Matematica 4 · Parte III · Esponenziali e logaritmi · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte III · pagine 235–238 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte III · Esponenziali e logaritmi

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica: arrotonda i risultati solo alla fine e, quando è possibile, scrivi anche il risultato esatto (per esempio $\log_3 25$ prima di 2,930). Scrivi tutti i passaggi, le condizioni di esistenza e il controllo delle soluzioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Il numero $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ è uguale a:
   - **A.** $2^{2\sqrt{2}}$
   - **B.** 4
   - **C.** $2^{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$
   - **D.** 8

2. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Della funzione $y = 0{,}4^x$ si può dire che:
   - **A.** è crescente
   - **B.** il suo grafico passa per il punto (1; 0)
   - **C.** per $x > 0$ si ha $0 < y < 1$
   - **D.** assume anche valori negativi

3. ● *(0,5 punti · cap. 8)* $\log_2 24 - \log_2 3$ vale:
   - **A.** 3
   - **B.** $\log_2 21$
   - **C.** 8
   - **D.** $\dfrac{\log_2 24}{\log_2 3}$

4. ● *(0,5 punti · cap. 8)* Il livello sonoro è $L = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$ decibel. Se l'intensità I di un suono viene moltiplicata per 100, il livello:
   - **A.** raddoppia
   - **B.** aumenta di 100 dB
   - **C.** aumenta di 2 dB
   - **D.** aumenta di 20 dB

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 7)* Risolvi: a) $8^x = 4^{x+1}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} > 9$; c) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, con la sostituzione $t = 3^x$.

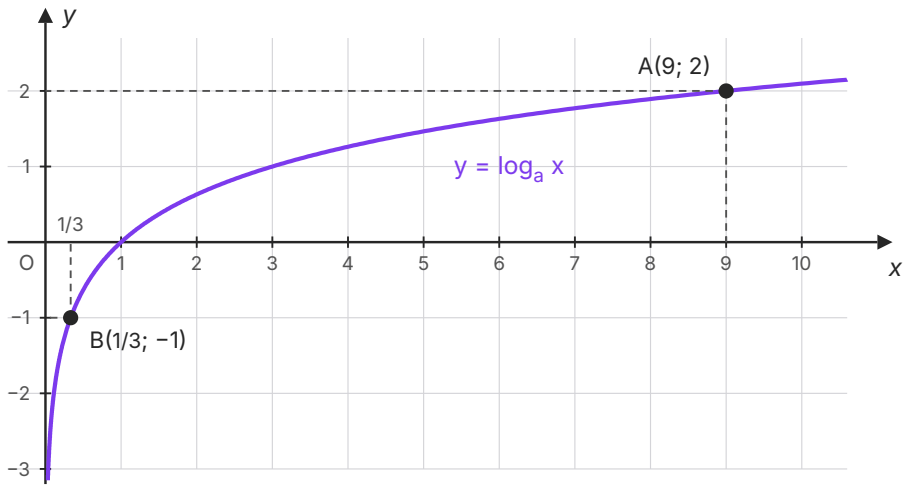

Figura V3.1 Il grafico della funzione $y = \log_a x$, calcolato dall'equazione con la stessa unità sui due assi, e i suoi punti $A(9; 2)$ e $B\left(\frac{1}{3}; -1\right)$.

6. ●● *(1 punto · cap. 8)* Nella Figura V3.1 è disegnato il grafico di una funzione $y = \log_a x$. a) Ricava la base a dal punto A e controlla il risultato con il punto B. b) Scrivi la funzione inversa e le coordinate dei punti che corrispondono ad A e a B sul suo grafico. c) Risolvi la disequazione $\log_a x \leq 2$, prima leggendo il grafico, poi algebricamente.

7. ●● *(1 punto · cap. 8)* a) Scrivi come un solo logaritmo e calcola senza calcolatrice $2 \log 5 + \log 8 - \log 2$. b) Sapendo che $\log 2 \approx 0{,}3010$ e $\log 3 \approx 0{,}4771$, calcola $\log 12$, $\log 1{,}5$ e $\log_2 3$ usando solo le proprietà dei logaritmi. c) Quante cifre ha il numero 2^{100}?

8. ●● *(1 punto · cap. 8)* Risolvi, scrivendo le condizioni di esistenza dove servono: a) $2 \cdot 3^x = 50$ (risultato esatto e approssimato a tre decimali); b) $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 3$.

Dimostrare

9. ●● *(1 punto · cap. 8)* a) Dimostra che, per $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$, si ha $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, partendo dalle proprietà delle potenze. b) Spiega perché l'equazione $\log x^2 = 2$ ha due soluzioni, mentre $2 \log x = 2$ ne ha una sola.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 7–8)* Un farmaco (dati inventati) viene eliminato dall'organismo con legge esponenziale: la sua concentrazione nel sangue si dimezza ogni 6 ore. Subito dopo un'iniezione la concentrazione è 80 mg/L. a) Scrivi la concentrazione $C(t)$ dopo t ore, prima con il tempo di dimezzamento e poi nella forma $C_0 \cdot e^{kt}$, calcolando k. b) Quanto vale la concentrazione dopo 12 ore? E dopo 15 ore? c) Il farmaco non ha più effetto sotto i 3 mg/L: dopo quante ore occorre una nuova dose?

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 7–8)* Si investono 2000 € al tasso annuo del 5 %. a) Calcola il capitale dopo 10 anni con l'accredito annuale degli interessi ($C_n = C_0\,(1 + i)^n$) e con la capitalizzazione continua ($C(t) = C_0 \cdot e^{it}$). b) In quanto tempo il capitale raddoppia nei due casi? Ricorda che, con l'accredito annuale, il capitale cambia solo alla fine di ogni anno. c) Quale tasso annuo, con l'accredito annuale, darebbe ogni anno lo stesso aumento della capitalizzazione continua al 5 %? d) Con la capitalizzazione continua, quale tasso servirebbe per raddoppiare il capitale in 10 anni?

Soluzioni

1. B. Per la proprietà della potenza di una potenza, $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2^2 = 4$. Le risposte A e C sono lo stesso numero, $2^{2\sqrt{2}} \approx 7{,}10$: si ottiene sommando gli esponenti invece di moltiplicarli.

2. C. La base 0,4 è compresa tra 0 e 1, quindi la funzione è decrescente e vale 1 per $x = 0$: per $x > 0$ si ha $0 < 0{,}4^x < 1$. Il grafico passa per (0; 1) e per (1; 0,4), non per (1; 0), e la funzione assume solo valori positivi.

3. A. Per la proprietà del quoziente, $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = 3$, perché $2^3 = 8$. La differenza dei logaritmi non è il logaritmo della differenza (B), né il quoziente dei logaritmi (D).

4. D. Con intensità $100I$: $10 \log \frac{100I}{I_0} = 10 (\log 100 + \log \frac{I}{I_0}) = 20 + L$: il livello aumenta di 20 dB, qualunque fosse all'inizio.

5. a) Base comune 2: $2^{3x} = 2^{2x+2}$, quindi $3x = 2x + 2$, $x = 2$. Verifica: $8^2 = 64 = 4^3$ ✓. b) $9 = (\frac{1}{3})^{-2}$; la base $\frac{1}{3}$ è minore di 1, quindi il verso si inverte: $x - 2 < -2$, cioè $x < 0$, l'intervallo $]-\infty; 0[$. Controllo: per $x = -1$, $(\frac{1}{3})^{-3} = 27 > 9$ ✓; per $x = 0$, $9 > 9$ è falso ✓. c) Poiché $9^x = (3^x)^2$, si ottiene $t^2 - 4t + 3 = 0$, con soluzioni $t = 1$ e $t = 3$, entrambe positive e quindi accettabili: $3^x = 1$ dà $x = 0$, $3^x = 3$ dà $x = 1$. Verifica: $1 - 4 + 3 = 0$ e $9 - 12 + 3 = 0$ ✓.

6. a) Il punto $A(9; 2)$ appartiene al grafico, quindi $\log_a 9 = 2$, cioè $a^2 = 9$; poiché la base è positiva, $a = 3$. Controllo con B: $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, perché $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ✓. b) L'inversa è $y = 3^x$; il suo grafico è il simmetrico rispetto alla retta $y = x$, quindi contiene i punti $A'(2; 9)$ e $B'(-1; \frac{1}{3})$ (coordinate scambiate). c) Sul grafico, la curva sta sotto la quota 2 o alla quota 2 per le ascisse comprese tra 0 (escluso) e 9 (incluso). Algebricamente: C.E. $x > 0$; $2 = \log_3 9$ e la base 3 è maggiore di 1, quindi il verso resta: $x \le 9$. Con le C.E.: $0 < x \le 9$, cioè $]0; 9]$.

7. a) $2 \log 5 + \log 8 - \log 2 = \log 25 + \log 8 - \log 2 = \log \frac{25 \cdot 8}{2} = \log 100$

b) $\log 12 = \log (2^2 \cdot 3) = 2 \log 2 + \log 3 \approx 0{,}6020 + 0{,}4771 = 1{,}0791$; $\log 1{,}5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0{,}1761$; per il cambiamento di base $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} \approx 1{,}585$ (controllo: $2^{1{,}585} \approx 3{,}000$). c) $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30{,}10$: la parte intera è 30, quindi il numero ha $30 + 1 = 31$ cifre ($10^{30} \le 2^{100} < 10^{31}$).

8. a) $3^x = 25$, quindi $x = \log_3 25 = \frac{\ln 25}{\ln 3} \approx 2{,}930$ (anche $2 \log_3 5$). Controllo: $2 \cdot 3^{2{,}930} \approx 50$ ✓. b) C.E.: $x - 1 > 0$ e $x + 1 > 0$, cioè $x > 1$. Con la proprietà del prodotto: $\log_2 [(x - 1)(x + 1)] = 3$, quindi $x^2 - 1 = 2^3 = 8$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Solo $x = 3$ rispetta le C.E. (per $x = -3$ gli argomenti sono negativi). Controllo: $\log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$ ✓.

9. a) Siano $m = \log_a x$ e $n = \log_a y$: per definizione $a^m = x$ e $a^n = y$. Per la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base, $\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, quindi, ancora per definizione di logaritmo, $\log_a \frac{x}{y} = m - n = \log_a x - \log_a y$. c.v.d. b) $\log x^2$ esiste per ogni $x \neq 0$ e l'equazione equivale a $x^2 = 100$: $x = 10$ oppure $x = -10$, entrambe accettabili. $2 \log x$ esiste solo per $x > 0$: l'equazione dà $\log x = 1$, $x = 10$, e basta. Le due espressioni coincidono solo per $x > 0$: la proprietà della potenza vale per argomenti positivi.

10. a) $C(t) = 80 \cdot (\frac{1}{2})^{t/6}$, con t in ore e C in mg/L. Nella forma con base e: $e^{6k} = \frac{1}{2}$, quindi

$k = -\dfrac{\ln 2}{6} \approx -0{,}1155$ (all'ora) e $C(t) = 80 \cdot e^{-0{,}1155t}$. b) 12 ore sono due tempi di dimezzamento: $C(12) = 80 \cdot \dfrac{1}{4} = 20$ mg/L. $C(15) = 80 \cdot (\dfrac{1}{2})^{2{,}5} = 80 \cdot 2^{-2{,}5} \approx 14{,}1$ mg/L (tra 20 mg/L e 10 mg/L, come deve essere). c) $80 \cdot (\dfrac{1}{2})^{t/6} < 3$, cioè $2^{t/6} > \dfrac{80}{3}$: la base 2 è maggiore di 1, quindi $\dfrac{t}{6} > \log_2 \dfrac{80}{3} = \dfrac{\ln (80/3)}{\ln 2} \approx 4{,}737$ e $t > 28{,}4$ ore. Una nuova dose serve dopo circa 28 ore e mezza (controllo: $C(28) \approx 3{,}1$ mg/L, $C(29) \approx 2{,}8$ mg/L).

11. a) Annuale: $2000 \cdot 1{,}05^{10} \approx 3257{,}79$ €. Continua: $2000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 10} = 2000 \cdot e^{0{,}5} \approx 3297{,}44$ €, circa 40 € in più. b) Annuale: serve $1{,}05^n \geq 2$, cioè $n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}21$; poiché il capitale cambia solo a fine anno, raddoppia dopo 15 anni (dopo 14 anni è circa 3959,86 €, dopo 15 circa 4157,86 €). Continua: $e^{0{,}05t} = 2$, $t = \dfrac{\ln 2}{0{,}05} \approx 13{,}86$ anni, cioè circa 13 anni e 10 mesi. c) In un anno la capitalizzazione continua moltiplica il capitale per $e^{0{,}05} \approx 1{,}05127$; il tasso annuo equivalente è $i = e^{0{,}05} - 1 \approx 0{,}0513$, circa il 5,13 % (controllo: $2000 \cdot 1{,}05127^{10} \approx 3297{,}4$ €, come in a). d) $e^{10i} = 2$, quindi $i = \dfrac{\ln 2}{10} \approx 0{,}0693$, circa il 6,93 % annuo.