CAPITOLO

9

Calcolo combinatorio e principio di induzione

Due passi finiti, il primo e quello che porta da ogni numero al successivo, bastano a raggiungere l'infinito. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Contare in modo organizzato con il principio di moltiplicazione, il principio della somma e i diagrammi ad albero.
2. Riconoscere se in un raggruppamento conta l'ordine e se si ammettono ripetizioni, e scegliere tra disposizioni, permutazioni e combinazioni.
3. Calcolare con il fattoriale e con i coefficienti binomiali e dimostrarne le proprietà, anche contando in due modi.
4. Costruire il triangolo di Tartaglia e sviluppare la potenza di un binomio con la formula di Newton.
5. Dimostrare proprietà dei numeri naturali con il principio di induzione, riconoscendo il ruolo del passo base e del passo induttivo.
6. Distinguere l'induzione matematica dall'induzione delle scienze sperimentali e discuterne il significato filosofico.

INDICE DEL CAPITOLO

9.1 Contare in modo organizzato 2
9.2 Disposizioni e permutazioni 5
9.3 Combinazioni e coefficienti binomiali 8
9.4 Il triangolo di Tartaglia e il binomio di Newton 12
9.5 Il principio di induzione 15
9.6 Induzione matematica e induzione fisica 19

Matematica 4 · Parte IV · Contare, prevedere, misurare la dipendenza · versione 1.0
Capitolo 9: Calcolo combinatorio e principio di induzione · pagine 241–266 del volume completo · estratto per lo studio

Quante password di otto caratteri si possono scrivere? In quanti modi si può compilare una schedina, distribuire una mano di carte, disporre gli invitati attorno a un tavolo? Domande come queste hanno risposte enormi, e nessuno potrebbe trovarle elencando i casi a uno a uno. Il **calcolo combinatorio** insegna a contare senza elencare: riconosce in ogni problema una struttura (una scelta in più fasi, un ordinamento, un sottoinsieme) e la traduce in un numero. Ne avremo bisogno subito, nel capitolo 10, per calcolare probabilità in situazioni troppo grandi per una tabella o un albero.

Le formule del calcolo combinatorio valgono per ogni numero naturale n, cioè per infiniti casi. Come si può essere certi di una proprietà che nessuno potrà mai verificare caso per caso? La risposta è il **principio di induzione**, l'altro protagonista del capitolo: un metodo di dimostrazione che, con due soli passi, raggiunge tutti i numeri naturali. Le *Indicazioni nazionali* chiedono di saperlo applicare, ma anche di capire che cosa lo distingue dall'induzione delle scienze sperimentali: un tema che la matematica condivide con la filosofia che studi quest'anno.

9.1 Contare in modo organizzato

9.1.1 Il principio di moltiplicazione

In *Matematica 2* (cap. 8) abbiamo contato gli esiti di esperimenti in più fasi con tabelle e diagrammi ad albero. Riprendiamo l'idea con un esempio. Il menù del giorno di una mensa offre un primo a scelta tra pasta, riso e zuppa, una bibita tra acqua e succo e un dolce tra gelato e torta. Quanti pranzi diversi si possono comporre? Il **diagramma ad albero** della Figura 9.1 li mostra tutti: dalla radice partono 3 rami, uno per ogni primo; da ciascuno partono 2 rami per la bibita e da ciascuno di questi 2 rami per il dolce. Le foglie sono $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, e ogni foglia è un menù.

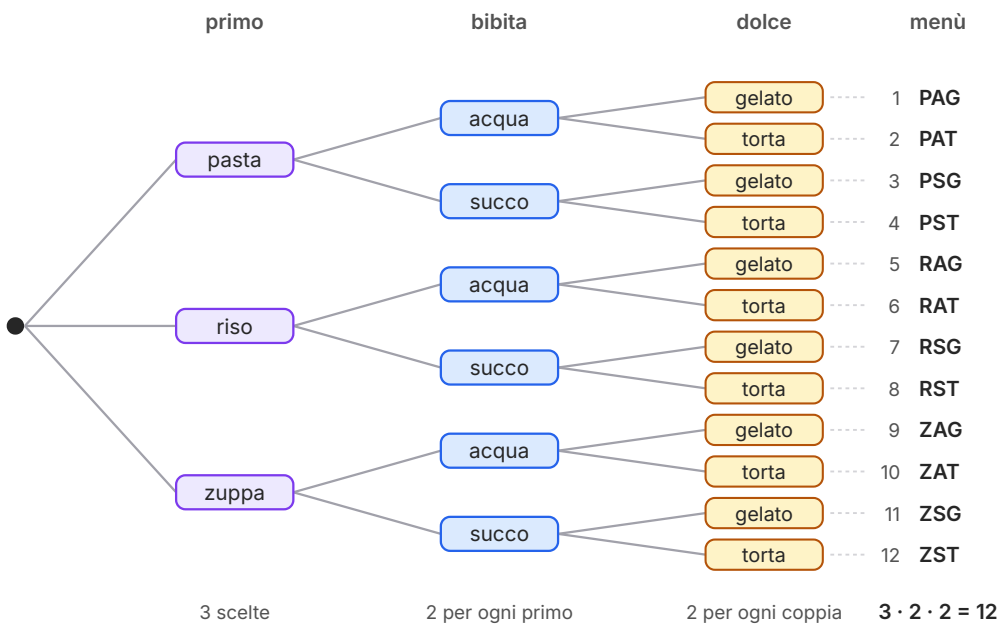

Figura 9.1 Il diagramma ad albero dei menù: 3 primi, 2 bibite, 2 dolci. Ogni percorso dalla radice a una foglia è un menù, indicato a destra con le iniziali; le foglie sono $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Non serve disegnare l'albero per sapere quante foglie ha: basta moltiplicare il numero dei rami di ogni livello. Il ragionamento vale ogni volta che il numero delle scelte possibili in una fase *non dipende* da quelle compiute prima. Attenzione: possono cambiare le scelte, ma non il loro numero. Se tra gli 11 giocatori di una squadra si scelgono un capitano e un vice, il vice si sceglie tra i 10 giocatori diversi dal capitano: quali siano dipende dal capitano scelto, ma sono sempre 10, e le coppie possibili sono $11 \cdot 10 = 110$.

IN SINTESI

Principio di moltiplicazione. Se una scelta si compie in k fasi successive, e la prima fase si può compiere in n_1 modi, la seconda in n_2 modi qualunque sia stata la prima, ..., l'ultima in n_k modi qualunque siano state le precedenti, allora le scelte complessive sono

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Principio della somma. Se gli oggetti da contare si dividono in gruppi a due a due disgiunti (nessun oggetto appartiene a due gruppi), il loro numero è la somma dei numeri degli oggetti dei singoli gruppi.

Il **principio di moltiplicazione** risponde subito a molte domande. I numeri di tre cifre sono $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, perché la prima cifra non può essere 0 (da 100 a 999 sono infatti 900); quelli di tre cifre tutte diverse sono $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$: la prima cifra ha 9 possibilità, la seconda 9 (può essere 0, ma non la prima cifra), la terza 8.

9.1.2 Il principio della somma e il complementare

Quando un problema si spezza naturalmente in casi che non si sovrappongono, si contano i casi uno per uno e si sommano: è il **principio della somma**. Le parole (anche prive di senso) di due o di tre lettere che si possono scrivere con le 26 lettere dell'alfabeto inglese sono $26^2 + 26^3 = 676 + 17\,576 = 18\,252$: le parole di due lettere e quelle di tre formano due gruppi disgiunti. Spesso conviene il ragionamento rovesciato: contare tutti i casi, contare quelli che *non* vanno bene e sottrarre. È il *conteggio per complemento*.

ESEMPIO SVOLTO

a) Quanti numeri di quattro cifre contengono almeno una cifra 7? b) Quanti numeri di tre cifre sono pari e hanno le cifre tutte diverse?

a) «Almeno un 7» comprende i numeri con uno, due, tre o quattro 7: conviene contare il complementare. I numeri di quattro cifre sono $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Quelli senza alcun 7 hanno la prima cifra tra 8 valori (né 0 né 7) e ciascuna delle altre tra 9 (tutte tranne il 7): sono $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$. I numeri con almeno un 7 sono $9000 - 5832 = 3168$.

b) L'ultima cifra deve essere pari: 0, 2, 4, 6 o 8. Ma il caso dello 0 è diverso dagli altri, perché lo 0 non può stare in prima posizione: dividiamo in due casi disgiunti. *Ultima cifra 0*: la prima cifra ha 9 possibilità, quella centrale 8; in tutto $9 \cdot 8 = 72$. *Ultima cifra 2, 4, 6 o 8*: scelta l'ultima cifra (4 modi), la prima ha 8 possibilità (né 0 né l'ultima) e quella centrale 8 (tutte tranne le due già usate); in tutto $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$. Per il principio della somma i numeri cercati sono $72 + 256 = 328$.

Il caso b) mostra perché a volte bisogna spezzare il problema: scegliendo per prima la cifra delle centinaia, il numero di scelte per l'ultima cifra dipenderebbe dalla prima (4 o 5 cifre pari ancora libere), e il principio di moltiplicazione non si potrebbe applicare in un solo passo.

9.1.3 Raggruppamenti: conta l'ordine? Si può ripetere?

Moltissimi problemi hanno la stessa forma: da un insieme di n oggetti distinti si formano gruppi di k oggetti. Prima di contare bisogna rispondere a due domande. **Conta l'ordine?** Cioè: due gruppi con gli stessi oggetti in ordine diverso sono diversi? Un codice 12 è diverso dal codice 21, mentre la coppia di rappresentanti di classe «Anna e Bruno» è la stessa di «Bruno e Anna». **Si possono ripetere gli oggetti?** In un codice la stessa cifra può comparire due volte; in una coppia di rappresentanti la stessa persona no.

Le quattro combinazioni delle risposte danno quattro modi diversi di contare. La Tabella 9.1 li confronta sul caso più piccolo possibile: gruppi di 2 lettere scelte tra A, B, C, D. Lo stesso pro-

blema ha quattro risposte diverse, 12, 16, 6 e 10, a seconda di come si risponde alle due domande: ecco perché le domande vanno poste *prima* di qualunque formula.

Tabella 9.1 I gruppi di 2 lettere scelte tra A, B, C, D, contati nei quattro modi possibili.

	Si possono ripetere	Non si possono ripetere
Conta l'ordine	AA AB AC AD BA BB BC BD CA CB CC CD DA DB DC DD: **16**	AB AC AD BA BC BD CA CB CD DA DB DC: **12**
Non conta l'ordine	AA AB AC AD BB BC BD CC CD DD: **10**	AB AC AD BC BD CD: **6**

Il diagramma della Figura 9.2 riassume la scelta del modello e i nomi che useremo: *disposizioni* quando l'ordine conta, *combinazioni* quando non conta, ciascuna semplice o con ripetizione. Indicheremo i loro numeri con $D_{n,k}$, $D'_{n,k}$, $C_{n,k}$ e con P_n le permutazioni; per $C_{n,k}$ useremo anche il simbolo $\binom{n}{k}$, che introdurremo più avanti.

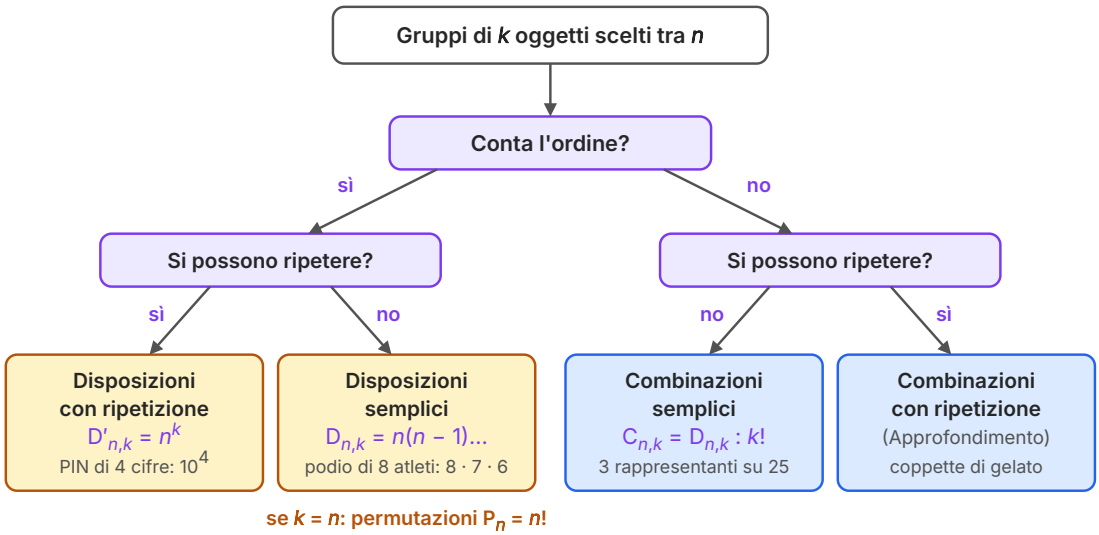

Figura 9.2 Come scegliere il modello di conteggio per gruppi di k oggetti scelti tra n oggetti distinti: due domande e quattro risposte. Le combinazioni con ripetizione sono trattate solo in un Approfondimento.

9.2 Disposizioni e permutazioni

9.2.1 Disposizioni semplici

Otto atleti corrono la finale dei 100 metri. In quanti modi diversi può essere composto il podio? L'oro può andare a uno qualsiasi degli 8; scelto l'oro, l'argento va a uno dei 7 rimasti; poi il bron-

zo a uno dei 6 rimasti. Per il principio di moltiplicazione i podi possibili sono $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Qui l'ordine conta (vincere l'oro non è vincere il bronzo) e nessuno può occupare due gradini.

Si chiama **disposizione semplice** di n oggetti di classe k, con $k \le n$, ogni sequenza ordinata di k oggetti distinti scelti tra gli n dati. Il numero $D_{n,k}$ si ottiene come per il podio: il primo posto si riempie in n modi, il secondo in $n-1$, il terzo in $n-2$, e così via fino al k-esimo, che si riempie in $n-k+1$ modi:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \qquad (k \text{ fattori})$$

Per eleggere presidente, vicepresidente e segretario dell'assemblea di una classe di 25 studenti ci sono $D_{25,3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$ possibilità. Con le 21 lettere dell'alfabeto italiano si scrivono $D_{21,3} = 21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$ parole di tre lettere tutte diverse, quasi tutte prive di senso: in calcolo combinatorio «parola» indica una qualsiasi sequenza di lettere.

9.2.2 Disposizioni con ripetizione

Se gli oggetti si possono ripetere, ogni posto si riempie sempre in n modi, e i posti possono anche essere più degli oggetti. Si chiama **disposizione con ripetizione** di n oggetti di classe k ogni sequenza ordinata di k oggetti, non necessariamente distinti, scelti tra gli n dati. Il loro numero è

$$D'_{n,k} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

Un PIN di quattro cifre si sceglie tra $D'_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ codici, da 0000 a 9999: chi lo indovina al primo tentativo ha probabilità $\frac{1}{10\,000}$. Una schedina con 13 pronostici, ciascuno dei quali è 1, X o 2, si può compilare in $3^{13} = 1\,594\,323$ modi; un byte, cioè una sequenza di 8 bit uguali a 0 o a 1, può assumere $2^8 = 256$ valori diversi. Qui k supera n: le cifre binarie sono 2, i posti 8.

La stessa formula misura la sicurezza di una password. Con le sole 26 lettere minuscole le password di 8 caratteri sono $26^8 = 208\,827\,064\,576$, circa $2{,}1 \cdot 10^{11}$. Un programma che ne provasse un miliardo al secondo (un'ipotesi, per fissare le idee) le esaurirebbe in $\frac{26^8}{10^9} \approx 209$ secondi, meno di quattro minuti. Usando anche le maiuscole e le dieci cifre i simboli diventano 62 e le password $62^8 \approx 2{,}18 \cdot 10^{14}$: circa mille volte di più, e allo stesso ritmo ci vorrebbero circa 61 ore. Allungare la password conta quanto arricchire l'alfabeto: con 10 lettere minuscole si arriva già a $26^{10} \approx 1{,}4 \cdot 10^{14}$.

9.2.3 Permutazioni e fattoriale

In quanti modi si possono mettere in fila 5 libri su uno scaffale? È una disposizione semplice in cui si usano *tutti* gli oggetti: $D_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Una disposizione semplice di n oggetti di classe n si chiama **permutazione** degli n oggetti: è un modo di metterli in ordine. Il prodotto dei numeri naturali da 1 a n si chiama **fattoriale** di n e si indica con $n!$ (si legge «n fattoriale»):

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Il fattoriale cresce in fretta: 3! = 6, 5! = 120, 7! = 5040, 10! = 3 628 800. I modi di mescolare un mazzo di 40 carte italiane sono $40! \approx 8{,}2 \cdot 10^{47}$: un numero così grande che, mescolando bene un mazzo, quasi certamente si ottiene un ordine che nessuno ha mai visto prima. Due osservazioni semplificano i calcoli. La prima: $n! = n \cdot (n-1)!$, per esempio $8! = 8 \cdot 7!$, e quindi $\frac{8!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$. La seconda: il prodotto che definisce $D_{n,k}$ è un fattoriale «interrotto», cioè $n!$ privato dei fattori da $n-k$ in giù:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \text{per esempio} \qquad D_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Per $k = n$ la formula dà $D_{n,n} = \frac{n!}{0!}$, che deve valere $n!$. Per questo si *pone* 0! = 1. Non è una dimostrazione ma una convenzione, scelta perché le formule restino vere anche nei casi estremi; ha anche un senso intuitivo: c'è un solo modo di mettere in fila zero oggetti, non fare nulla.

9.2.4 Permutazioni con ripetizione

Gli anagrammi della parola ROMA, cioè le parole (anche prive di senso) che si ottengono permutandone le lettere, sono 4! = 24, perché le quattro lettere sono diverse. Quelli di ANNA sono meno. Se distinguiamo le lettere uguali con un indice, $A_1N_1N_2A_2$, otteniamo 24 permutazioni; ma scambiando tra loro le due A, o le due N, la parola non cambia. Ogni anagramma è stato quindi contato $2! \cdot 2! = 4$ volte, e gli anagrammi distinti sono $\frac{24}{4} = 6$: AANN, ANAN, ANNA, NAAN, NANA, NNAA.

In generale, se n oggetti sono di r tipi, con k_1 oggetti uguali del primo tipo, k_2 del secondo, ..., k_r dell'ultimo ($k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$), le **permutazioni con ripetizione**, cioè gli ordinamenti distinguibili, sono

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

ESEMPIO SVOLTO

a) Quanti anagrammi hanno le parole ANANAS e MISSISSIPPI? b) In quanti modi 6 amici possono sedersi attorno a un tavolo rotondo, se contano solo le posizioni relative (chi siede alla destra e alla sinistra di chi)? E se Anna e Bruno vogliono stare vicini?

a) ANANAS ha 6 lettere: 3 A, 2 N, 1 S. Gli anagrammi sono $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{12} = 60$. MISSISSIPPI ha 11 lettere: 1 M, 4 I, 4 S, 2 P. Gli anagrammi sono $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39\,916\,800}{1152} = 34\,650$. Controllo utile: la somma dei numeri al denominatore, 1 + 4 + 4 + 2, deve dare il numero delle lettere, 11.

b) Se le sedie fossero in fila, i modi sarebbero 6! = 720. Attorno a un tavolo rotondo, però, due disposizioni che differiscono per una rotazione (tutti si spostano di un posto verso destra) sono la stessa: ognuno ha gli stessi vicini a destra e a sinistra. Ogni disposizione circolare corrisponde a 6 disposizioni in fila, una per ogni rotazione, e quindi i modi sono $\frac{6!}{6} = 5! = 120$. Lo stesso risultato si ottiene facendo sedere per primo uno dei sei, per esempio Anna, in un posto qualsiasi: gli altri 5 occupano i posti rimasti, contati a partire da lei, in 5! modi. In generale le **permutazioni circolari** di n oggetti sono $(n-1)!$.

Se Anna e Bruno vogliono stare vicini, li consideriamo un unico «blocco»: attorno al tavolo ci sono allora 5 elementi, disposti in 4! = 24 modi, e nel blocco Bruno può stare alla destra o alla sinistra di Anna. I modi sono $24 \cdot 2 = 48$.

9.3 Combinazioni e coefficienti binomiali

9.3.1 Quando l'ordine non conta

Nella Tabella 9.1 le coppie ordinate di lettere distinte erano 12, quelle non ordinate 6: esattamente la metà, perché ogni coppia non ordinata, come {A, B}, compare due volte tra quelle ordinate, come AB e BA. Il ragionamento si generalizza. Si chiama **combinazione semplice** di n oggetti di classe k ($k \le n$) ogni gruppo di k oggetti distinti scelti tra gli n dati, senza tener conto dell'ordine: in altre parole, ogni sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi. Ogni combinazione, ordinando i suoi k elementi in tutti i modi possibili, genera $k!$ disposizioni diverse, e ogni disposizione nasce così da una sola combinazione. Allora $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$, e quindi

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Il numero $C_{n,k}$ si chiama **coefficiente binomiale**, si indica anche con il simbolo $\binom{n}{k}$ e si legge «n su k»; nel prossimo paragrafo vedremo da dove viene il nome. Per calcolarlo a mano conviene la forma con il prodotto: $\binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300$ è il numero dei modi di scegliere 3 rap-

presentanti in una classe di 25 studenti. Si noti che $2300 = \frac{13\,800}{6}$: per un gruppo di tre persone «senza cariche» si divide per $3! = 6$ il numero dei gruppi con presidente, vice e segretario.

Altri esempi. Se 10 persone si stringono la mano una volta ciascuna, le strette di mano sono quante le coppie di persone, $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Un poligono di n lati ha $\binom{n}{2}$ segmenti che uniscono due vertici: n sono lati, gli altri sono diagonali. Il decagono ha quindi $45 - 10 = 35$ diagonali, e in generale un poligono di n lati ne ha $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

ERRORE FREQUENTE

Confondere disposizioni e combinazioni. In una classe di 25 studenti «eleggere due rappresentanti» e «eleggere un rappresentante e il suo supplente» sono problemi diversi. Nel primo i due eletti hanno lo stesso ruolo, l'ordine non conta e le scelte sono $\binom{25}{2} = 300$; nel secondo i ruoli sono diversi e le scelte sono $D_{25,2} = 600$. Un controllo pratico: *scambia due elementi del gruppo*. Se il risultato cambia (il supplente diventa rappresentante), l'ordine conta: disposizioni. Se non cambia, combinazioni. Il nome comune non aiuta: il «lucchetto a combinazione» si apre con una sequenza di cifre in cui l'ordine conta e le cifre si ripetono, cioè con una disposizione con ripetizione.

ESEMPIO SVOLTO

a) Nel gioco del Lotto, su ogni ruota si estraggono 5 numeri tra 1 e 90. Quante sono le cinquine possibili? Quante contengono sia il numero 1 sia il numero 2? b) Nel SuperEnalotto si estraggono 6 numeri tra 1 e 90: quante sono le sestine? c) Quante mani di 5 carte si possono ricevere da un mazzo di 40 carte italiane?

a) Per la cinquina l'ordine di estrazione non conta: le cinquine sono le combinazioni di 90 numeri di classe 5,

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5\,273\,912\,160}{120} = 43\,949\,268$$

Le cinquine che contengono 1 e 2 si ottengono scegliendo gli altri tre numeri tra gli 88 rimasti: $\binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{6} = 109\,736$.

b) $\binom{90}{6} = \binom{90}{5} \cdot \frac{85}{6} = 622\,614\,630$: chi gioca una sola sestina deve sperare di indovinare quella estratta tra oltre seicento milioni.

c) $\binom{40}{5} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{120} = 658\,008$. Con un mazzo francese di 52 carte le mani sarebbero $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

9.3.2 Le proprietà dei coefficienti binomiali

Alcuni valori si leggono subito dalla definizione: $\binom{n}{0} = 1$ (il sottoinsieme vuoto è uno solo), $\binom{n}{n} = 1$ (c'è un solo modo di prendere tutto), $\binom{n}{1} = n$. Due proprietà meno evidenti si dimostrano in due modi: con la formula, oppure contando la stessa cosa in due maniere diverse. Il secondo modo spiega anche *perché* sono vere.

IN SINTESI

Teorema (proprietà dei coefficienti binomiali). Ipotesi: n, k numeri naturali. **Tesi:**

simmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per $0 \le k \le n$;

formula di Stifel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ per $1 \le k \le n-1$.

Dimostrazione della simmetria. Scegliere i k elementi da prendere equivale a scegliere gli $n - k$ da lasciare: ogni sottoinsieme di k elementi corrisponde a uno e un solo sottoinsieme di $n - k$ elementi, il suo complementare. I due tipi di sottoinsiemi sono quindi tanti quanti. (Con la formula: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ non cambia se si scambiano k e $n - k$.) Per esempio $\binom{90}{85} = \binom{90}{5}$: scegliere gli 85 numeri non estratti è come scegliere i 5 estratti. c.v.d.

Dimostrazione della formula di Stifel. Contiamo i sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi, dividendoli in due gruppi disgiunti rispetto a un elemento fissato a. I sottoinsiemi che *contengono* a si ottengono scegliendo gli altri $k - 1$ elementi tra gli $n - 1$ diversi da a: sono $\binom{n-1}{k-1}$. Quelli che *non contengono* a si ottengono scegliendo tutti i k elementi tra gli altri $n - 1$: sono $\binom{n-1}{k}$. Per il principio della somma il totale è $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, ma il totale è anche $\binom{n}{k}$. c.v.d.

Per esempio, tra i $\binom{5}{2} = 10$ gruppi di due lettere scelte tra A, B, C, D, E, quelli che contengono la A sono 4 (AB, AC, AD, AE) e quelli che non la contengono sono i $\binom{4}{2} = 6$ gruppi formati con B, C, D, E: $10 = 4 + 6$. La formula prende il nome da Michael Stifel, matematico tedesco del Cinquecento.

9.3.3 Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme

Quanti sottoinsiemi ha un insieme di n elementi, contando anche l'insieme vuoto e l'insieme stesso? Costruire un sottoinsieme significa decidere, per ciascuno degli n elementi, se prender-

lo o no: n fasi, ciascuna con 2 possibilità. Per il principio di moltiplicazione i sottoinsiemi sono $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$. Raggruppandoli invece per numero di elementi, ce ne sono $\binom{n}{0}$ con nessun elemento, $\binom{n}{1}$ con un elemento, ..., $\binom{n}{n}$ con tutti. Contando la stessa cosa in due modi si ottiene

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

La Figura 9.3 mostra il caso $n = 3$: gli 8 sottoinsiemi di $\{a, b, c\}$ disposti per livelli secondo il numero di elementi, con un segmento tra due insiemi quando il più grande si ottiene dal più piccolo aggiungendo un elemento. Un'applicazione meno astratta: una pizzeria che propone una base e 8 ingredienti facoltativi può preparare $2^8 = 256$ pizze diverse, compresa quella senza nessun ingrediente aggiunto.

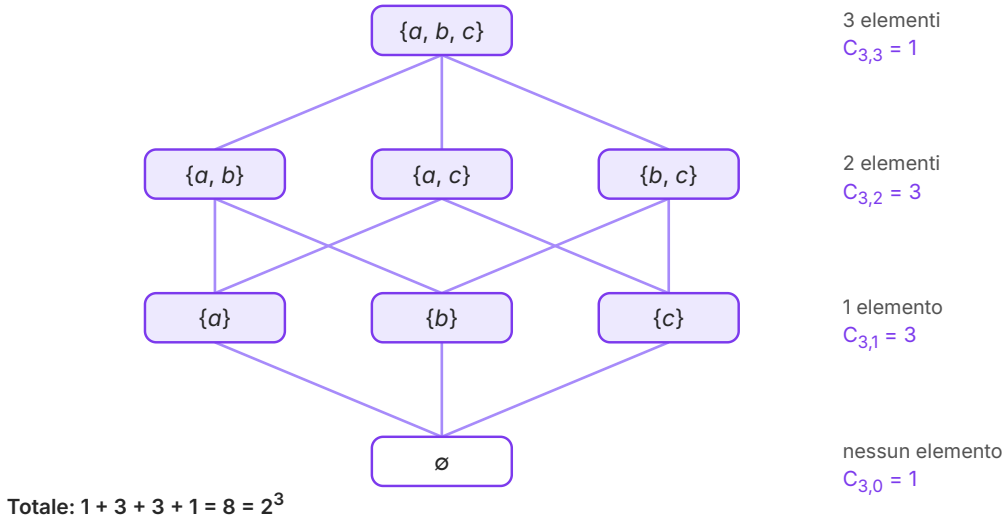

Figura 9.3 Gli 8 sottoinsiemi di $\{a, b, c\}$, ordinati per numero di elementi (diagramma di Hasse). Un segmento unisce due sottoinsiemi quando il superiore si ottiene dall'inferiore aggiungendo un elemento. A ogni livello i sottoinsiemi sono $\binom{3}{k}$: $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$.

APPROFONDIMENTO · LE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Quante coppette di gelato con 2 palline si possono comporre con i gusti cioccolato, fragola e pistacchio, se due palline possono essere dello stesso gusto? L'ordine delle palline non conta e i gusti si possono ripetere: è una **combinazione con ripetizione**. Elencando: CC, FF, PP, CF, CP, FP, cioè 6 coppette.

Per contarle senza elencare, rappresentiamo ogni coppetta con una fila di simboli: le palline sono asterischi e i gusti sono separati da stanghette, nell'ordine cioccolato | fragola | pistacchio. Così ** | | indica due palline di cioccolato e * | | * una di cioccolato e una di pistacchio. Ogni fila contiene $k = 2$ asterischi e $n - 1 = 2$ stanghette, e ogni modo di scegliere quali dei $k + n - 1 = 4$ posti occupare con gli asterischi dà una coppetta diversa. Le coppette sono quindi $\binom{4}{2} = 6$. In generale le combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Per i gruppi di 2 lettere tra A, B, C, D della Tabella 9.1 si ottiene $\binom{5}{2} = 10$, come nell'elenco; una coppetta da 3 palline con 5 gusti si compone in $\binom{7}{3} = 35$ modi.

9.4 Il triangolo di Tartaglia e il binomio di Newton

9.4.1 Il triangolo

Scriviamo i coefficienti binomiali in righe: nella riga n mettiamo $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$, e centriamo le righe una sotto l'altra. Non occorre calcolare un solo fattoriale. Ogni riga comincia e finisce con 1, e per la formula di Stifel ogni numero interno è la somma dei due che gli stanno sopra, a sinistra e a destra: nella Figura 9.4, $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$, cioè $10 = 4 + 6$. Riga dopo riga si costruisce così il **triangolo di Tartaglia**.

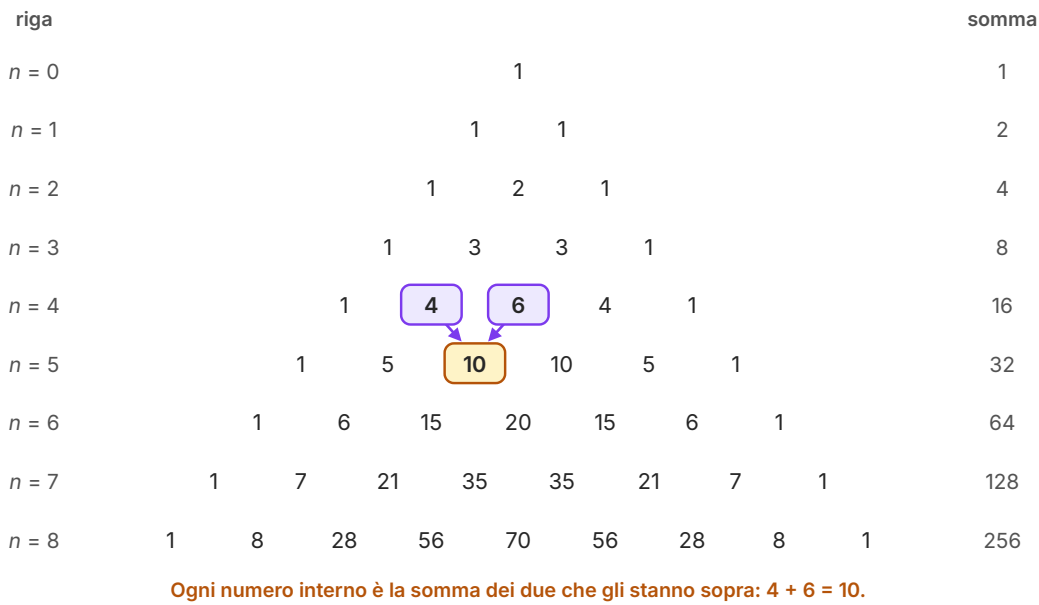

Figura 9.4 Il triangolo di Tartaglia fino alla riga 8. La riga n contiene $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, …, $\binom{n}{n}$; ogni numero interno è la somma dei due sopra di esso (formula di Stifel). A destra la somma di ogni riga, 2^n.

Nel triangolo si leggono le proprietà che abbiamo dimostrato. Ogni riga è simmetrica, perché $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. La somma della riga n è 2^n, il numero dei sottoinsiemi. La seconda diagonale (1, 2, 3, 4, …) contiene i numeri naturali, perché $\binom{n}{1} = n$. La terza (1, 3, 6, 10, 15, …) contiene i $\binom{n}{2}$, le strette di mano tra n persone: sono i *numeri triangolari*, che ritroveremo tra poco come somme $1 + 2 + \dots + (n-1)$.

9.4.2 La potenza di un binomio

In *Matematica 1* (cap. 6) abbiamo calcolato il quadrato e il cubo di un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

I coefficienti 1, 2, 1 e 1, 3, 3, 1 sono le righe 2 e 3 del triangolo. Non è un caso. La potenza $(a+b)^n$ è il prodotto di n fattori uguali, $(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$. Sviluppandolo, ogni termine si ottiene scegliendo da ogni fattore o a o b e moltiplicando le scelte. Se b viene scelto da k fattori e a dai rimanenti $n-k$, il termine è $a^{n-k}b^k$; e i modi di scegliere i k fattori da cui prendere b sono $\binom{n}{k}$.

Quindi, sommando i termini simili, $a^{n-k}b^k$ compare con coefficiente $\binom{n}{k}$: da qui il nome di coefficienti *binomiali*.

IN SINTESI

Teorema (binomio di Newton). Ipotesi: a, b numeri reali, n numero naturale. **Tesi:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Lo sviluppo ha $n+1$ termini; gli esponenti di a scendono da n a 0, quelli di b salgono da 0 a n, e in ogni termine la loro somma è n. I coefficienti sono la riga n del triangolo di Tartaglia.

La formula si chiama **binomio di Newton** perché Isaac Newton la estese agli esponenti frazionari e negativi; per gli esponenti naturali era nota da secoli. Il ragionamento che abbiamo fatto («si sceglie b da k fattori») ne è una dimostrazione combinatoria; con il principio di induzione, che studieremo tra poco, se ne può dare anche una dimostrazione algebrica, che parte dalla formula di Stifel.

ESEMPIO SVOLTO

Sviluppa a) $(a+b)^4$ e b) $(x-2)^5$; c) trova il coefficiente di x^3 in $(2x+1)^6$; d) calcola approssimativamente $1{,}01^5$.

a) Riga 4: 1, 4, 6, 4, 1. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

b) Si applica la formula con $a = x$ e $b = -2$, riga 5: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Le potenze di -2 sono 1, -2, 4, -8, 16, -32: i segni si alternano. $(x-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$. Controllo: per $x = 1$ il primo membro vale $(-1)^5 = -1$ e il secondo $1 - 10 + 40 - 80 + 80 - 32 = -1$.

c) Il termine generale è $\binom{6}{k}(2x)^{6-k} \cdot 1^k$; contiene x^3 per $6 - k = 3$, cioè $k = 3$. Il coefficiente è $\binom{6}{3} \cdot 2^3 = 20 \cdot 8 = 160$.

d) $1{,}01^5 = (1 + 0{,}01)^5 = 1 + 5 \cdot 0{,}01 + 10 \cdot 0{,}0001 + 10 \cdot 0{,}000001 + \ldots$; i primi tre termini danno $1 + 0{,}05 + 0{,}001 = 1{,}051$, e i successivi, tutti insieme, aggiungono poco più di un centomillesimo (il valore esatto è 1,0510100501). È il calcolo dell'interesse composto del capitolo 7: un capitale al 1% annuo cresce in cinque anni di poco più del 5%, perché agli interessi semplici si aggiungono gli «interessi sugli interessi», i termini con $0{,}01^2$, $0{,}01^3$, … .

APPROFONDIMENTO · UN TRIANGOLO CON MOLTI NOMI

In Italia il triangolo porta il nome di Niccolò Tartaglia, che lo pubblicò nel suo *General trattato di numeri et misure*, a metà del Cinquecento; in Francia e nei paesi di lingua inglese porta quello di Blaise Pascal, che nel *Traité du triangle arithmétique*, scritto nel 1654 e pubblicato dopo la sua morte, ne studiò sistematicamente le proprietà e lo usò per risolvere problemi di gioco d'azzardo, proprio nell'anno della sua corrispondenza con Fermat sul calcolo delle probabilità.

Ma il triangolo è molto più antico di entrambi. Nel mondo islamico il matematico al-Karajī, attivo a Baghdad a cavallo tra il X e l'XI secolo, conosceva la regola per costruire i coefficienti delle potenze di un binomio; in Cina il triangolo compare nell'opera di Yang Hui, nel XIII secolo. È un buon esempio di una scoperta fatta più volte, in luoghi e tempi lontani, e attribuita a chi l'ha resa nota in un altro luogo.

9.5 Il principio di induzione

9.5.1 Infiniti casi, due passi

Sommiamo i primi numeri dispari: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Escono i quadrati, e viene da congetturare che la somma dei primi n dispari sia sempre n^2. Possiamo controllare altri cento casi, o un milione, con un calcolatore: non avremo dimostrato nulla, perché i casi sono infiniti e un controllo, per quanto lungo, ne lascia fuori quasi tutti. Più avanti vedremo una formula che funziona per i primi quaranta valori di n e poi smette. Serve un metodo che raggiunga *tutti* i numeri naturali con un numero finito di passi.

IN SINTESI

Principio di induzione. Sia $P(n)$ una proposizione che dipende dal numero naturale n. Se

- **passo base:** $P(0)$ è vera, e
- **passo induttivo:** per ogni numero naturale n, se $P(n)$ è vera allora è vera anche $P(n+1)$,

allora $P(n)$ è vera per ogni numero naturale n. Se il passo base riguarda un numero n_0 diverso da 0, la conclusione vale per ogni $n \geq n_0$.

Il **principio di induzione** si capisce con una fila di tessere del domino (Figura 9.5). Per essere certi che cadano tutte bastano due cose: che cada la prima (il **passo base**) e che le tessere siano messe in modo che, se una qualsiasi cade, faccia cadere la successiva (il **passo induttivo**). Nessuna delle due condizioni da sola basta: se la prima non viene spinta, non cade niente; se due tessere sono troppo lontane, la caduta si interrompe lì.

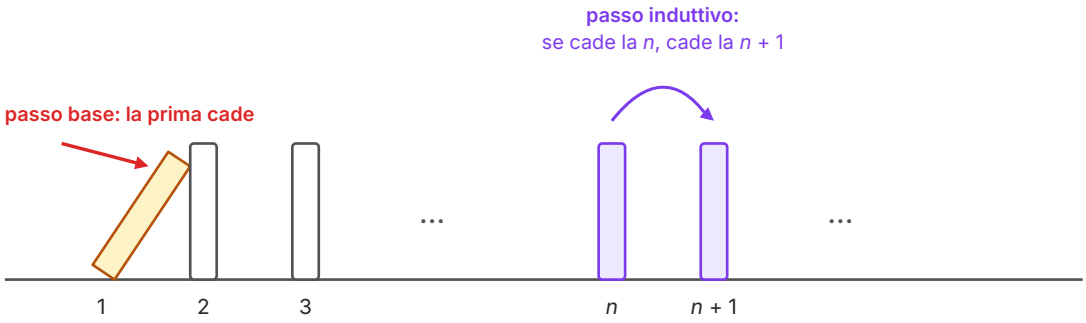

Figura 9.5 Il principio di induzione come una fila di tessere del domino. Il passo base fa cadere la prima tessera; il passo induttivo garantisce che, qualunque sia n, la caduta della tessera n provochi quella della tessera $n + 1$.

Un dubbio è naturale: nel passo induttivo «supponiamo che $P(n)$ sia vera», cioè proprio ciò che vogliamo dimostrare. Non è un circolo vizioso? No, perché nel passo induttivo non si afferma che $P(n)$ sia vera, ma si dimostra un'*implicazione*: *se* $P(n)$ fosse vera, sarebbe vera anche $P(n + 1)$. L'ipotesi $P(n)$ di questo passaggio si chiama **ipotesi induttiva**, e n è un numero qualsiasi. L'unica verità di partenza è il passo base; il passo induttivo la trasporta da ogni numero al successivo: da $P(0)$ a $P(1)$, da $P(1)$ a $P(2)$, e così via, senza che alcun numero naturale resti escluso.

9.5.2 La somma dei primi numeri naturali

Si racconta che il giovane Carl Friedrich Gauss, a scuola, abbia sorpreso il maestro trovando quasi subito la somma dei numeri da 1 a 100. L'aneddoto, tramandato in molte versioni, non è documentato con certezza, ma l'idea che gli si attribuisce è limpida: accoppiare il primo numero con l'ultimo, il secondo con il penultimo e così via. Ogni coppia $(1 + 100, 2 + 99, \ldots, 50 + 51)$ dà 101, e le coppie sono 50: la somma è $50 \cdot 101 = 5050$. La Figura 9.6a mostra la stessa idea con una figura: due «scale» uguali di quadretti formano un rettangolo $n \times (n + 1)$, e quindi una scala contiene $\dfrac{n(n+1)}{2}$ quadretti.

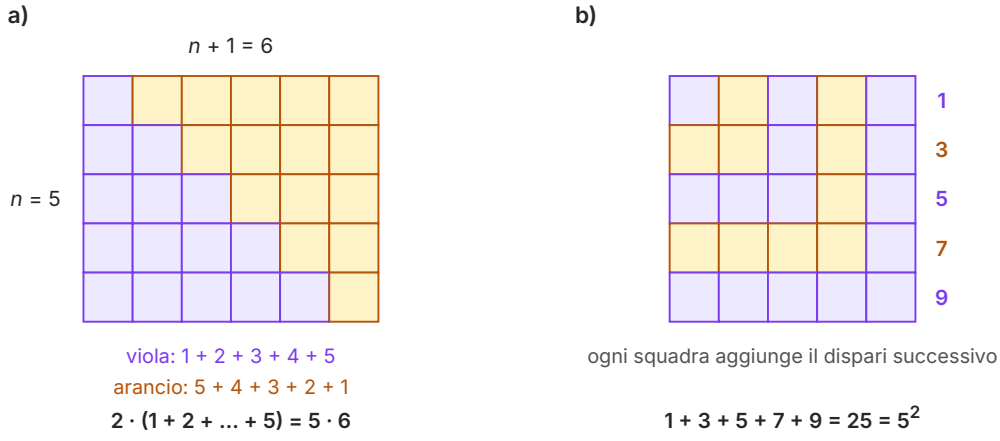

Figura 9.6 Due dimostrazioni «a vista» per $n = 5$. **a)** Due scale uguali di $1 + 2 + \ldots + n$ quadretti formano un rettangolo $n \times (n + 1)$. **b)** Ogni squadra (gnomone) aggiunta al quadrato di lato k contiene $2k + 1$ quadretti e dà il quadrato di lato $k + 1$: la somma dei primi n dispari è n^2.

La figura convince per $n = 5$, e si vede che funzionerebbe per ogni n. L'induzione trasforma questo «si vede» in una dimostrazione.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: n numero naturale, $n \geq 1$. **Tesi:**

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione. Chiamiamo $P(n)$ l'uguaglianza della tesi. *Passo base.* Per $n = 1$ il primo membro vale 1 e il secondo $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$: $P(1)$ è vera. *Passo induttivo.* Supponiamo vera $P(n)$, cioè $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e dimostriamo $P(n+1)$, cioè $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Per l'ipotesi induttiva la somma dei primi n addendi è $\frac{n(n+1)}{2}$, quindi

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

che è $P(n+1)$. Per il principio di induzione $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. c.v.d.

Lo stesso schema dimostra la congettura sui dispari. Il dispari di posto n è $2n - 1$; vogliamo $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ per ogni $n \geq 1$. *Passo base:* $1 = 1^2$. *Passo induttivo:* se $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, aggiungendo il dispari successivo, $2n + 1$, si ottiene $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. c.v.d. La Figura 9.6b è la

versione geometrica del passo induttivo: la squadra di $2n + 1$ quadretti, aggiunta al quadrato di lato n, dà il quadrato di lato $n + 1$. La tradizione attribuisce ai pitagorici lo studio di questi *numeri figurati*, disegnati con sassolini, e il nome greco della squadra, γνώμων (*gnómon*, gnomone), è rimasto alla figura.

9.5.3 Disuguaglianze e conteggi

L'induzione non serve solo per le somme. Dimostriamo che $2^n \geq n + 1$ per ogni $n \geq 0$. *Passo base:* $2^0 = 1 \geq 0 + 1$. *Passo induttivo:* se $2^n \geq n + 1$, allora $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2$, perché $n \geq 0$; questa è la tesi per $n + 1$. c.v.d.

A volte una proprietà vale solo da un certo numero in poi. Confrontiamo $n!$ e 2^n (Tabella 9.2): per $n = 1, 2, 3$ vince la potenza, da $n = 4$ in poi il fattoriale. Dimostriamo che $n! > 2^n$ per ogni $n \geq 4$. *Passo base:* $4! = 24 > 16 = 2^4$. *Passo induttivo:* sia $n \geq 4$ e supponiamo $n! > 2^n$. Allora $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! > (n + 1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, perché $n + 1 \geq 5 > 2$. c.v.d. Il passo induttivo vale anche per $n = 1, 2, 3$; ciò che manca, per quei valori, è il passo base.

Tabella 9.2 Il fattoriale e le potenze di 2: da $n = 4$ in poi $n! > 2^n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256

Infine l'induzione dà una seconda dimostrazione del fatto che un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi. *Passo base:* l'insieme vuoto ha un solo sottoinsieme, se stesso, e $2^0 = 1$. *Passo induttivo:* supponiamo che ogni insieme di n elementi abbia 2^n sottoinsiemi, e consideriamo un insieme di $n + 1$ elementi; fissiamone uno, x. I sottoinsiemi che non contengono x sono i sottoinsiemi degli altri n elementi, cioè 2^n per l'ipotesi induttiva; quelli che contengono x si ottengono da questi aggiungendo x, e sono altrettanti. In tutto $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. c.v.d. È il principio di moltiplicazione, «ogni elemento si prende o no», reso rigoroso: le parole «e così via», che abbiamo usato tante volte in questo capitolo, sono esattamente ciò che il principio di induzione giustifica.

9.5.4 Quando manca uno dei due passi

ERRORE FREQUENTE

Il passo induttivo senza il passo base. Consideriamo la proposizione $P(n)$: «$n^2 + n$ è dispari». Il passo induttivo funziona: se $n^2 + n$ è dispari, allora $(n+1)^2 + (n+1) = (n^2 + n) + 2(n+1)$ è un dispari più un pari, cioè dispari. Eppure $P(n)$ è falsa per ogni n: $n^2 + n = n(n+1)$ è il prodotto di due numeri consecutivi, uno dei quali è pari. Il passo base fallisce ($0^2 + 0 = 0$ è pari), e senza di esso il passo induttivo trasporta il nulla: tutte le tessere sono ben disposte, ma nessuno spinge la prima.

Molte verifiche senza il passo induttivo. Per $n = 0, 1, 2, \ldots$ il numero $n^2 + n + 41$ vale 41, 43, 47, 53, 61, 71, ...: tutti numeri primi, e lo resta per ogni n da 0 a 39. Per $n = 40$, però, si ottiene $1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$, che non è primo. Quaranta conferme non sono una dimostrazione: manca il passo induttivo, che qui non si può dimostrare perché è falso (da $P(39)$ non segue $P(40)$).

9.6 Induzione matematica e induzione fisica

9.6.1 Due significati della stessa parola

Nel linguaggio delle scienze e della filosofia, «induzione» indica di solito un'altra cosa: il passaggio da molti casi osservati a una legge generale. Aristotele la chiamava ἐπαγωγή (*epagoghé*), «il condurre verso» il generale a partire dai casi singoli, e il latino *inductio* ne è la traduzione. È il ragionamento con cui un fisico, dopo aver misurato più volte che il periodo di un pendolo non dipende dall'ampiezza delle piccole oscillazioni, lo enuncia come legge; o con cui chiunque, avendo visto il Sole sorgere ogni mattina, si aspetta che sorga anche domani. Chiameremo questo ragionamento **induzione fisica** (o empirica).

Le *Indicazioni nazionali* per il liceo classico chiedono di avere un'idea chiara della differenza: l'induzione matematica si fonda sull'«invarianza delle leggi del pensiero», l'induzione fisica sull'«invarianza delle leggi dei fenomeni». La differenza è profonda. Una legge fisica ottenuta per induzione resta *sempre* esposta alla smentita: basta un'osservazione contraria. Per secoli in Europa «tutti i cigni sono bianchi» è sembrata una verità d'esperienza, finché non si conobbero i cigni neri dell'Australia. Una proprietà dimostrata per induzione matematica, invece, non può essere smentita da nessun numero, perché il passo induttivo non è stato osservato ma dimostrato, una volta per tutte, per un n qualsiasi: il ragionamento che porta da n a $n+1$ è lo stesso per ogni n. È in questo senso che le leggi del pensiero sono «invarianti».

Il caso di $n^2 + n + 41$ mostra la differenza in miniatura. Le quaranta verifiche sono un'induzione fisica: rendono plausibile una congettura, che il quarantunesimo caso smentisce. Una dimostrazione per induzione matematica non lascia spazio a un quarantunesimo caso. Il metodo

era già usato nel Cinquecento: il messinese Francesco Maurolico se ne servì per dimostrare proprio che la somma dei primi dispari è un quadrato. Pascal, nel *Traité*, lo usò con piena consapevolezza: per dimostrare una proprietà del triangolo aritmetico per tutte le righe, mostrò che vale nella prima riga e che, se vale in una riga, vale nella successiva.

COLLEGAMENTI

Filosofia: Hume e il problema dell'induzione. Nel Settecento lo scozzese David Hume, che incontri nel programma di filosofia di quest'anno, pose una domanda che non ha ancora una risposta condivisa: che cosa ci autorizza a inferire dai casi osservati quelli non osservati? Non la logica, osservava Hume, perché non c'è contraddizione nel pensare che domani il Sole non sorga; e nemmeno l'esperienza, perché sostenere che «l'induzione ha sempre funzionato in passato, quindi funzionerà in futuro» significa usare l'induzione per giustificare se stessa. Secondo Hume la nostra attesa nasce dall'*abitudine*, non da un ragionamento. Bertrand Russell rese celebre la difficoltà con l'esempio del pollo che, nutrito ogni mattina dal contadino, se lo aspetta anche il giorno in cui il contadino viene invece a tirargli il collo.

L'induzione matematica è immune da questo problema: non inferisce il futuro dal passato, ma deduce ogni caso da un caso iniziale e da una regola dimostrata. Su che cosa si fondi la certezza di quella regola, però, è a sua volta una questione filosofica. Henri Poincaré, all'inizio del Novecento, vide nel ragionamento per ricorrenza «il ragionamento matematico per eccellenza»: secondo lui la sua forza non viene dalla logica, ma dalla capacità della mente di concepire la ripetizione indefinita di uno stesso atto, una volta che lo sa compiere; e lo considerò un giudizio sintetico *a priori*, nel senso di Kant. È uno dei modi di leggere l'osservazione delle *Indicazioni*, secondo cui il principio di induzione è un esempio del carattere «non strettamente deduttivo» del ragionamento matematico.

9.6.2 Un assioma dei numeri naturali

Il principio di induzione si può dimostrare? Ragionando sui numeri naturali «come li conosciamo» sembra ovvio: se esistesse un naturale per cui $P(n)$ è falsa, ce ne sarebbe un primo, m; non può essere 0, per il passo base; allora $m - 1$ è un naturale per cui P è vera, e per il passo induttivo sarebbe vera anche $P(m)$, contro l'ipotesi. Ma questo argomento usa un'altra proprietà dei naturali, che ogni insieme non vuoto di numeri naturali abbia un elemento minimo, e quella proprietà è equivalente al principio stesso. In matematica il principio di induzione non si dimostra: si assume come uno degli assiomi che definiscono i numeri naturali.

APPROFONDIMENTO · PEANO E GLI ASSIOMI DEI NUMERI NATURALI

Nel 1889 Giuseppe Peano pubblicò a Torino, in latino, gli *Arithmetices principia nova methodo exposita* («I principi dell'aritmetica esposti con un metodo nuovo»), nei quali l'intera aritmetica veniva dedotta da pochi assiomi. Poco prima Richard Dedekind era arrivato in Germania a un sistema equivalente. In forma moderna (Peano partiva da 1, oggi si parte di solito da 0) gli assiomi dicono:

- 0 è un numero naturale;
- ogni numero naturale n ha un successore, $n + 1$, che è ancora un numero naturale;
- 0 non è il successore di alcun numero naturale;
- numeri naturali diversi hanno successori diversi;
- **assioma di induzione:** se un insieme di numeri naturali contiene 0 e, insieme a ogni suo elemento, contiene anche il successore, allora contiene tutti i numeri naturali.

L'ultimo è il principio di induzione nel linguaggio degli insiemi: l'insieme dei numeri n per cui $P(n)$ è vera contiene 0 (passo base) e con ogni numero il successivo (passo induttivo), quindi è tutto $\mathbb{N}$. Gli **assiomi di Peano** dicono che cosa sono i numeri naturali senza definirli uno per uno: con un numero finito di frasi descrivono un insieme infinito. È, in un esempio elementare, il problema dell'infinito matematico di cui abbiamo parlato in *Matematica 3* (cap. 4).

SINTESI

- **Principio di moltiplicazione:** una scelta in k fasi, con n_1, n_2, ..., n_k possibilità che non dipendono dalle scelte precedenti, si compie in $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ modi. **Principio della somma:** casi disgiunti si sommano; spesso conviene contare il complementare.
- Per contare gruppi di k oggetti scelti tra n ci si chiede prima: *conta l'ordine? si può ripetere?* Le quattro risposte danno modelli diversi.
- Disposizioni semplici (ordine sì, ripetizioni no): $D_{n,k} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Con ripetizione: $D'_{n,k} = n^k$.
- Permutazioni: $P_n = n!$, con $0! = 1$ per convenzione. Con oggetti ripetuti k_1, ..., k_r volte: $\dfrac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$; attorno a un tavolo rotondo: $(n-1)!$.
- Combinazioni semplici (sottoinsiemi di k elementi): $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (simmetria) e $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Stifel), dimostrabili contando in due modi la stessa cosa.
- Un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi, e $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.
- Il triangolo di Tartaglia si costruisce con la formula di Stifel; la riga n dà i coefficienti di $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n$ (binomio di Newton).
- **Principio di induzione:** se $P(n_0)$ è vera (passo base) e per ogni $n \geq n_0$ da $P(n)$ segue $P(n+1)$ (passo induttivo), allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$. Servono entrambi i passi.
- $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$; $2^n \geq n+1$; $n! > 2^n$ per $n \geq 4$. Nessun numero di verifiche sostituisce una dimostrazione: $n^2 + n + 41$ è primo per $n = 0, \ldots, 39$ ma non per $n = 40$.
- L'induzione matematica deduce, l'induzione fisica generalizza dall'esperienza e resta smentibile (problema di Hume). Nell'aritmetica di Peano (1889) il principio di induzione è un assioma dei numeri naturali.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● In quanti modi si possono assegnare medaglia d'oro, d'argento e di bronzo tra 6 finalisti?
   A. 120
   B. 20
   C. 216
   D. 18

2. ● Il numero $0!$ vale:
   A. 0
   B. 1
   C. non è definito
   D. -1

3. ● In quale di queste situazioni l'ordine conta?
   A. scegliere 3 libri da portare in vacanza
   B. eleggere 2 rappresentanti di classe
   C. ricevere una mano di 5 carte
   D. comporre il codice di un lucchetto a 4 cifre

4. ●● Il coefficiente binomiale $\binom{10}{7}$ è uguale a:
   A. $\binom{10}{3}$
   B. $10 \cdot 9 \cdot 8$
   C. $7!$
   D. $\binom{7}{3}$

5. ●● Quanti sono gli anagrammi, anche privi di senso, della parola OTTO?
   A. 24
   B. 12
   C. 6
   D. 4

6. ●● In una dimostrazione per induzione, nel passo induttivo si dimostra che:
   A. $P(1)$ è vera
   B. per ogni n, se $P(n)$ è vera allora è vera $P(n+1)$
   C. $P(n)$ è vera per ogni n
   D. $P(n+1)$ è vera senza alcuna ipotesi

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Le disposizioni con ripetizione $D'_{n,k}$ esistono solo per $k \leq n$.
   b) Per $k \geq 2$ si ha $C_{n,k} < D_{n,k}$.
   c) $\binom{n}{1} = n$ per ogni $n \geq 1$.
   d) $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.
   e) Una proprietà verificata per $n = 1, 2, \ldots, 1000$ è vera per ogni n.
   f) $P_n = D_{n,n}$.

8. ● Completa.
   a) $n! = n \cdot$ _____ per ogni $n \geq 1$.
   b) Un sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi si chiama _____ di classe k.
   c) Formula di Stifel: $\binom{n}{k} =$ _____ + _____ .
   d) Nel triangolo di Tartaglia la somma dei numeri della riga n è _____ .
   e) Una dimostrazione per induzione consiste di due parti: il _____ e il _____ .

Calcolare

9. ● Calcola: a) 6!; b) $\frac{8!}{6!}$; c) $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$; d) $\frac{(n+1)!}{n!}$; e) $0! + 1!$.

10. ● Calcola: a) $D_{7,3}$; b) $D'_{4,3}$; c) P_5; d) $C_{9,4}$; e) $\binom{12}{2}$; f) $\binom{20}{18}$.

11. ● Con le cifre 1, 2, 3, 4, 5 quanti numeri di tre cifre si possono formare a) se le cifre si possono ripetere; b) se le cifre devono essere tutte diverse?

12. ●● Quanti anagrammi, anche privi di senso, hanno le parole a) LIBRO; b) CARTA; c) BANANA; d) STATISTICA?

13. ●● In quanti modi 7 persone possono sedersi a) su 7 sedie in fila; b) attorno a un tavolo rotondo, se contano solo le posizioni relative; c) su 7 sedie in fila, se due di loro vogliono stare vicine?

14. ●● In una classe ci sono 12 ragazze e 10 ragazzi. In quanti modi si può formare una delegazione di 4 studenti a) senza vincoli; b) con 2 ragazze e 2 ragazzi; c) con almeno una ragazza?

15. ●● Quante diagonali ha a) un esagono; b) un poligono di 20 lati? Spiega da dove viene la formula che usi.

16. ● A partire dalla riga 8 della Figura 9.4, scrivi le righe 9 e 10 del triangolo di Tartaglia e controlla che la loro somma sia 2^n.

17. ●● Sviluppa con il binomio di Newton: a) $(x + 1)^5$; b) $(2a - b)^4$; c) $(1 + x^2)^3$.

18. ●● a) Trova il coefficiente di x^4 nello sviluppo di $(x+3)^7$. b) Trova il termine che non contiene x nello sviluppo di $(x+\frac{2}{x})^6$.

19. ●● Un insieme ha 6 elementi. a) Quanti sottoinsiemi ha? b) Quanti di essi hanno esattamente 2 elementi? c) Quanti ne hanno almeno 2?

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra per induzione che $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$ per ogni $n \geq 1$. Poi mostra che la stessa uguaglianza segue dalla formula di Gauss.

21. ●● Dimostra per induzione che $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni $n \geq 1$.

22. ●● Dimostra per induzione che 5^n-1 è divisibile per 4 per ogni $n \geq 1$. (Suggerimento: $5^{n+1}-1=5(5^n-1)+4$.)

23. ●● n persone entrano una alla volta in una stanza, e ognuna, entrando, stringe la mano a tutte quelle già presenti. Spiega perché le strette di mano sono $1+2+\ldots+(n-1)$ e perché sono anche $\binom{n}{2}$. Che formula ottieni?

24. ●●● Trova l'errore. «Dimostriamo che in ogni gruppo di n cavalli tutti i cavalli hanno lo stesso colore. Passo base: in un gruppo di un solo cavallo, tutti hanno lo stesso colore. Passo induttivo: supponiamo la proprietà vera per ogni gruppo di n cavalli e prendiamo un gruppo di $n+1$ cavalli. Togliendo il primo restano n cavalli, tutti dello stesso colore; togliendo l'ultimo restano n cavalli, tutti dello stesso colore. I cavalli in mezzo appartengono a entrambi i gruppi, quindi tutti gli $n+1$ cavalli hanno lo stesso colore.»

Problemi

25. ●● Una pizzeria propone una base e 10 ingredienti facoltativi, ciascuno dei quali si può aggiungere o no. a) Quante pizze diverse si possono comporre, compresa quella senza ingredienti aggiunti? b) Quante hanno esattamente 3 ingredienti? c) Il menù promette «più di mille pizze diverse»: è vero?

26. ●● Il lucchetto di una bicicletta ha 4 rotelle, ciascuna con le cifre da 0 a 9. a) Quanti codici sono possibili? b) Quanti hanno le cifre tutte diverse? c) Il proprietario ricorda che le cifre sono 1, 3, 5 e 7, ma non in quale ordine: quanti tentativi deve fare, al massimo? d) Quanti codici contengono almeno un 7?

27. ●● In un quartiere le strade formano una griglia di isolati quadrati. Per andare dall'incrocio A all'incrocio B bisogna percorrere 5 isolati verso est e 3 verso nord. a) Quanti sono i percorsi più brevi da A a B? (Ogni percorso è una sequenza di 8 tratti, ciascuno E o N.) b) Quanti di essi passano per l'incrocio C, che si trova 2 isolati a est e 1 a nord di A?

28. ●● In un campionato con 20 squadre ogni squadra incontra ogni altra due volte, una in casa e una in trasferta. a) Quante partite si giocano in tutto? b) Spiega perché il numero è una disposizione semplice e non una combinazione. c) Quante partite si giocherebbero con un solo incontro per ogni coppia di squadre?

Verso la verifica

29. ●● Con le 21 lettere dell'alfabeto italiano (5 vocali e 16 consonanti) si formano parole di 5 lettere tutte diverse, anche prive di senso. a) Quante sono? b) Quante cominciano e finiscono con una vocale?

30. ●● Dimostra per induzione che $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ per ogni $n \geq 0$. Che cosa dice l'uguaglianza sul numero binario formato da $n + 1$ cifre uguali a 1?

31. ●●● **Sfida.** a) Usa il binomio di Newton per spiegare perché $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $x \geq 0$ e ogni $n \geq 1$. b) Dimostra per induzione che la stessa disuguaglianza vale per ogni $x \geq -1$. (Nel passo induttivo moltiplica per $1 + x$, che non è negativo.) c) Deduci che $1{,}001^{1000} \geq 2$.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il primo capitolo, sui numeri naturali, con il principio di induzione, la somma delle progressioni e il teorema del binomio.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: la voce sull'induzione e l'induzione matematica, dalla congettura alla dimostrazione.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: il triangolo aritmetico in Cina e nel mondo islamico, Tartaglia e Pascal.
- [HAC] Hacking, *The Emergence of Probability*: Pascal, il triangolo aritmetico e la nascita del calcolo delle probabilità, che studierai nel prossimo capitolo.

Glossario del capitolo

Binomio di Newton
La formula
$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n$.

Calcolo combinatorio
La parte della matematica che conta i modi di scegliere, ordinare o raggruppare oggetti, senza elencarli.

Coefficiente binomiale
Il numero $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, che conta le combinazioni e compare nello sviluppo di $(a+b)^n$.

Combinazione con ripetizione
Gruppo non ordinato di k oggetti, anche ripetuti, scelti tra n; sono $\binom{n+k-1}{k}$.

Combinazione semplice
Sottoinsieme di k elementi di un insieme di n elementi; sono $C_{n,k} = \binom{n}{k}$.

Disposizione con ripetizione
Sequenza ordinata di k oggetti, anche ripetuti, scelti tra n; sono $D'_{n,k} = n^k$.

Disposizione semplice
Sequenza ordinata di k oggetti distinti scelti tra n; sono $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Fattoriale
$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ per $n \geq 1$; per convenzione $0! = 1$.

Formula di Stifel
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, per $1 \leq k \leq n-1$.

Induzione fisica
Generalizzazione di una legge a partire da casi osservati; è sempre esposta alla smentita.

Ipotesi induttiva
L'ipotesi «$P(n)$ è vera» da cui parte il passo induttivo.

Passo base
La verifica di $P(n_0)$, il primo caso, in una dimostrazione per induzione.

Passo induttivo
La dimostrazione che, per un n qualsiasi, da $P(n)$ segue $P(n+1)$.

Permutazione
Ordinamento di n oggetti distinti; sono $P_n = n!$.

Permutazione circolare
Disposizione di n oggetti attorno a un cerchio in cui contano solo le posizioni relative; sono $(n-1)!$.

Permutazione con ripetizione
Ordinamento distinguibile di n oggetti di cui $k_1, \ldots, k_r$ uguali tra loro; sono $\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$.

Principio della somma
Il numero di oggetti divisi in gruppi disgiunti è la somma dei numeri dei singoli gruppi.

Principio di induzione
Se $P(n_0)$ è vera e per ogni $n \geq n_0$ da $P(n)$ segue $P(n+1)$, allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Principio di moltiplicazione
Una scelta in fasi successive, con $n_1, \ldots, n_k$ possibilità indipendenti dalle scelte precedenti, si compie in $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ modi.

Triangolo di Tartaglia
Lo schema dei coefficienti binomiali disposti per righe, in cui ogni numero interno è la somma dei due sopra.

Soluzioni

1. A. $D_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

2. B. È la convenzione che rende vera $D_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n!$.

3. D. Nel codice 1234 e 4321 sono diversi; negli altri casi conta solo quali oggetti si scelgono.

4. A. Simmetria: $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$; $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ è $D_{10,3}$.

5. C. $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$: OTTO, OTOT, OOTT, TOOT, TOTO, TTOO.

6. B. Si dimostra un'implicazione, per un n qualsiasi; $P(1)$ (o $P(0)$) è il passo base.

7. a) F: k può superare n (un byte: 2^8). b) V: $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$ con $k! \geq 2$. c) V. d) F: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. e) F: servono il passo base e il passo induttivo; $n^2 + n + 41$ è primo fino a 39 e non per 40. f) V.

8. a) $(n-1)!$. b) combinazione semplice. c) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. d) 2^n. e) passo base, passo induttivo.

9. a) 720. b) $8 \cdot 7 = 56$. c) $\binom{10}{3} = 120$. d) $n + 1$. e) $1 + 1 = 2$.

10. a) $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. b) $4^3 = 64$. c) 120. d) $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = 126$. e) $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. f) $\binom{20}{2} = 190$.

11. a) $5^3 = 125$. b) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

12. a) $5! = 120$. b) Due A: $\frac{5!}{2!} = 60$. c) 3 A e 2 N: $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$. d) 10 lettere: S 2, T 3, A 2, I 2, C 1: $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{48} = 75\,600$.

13. a) $7! = 5040$. b) $6! = 720$. c) Il blocco delle due persone più le altre 5 fanno 6 elementi: $6! \cdot 2 = 1440$.

14. a) $\binom{22}{4} = 7315$. b) $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} = 66 \cdot 45 = 2970$. c) Complementare: le delegazioni di soli ragazzi sono $\binom{10}{4} = 210$; $7315 - 210 = 7105$.

15. I segmenti tra due vertici sono $\binom{n}{2}$; tolti gli n lati restano $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali. a) $15 - 6 = 9$. b) $190 - 20 = 170$.

16. Riga 9: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1 (somma $512 = 2^9$). Riga 10: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 (somma $1024 = 2^{10}$).

17. a) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$. b) $16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$. c) $1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6$.

18. a) Termine $\binom{7}{k} x^{7-k} 3^k$ con $7 - k = 4$, $k = 3$: $\binom{7}{3} \cdot 27 = 35 \cdot 27 = 945$. b) Termine $\binom{6}{k} x^{6-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \binom{6}{k} 2^k x^{6-2k}$; senza x per $k = 3$: $20 \cdot 8 = 160$.

19. a) $2^6 = 64$. b) $\binom{6}{2} = 15$. c) Si tolgono il vuoto e i 6 sottoinsiemi di un elemento: $64 - 1 - 6 = 57$.

20. Passo base: $2 = 1 \cdot 2$. Passo induttivo: se $2 + \ldots + 2n = n(n+1)$, allora $2 + \ldots + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$, che è la tesi per $n + 1$. c.v.d. Con Gauss: $2 + 4 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + \ldots + n)$ $= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

21. Passo base: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Passo induttivo: se la formula vale per n, allora $1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ $= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$ $= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, che

è la formula per $n + 1$, perché $2(n + 1) + 1 = 2n + 3$. c.v.d.

22. Passo base: $5 - 1 = 4$. Passo induttivo: se $5^n - 1 = 4m$ con m intero, allora $5^{n+1} - 1 = 5(5^n - 1) + 4 = 20m + 4 = 4(5m + 1)$, divisibile per 4. c.v.d.

23. Chi entra per secondo stringe 1 mano, il terzo 2, ..., l'ultimo $n - 1$: in tutto $1 + 2 + ... + (n - 1)$. D'altra parte ogni stretta di mano corrisponde a una coppia di persone (non ordinata), e ogni coppia si stringe la mano esattamente una volta, quando entra la seconda delle due: le strette sono $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Quindi $1 + 2 + ... + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$, la formula di Gauss con $n - 1$ al posto di n.

24. Il passo induttivo non vale per ogni n: per $n = 1$, cioè passando da 1 a 2 cavalli, togliendo il primo resta solo il secondo e togliendo l'ultimo resta solo il primo; i due gruppi non hanno cavalli in comune, e non c'è un cavallo «in mezzo» che trasmetta il colore. L'argomento funziona solo per $n \geq 2$, ma da $P(1)$ non si arriva mai a $P(2)$: la catena si spezza tra la prima e la seconda tessera.

25. a) $2^{10} = 1024$. b) $\binom{10}{3} = 120$. c) Sì: $1024 > 1000$ (compresa la pizza senza ingredienti aggiunti; senza di essa 1023).

26. a) $10^4 = 10\,000$ (disposizioni con ripetizione, nonostante il nome «combinazione»). b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. c) $4! = 24$. d) Complementare: $10\,000 - 9^4 = 10\,000 - 6561 = 3439$.

27. a) Si sceglie quali 3 degli 8 tratti sono N: $\binom{8}{3} = 56$ (sono anche le permutazioni con ripetizione $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$). b) Da A a C: 3 tratti, di cui 1 N, $\binom{3}{1} = 3$; da C a B: 3 E e 2 N, $\binom{5}{2} = 10$. Per il principio di moltiplicazione $3 \cdot 10 = 30$.

28. a) $D_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$. b) Una partita è individuata dalla coppia ordinata (squadra di casa, squadra in trasferta): scambiando le due squadre si ottiene un'altra partita, e una squadra non gioca contro se stessa. c) $\binom{20}{2} = 190$.

29. a) $D_{21,5} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 2\,441\,880$. b) Prima lettera: 5 vocali; ultima: 4 vocali rimaste; le tre centrali tra le 19 lettere rimaste: $19 \cdot 18 \cdot 17 = 5814$. In tutto $5 \cdot 4 \cdot 5814 = 116\,280$.

30. Passo base: $1 = 2^1 - 1$. Passo induttivo: se $1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, aggiungendo 2^{n+1} si ottiene $2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$. c.v.d. In binario $1 + 2 + ... + 2^n$ si scrive con $n + 1$ cifre uguali a 1 (per esempio $111_2 = 7$): aggiungendo 1 si ottiene $1000...0_2 = 2^{n+1}$.

31. a) Per $x \geq 0$ tutti i termini di $(1 + x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + ... + x^n$ sono non negativi; togliendo quelli dal terzo in poi si ottiene $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. b) Passo base $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$. Passo induttivo: se $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, moltiplicando per $1 + x \geq 0$ (il verso resta) $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$, perché $nx^2 \geq 0$. c.v.d. c) Con $x = 0{,}001$ e $n = 1000$: $1{,}001^{1000} \geq 1 + 1000 \cdot 0{,}001 = 2$ (il valore è circa 2,717).