Matematica 4 · Parte II · Funzioni circolari, vettori e spazio · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte II · pagine 183–186 del volume completo · estratto per lo studio

# Verifica di fine parte II · Funzioni circolari, vettori e spazio

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). È ammessa la calcolatrice scientifica: controlla la modalità DEG o RAD prima di ogni calcolo, arrotonda i risultati solo alla fine e, quando è possibile, scrivi anche il risultato esatto (per esempio $10\sqrt{3}$ prima di 17,32). Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione geometrica citando il teorema che usi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

### Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Se $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, allora $\text{tg}\,\alpha$ vale:

   **A.** $\frac{3}{4}$

   **B.** $-\frac{4}{3}$

   **C.** $-\frac{3}{4}$

   **D.** $-\frac{4}{5}$

2. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Quale uguaglianza è vera per tutti i numeri reali $\alpha$ e $\beta$?

   **A.** $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha$

   **B.** $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta$

   **C.** $\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$

   **D.** $\text{sen}(\pi-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

3. ● *(0,5 punti · cap. 5)* Due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno moduli $|\mathbf{a}| = 4$ e $|\mathbf{b}| = 3$ e formano un angolo di 120°. Il prodotto scalare $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ è:

   **A.** 6

   **B.** $-6\sqrt{3}$

   **C.** un vettore di modulo 12

   **D.** $-6$

4. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Nello spazio, quale affermazione è vera?

   **A.** due rette che non hanno punti in comune sono parallele

   **B.** due rette parallele a una stessa retta sono parallele tra loro

   **C.** una retta perpendicolare a una retta di un piano è perpendicolare al piano

   **D.** due piani perpendicolari a uno stesso piano sono paralleli tra loro

### Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 4)* a) Calcola senza calcolatrice $\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{7\pi}{6} + \text{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$, riducendo ogni angolo a un angolo acuto con gli angoli associati. b) Con le formule di addizione calcola in forma esatta cos 75° e tg 75°, scrivendo 75° = 45° + 30°.

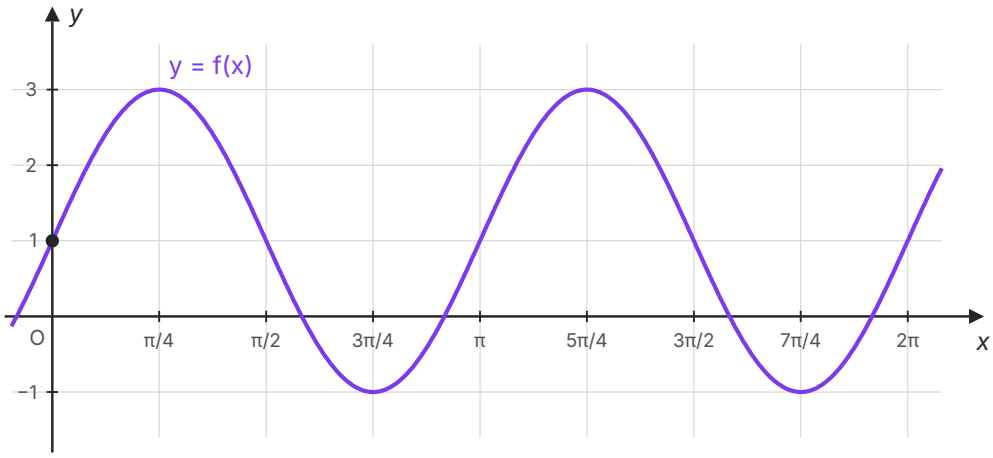


**Figura V2.1** Il grafico di una funzione sinusoidale $y = f(x)$, calcolato dalla sua equazione. Sull'asse $x$ le tacche sono multipli di $\frac{\pi}{4}$; le unità sui due assi sono diverse (una unità sull'asse $x$ è lunga circa 1,8 volte una unità sull'asse $y$). Il punto evidenziato è (0; 1).

6. ●● *(1 punto · cap. 4)* Nella Figura V2.1 è disegnato il grafico di una funzione $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi) + c$, con $A > 0$, $\omega > 0$ e $0 \le \varphi < 2\pi$. a) Leggi sul grafico il valore massimo e il valore minimo e ricava $A$ e $c$. b) Leggi il periodo $T$ e ricava $\omega$. c) La curva passa per il punto (0; 1) e lì la funzione è crescente: ricava $\varphi$ e scrivi l'equazione della funzione. d) Per quali valori di $x \in [0; 2\pi]$ la funzione vale 3? Rispondi con l'equazione e controlla sul grafico.

7. ●● *(1 punto · cap. 4)* Risolvi le equazioni, scrivendo tutte le soluzioni e poi quelle dell'intervallo $[0; 2\pi[$: a) $2\,\text{sen}\,x + \sqrt{3} = 0$; b) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, con la sostituzione $t = \cos x$.

8. ●● *(1 punto · cap. 5)* Nel triangolo $ABC$ si ha $b = 8$ cm, $c = 5$ cm e $\alpha = 60°$ (con le notazioni abituali: il lato $a$ è opposto al vertice $A$, dove l'angolo è $\alpha$). a) Calcola il lato $a$. b) Calcola gli angoli $\beta$ e $\gamma$, cominciando dall'angolo opposto al lato maggiore. c) Calcola l'area del triangolo e il raggio della circonferenza circoscritta. Controlla i risultati con la somma degli angoli e con il teorema dei seni.

### Dimostrare

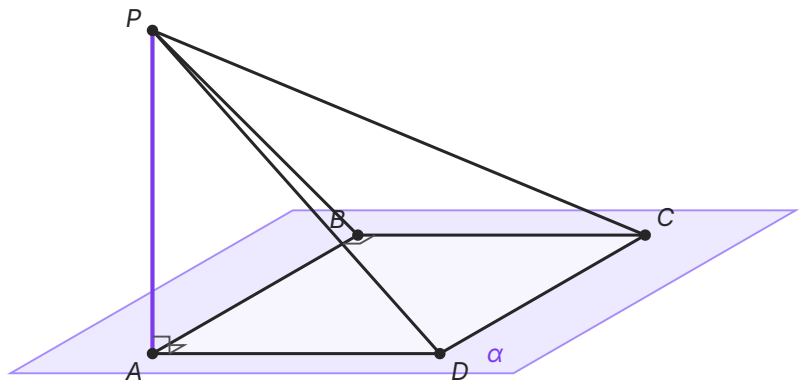


**Figura V2.2** Il rettangolo *ABCD* nel piano α e il segmento *PA* perpendicolare ad α, disegnati in assonometria; sono segnati gli angoli retti in *A* e in *B*.

9. ●● *(1 punto · cap. 6)* Il rettangolo *ABCD* giace nel piano α e il segmento *PA* è perpendicolare ad α (Figura V2.2), con $PA = 9$ cm, $AB = 12$ cm e $BC = 8$ cm. a) Dimostra che il triangolo *PBC* è rettangolo in *B*, nominando il teorema che usi e controllando che tutte le sue ipotesi siano soddisfatte. b) Spiega perché anche il triangolo *PDC* è rettangolo, e in quale vertice. c) Calcola *PB*, *PC* e la distanza del punto *P* dalla retta *CD*.

### Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 5)* Per misurare la larghezza di un fiume a rive parallele si piantano sulla riva rettilinea due paletti *A* e *B*, distanti 80 m, e si mira un albero *C* sulla riva opposta: $\angle CAB = 62°$ e $\angle CBA = 48°$. a) Calcola le distanze *AC* e *BC*. b) Calcola la larghezza del fiume. c) Controlla il risultato calcolando la larghezza in un secondo modo.

11. ●● *(1 punto · cap. 5)* Una chiatta avanza in un canale rettilineo, trainata da due funi tese dalle due rive; funi e spostamento stanno in un piano orizzontale. Nel riferimento con l'asse $x$ lungo il canale, nel verso del moto, la forza $\mathbf{F}_1$ ha modulo 120 N e forma con l'asse $x$ un angolo di 30°, la forza $\mathbf{F}_2$ ha modulo 100 N e forma un angolo di −45°. a) Calcola le componenti di $\mathbf{F}_1$, di $\mathbf{F}_2$ e della risultante $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, il modulo di $\mathbf{R}$ e l'angolo che $\mathbf{R}$ forma con l'asse $x$. b) La chiatta avanza di 15 m: calcola il lavoro di ciascuna forza e quello della risultante, e spiega perché l'ultimo è la somma dei primi due. c) Calcola $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2$ in componenti e controlla il risultato con la definizione di prodotto scalare.

### Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 5–6)* Una piramide regolare a base quadrata $ABCD$, di vertice $V$, ha il lato di base di 8 cm e l'altezza $VO$ di 3 cm. a) Calcola l'apotema e lo spigolo laterale. b) Calcola l'ampiezza del diedro formato da una faccia laterale con la base e l'angolo che uno spigolo laterale forma con la base. c) Calcola l'ampiezza del diedro formato dalle due facce laterali $VBC$ e $VDC$. (Suggerimento: conduci nella faccia $VBC$ l'altezza $BK$ relativa al lato $VC$; spiega perché anche $DK$ è perpendicolare a $VC$ e perché l'angolo $\angle BKD$ misura il diedro.)

# Soluzioni

**1.** C. Dalla relazione fondamentale $\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; nel secondo quadrante il coseno è negativo, quindi $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$. La risposta D è il coseno, B l'inverso della tangente; A dimentica il segno.

**2.** A. È la formula di duplicazione del seno. Le altre sono false: con $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 1$ mentre $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \sqrt{2}$; la forma giusta è $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ (per $\alpha = 0$ la C dà $-1$ invece di 1); gli angoli supplementari hanno lo stesso seno, $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

**3.** D. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos 120° = 4\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$: un numero, negativo perché l'angolo è ottuso. Il prodotto scalare non è un vettore (C); A dimentica il segno del coseno, B usa il seno.

**4.** B. È la transitività del parallelismo. A è falsa: due rette senza punti comuni possono essere sghembe (in un cubo, uno spigolo della base e uno spigolo verticale che non lo tocca). C è falsa: servono due rette incidenti del piano. D è falsa: due pareti vicine di una stanza sono perpendicolari al pavimento e si incontrano lungo uno spigolo.

**5.** a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; la tangente ha periodo $\pi$ e la funzione è dispari: $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$. La somma è $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -1$. b) $\cos 75° = \cos 45°\cos 30° - \operatorname{sen}45°\operatorname{sen}30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (circa 0,2588). $\operatorname{tg}75° = \frac{\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}30°}{1 - \operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°} = \frac{1+\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}/3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$ (circa 3,732); la formula si può usare perché 45°, 30° e 75° sono diversi da 90°. Controllo con la calcolatrice in modalità DEG ✓.

**6.** a) Il massimo è 3 (in $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$), il minimo è $-1$ (in $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$). L'ampiezza è metà della differenza, $A = \frac{3-(-1)}{2} = 2$; la curva oscilla attorno alla retta $y = c$ a metà tra massimo e minimo: $c = \frac{3+(-1)}{2} = 1$. b) Tra due massimi consecutivi c'è un periodo: $T = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$, quindi $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. c) Da $2\operatorname{sen}\varphi + 1 = 1$ si ha $\operatorname{sen}\varphi = 0$, cioè $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$. Con $\varphi = \pi$ si otterrebbe $y = 2\operatorname{sen}(2x + \pi) + 1 = -2\operatorname{sen}2x + 1$, che in 0 decresce; quindi $\varphi = 0$ e $y = 2\operatorname{sen}2x + 1$. d) $2\operatorname{sen}2x + 1 = 3$ dà $\operatorname{sen}2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$): in $[0; 2\pi]$ le soluzioni sono $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, i due massimi letti in a) ✓.

**7.** a) $\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: l'angolo acuto con seno $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\frac{\pi}{3}$; il seno è negativo nel terzo e nel quarto quadrante, quindi $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In $[0; 2\pi[$: $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. b) $2t^2 + t - 1 = 0$ ha soluzioni $t = \frac{1}{2}$ e $t = -1$ (infatti $2t^2 + t - 1 = (2t-1)(t+1)$), entrambe in $[-1; 1]$. $\cos x = \frac{1}{2}$ dà $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\cos x = -1$ dà $x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). In $[0; 2\pi[$: $\frac{\pi}{3}$, $\pi$, $\frac{5\pi}{3}$. Verifica per $x = \pi$: $2\cdot 1 - 1 - 1 = 0$ ✓; per $\frac{\pi}{3}$: $2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ ✓.

**8.** a) Teorema del coseno: $a^2 = 64 + 25 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60° = 89 - 40 = 49$, quindi $a = 7$ cm. b) Il lato maggiore è $b = 8$:

$\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{49+25-64}{70} = \dfrac{1}{7}$, quindi $\beta \approx 81{,}79°$ (acuto: il triangolo è acutangolo) e $\gamma = 180° - 60° - \beta \approx 38{,}21°$. Cominciare dall'angolo maggiore con il coseno evita l'ambiguità del seno, che non distingue un angolo dal suo supplementare. c) Area $= \dfrac{1}{2}\, bc \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm². Dal teorema dei seni $2r = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{7}{\sqrt{3}/2}$, quindi $r = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}04$ cm. Controllo: $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} \approx \dfrac{8}{0{,}9897} \approx 8{,}08$ e $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \approx \dfrac{5}{0{,}6186} \approx 8{,}08$, uguali a $\dfrac{7}{\operatorname{sen} 60°} \approx 8{,}08$✓; la somma degli angoli è 180° per costruzione.

**9.** a) Ipotesi del teorema delle tre perpendicolari: $PA \perp \alpha$ nel punto $A$; la retta $BC$ sta in $\alpha$ e non passa per $A$; $AB \perp BC$ con $B \in BC$, perché $ABCD$ è un rettangolo. Allora $B$ è il piede della perpendicolare condotta da $A$ alla retta $BC$ e il teorema dà $PB \perp BC$: il triangolo $PBC$ è rettangolo in $B$. c.v.d. b) Lo stesso ragionamento con la retta $CD$: $AD \perp CD$ in $D$ e $A$ non sta su $CD$, quindi $PD \perp CD$: il triangolo $PDC$ è rettangolo in $D$. c) $PA$ è perpendicolare a ogni retta di $\alpha$ per $A$, quindi $PAB$ è rettangolo in $A$: $PB = \sqrt{81+144} = 15$ cm. Nel triangolo $PBC$, rettangolo in $B$: $PC = \sqrt{225+64} = 17$ cm (controllo: $AC^2 = 144+64 = 208$ e $PA^2 + AC^2 = 81 + 208 = 289 = 17^2$ ✓). Poiché $PD \perp CD$, la distanza di $P$ dalla retta $CD$ è $PD = \sqrt{81+64} = \sqrt{145} \approx 12{,}04$ cm (con $AD = BC = 8$ cm).

**10.** a) Nel triangolo $ABC$ l'angolo in $C$ è $180° - 62° - 48° = 70°$ (caso ALA). Teorema dei seni: $AC = \dfrac{80\cdot \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 63{,}27$ m e $BC = \dfrac{80\cdot \operatorname{sen} 62°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 75{,}17$ m. b) La larghezza è l'altezza $CH$ relativa ad $AB$; nel triangolo rettangolo $AHC$: $CH = AC\cdot \operatorname{sen} 62° \approx 55{,}86$ m, circa 55,9 m. c) Dal triangolo rettangolo $BHC$: $BC\cdot \operatorname{sen} 48° \approx 75{,}17 \cdot 0{,}7431 \approx 55{,}86$ m ✓. (Un altro controllo: $AH = AC\cos 62° \approx 29{,}70$ m e $HB = BC\cos 48° \approx 50{,}30$ m, con somma 80 m ✓.)

**11.** a) $\mathbf{F}_1(120\cos 30°; 120\operatorname{sen} 30°) = (60\sqrt{3}; 60) \approx (103{,}92; 60{,}00)$ N; $\mathbf{F}_2(100\cos 45°; -100\operatorname{sen} 45°) = (50\sqrt{2}; -50\sqrt{2}) \approx (70{,}71; -70{,}71)$ N; sommando le componenti, $\mathbf{R} \approx (174{,}63; -10{,}71)$ N. $|\mathbf{R}| = \sqrt{174{,}63^2 + (-10{,}71)^2} \approx 174{,}96$ N. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-10{,}71}{174{,}63} \approx -0{,}0613$: poiché $R_x > 0$ e $R_y < 0$, il vettore sta nel quarto quadrante e $\theta \approx -3{,}51°$: la risultante è quasi allineata con il canale, appena spostata verso la riva di $\mathbf{F}_2$. (Controllo con il teorema del coseno: l'angolo fra le due forze è 75°, e $\sqrt{120^2 + 100^2 + 2\cdot 120\cdot 100\cdot \cos 75°} \approx 174{,}96$ ✓.) b) Lo spostamento è $\mathbf{s}(15; 0)$ m. $W_1 = 120\cdot 15\cdot \cos 30° = 900\sqrt{3} \approx 1558{,}8$ J; $W_2 = 100\cdot 15\cdot \cos 45° = 750\sqrt{2} \approx 1060{,}7$ J; $W_R = \mathbf{R}\cdot\mathbf{s} \approx 174{,}63\cdot 15 \approx 2619{,}5$ J, e infatti $1558{,}8 + 1060{,}7 = 2619{,}5$. È la proprietà distributiva: $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{s} = \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{s} + \mathbf{F}_2\cdot\mathbf{s}$. c) $\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2 = 60\sqrt{3}\cdot 50\sqrt{2} + 60\cdot(-50\sqrt{2}) = 3000\sqrt{6} - 3000\sqrt{2} = 3000(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \approx 3$ (in N²). Con la definizione: $120\cdot 100\cdot\cos 75° = 12\,000\cdot \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 3000(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, con il valore di cos 75° dell'esercizio 5 ✓.

**12.** a) Sia $O$ il centro del quadrato e $M$ il punto medio di $BC$: $OM = 4$ cm e $OC = 4\sqrt{2}$ cm (metà diagonale). Apotema $VM = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm; spigolo $VC = \sqrt{3^2+32} = \sqrt{41} \approx 6{,}40$ cm (controllo con il triangolo $VMC$: $5^2 + 4^2 = 41$ ✓). b) $OM \perp BC$ e, per il teorema delle tre perpendicolari, $VM \perp BC$: l'angolo $\angle VMO$ è la sezione normale del diedro faccia–base, con $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{3}{4}$, $\varphi \approx 36{,}87°$. La proiezione dello spigolo $VC$ sulla base è $OC$: $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}530$, $\psi \approx 27{,}94°$. c) La faccia $VBC$ ha area $\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5 = 20$ cm², quindi $BK = \dfrac{2\cdot 20}{\sqrt{41}} = \dfrac{40}{\sqrt{41}} \approx 6{,}25$ cm. Il piede $K$ cade tra $V$ e $C$, perché gli angoli della faccia in $V$ e in $C$ sono acuti ($\cos\angle BVC = \dfrac{41+41-64}{2\cdot 41} = \dfrac{9}{41}$, $\cos\angle BCV = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$). Le facce $VBC$ e $VDC$ sono congruenti (tre lati uguali) e simmetriche rispetto al piano $VAC$, che contiene $VC$: la simmetria lascia fisso $K$ e porta $B$ in $D$, quindi $DK \perp VC$ e $DK = BK$. Le

due perpendicolari allo spigolo nello stesso punto, una per faccia, formano la sezione normale $\angle BKD$. Con $BD = 8\sqrt{2}$ cm e il teorema del coseno:

$$\cos\delta = \frac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2 \cdot BK \cdot DK} = 1 - \frac{128}{2 \cdot 1600/41} = 1 - 1{,}64 = -0{,}64,$$

quindi $\delta \approx 129{,}79°$. Il diedro è ottuso, come ci si aspetta in una piramide bassa, le cui facce si aprono quasi a formare un piano.