,0 m
**B.** 5,8 m
**C.** 3,4 m
**D.** 2,96 m

30. ●● Nello stile delle prove nazionali. Un drone rileva quattro punti di un terreno (coordinate in metri, $z$ = quota): $A(0; 0; 10)$, $B(20; 0; 12)$, $C(0; 30; 7)$, $D(20; 30; 9)$. a) Scrivi l'equazione del piano per $A$, $B$, $C$. b) Il punto $D$ sta sullo stesso piano? c) Quale quota ha il terreno nel punto di coordinate orizzontali (10; 10), se è piano? d) Spostandosi nella direzione dell'asse $x$ il terreno sale o scende, e di quanti metri ogni 10 m?

31. ●● Spunto per il colloquio. Nel 1637 Descartes pubblicò *La Géométrie* come saggio che accompagnava il *Discours de la méthode*. Spiega con un esempio tratto da questo capitolo che cosa significa tradurre un problema geometrico in un problema algebrico, e collega l'idea alle regole del metodo cartesiano, alla concezione cartesiana della materia come estensione e all'uso dei vettori in fisica.

32. ●●● Sfida. Il tetraedro di vertici $A(1; 1; 1)$, $B(1; -1; -1)$, $C(-1; 1; -1)$, $D(-1; -1; 1)$ ha i vertici in quattro vertici di un cubo. a) Dimostra che è regolare. b) Verifica che la faccia $BCD$ sta sul piano $x + y + z + 1 = 0$ e calcola l'altezza del tetraedro relativa a quella faccia. c) Trova il piano della faccia $ACD$ e calcola il coseno dell'angolo tra le due facce $BCD$ e $ACD$ (l'angolo diedro interno al tetraedro).

## PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sulla geometria analitica, con le coordinate nello spazio e le equazioni di piani e sfere.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Descartes e Fermat e sulla nascita della geometria analitica nel Seicento.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il problema della diagonale del parallelepipedo, risolto riconducendolo a un problema piano.

# Glossario del capitolo

**Cerchio massimo**
Sezione di una sfera con un piano passante per il centro; ha lo stesso raggio della sfera.

**Componenti di un vettore**
Le differenze delle coordinate degli estremi di un segmento orientato che rappresenta il vettore.

**Coordinate di un punto**
La terna $(x; y; z)$ ottenuta tagliando gli assi con i piani per il punto paralleli ai piani coordinati: ascissa, ordinata, quota.

**Distanza di un punto da un piano**
La lunghezza del segmento di perpendicolare dal punto al piano: $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

**Distanza tra due punti**
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

**Equazione cartesiana del piano**
Un'equazione di primo grado $ax + by + cz + d = 0$, con $a, b, c$ non tutti nulli.

**Equazioni parametriche di una retta**
$x = x_A + v_x\, t$, $y = y_A + v_y\, t$, $z = z_A + v_z\, t$: a ogni valore del parametro $t$ corrisponde un punto della retta.

**Latitudine e longitudine**
Le coordinate geografiche: l'angolo tra il raggio terrestre di un punto e il piano dell'equatore, e l'angolo tra il meridiano del punto e quello di Greenwich.

**Piani coordinati**
I piani $xy$, $xz$, $yz$, individuati da due assi; dividono lo spazio in otto ottanti.

**Piano tangente a una sfera**
Piano che ha un solo punto $T$ in comune con la sfera; è perpendicolare al raggio $CT$ e dista $r$ dal centro.

**Prodotto scalare**
Il numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$; è nullo per vettori perpendicolari.

**Rette sghembe**
Rette dello spazio non complanari: né incidenti né parallele.

**Riferimento cartesiano ortogonale (nello spazio)**
Un'origine $O$ e tre assi orientati $x$, $y$, $z$ per $O$, a due a due perpendicolari e con la stessa unità di misura.

**Sfera**
Insieme dei punti dello spazio che hanno distanza $r$ da un punto $C$: $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$.

**Terna destrorsa**
Disposizione degli assi per cui, con il pollice della mano destra lungo $x$ e l'indice lungo $y$, il medio indica il verso positivo di $z$.

**Traccia di un piano**
La retta in cui un piano taglia un piano coordinato.

**Versore**
Vettore di modulo 1; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono i versori degli assi.

**Vettore direzione**
Vettore non nullo parallelo a una retta.

**Vettore normale**
Vettore non nullo perpendicolare a un piano; per $ax + by + cz + d = 0$ è $(a; b; c)$.

# Soluzioni

**1.** C. Ha l'ascissa nulla; le altre due coordinate non sono nulle, quindi non sta su un asse.

**2.** B. I coefficienti di $x$, $y$, $z$ sono 3, 0, −1.

**3.** D. Manca la variabile $z$: il vettore normale $(2; -1; 0)$ è perpendicolare a $\mathbf{k}$.

**4.** A. $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

**5.** D. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4 + 4 + 1 = 9$.

**6.** B. $3 + 2k - 1 = 0$, $k = -1$.

**7.** a) F: possono essere sghembe. b) V. c) V: il primo è −2 volte il secondo. d) F: $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ non ha soluzioni. e) F: la retta è parallela al piano (o vi giace); è perpendicolare se il vettore direzione è parallelo al vettore normale.

**8.** a) $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$. b) prodotto scalare. c) $\sqrt{r^2 - d^2}$. d) sghembe.

**9.** a) $AB = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$, $M(-1; 0; \frac{3}{2})$. b) $CD = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$, $M(3; \frac{3}{2}; 4)$.

**10.** a) $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 3$. b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4 - 2 + 2 = -4$; $\cos\theta = -\frac{4}{9}$, $\theta \approx 116{,}39°$. c) $\mathbf{w} = 2\mathbf{u}$: $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ paralleli (stesso verso); $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$ e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{t} = 0$: $\mathbf{t}$ è perpendicolare a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{w}$; nessun'altra coppia è parallela o perpendicolare ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 2$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -8$). d) $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

**11.** a) $2(x - 1) + (y + 2) - (z - 3) = 0$, cioè $2x + y - z + 3 = 0$. b) $3x - y + 2z + d = 0$ con $-1 - 2 + d = 0$: $3x - y + 2z + 3 = 0$. c) $y = -3$.

**12.** a) $AB = (1; 1; -2)$, $AC = (-1; 3; -1)$ non proporzionali. Il sistema $a + 2c + d = 0$, $2a + b + d = 0$, $3b + c + d = 0$ dà, con $d = -13$, $5x + 3y + 4z - 13 = 0$. Controllo: $5 + 8 - 13 = 0$; $10 + 3 - 13 = 0$; $9 + 4 - 13 = 0$. b) $AB = (1; 2; -1)$ e $AC = (3; 6; -3) = 3AB$: i punti sono allineati, e per una retta passano infiniti piani.

**13.** β: $(4; -2; 6) = 2(2; -1; 3)$ ma $5 \neq 2 \cdot (-1)$: parallelo e distinto. γ: $2 - 5 + 3 = 0$: perpendicolare. δ: l'equazione è −3 volte quella di α ($-3 \cdot (-1) = 3$): coincidente.

**14.** a) $\frac{|2 - 4 - 1 + 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3}$. b) $\frac{9}{3} = 3$; i punti della perpendicolare sono $(t; 2t; 2t)$, e $9t - 9 = 0$ dà $t = 1$, $H(1; 2; 2)$. c) $(-1; 0; 0)$ sta sul primo piano; la sua distanza dal secondo è $\frac{|-1 - 8|}{3} = 3$.

**15.** a) $\mathbf{v} = (2; 1; 3)$: $x = 2 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = 3t$. b) $C$: $t = 3$ dà $(8; 2; 9)$, appartiene. $D$: dalla prima $t = -1$, ma allora $z = -3 \neq -2$: non appartiene. c) $x = 0$ per $t = -1$: $(0; -2; -3)$.

**16.** $\mathbf{v} = (2; -1; 1)$. α: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2 - 1 - 1 = 0$, e il punto $(1; 0; 3)$ di $r$ dà $1 + 0 - 3 + 4 = 2 \neq 0$: $r$ è parallela ad α e non vi giace (la distanza è $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$). β: $2 + 2 + 1 = 5 \neq 0$, incidente; $(1 + 2t) + 2t + (3 + t) - 2 = 0$ dà $t = -\frac{2}{5}$ e il punto $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{13}{5})$. γ: $(4; -2; 2) = 2\mathbf{v}$, perpendicolare.

**17.** a) Direzioni $(1; -1; 1)$ e $(0; 1; -2)$ non proporzionali; $1 + t = 2$ dà $t = 1$, $-t = 1 + u$ dà $u = -2$, ma allora $2 + t = 3$ e $-2u = 4$: nessuna soluzione, $r$ e $s$ sono sghembe. b) $(-2; 2; -2) = -2(1; -1; 1)$: parallele; il punto $(3; 0; 4)$ di $p$ non sta su $r$ (per $x = 3$ è $t = 2$ e $y = -2$): parallele distinte. c) $1 + t = u$, $-t = -3 + u$, $2 + t = 3$: $t = 1$, $u = 2$, e la seconda è verificata $(-1 = -1)$: incidenti in $(2; -1; 3)$.

**18.** a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4 + 1 + 9 - 5 = 9$: centro $(-2; 1; 3)$, raggio 3. $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$: centro $(-3; 0; 4)$, raggio 5; manca il termine noto, quindi $(0; 0; 0)$ soddisfa l'equazione (infatti la distanza del centro da $O$ è 5). b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = -2 < 0$: nessun punto. c) Centro $(2; 0; 1)$, punto medio di $AB$; raggio $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16 + 16}}{2} = 3$: $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$.

**19.** Centro $C(1; -1; 0)$, $r = 3$. a) α: $d = \frac{|2 - 1 + 5|}{3} = 2 < 3$, secante, raggio $\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. β:

$d = \frac{|1+2+6|}{3} = 3$, tangente; dalla perpendicolare $(1+t; -1-2t; 2t)$ si ha $9+9t=0$, $t=-1$, punto $(0;1;-2)$. γ: $d = 5 > 3$, esterno. b) $CT = (0;0;3)$: il piano tangente è $z = 3$.

**20.** $AB = (2;1;2)$, $AC = (-2;2;1)$: $|AB| = |AC| = 3$ e $AB \cdot AC = -4+2+2 = 0$, quindi il triangolo è rettangolo in $A$ e isoscele; $BC = \sqrt{16+1+1} = 3\sqrt{2}$ (controllo con Pitagora: $9+9=18$). Area $\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$. Baricentro $G(1;3;1)$.

**21.** a) $2(x-1)+(z-3)=0$ dà $2x+z-5=0$: il termine noto è $-(2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = -5$, non $+5$ (infatti $A$ non soddisfa l'equazione scritta). b) Le equazioni sono proporzionali anche nel termine noto: i piani coincidono. c) Completando i quadrati, $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = -5$: non c'è alcun punto, quindi nessuna sfera.

**22.** *Traccia.* Se $(x_0; y_0; z_0)$ soddisfa $ax+by+d=0$, la soddisfa anche $(x_0; y_0; z)$ per ogni $z$, perché $z$ non compare: il piano contiene tutta la retta verticale per ogni suo punto, quindi è parallelo all'asse $z$ (equivalentemente, il vettore normale $(a; b; 0)$ è perpendicolare a $\mathbf{k}$). Se $d=0$, la terna $(0;0;0)$ soddisfa l'equazione. L'equazione $x=0$ rappresenta il piano $yz$.

**23.** Con $O(0;0;0)$ e il vertice opposto $(1;1;1)$, le quattro diagonali uniscono $(0;0;0)$–$(1;1;1)$, $(1;0;0)$–$(0;1;1)$, $(0;1;0)$–$(1;0;1)$, $(0;0;1)$–$(1;1;0)$: tutte hanno lo stesso punto medio $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, quindi passano per esso. Le direzioni $(1;1;1)$ e $(-1;1;1)$ danno $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\theta \approx 70{,}53°$ (lo stesso vale per ogni altra coppia).

**24.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2$; i quadrati $x^2$, $y^2$, $z^2$ si semplificano e resta $-2x-4z+5 = -6x-8y+25$, cioè $4x+8y-4z-20=0$, ossia $x+2y-z-5=0$: un piano. Il suo vettore normale $(1;2;-1)$ è parallelo ad $AB = (2;4;-2)$, e il punto medio $M(2;2;1)$ lo soddisfa $(2+4-1-5=0)$: è il piano perpendicolare ad $AB$ nel punto medio.

**25.** a) $\sqrt{14\,400 + 8100 + 6400} = \sqrt{28\,900} = 170$ m. b) $x = 120t$, $y = 90t$, $z = 80t$, con $0 \le t \le 1$. c) $80t = 60$, $t = \frac{3}{4}$: $(90; 67{,}5; 60)$. d) $\sqrt{90^2 + 67{,}5^2} = 112{,}5$ m.

**26.** a) $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 6 - 4 + 6 = 8$ J. b) $|\mathbf{F}| = 7$ N, $|\mathbf{s}| = 3$ m, $\cos\theta = \frac{8}{21}$, $\theta \approx 67{,}6°$. c) $\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ N.

**27.** a) Per $x=2$: $2+2z-10=0$, $z=4$: il soffitto è a 4 m, cioè 2 m sopra la lampada. b) $\frac{|2+4-10|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79$ m. c) La distanza si misura sulla perpendicolare al soffitto, che è inclinato; il segmento verticale è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui la distanza è un cateto, quindi è più lungo.

**28.** a) $R \operatorname{sen} 60° \approx 5517$ km. b) $\rho = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 60°} = R \cos 60° \approx 3186$ km; lunghezza $2\pi\rho \approx 20\,015$ km. c) L'equatore misura $2\pi R \approx 40\,030$ km: il parallelo di 60° è lungo la metà.

**29.** C. La diagonale del parallelepipedo: $\sqrt{2{,}4^2 + 1{,}8^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{5{,}76 + 3{,}24 + 2{,}56} = \sqrt{11{,}56} = 3{,}4$ m.

**30.** a) Con $A$: $10c+d=0$; con $B$: $20a+12c+d=0$; con $C$: $30b+7c+d=0$. Con $c=-10$: $d=100$, $a=1$, $b=-1$, cioè $x-y-10z+100=0$, ovvero $z = 10 + \frac{x-y}{10}$. b) $20-30-90+100=0$: sì. c) $z = 10+0 = 10$ m. d) Sale: a ogni aumento di 10 m in $x$ la quota cresce di 1 m.

**31.** *Traccia.* 1) Esempio: la distanza di un vertice del cubo dalla diagonale, ottenuta con un'equazione di primo grado in $t$, o il piano per tre punti come sistema lineare. 2) Il metodo cartesiano: evidenza, divisione delle difficoltà, ordine dal semplice al complesso, enumerazione; la geometria analitica rende ogni passo un calcolo controllabile. 3) La materia come *res extensa*: se l'essenza dei corpi è l'estensione, la fisica può diventare geometria e quindi calcolo. 4) Il confronto con Fermat e con il metodo sintetico degli antichi (Euclide). 5) In fisica forze e campi sono vettori dello spazio: si sommano per componenti e il lavoro è un prodotto scalare. 6) La matematizzazione della natura del Seicento, che porta a Newton e al calcolo infinitesimale.

**32.** a) Ogni spigolo ha componenti con due valori $\pm 2$ e uno 0 (per esempio $AB = (0;-2;-2)$), quindi misura $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$: le sei distanze sono uguali. b) $B$:

$1 - 1 - 1 + 1 = 0$; $C$: $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$; $D$: $-1 - 1 + 1 + 1 = 0$. Altezza: $\frac{|1 + 1 + 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$ (controllo: per un tetraedro regolare di spigolo $s$ l'altezza è $s\sqrt{\frac{2}{3}}$, e $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$). c) Il piano $x - y - z + 1 = 0$ passa per $A$, $C$, $D$. I vettori normali $(1; 1; 1)$ e $(1; -1; -1)$ formano un angolo con coseno $-\frac{1}{3}$; il diedro interno è il supplementare, con coseno $\frac{1}{3}$ ($\approx 70{,}53°$), come si verifica sulla sezione normale (l'angolo in $M$, punto medio di $CD$, del triangolo $AMB$, con $MA = MB = \sqrt{6}$ e $AB = 2\sqrt{2}$).