Verifica di fine parte I · Funzioni, ellisse e iperbole

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi, le condizioni di esistenza e il controllo delle soluzioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

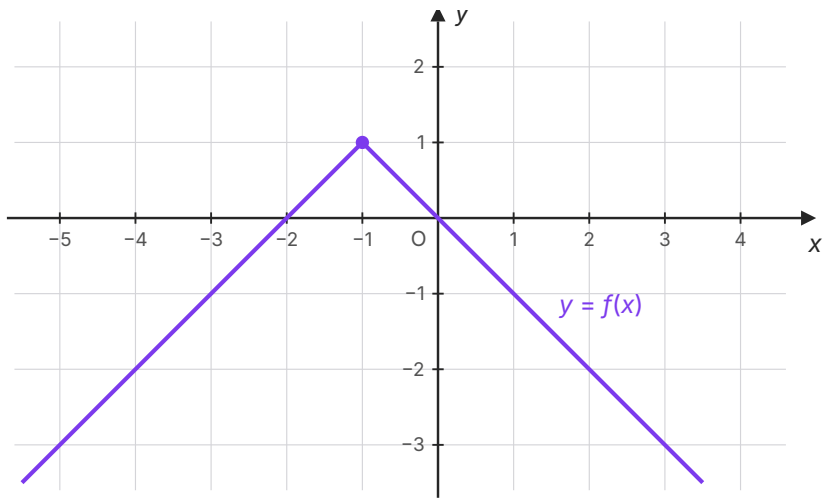

Figura V1.1 Il grafico di una funzione $y = f(x)$, ottenuto da quello di $y = |x|$ con due trasformazioni; stessa unità sui due assi. Il punto evidenziato è il vertice.

1. ● *(0,5 punti · cap. 1)* La funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, definita in $\mathbb{R}$:

   A. è pari
   B. è periodica
   C. è dispari
   D. non è né pari né dispari

2. ● *(0,5 punti · cap. 1)* Il resto della divisione di $A(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ per $x + 1$ è:

   A. 2
   B. 4
   C. 6
   D. 0

3. ●● *(0,5 punti · cap. 1)* Il grafico della Figura V1.1 è quello della funzione:
   A. $y = |x + 1| - 1$
   B. $y = 1 - |x - 1|$
   C. $y = -|x| + 1$
   D. $y = 1 - |x + 1|$

4. ●● *(0,5 punti · cap. 3)* L'iperbole equilatera $xy = 2$:
   A. ha gli asintoti $y = \pm x$
   B. ha i fuochi $(2; 2)$ e $(-2; -2)$
   C. ha i vertici $(\pm\sqrt{2}; 0)$
   D. ha eccentricità 2

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 1)* Sia $f(x) = 2 + \sqrt{x - 1}$. a) Determina il dominio, l'immagine e gli eventuali zeri di f. b) Spiega perché f, considerata dal suo dominio alla sua immagine, è invertibile; trova f^{-1}, con il suo dominio, e verifica che $f^{-1}(f(5)) = 5$. c) Data $g(x) = x^2 - 5$, calcola $(g \circ f)(5)$ e determina il dominio della funzione composta $f \circ g$.

6. ●● *(1 punto · cap. 1)* Sia $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. a) Senza eseguire divisioni, trova il resto della divisione di $P(x)$ per $x + 2$ e spiega perché $P(x)$ è divisibile per $x - 2$. b) Dividi $P(x)$ per $x - 2$ con la regola di Ruffini, scomponi $P(x)$ in fattori di primo grado e risolvi l'equazione $P(x) = 0$.

7. ●● *(1 punto · cap. 1)* Risolvi le disequazioni, scrivendo le condizioni di esistenza dove servono e il risultato come intervallo: a) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x + 1} \le 0$; b) $(x - 2)^2(x + 1) > 0$.

8. ●● *(1 punto · cap. 2)* Un'ellisse con i fuochi sull'asse x ha eccentricità $\dfrac{1}{2}$ e passa per il punto $P(2; 3)$. a) Scrivine l'equazione canonica. b) Trova i vertici e i fuochi. c) Scrivi la retta tangente all'ellisse in P e verifica il risultato con la condizione $\Delta = 0$.

9. ●● *(1 punto · cap. 3)* È data l'iperbole $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$. a) Scrivila in forma canonica e trova i semiassi, i vertici e i fuochi. b) Scrivi le equazioni degli asintoti e calcola l'eccentricità. c) Trova i punti comuni all'iperbole e alla retta $y = \dfrac{4}{3}x + 2$, e spiega perché la retta non è tangente.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 1, 3) Dati inventati.* In un recipiente ci sono 20 L di acqua in cui sono sciolti 2 kg di zucchero. Si aggiungono x litri di uno sciroppo che contiene 0,5 kg di zucchero per litro (supponi che i volumi si sommino). a) Scrivi la concentrazione $c(x)$, in kg/L, della miscela e indica il dominio del problema. b) Calcola la concentrazione dopo l'aggiunta di 20 L di sciroppo; quanti litri bisogna aggiungere per arrivare a 0,4 kg/L? c) Verifica che $c(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{x+20}$: che funzione è c? Trova il centro e gli asintoti del suo grafico e spiega con quale trasformazione si ottiene da quello di $y = -\frac{8}{x}$. Disegna la parte del grafico che ha senso nel problema. d) La concentrazione può raggiungere 0,5 kg/L? Spiega perché.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 2–3)* Sono dati i punti $A(-3; 0)$ e $B(3; 0)$. Per un punto $P(x; y)$ con $x \neq \pm 3$ indica con m_1 e m_2 i coefficienti angolari delle rette PA e PB. a) Trova il luogo dei punti P per cui $m_1 \cdot m_2 = -\frac{4}{9}$: riconosci la curva e indica quali suoi punti non appartengono al luogo. b) Ripeti con la condizione $m_1 \cdot m_2 = \frac{4}{9}$. c) Trova i fuochi e l'eccentricità delle due curve e, per la seconda, gli asintoti.

Soluzioni

1. C. $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$ per ogni x reale: il grafico è simmetrico rispetto all'origine. Non è pari: per esempio $f(1) = \frac{1}{2}$ e $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Non è periodica, perché vale 0 solo in $x = 0$.

2. A. Per il teorema del resto il resto è $A(-1)$, con a = −1 perché il divisore è $x - (-1)$: $-1 - 2 + 5 = 2$. La risposta B è $A(1)$: si ottiene sbagliando il segno di a. (Con Ruffini: quoziente $x^2 - 3x + 3$, resto 2.)

3. D. Il grafico ha il vertice in (−1; 1), è rivolto verso il basso e taglia l'asse x in −2 e in 0. Si ottiene da $y = |x|$ con la simmetria $y = -|x|$ e poi con la traslazione di vettore (−1; 1): $y = -|x + 1| + 1$. Controllo: $1 - |0 + 1| = 0$ e $1 - |-2 + 1| = 0$ ✓. A è rivolta verso l'alto; B e C hanno il vertice in (1; 1) e in (0; 1).

4. B. Per $xy = k$ vale $|k| = \frac{a^2}{2}$, quindi $a^2 = 4$, $a = 2$ e $c = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Poiché $k > 0$, vertici e fuochi stanno sulla bisettrice $y = x$: i vertici sono $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ (distanza 2 dall'origine), i fuochi (2; 2) e (−2; −2) (distanza $\sqrt{(4+4)} = 2\sqrt{2}$). Gli asintoti sono gli assi cartesiani, non $y = \pm x$; l'eccentricità di ogni iperbole equilatera è $\sqrt{2}$.

5. a) C.E.: $x - 1 \geq 0$, quindi $D = [1; +\infty[$. Poiché $\sqrt{x-1} \geq 0$ e assume tutti i valori non negativi, Im $f = [2; +\infty[$; f non ha zeri (è sempre almeno 2). b) f è crescente in tutto il dominio (se x aumenta, aumenta $\sqrt{x-1}$), quindi è iniettiva; considerata da $[1; +\infty[$ a $[2; +\infty[$ è anche suriettiva, quindi biiettiva e invertibile. Da $y = 2 + \sqrt{x-1}$, con $y \geq 2$: $\sqrt{x-1} = y - 2$, $x = (y-2)^2 + 1$. Scambiando le lettere: $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$, con dominio $[2; +\infty[$ (l'immagine di f). Verifica: $f(5) = 2 + \sqrt{4} = 4$ e $f^{-1}(4) = 2^2 + 1 = 5$ ✓. c) $(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(4) = \sqrt{16} - 5 = 11$. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 + \sqrt{x^2 - 6}$: serve $x^2 - 6 \geq 0$, cioè $x \leq -\sqrt{6}$ oppure $x \geq \sqrt{6}$: il dominio è $]-\infty; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; +\infty[$.

6. a) Per il teorema del resto, il resto della divisione per $x + 2$ è $P(-2) = -8 + 8 + 10 - 6 = 4$. Poiché $P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$, per il teorema di Ruffini $P(x)$ è divisibile per $x - 2$. b) Ruffini con $a = 2$ sui coefficienti 1, 2, −5, −6: si abbassa 1; $1 \cdot 2 = 2$, $2 + 2 = 4$; $4 \cdot 2 = 8$, $-5 + 8 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$, $-6 + 6 = 0$. Quoziente $x^2 + 4x + 3$, resto 0. Il trinomio ha somma −4 e prodotto 3 delle radici, quindi $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$ e $P(x) = (x-2)(x+1)(x+3)$. Per la legge di annullamento del prodotto le soluzioni di $P(x) = 0$ sono $x = 2$, $x = -1$, $x = -3$. Controllo: $P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$, $P(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$ ✓.

7. a) Il denominatore è $(x-1)^2$: C.E. $x \neq 1$; per $x \neq 1$ è positivo, perché è un quadrato (molteplicità pari: non cambia segno). Il segno della frazione è quindi quello del numeratore $(x-3)(x+3)$, negativo o nullo per $-3 \leq x \leq 3$. Escludendo $x = 1$: $[-3; 1[\cup]1; 3]$. Controllo con un punto per intervallo: in $x = -4$ vale $\frac{7}{25} > 0$ (no); in $x = 0$ vale −9 (sì); in $x = 2$ vale −5 (sì); in $x = 4$ vale $\frac{7}{9}$ (no); in −3 e in 3 vale 0 (sì). b) Il fattore $(x-2)^2$ è positivo per $x \neq 2$ e nullo in 2; il prodotto è positivo quando $x + 1 > 0$ e $x \neq 2$: $]-1; 2[\cup]2; +\infty[$. Il valore $x = 2$ va escluso perché la disuguaglianza è stretta e lì il prodotto vale 0. Controllo: in $x = -2$ vale −16 (no), in $x = 0$ vale 4 (sì), in $x = 3$ vale 4 (sì).

8. a) Da $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$: $a = 2c$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$. L'ellisse è $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$; il passaggio per P dà $\frac{4}{4c^2} + \frac{9}{3c^2} = \frac{4}{c^2} = 1$, cioè $c^2 = 4$, $c = 2$, $a^2 = 16$, $b^2 = 12$: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Controllo: $\frac{4}{16} + \frac{9}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓. b) Vertici (±4; 0) e (0; ±2√3); fuochi $F_{1,2}(\pm 2; 0)$. c) Con la formula di

sdoppiamento: $\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1$, cioè $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$, $x + 2y = 8$. Verifica: sostituendo $x = 8 - 2y$ nell'equazione $3x^2 + 4y^2 = 48$ si ottiene $3(64 - 32y + 4y^2) + 4y^2 = 48$, cioè $16y^2 - 96y + 144 = 0$, $y^2 - 6y + 9 = 0$: $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$✓, con la soluzione doppia $y = 3$, che ridà il punto (2; 3).

9. a) $9y^2 - 16x^2 = 144$, cioè dividendo per 144: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. Il termine positivo è quello in y: vertici e fuochi stanno sull'asse y. Semiassi $a = 3$ (asse non trasverso) e $b = 4$ (asse trasverso); vertici $(0; \pm 4)$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25$, fuochi $(0; \pm 5)$. Controllo: $16 \cdot 0 - 9 \cdot 16 + 144 = 0$ ✓. b) Asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$; eccentricità $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$ (semidistanza focale su semiasse trasverso), maggiore di 1 come in ogni iperbole. c) Sostituendo: $16x^2 - 9(\frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{3}x + 4) + 144 = 0$, cioè $-48x + 108 = 0$: i termini in x^2 si cancellano e l'equazione è di primo grado, con l'unica soluzione $x = \frac{9}{4}$, $y = 3 + 2 = 5$. Il punto comune è $(\frac{9}{4}; 5)$ (controllo: $81 - 225 + 144 = 0$ ✓). La retta è parallela all'asintoto $y = \frac{4}{3}x$: incontra la curva in un solo punto ma la attraversa, perché la tangenza richiede un'equazione di secondo grado con $\Delta = 0$, e qui l'equazione risolvente non è di secondo grado.

10. a) Dopo l'aggiunta lo zucchero è $2 + 0{,}5x$ kg e il volume $20 + x$ L: $c(x) = \frac{2 + 0{,}5x}{20 + x}$, con $x \geq 0$ (all'inizio $c(0) = 0{,}1$ kg/L). b) $c(20) = \frac{12}{40} = 0{,}3$ kg/L. Da $\frac{2 + 0{,}5x}{20 + x} = 0{,}4$: $2 + 0{,}5x = 8 + 0{,}4x$, $0{,}1x = 6$, $x = 60$ L. Controllo: $\frac{32}{80} = 0{,}4$ ✓. c) $\frac{1}{2} - \frac{8}{x + 20} = \frac{0{,}5(x + 20) - 8}{x + 20} = \frac{0{,}5x + 2}{x + 20}$ ✓. È una funzione omografica, con i coefficienti 0,5, 2, 1, 20: il coefficiente di x al denominatore è $1 \neq 0$ e $0{,}5 \cdot 20 - 2 \cdot 1 = 8 \neq 0$: il grafico è un'iperbole equilatera con centro $(-20; 0{,}5)$ e asintoti $x = -20$ e $y = 0{,}5$, che si ottiene dal grafico di $y = -\frac{8}{x}$ con la traslazione di vettore $(-20; 0{,}5)$. Nel problema interessa solo la parte con $x \geq 0$: un arco del ramo che sta sotto l'asintoto orizzontale, crescente, che parte da (0; 0,1), passa per (20; 0,3) e (60; 0,4) e si avvicina alla retta $y = 0{,}5$. d) No: per $x \geq 0$ la frazione $\frac{8}{x + 20}$ è sempre positiva, quindi $c(x) < 0{,}5$; l'equazione $c(x) = 0{,}5$ darebbe $2 = 10$, impossibile. La miscela si avvicina alla concentrazione dello sciroppo (per esempio $c(380) = 0{,}48$) senza raggiungerla, perché resta sempre l'acqua iniziale.

11. a) $m_1 = \frac{y}{x + 3}$ e $m_2 = \frac{y}{x - 3}$, quindi $\frac{y^2}{x^2 - 9} = -\frac{4}{9}$: $9y^2 = -4x^2 + 36$, $4x^2 + 9y^2 = 36$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. È l'ellisse di semiassi 3 e 2, con i vertici dell'asse maggiore proprio in A e B. I punti A e B vanno esclusi: sono gli unici punti dell'ellisse con $x = \pm 3$, dove le rette non sono definite (in A la retta PA non esiste, in B non esiste la retta PB). b) $\frac{y^2}{x^2 - 9} = \frac{4}{9}$: $9y^2 = 4x^2 - 36$, $4x^2 - 9y^2 = 36$, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$: un'iperbole con i vertici in A e B, che anche qui vanno esclusi. Controllo: per l'ellisse il punto (0; 2) dà $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{-3} = -\frac{4}{9}$ ✓; per l'iperbole il punto $(5; \frac{8}{3})$ $(\frac{25}{9} - \frac{64}{36} = \frac{36}{36} = 1$ ✓) dà $\frac{8}{24} \cdot \frac{8}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$ ✓. c) Ellisse: $c^2 = 9 - 4 = 5$, fuochi $(\pm\sqrt{5}; 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Iperbole: $c^2 = 9 + 4 = 13$, fuochi $(\pm\sqrt{13}; 0)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$, asintoti $y = \pm\frac{2}{3}x$.