CAPITOLO

8

I logaritmi

Ciò che l'esponenziale moltiplica, il logaritmo lo somma. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire il logaritmo come esponente, giustificarne l'esistenza e calcolarlo con la definizione e con la calcolatrice.
2. Dimostrare e usare le proprietà dei logaritmi e la formula del cambiamento di base.
3. Riconoscere la funzione logaritmica come inversa dell'esponenziale e tracciarne il grafico per basi maggiori e minori di 1.
4. Risolvere equazioni $a^x = b$ ed equazioni e disequazioni logaritmiche semplici, partendo dalle condizioni di esistenza.
5. Usare i logaritmi nei modelli di crescita e decadimento, nelle scale del pH e dei decibel e nei grafici semilogaritmici.

INDICE DEL CAPITOLO

8.1 Il logaritmo 2
8.2 Le proprietà dei logaritmi 4
8.3 La funzione logaritmica 7
8.4 Equazioni e disequazioni 10
8.5 Modelli e scale logaritmiche 12

Matematica 4 · Parte III · Esponenziali e logaritmi · versione 1.0
Capitolo 8: I logaritmi · pagine 213–234 del volume completo · estratto per lo studio

Un capitale depositato in banca cresce del 2% all'anno: tra quanti anni sarà raddoppiato? Un campione di una sostanza radioattiva si dimezza ogni 30 anni: quando ne resterà un decimo? Nel capitolo 7 abbiamo scritto modelli come $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ e $a_n = a_0 \cdot q^n$, e sappiamo calcolare quanto vale la grandezza a un istante dato. Ma le domande più naturali chiedono il contrario: non «quanto, dopo un certo tempo?», bensì «dopo quanto tempo?». L'incognita sta all'esponente, e un'equazione come $2^x = 5$ l'abbiamo potuta soltanto stimare, con il grafico o con la bisezione.

Il numero che risolve un'equazione di questo tipo ha un nome: **logaritmo**. In questo capitolo lo definiamo e ne studiamo le proprietà, che trasformano i prodotti in somme; per più di tre secoli, da quando John Napier (Nepero) le pubblicò nel 1614, sono state il principale strumento di calcolo di astronomi, navigatori e ingegneri. Costruiremo poi la funzione logaritmica come inversa della funzione esponenziale, risolveremo equazioni e disequazioni nei casi semplici e scopriremo perché la chimica misura l'acidità con il pH, perché i suoni si misurano in decibel e perché, quando i dati crescono in modo esponenziale, conviene disegnarli su una scala logaritmica.

8.1 Il logaritmo

8.1.1 Un nome per l'esponente

Alcune equazioni esponenziali si risolvono a mente, scrivendo i due membri come potenze della stessa base (capitolo 7): $2^x = 32$ ha la soluzione $x = 5$, $2^x = \dfrac{1}{8}$ ha la soluzione $x = -3$, $2^x = \sqrt{2}$ ha la soluzione $x = \dfrac{1}{2}$. Per $2^x = 5$ questo non è possibile: 5 non si scrive come potenza di 2 con esponente intero, e nemmeno con esponente razionale. Sappiamo però che la soluzione esiste e sta tra 2 e 3, perché $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$, e la bisezione la stringe attorno a 2,32.

Che una soluzione esista, e una sola, non dipende dal numero 5. Nel capitolo 7 abbiamo visto che, per $a > 0$ e $a \neq 1$, la funzione $y = a^x$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è iniettiva (crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$) e ha per immagine l'intervallo $]0; +\infty[$. Allora ogni retta orizzontale $y = b$ con $b > 0$ incontra il grafico: almeno una volta, perché b appartiene all'immagine; al più una volta, perché una funzione iniettiva non assume due volte lo stesso valore. Con il linguaggio del capitolo 1: $f(x) = a^x$ è una *biiezione* tra $\mathbb{R}$ e $]0; +\infty[$.

IN SINTESI

Teorema. Ipotesi: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. **Tesi:** esiste uno e un solo numero reale c tale che $a^c = b$.

Definizione. Quel numero si chiama **logaritmo** in base a di b e si scrive $\log_a b$. Il numero a è la **base**, il numero b è l'**argomento**:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

In breve: **il logaritmo è l'esponente** da dare alla base per ottenere l'argomento.

Ognuna delle tre condizioni ha una ragione precisa. La base è positiva perché solo per $a > 0$ la potenza a^x ha senso per ogni esponente reale (capitolo 7). La base è diversa da 1 perché $1^x = 1$ per ogni x: l'equazione $1^x = 5$ non ha soluzioni e $1^x = 1$ ne ha infinite, quindi nessun numero sarebbe «il» logaritmo. L'argomento è positivo perché una potenza di base positiva è sempre positiva: $2^x = -4$ e $2^x = 0$ sono impossibili, e $\log_2(-4)$, $\log_2 0$ non esistono. Attenzione: a non poter essere negativo è l'argomento, non il logaritmo, che può essere positivo, negativo o nullo.

Leggiamo la definizione nei due versi. $\log_3 81 = 4$ perché $3^4 = 81$; $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ perché $5^{-2} = \frac{1}{25}$; $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ perché $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$; $\log_{1/2} 8 = -3$ perché $(\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$. Quando base e argomento sono potenze dello stesso numero si scrive tutto in quella base: per $\log_8 16$ cerchiamo c con $8^c = 16$, cioè $2^{3c} = 2^4$, quindi $c = \frac{4}{3}$; per $\log_{27} 9$, da $3^{3c} = 3^2$ si ottiene $c = \frac{2}{3}$. La definizione serve anche a trovare l'argomento o la base: $\log_3 x = -4$ significa $x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$; $\log_x 49 = 2$ significa $x^2 = 49$, e poiché la base deve essere positiva si accetta solo $x = 7$.

Dalla definizione seguono quattro uguaglianze, valide per ogni base ammessa: $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$; $\log_a a^x = x$ per ogni x reale; $a^{\log_a b} = b$ per ogni $b > 0$. Le ultime due dicono che «elevare a alla potenza» e «prendere il logaritmo in base a» si annullano a vicenda, come elevare al quadrato ed estrarre la radice quadrata di un numero positivo. Studiando la funzione logaritmica vedremo che è proprio la relazione tra una funzione e la sua inversa.

8.1.2 Logaritmi decimali e naturali

Due basi hanno un nome proprio e un tasto sulla calcolatrice. Il **logaritmo decimale** ha base 10 e si scrive log senza indice: $\log 1000 = 3$, $\log 0{,}01 = -2$, $\log 1 = 0$. Il **logaritmo naturale** ha per base il numero $e \approx 2{,}718$ del capitolo 7 e si scrive ln: $\ln e = 1$, $\ln e^3 = 3$, $\ln 1 = 0$, $e^{\ln 5} = 5$. Per ogni altra base, in questo libro, la base si scrive sempre: $\log_2$, $\log_{1/3}$.

Sulla calcolatrice scientifica si digita, per esempio, *log* 2 e si legge 0,301029995...; *ln* 2 dà 0,693147... . Molte calcolatrici non hanno un tasto per le altre basi, e la formula del cambiamen-

to di base, tra poco, mostrerà che non serve. Se si chiede log (−3) o log 0 la calcolatrice segnala un errore, come previsto dalla definizione.

Il logaritmo decimale di un numero dice quante cifre ha. Un intero positivo N di k cifre soddisfa $10^{k-1} \le N < 10^k$; poiché il logaritmo decimale cresce con l'argomento, $k - 1 \le \log N < k$. Per esempio $\log 4500 \approx 3{,}65$: il numero sta tra 10^3 e 10^4 e ha 4 cifre. In generale **il numero delle cifre è la parte intera del logaritmo decimale, più 1**. Tra poco useremo questa osservazione per contare le cifre di un numero troppo grande per la calcolatrice.

8.2 Le proprietà dei logaritmi

8.2.1 Prodotto, quoziente, potenza

Moltiplicando due potenze della stessa base gli esponenti si sommano: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Poiché i logaritmi *sono* esponenti, ci aspettiamo che il logaritmo di un prodotto sia la somma dei logaritmi. Le proprietà dei logaritmi non sono altro che le proprietà delle potenze lette «dalla parte degli esponenti».

IN SINTESI

Teorema (proprietà dei logaritmi). Ipotesi: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, k numero reale. **Tesi:**

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ (logaritmo del prodotto)

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (logaritmo del quoziente)

$\log_a x^k = k \log_a x$ (logaritmo della potenza)

Dimostrazione. Poniamo $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$; per definizione $a^u = x$ e $a^v = y$. Allora $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$: l'esponente da dare ad a per ottenere xy è $u + v$, cioè $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$. Allo stesso modo $\dfrac{x}{y} = a^u : a^v = a^{u-v}$ dà la seconda uguaglianza, e $x^k = (a^u)^k = a^{ku}$ dà $\log_a x^k = ku = k \log_a x$. c.v.d.

Due casi particolari della terza proprietà ricorrono spesso: con $k = -1$, $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$; con $k = \dfrac{1}{n}$, il logaritmo di una radice n-esima è $\dfrac{1}{n}$ del logaritmo del radicando. Così, conoscendo soltanto $\log 2 \approx 0{,}3010$, si calcolano $\log 8 = 3 \log 2 \approx 0{,}9030$, $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = 1 - \log 2 \approx 0{,}6990$ e $\log \sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \log 2 \approx 0{,}1505$.

Lette da sinistra a destra, le proprietà «sciolgono» un logaritmo complicato: per a, $b > 0$, $\ln (a^2 b) = 2 \ln a + \ln b$. Lette da destra a sinistra, riducono un'espressione a un solo logaritmo, e a volte rivelano un valore semplice nascosto: $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 36 = 2$, benché $\log_6 4 \approx 0{,}774$ non sia affatto semplice; $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 27 = 3$; $2 \log 5 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$. L'or-

dine conviene sempre lo stesso: prima i coefficienti diventano esponenti, poi le somme diventano prodotti e le differenze quozienti.

ERRORE FREQUENTE

Il logaritmo di una somma non è la somma dei logaritmi. $\log(a+b) \neq \log a + \log b$: per esempio $\log(1+1) = \log 2 \approx 0{,}301$, mentre $\log 1 + \log 1 = 0$. Per il logaritmo di una somma non esiste alcuna regola. Sono sbagliate anche $\log a \cdot \log b = \log(ab)$ e $\dfrac{\log a}{\log b} = \log \dfrac{a}{b}$: le proprietà trasformano i prodotti in *somme* e i quozienti in *differenze*, non in prodotti e quozienti di logaritmi.

Le proprietà valgono per argomenti positivi. $\log x^2$ esiste per ogni $x \neq 0$, mentre $2 \log x$ esiste solo per $x > 0$: per $x = -10$, $\log(-10)^2 = \log 100 = 2$, ma $2 \log(-10)$ non ha senso. Risolvendo le equazioni logaritmiche vedremo che cosa comporta.

Ora possiamo contare le cifre di 2^{100}, un numero che la calcolatrice mostra solo in forma approssimata. Per la proprietà della potenza $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 100 \cdot 0{,}30103 = 30{,}103$: la parte intera è 30, quindi 2^{100} ha 31 cifre. Allo stesso modo $\log 3^{40} = 40 \log 3 \approx 19{,}08$, e 3^{40} ha 20 cifre.

8.2.2 Il cambiamento di base

Come si calcola $\log_2 5$ con una calcolatrice che conosce solo log e ln? Poniamo $c = \log_2 5$, cioè $2^c = 5$, e prendiamo il logaritmo decimale dei due membri (numeri positivi uguali hanno logaritmi uguali): $\log 2^c = \log 5$, cioè $c \cdot \log 2 = \log 5$, quindi $c = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx \dfrac{0{,}69897}{0{,}30103} \approx 2{,}3219$. È la soluzione di $2^x = 5$ che nel capitolo 7 avevamo solo stimato. Lo stesso ragionamento, con basi qualsiasi, dimostra la formula del **cambiamento di base**.

Se $a, c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$ e $b > 0$, allora

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{in particolare} \qquad \log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Dimostrazione. Sia $y = \log_a b$, cioè $a^y = b$. Applichiamo $\log_c$ ai due membri e la proprietà della potenza: $y \cdot \log_c a = \log_c b$. Poiché $a \neq 1$, si ha $\log_c a \neq 0$ e possiamo dividere: $y = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. c.v.d.

Il risultato non dipende dalla base c scelta: $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx \dfrac{1{,}60944}{0{,}69315} \approx 2{,}3219$, come prima. Conviene sempre controllare con il tasto delle potenze: $2^{2{,}3219} \approx 5{,}000$. Il controllo smaschera l'errore più comune, la divisione rovesciata: $\dfrac{\log 2}{\log 5} \approx 0{,}431$ è $\log_5 2$, un altro numero. Dalla formula seguono due conseguenze utili: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (con $b \neq 1$) e $\log_{1/a} x = -\log_a x$, perché $\log_c \dfrac{1}{a} = -\log_c a$.

8.2.3 Calcolare con i logaritmi

Perché, per secoli, i logaritmi sono stati così preziosi? Perché trasformano una moltiplicazione in un'addizione, molto più rapida e sicura da eseguire a mano. Per calcolare $37{,}4 \cdot 2{,}85$ con una tavola dei logaritmi decimali si cercavano $\log 37{,}4 \approx 1{,}5729$ e $\log 2{,}85 \approx 0{,}4548$, si sommava $(2{,}0277)$ e si cercava nella tavola il numero con quel logaritmo: $10^{2{,}0277} \approx 106{,}6$. Il prodotto esatto è 106,59. Una divisione diventava una sottrazione, una radice quadrata una divisione per 2.

La stessa idea si può realizzare con due righe graduate. Su una riga si segnano i numeri da 1 a 10 a distanze dall'origine proporzionali ai loro logaritmi decimali: l'1 nell'origine (perché $\log 1 = 0$), il 10 all'estremo (perché $\log 10 = 1$), il 2 a circa il 30% della lunghezza, il 3 al 48%. Su una scala così i numeri non sono equidistanti: si addensano verso destra. Facendo scorrere una seconda riga identica lungo la prima, le lunghezze si sommano, e quindi i numeri si moltiplicano. È il principio del **regolo calcolatore** della Figura 8.1: portando l'1 della scala mobile C sopra il 2 della scala fissa D, sotto il 3 di C si legge 6, perché $\log 2 + \log 3 = \log 6$.

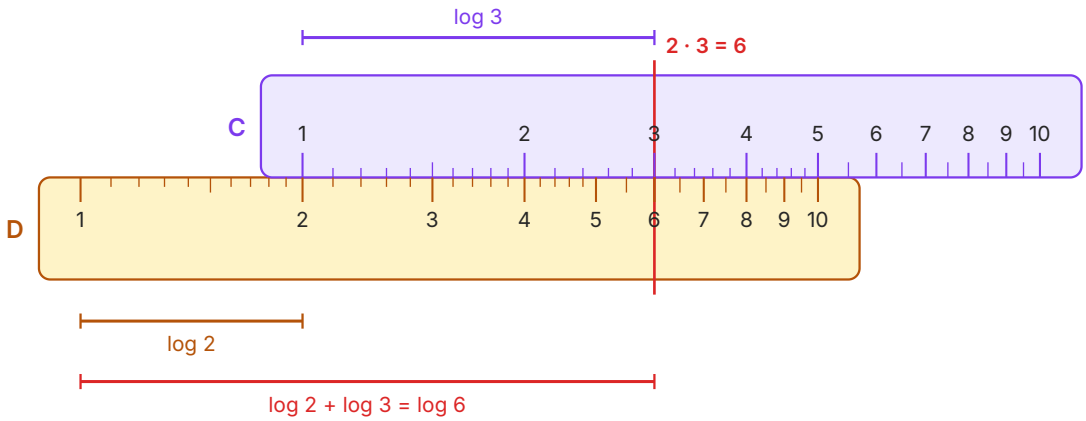

Figura 8.1 Il principio del regolo calcolatore. Su ciascuna scala il numero x è segnato a una distanza dall'1 proporzionale a $\log x$ (posizioni calcolate). Spostando la scala mobile C finché il suo 1 sta sopra il 2 della scala fissa D, le lunghezze $\log 2$ e $\log 3$ si sommano: la linea rossa trova 6 su D. Nella stessa posizione, sopra ogni numero x di D si legge $\frac{x}{2}$ su C.

APPROFONDIMENTO · NEPERO, BRIGGS E IL CALCOLO

Nel 1614 lo scozzese John Napier, in italiano Nepero, pubblicò in latino la *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* («Descrizione della meravigliosa regola dei logaritmi»), con una tavola numerica costruita in molti anni di calcoli. Lo scopo era pratico: liberare astronomi e navigatori dalle lunghe moltiplicazioni e divisioni tra numeri di molte cifre. La parola *logaritmo*, coniata da lui, unisce i termini greci λόγος («rapporto») e ἀριθμός («numero»).

I logaritmi di Nepero non coincidono con quelli che usiamo oggi, ma l'idea è la stessa: a un prodotto di numeri corrisponde una somma di logaritmi. Fu l'inglese Henry Briggs, d'accordo con Nepero, a proporre logaritmi con $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$, cioè i nostri logaritmi decimali, e a calcolarne le prime grandi tavole. Keplero accolse i logaritmi con entusiasmo e se ne servì per i calcoli delle *Tabulae Rudolphinae*, le tavole astronomiche fondate sulle sue orbite ellittiche (capitolo 2). Tavole dei logaritmi e regoli calcolatori sono rimasti strumenti di lavoro quotidiano fino alla diffusione delle calcolatrici elettroniche, negli anni Settanta del Novecento.

8.3 La funzione logaritmica

8.3.1 L'inversa dell'esponenziale

Nel capitolo 1 abbiamo visto che una funzione biiettiva $f\colon A \to B$ ha un'inversa $f^{-1}\colon B \to A$, che a ogni y di B associa l'unico x di A con $f(x) = y$. La funzione $f(x) = a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$) è una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $]0; +\infty[$: lo dice il teorema che ha permesso di definire il logaritmo. La sua inversa associa a ogni $x > 0$ l'esponente c tale che $a^c = x$, cioè $\log_a x$. Le uguaglianze $\log_a a^x = x$ e $a^{\log_a x} = x$ sono le due relazioni $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(x)) = x$ che valgono per ogni funzione invertibile.

IN SINTESI

La **funzione logaritmica** di base a ($a > 0$, $a \neq 1$) è la funzione $y = \log_a x$, inversa della funzione esponenziale $y = a^x$.

- Dominio $]0; +\infty[$, immagine $\mathbb{R}$; è iniettiva.
- Il grafico passa per $(1; 0)$ e per $(a; 1)$.
- Se $a > 1$ è crescente: $\log_a x < 0$ per $0 < x < 1$ e $\log_a x > 0$ per $x > 1$.
- Se $0 < a < 1$ è decrescente: $\log_a x > 0$ per $0 < x < 1$ e $\log_a x < 0$ per $x > 1$.
- L'asse y è un asintoto verticale: il grafico non lo tocca mai, ma vi si avvicina quanto si vuole.

Il grafico di una funzione inversa è il simmetrico del grafico della funzione rispetto alla bisettrice $y = x$, purché le unità di misura sui due assi siano uguali (capitolo 1). Se $(2; 4)$ sta sul grafico di $y = 2^x$, allora $(4; 2)$ sta su quello di $y = \log_2 x$: $2^2 = 4$ si legge anche $\log_2 4 = 2$ (Figura 8.2). Ogni

proprietà dell'esponenziale ha la sua immagine speculare: il punto (0; 1) diventa (1; 0); l'asse x, a cui il grafico di 2^x si avvicina verso sinistra senza mai toccarlo, diventa l'asse y; la crescita sempre più rapida dell'esponenziale diventa la crescita sempre più lenta del logaritmo.

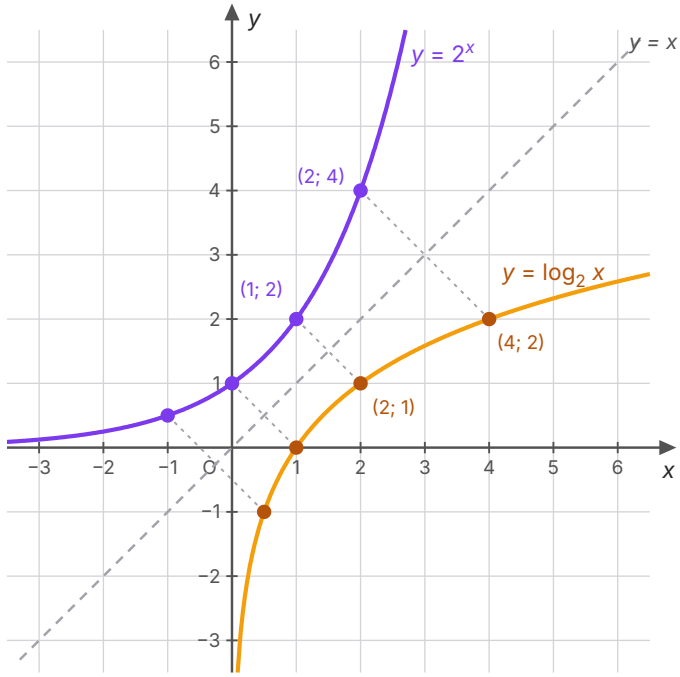

Figura 8.2 I grafici di $y = 2^x$ (viola) e $y = \log_2 x$ (arancio), calcolati dalle equazioni, sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$ (tratteggiata). I punti corrispondenti, come (1; 2) e (2; 1), sono uniti da segmenti perpendicolari alla bisettrice. Le unità sui due assi sono uguali.

Che cosa succede vicino all'asse y? Non serve un concetto nuovo: basta una tabella di valori. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, $\log_2 \frac{1}{1024} = -10$, $\log_2 2^{-20} = -20$: quando l'argomento si avvicina a 0 il logaritmo scende sotto qualunque numero fissato, eppure non esiste per $x = 0$. Nel quinto anno questo comportamento sarà descritto con il concetto di limite.

8.3.2 Base maggiore o minore di 1

La Figura 8.3 mostra i grafici di $y = \log_a x$ per tre basi. Tutti passano per (1; 0), perché $\log_a 1 = 0$ per ogni base, e ciascuno incontra la retta $y = 1$ nel punto di ascissa a. Per $a > 1$ il logaritmo è crescente, e più grande è la base più lentamente cresce: $\log_2 8 = 3$, mentre $\log 8 \approx 0{,}90$. Il grafico di $y = \log_{1/2} x$ è il simmetrico di quello di $y = \log_2 x$ rispetto all'asse x, perché $\log_{1/2} x = -\log_2 x$ (conseguenza del cambiamento di base): una base minore di 1 dà una funzione decrescente.

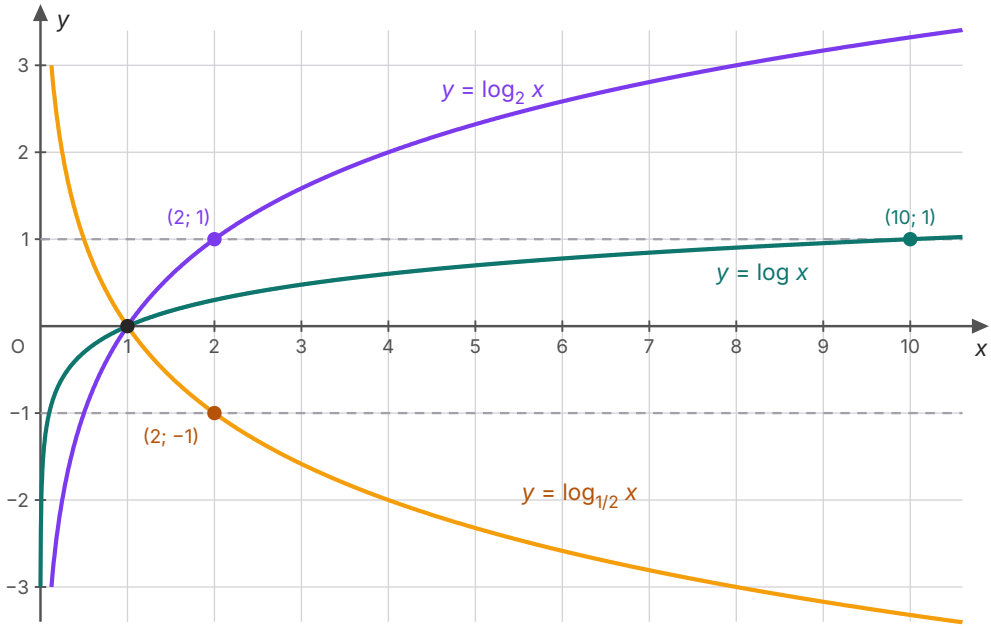

Figura 8.3 Grafici di $y = \log_a x$ per $a = 2$ e $a = 10$ (crescenti) e per $a = \frac{1}{2}$ (decrescente), calcolati con la formula del cambiamento di base. Tutti passano per (1; 0); la retta tratteggiata $y = 1$ incontra ogni curva crescente nel punto che ha per ascissa la sua base. Le unità sui due assi sono uguali.

Dalla monotonia seguono le due regole che useremo per equazioni e disequazioni. Per $x, y > 0$: $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, perché la funzione è iniettiva. Per le disuguaglianze conta la base: se $a > 1$, $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$; se $0 < a < 1$, $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$. Con una base minore di 1 il verso delle disuguaglianze **si inverte**, come per le potenze nel capitolo 7.

8.3.3 Una crescita lentissima

La Tabella 8.1 confronta il logaritmo con due potenze. Mentre x passa da 10 a un milione, $\sqrt{x}$ passa da circa 3 a 1000 e $\log x$ soltanto da 1 a 6: per aumentare il logaritmo decimale di 1 bisogna *moltiplicare* l'argomento per 10. Il logaritmo cresce più lentamente di qualunque potenza con esponente positivo, per quanto piccolo. Eppure non è limitato: $\log_2 x$ supera qualunque numero M fissato, appena $x > 2^M$; per superare 100 basta $x > 2^{100}$, un numero di 31 cifre.

Tabella 8.1 Il logaritmo cresce molto più lentamente delle potenze (valori arrotondati).

x	$\log x$	$\log_2 x$	$\sqrt{x}$	x^2
10	1	3,32	3,16	100
100	2	6,64	10	10 000
1 000	3	9,97	31,6	10^6
1 000 000	6	19,93	1 000	10^{12}

8.4 Equazioni e disequazioni

Le *Indicazioni nazionali* chiedono di risolvere equazioni e disequazioni con esponenziali e logaritmi solo in «casi semplici e significativi». È quello che faremo: casi in cui bastano la definizione, una proprietà e la monotonia, sempre partendo dalle condizioni di esistenza.

8.4.1 Equazioni esponenziali: $a^x = b$

Ora ogni equazione della forma $a^x = b$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, ha una risposta completa: se $b > 0$ la soluzione è una sola, $x = \log_a b$; se $b \le 0$ l'equazione è impossibile. L'equazione $2^x = 5$ del capitolo 7 ha la soluzione esatta $x = \log_2 5$ e quella approssimata 2,32. Si noti la differenza: «$\log_2 5$» è il valore esatto, «2,32» un'approssimazione, di cui si dichiarano le cifre. Quando l'equazione non è già nella forma $a^x = b$ la si riconduce a essa con un passaggio algebrico, oppure si prende il logaritmo dei due membri, che sono positivi.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $3 \cdot 1{,}05^x = 6$; b) $5^{x-1} = 7$; c) $e^{2x} = 7$; d) $4^x + 3 = 1$.

a) Dividiamo per 3: $1{,}05^x = 2$, quindi $x = \log_{1,05} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx \dfrac{0{,}69315}{0{,}04879} \approx 14{,}21$. Controllo: $1{,}05^{14{,}21} \approx 2{,}00$ ✓. (Leggila così: una grandezza che cresce del 5% a ogni passo raddoppia in poco più di 14 passi.)

b) Per definizione $x - 1 = \log_5 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 5} \approx 1{,}209$, quindi $x = 1 + \log_5 7 \approx 2{,}209$.

c) $2x = \ln 7$, quindi $x = \dfrac{\ln 7}{2} \approx 0{,}973$.

d) $4^x = -2$: impossibile, perché $4^x > 0$ per ogni x. Nessuna calcolatrice darà una soluzione: $\log_4(-2)$ non esiste.

8.4.2 Equazioni logaritmiche

Un'**equazione logaritmica** contiene l'incognita nell'argomento di un logaritmo. Il metodo ha tre passi, e il primo non si salta mai.

1. **Condizioni di esistenza.** Ogni argomento deve essere positivo.
2. **Riduzione.** Con la definizione o con una proprietà si porta l'equazione alla forma $\log_a A(x) = c$, che equivale ad $A(x) = a^c$, oppure alla forma $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, che equivale ad $A(x) = B(x)$ perché il logaritmo è iniettivo.
3. **Controllo.** Si accettano solo le soluzioni che rispettano le C.E., e si verifica sostituendo.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $\log_2 (x + 1) = 3$; b) $\log x + \log (x - 3) = 1$; c) $\log_3 (x + 5) = \log_3 (2x - 1)$.

a) C.E.: $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$. Per definizione $x + 1 = 2^3 = 8$, quindi $x = 7$, che rispetta le C.E. Controllo: $\log_2 8 = 3$ ✓.

b) C.E.: $x > 0$ e $x - 3 > 0$, cioè $x > 3$. Con la proprietà del prodotto: $\log [x(x - 3)] = 1$, quindi $x(x - 3) = 10^1 = 10$, cioè $x^2 - 3x - 10 = 0$, con soluzioni $x = 5$ e $x = -2$. Solo $x = 5$ rispetta le C.E. Controllo: $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$ ✓.

c) C.E.: $x + 5 > 0$ e $2x - 1 > 0$, cioè $x > \frac{1}{2}$. Il logaritmo è iniettivo, quindi $x + 5 = 2x - 1$ e $x = 6$, accettabile. Controllo: $\log_3 11 = \log_3 11$ ✓.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare le condizioni di esistenza. Nell'esempio b) il valore $x = -2$ risolve l'equazione $x(x - 3) = 10$, ma non quella di partenza: $\log (-2)$ e $\log (-5)$ non esistono. Il motivo è che la proprietà del prodotto, usata da destra a sinistra, *allarga* il dominio: $\log A + \log B$ esiste solo se $A > 0$ e $B > 0$, mentre $\log (AB)$ esiste anche quando A e B sono entrambi negativi. Per $x = -2$ il prodotto $(-2)(-5) = 10$ è positivo, e l'equazione trasformata accoglie una soluzione «estranea». Le C.E. si scrivono **prima** di trasformare, sull'equazione di partenza.

8.4.3 Disequazioni

Una **disequazione logaritmica** si risolve come un'equazione, con una differenza decisiva: nel passare dai logaritmi agli argomenti bisogna guardare la base, per la regola di monotonia vista studiando la funzione logaritmica. La soluzione finale è l'*intersezione* tra le C.E. e le soluzioni della disequazione trasformata. Due esempi.

$\log_2 x > 3$. C.E.: $x > 0$. Scriviamo $3 = \log_2 8$: $\log_2 x > \log_2 8$; la base è maggiore di 1 e il verso resta, $x > 8$. Con le C.E.: $x > 8$, cioè $]8; +\infty[$.

$\log_{1/2}(x-1) \geq 1$. C.E.: $x > 1$. Scriviamo $1 = \log_{1/2}\frac{1}{2}$: $\log_{1/2}(x-1) \geq \log_{1/2}\frac{1}{2}$. La base è minore di 1 e **il verso si inverte**: $x - 1 \leq \frac{1}{2}$, cioè $x \leq \frac{3}{2}$. Con le C.E.: $1 < x \leq \frac{3}{2}$, cioè $]1;\ \frac{3}{2}]$. Prova con due valori: per $x = \frac{5}{4}$ si ha $\log_{1/2}\frac{1}{4} = 2 \geq 1$ ✓; per $x = 2$ si ha $\log_{1/2} 1 = 0$, che non è maggiore o uguale a 1 ✓.

Le disequazioni esponenziali si trattano allo stesso modo, prendendo il logaritmo dei due membri. Con una trappola: dividere per un logaritmo negativo inverte il verso. Per $0{,}8^x < 0{,}5$ prendiamo ln (base maggiore di 1, il verso resta): $x \cdot \ln 0{,}8 < \ln 0{,}5$. Ma $\ln 0{,}8 \approx -0{,}223$ è negativo, quindi dividendo $x > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}8} \approx 3{,}106$. Ha senso: le potenze di 0,8 diminuiscono e scendono sotto 0,5 da un certo esponente in poi ($0{,}8^3 = 0{,}512$, $0{,}8^4 \approx 0{,}410$).

8.5 Modelli e scale logaritmiche

8.5.1 Quanto tempo ci vuole?

Nel capitolo 7 abbiamo descritto la crescita continua con il modello $N(t) = N_0\, e^{kt}$ e abbiamo stimato numericamente tempi di raddoppio e di dimezzamento. Ora li calcoliamo esattamente. Se $k > 0$, il **tempo di raddoppio** T è l'istante in cui $N_0\, e^{kT} = 2N_0$, cioè $e^{kT} = 2$: dunque $kT = \ln 2$ e $T = \dfrac{\ln 2}{k}$. Se $k < 0$, il **tempo di dimezzamento** soddisfa $e^{kT} = \frac{1}{2}$, cioè $kT = -\ln 2$: $T = \dfrac{\ln 2}{|k|}$. In nessuna delle due formule compare N_0: per raddoppiare ci vuole lo stesso tempo partendo da mille o da un milione. È la firma della crescita esponenziale.

Per una crescita discreta del p% a ogni passo, $a_n = a_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$, il numero di passi necessario per raggiungere un traguardo si ottiene allo stesso modo, prendendo i logaritmi; poiché n è intero, si arrotonda il risultato all'intero *successivo*.

ESEMPIO SVOLTO

a) Una popolazione (dati inventati) cresce secondo $N(t) = N_0\, e^{0{,}035t}$, con t in anni. In quanto tempo raddoppia? $T = \dfrac{\ln 2}{0{,}035} \approx 19{,}8$ anni.

b) Un capitale di 3000 € è investito all'interesse composto del 2,5% annuo. Dopo quanti anni supera 4000 €? Dopo n anni il capitale è $3000 \cdot 1{,}025^n$; serve $1{,}025^n > \dfrac{4}{3}$. Prendendo ln (verso conservato) e dividendo per $\ln 1{,}025 > 0$: $n > \dfrac{\ln(4/3)}{\ln 1{,}025} \approx 11{,}65$. Gli interessi si aggiungono una volta all'anno, quindi servono 12 anni: dopo 11 anni il capitale è circa 3936 €, dopo 12 circa 4035 €.

c) Datazione con il carbonio-14. Il tempo di dimezzamento del carbonio-14 è di circa 5730 anni (capitolo 7). In un reperto di legno resta il 30% del carbonio-14 iniziale. Quanti anni ha? Con il tempo di dimezzamento il modello si scrive $N = N_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/5730}$; imponiamo $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/5730} = 0{,}3$: $\dfrac{t}{5730} = \log_{1/2} 0{,}3 = \dfrac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}5} \approx 1{,}737$, quindi $t \approx 9950$ anni, circa diecimila. Il risultato è plausibile: il 30% sta tra il 50% e il 25%, cioè tra uno e due tempi di dimezzamento.

8.5.2 Le scale logaritmiche: pH e decibel

Molte grandezze variano su moltissimi ordini di grandezza. Per descriverle si usa il logaritmo della grandezza invece della grandezza stessa: si ottiene una **scala logaritmica**, in cui a ogni passo di un'unità corrisponde una *moltiplicazione* per un fattore fisso, di solito 10, e non un'addizione.

Il pH. L'acidità di una soluzione acquosa dipende dalla concentrazione degli ioni idrogeno $[H^+]$, misurata in mol/L. Il **pH** è definito, in prima approssimazione, come

$$\mathrm{pH} = -\log [H^+]$$

Nell'acqua pura a 25 °C la concentrazione è 10^{-7} mol/L e il pH vale 7: la soluzione è neutra. Le soluzioni acide hanno pH minore di 7, quelle basiche maggiore. Tre soluzioni di esempio sono segnate nella Figura 8.4: la soluzione A ha $[H^+] = 10^{-3}$ mol/L e pH 3; la soluzione B ha $[H^+] = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ mol/L e $\mathrm{pH} = 5 - \log 2{,}5 \approx 4{,}60$; la soluzione C ha $[H^+] = 6{,}3 \cdot 10^{-9}$ mol/L e $\mathrm{pH} = 9 - \log 6{,}3 \approx 8{,}20$, quindi è basica. Il segno meno rende positivi i valori ma inverte il verso: pH più basso significa concentrazione più alta. E una differenza di pH è un rapporto di concentrazioni: la soluzione A, con pH 3, non è «un po' più acida» di una a pH 4, ma ha una concentrazione di ioni idrogeno dieci volte maggiore, e cento volte maggiore di una a pH 5.

Il decibel. L'intensità I di un suono, cioè la potenza che attraversa l'unità di superficie, si misura in W/m², e i suoni udibili coprono circa dodici ordini di grandezza. Il **livello di intensità sonora**, in **decibel** (dB), è

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{con} \quad I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

dove I_0 è un'intensità di riferimento vicina alla soglia di udibilità. Il suono P della Figura 8.4, con intensità 10^{-6} W/m², ha livello $L = 10 \log 10^6 = 60$ dB; il suono Q, con intensità 10^{-5} W/m², ha 70 dB. Ogni volta che l'intensità si moltiplica per 10 il livello aumenta di 10 dB; se l'intensità raddoppia, il livello aumenta di $10 \log 2 \approx 3$ dB. Per questo due sorgenti uguali, che insieme danno un'intensità doppia, non fanno «il doppio dei decibel» ma soltanto 3 dB in più.

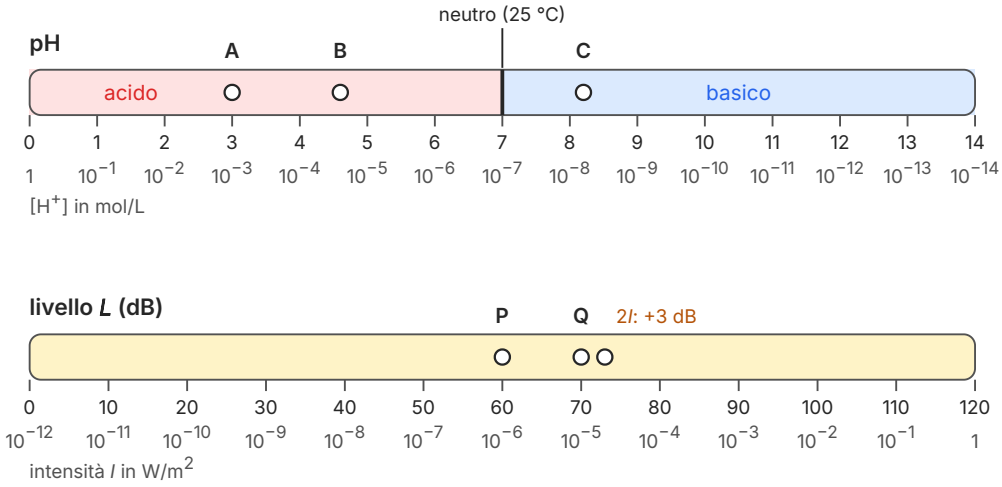

Figura 8.4 Due scale logaritmiche. In alto, il pH con la concentrazione corrispondente degli ioni idrogeno: un passo della scala divide $[H^+]$ per 10; il pH 7 indica una soluzione neutra a 25 °C. Sono segnate le soluzioni A, B e C del testo. In basso, il livello sonoro in decibel con l'intensità corrispondente: 10 dB in più significano un'intensità 10 volte maggiore; raddoppiare l'intensità del suono Q aggiunge circa 3 dB.

APPROFONDIMENTO · LA LEGGE DI WEBER–FECHNER

Perché le scale del suono e della luce sono logaritmiche? Nell'Ottocento il fisiologo tedesco Ernst Heinrich Weber studiò quanto deve cambiare uno stimolo perché ce ne accorgiamo: osservò che la più piccola differenza percepibile tra due pesi sollevati non è una quantità fissa, ma una frazione fissa del peso di partenza. Il fisico e filosofo Gustav Theodor Fechner ne trasse una legge: la sensazione cresce come il *logaritmo* dello stimolo. Se lo stimolo si moltiplica per 10, la sensazione aumenta di un passo costante; è la stessa struttura della scala dei decibel.

Fechner chiamò *psicofisica* lo studio delle relazioni misurabili tra stimoli fisici e sensazioni, e vi vide un modo per dare forma quantitativa all'antico problema del rapporto tra corpo e mente, che in filosofia incontri con Cartesio. Le ricerche successive hanno mostrato che la **legge di Weber–Fechner** vale solo in modo approssimato, e non per tutti i sensi né per tutti i livelli di stimolo. Resta un bell'esempio di modello matematico (Linee generali, 5): una formula semplice che descrive bene una classe di fenomeni entro certi limiti, e non una legge di natura esatta.

8.5.3 La carta semilogaritmica

Supponiamo che una grandezza segua il modello $y = A \cdot b^x$. Prendendo il logaritmo decimale dei due membri e usando le proprietà:

$$\log y = \log A + x \cdot \log b$$

Il logaritmo di y è una funzione **lineare** di x: se in ordinata si mette $\log y$ invece di y, i punti si allineano su una retta, di pendenza $\log b$ e intercetta $\log A$. Un **grafico semilogaritmico** fa esattamente questo: l'asse orizzontale ha la scala usuale, quello verticale una scala logaritmica, sulla quale distanze uguali corrispondono a rapporti uguali (tra 100 e 1000 c'è la stessa distanza che tra 1000 e 10 000). Sull'asse si scrivono i valori di y, non i loro logaritmi; la carta millimetrata stampata con questa scala si chiama carta semilogaritmica.

Tabella 8.2 Utenti registrati di una nuova applicazione, settimana per settimana (dati inventati), e il loro logaritmo decimale.

settimana t	0	1	2	3	4	5	6
utenti N	200	300	450	675	1 013	1 519	2 278
$\log N$	2,301	2,477	2,653	2,829	3,006	3,182	3,358

La Tabella 8.2 riporta i dati di un caso inventato. Nel grafico ordinario i punti disegnano una curva che si impenna; nel grafico semilogaritmico si allineano su una retta (Figura 8.5). Il controllo numerico è immediato: le differenze tra i logaritmi di settimane successive sono costanti, circa 0,176, cioè i rapporti tra valori successivi sono costanti, $10^{0{,}176} \approx 1{,}5$. La crescita è esponenziale, del 50% alla settimana.

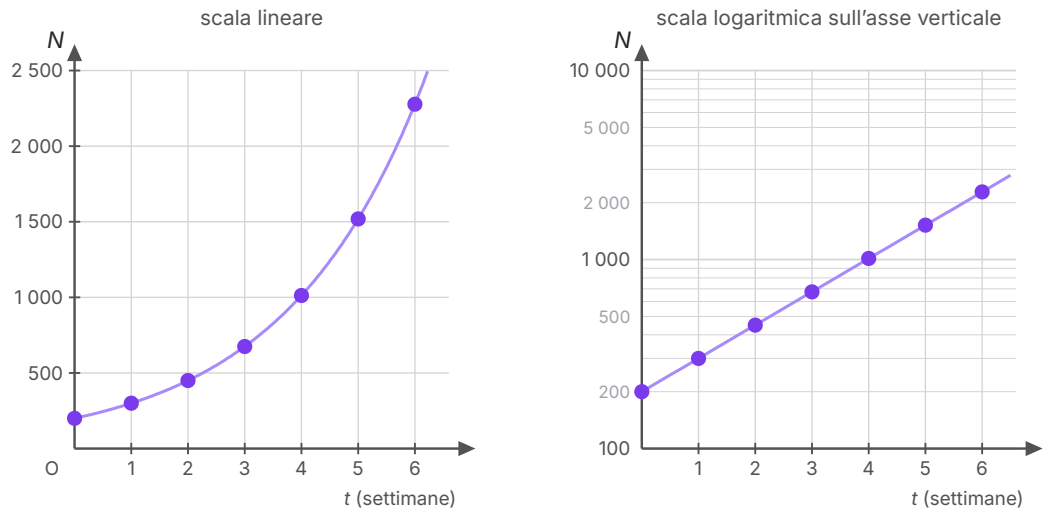

Figura 8.5 I dati della Tabella 8.2 in un grafico con scala lineare (a sinistra) e in un grafico semilogaritmico (a destra), con la curva del modello $N = 200 \cdot 1{,}5^t$ calcolata dall'equazione. Sulla scala logaritmica 100, 1000 e 10 000 sono equidistanti e la curva esponenziale diventa una retta.

ESEMPIO SVOLTO

Ricava il modello $N = A \cdot b^t$ dai dati della Tabella 8.2, usando il primo e l'ultimo punto, e stima in quale settimana gli utenti supereranno 10 000, se il modello resta valido.

Retta dei logaritmi. I punti (0; 2,301) e (6; 3,358) danno la pendenza $\dfrac{3{,}358 - 2{,}301}{6} \approx 0{,}176$ e l'intercetta 2,301: $\log N \approx 2{,}301 + 0{,}176t$.

Ritorno alle potenze. $A = 10^{2{,}301} \approx 200$ e $b = 10^{0{,}176} \approx 1{,}50$: $N \approx 200 \cdot 1{,}5^t$.

Previsione. $200 \cdot 1{,}5^t > 10\,000 \Leftrightarrow 1{,}5^t > 50 \Leftrightarrow t > \dfrac{\ln 50}{\ln 1{,}5} \approx 9{,}65$: alla decima settimana. È un'estrapolazione, e va presa con cautela: nessuna crescita esponenziale dura per sempre, perché prima o poi le risorse (qui, i potenziali utenti) si esauriscono (capitolo 7).

COLLEGAMENTI

Musica: l'ottava e il semitono. Due note a distanza di un'ottava hanno frequenze una doppia dell'altra: il La usato come riferimento per accordare gli strumenti ha frequenza 440 Hz, il La dell'ottava superiore 880 Hz. Nel sistema temperato equabile, quello del pianoforte, l'ottava è divisa in 12 semitoni uguali, e «uguali» significa che da ogni nota alla successiva la frequenza si moltiplica per lo stesso fattore q. Dodici semitoni fanno un'ottava, quindi $q^{12} = 2$ e $q = 2^{1/12} \approx 1{,}0595$.

La tastiera è dunque una scala logaritmica delle frequenze: il numero di semitoni tra due note di frequenze f_1 e f_2 è $n = 12 \log_2 \frac{f_2}{f_1}$. Per l'intervallo di quinta, con rapporto di frequenze $\frac{3}{2}$, si ottiene $n = 12 \log_2 1{,}5 \approx 7{,}02$: quasi esattamente 7 semitoni. Per questo la quinta del pianoforte, che vale $2^{7/12} \approx 1{,}4983$, è vicinissima alla quinta «pura» 1,5, ma non uguale.

SINTESI

- Per $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ il logaritmo $\log_a b$ è l'unico numero c con $a^c = b$: l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento. Esiste ed è unico perché a^x è una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $]0; +\infty[$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a b} = b$. log indica la base 10, ln la base e.
- Il numero delle cifre di un intero positivo N è la parte intera di $\log N$, più 1.
- Per argomenti positivi: $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$. Per il logaritmo di una somma non c'è regola.
- Cambiamento di base: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; con la calcolatrice $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.
- Nepero (1614) introdusse i logaritmi per trasformare i prodotti in somme; tavole e regolo calcolatore ne sono le applicazioni pratiche.
- $y = \log_a x$ è l'inversa di $y = a^x$: dominio $]0; +\infty[$, immagine $\mathbb{R}$, passa per $(1; 0)$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$; il grafico è il simmetrico dell'esponenziale rispetto a $y = x$.
- Il logaritmo cresce più lentamente di ogni potenza con esponente positivo, ma non è limitato.
- $a^x = b$ ha la soluzione $x = \log_a b$ se $b > 0$ ed è impossibile se $b \leq 0$.
- Equazioni e disequazioni logaritmiche: prima le C.E. sull'equazione di partenza, poi la riduzione, infine il controllo o l'intersezione con le C.E. Con base tra 0 e 1, o dividendo per un logaritmo negativo, il verso si inverte.
- Tempo di raddoppio e di dimezzamento: $T = \frac{\ln 2}{|k|}$, indipendente da N_0.
- Scale logaritmiche: $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$, $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ dB; un passo della scala è un fattore. Se $y = A \cdot b^x$, su carta semilogaritmica i dati si allineano su una retta di pendenza $\log b$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il numero $\log_2 32$ è uguale a:
   - **A.** 5
   - **B.** 16
   - **C.** $\frac{1}{5}$
   - **D.** 2,5

2. ● Quale delle seguenti espressioni **non** ha significato?
   - **A.** $\log_2 0{,}5$
   - **B.** $\log_3 1$
   - **C.** $\log_5 (-5)$
   - **D.** $\log_{1/2} 8$

3. ● Il valore di $\log 4 + \log 25$ è:
   - **A.** $\log 29$
   - **B.** 2
   - **C.** 100
   - **D.** $\log 4 \cdot \log 25$

4. ●● Il grafico di $y = \log_{1/3} x$:
   - **A.** è crescente e passa per (1; 0)
   - **B.** passa per (0; 1)
   - **C.** ha l'asintoto $y = 0$
   - **D.** è decrescente e passa per (1; 0)

5. ●● Il dominio della funzione $y = \log (x - 2)$ è:
   - **A.** $]2; +\infty[$
   - **B.** $[2; +\infty[$
   - **C.** $]0; +\infty[$
   - **D.** $\mathbb{R}$

6. ●● Il livello di un suono passa da 50 dB a 70 dB. La sua intensità:
   - **A.** raddoppia
   - **B.** diventa 20 volte maggiore
   - **C.** diventa 100 volte maggiore
   - **D.** aumenta del 40%

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) $\log_a 1 = 0$ per ogni base ammessa.
   b) $\log_2 5$ è compreso tra 2 e 3.
   c) $\log (a + b) = \log a + \log b$ per $a, b > 0$.
   d) Se $0 < a < 1$, allora $\log_a x > 0$ per ogni $x > 1$.
   e) $\ln e = 1$.
   f) $\log_2 (-8) = -3$.

8. ● Completa scrivendo ogni uguaglianza nell'altra forma (esponenziale o logaritmica).
   a) $3^4 = 81 \Leftrightarrow$ _____
   b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4 \Leftrightarrow$ _____
   c) $10^{-3} = 0{,}001 \Leftrightarrow$ _____
   d) $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow$ _____
   e) $27^{1/3} = 3 \Leftrightarrow$ _____

Calcolare

9. ● Calcola con la definizione: a) $\log_2 128$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) $\log 0{,}001$; d) $\log_{1/2} 4$; e) $\ln e^5$; f) $\log_4 8$; g) $\log_9 3$.

10. ● Trova il numero x: a) $\log_x 25 = 2$; b) $\log_3 x = -2$; c) $\log_2 x = \frac{1}{2}$; d) $\log_x 8 = 3$.

11. ●● Scrivi come un solo logaritmo e calcola: a) $\log_6 4 + \log_6 9$; b) $\log_2 40 - \log_2 5$; c) $3 \log 2 + \log 125$; d) $\frac{1}{2} \log_3 81$; e) $\log 50 + \log 2 - \log 10$.

12. ●● Sapendo che $\log 2 \approx 0{,}3010$ e $\log 3 \approx 0{,}4771$, calcola senza calcolatrice: a) $\log 6$; b) $\log 9$; c) $\log 5$; d) $\log 1{,}5$; e) $\log 12$; f) $\log \sqrt{3}$.

13. ●● Con la calcolatrice e la formula del cambiamento di base calcola, con quattro cifre decimali: a) $\log_2 10$; b) $\log_3 50$; c) $\log_5 0{,}2$; d) $\log_{0,5} 3$. Controlla ogni risultato con il tasto delle potenze.

14. ● Usando $\log 2 \approx 0{,}30103$ e $\log 3 \approx 0{,}47712$, trova quante cifre hanno 2^{64} e 3^{50}.

15. ●● Risolvi, dando la soluzione esatta e quella approssimata a tre cifre decimali: a) $2^x = 12$; b) $10^x = 0{,}05$; c) $e^{2x} = 9$; d) $4 \cdot 3^x = 20$.

16. ●● Risolvi, scrivendo prima le condizioni di esistenza: a) $\log_3 (x - 2) = 2$; b) $\log_2 (3x + 1) = 4$; c) $\ln (2x - 1) = \ln (x + 4)$; d) $\log_5 x = -1$.

17. ●● Risolvi con una proprietà dei logaritmi, controllando le soluzioni: a) $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$; b) $\log (x + 1) + \log (x - 2) = 1$; c) $\log_3 (x + 6) - \log_3 x = 1$.

18. ●● Risolvi le disequazioni: a) $\log_3 x < 2$; b) $\log_2 (x - 1) \geq 3$; c) $\log_{1/3} x > -1$; d) $2^x > 7$; e) $0{,}5^x \leq 0{,}1$.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra che $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (con $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$), partendo dalle proprietà delle potenze.

20. ●● a) Dimostra che $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ per a, $b > 0$, diversi da 1. b) Deduci dal cambiamento di base che $\log_{1/a} x = -\log_a x$ e spiega che cosa significa per i grafici delle due funzioni.

21. ●● *Trova l'errore.* Per risolvere $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$, Marco scrive $\log_2 [x(x - 3)] = 2$, poi $x^2 - 3x - 4 = 0$, e conclude: «le soluzioni sono $x = 4$ e $x = -1$». Dov'è l'errore? Qual è la soluzione corretta?

22. ●● Spiega perché: a) se $a > 1$, $\log_a x < 0$ per $0 < x < 1$; b) la calcolatrice dà errore se chiedi log 0; c) il grafico di $y = \log_2 x$ è il simmetrico di quello di $y = 2^x$ rispetto a $y = x$ solo se le unità sui due assi sono uguali.

Problemi

23. ●● Una popolazione di insetti (dati inventati) cresce secondo $N(t) = N_0\, e^{0{,}02t}$, con t in giorni. a) Calcola il tempo di raddoppio. b) Dopo quanti giorni la popolazione è triplicata?

24. ●● Un capitale di 4000 € è investito all'interesse composto del 2% annuo. Dopo quanti anni supera per la prima volta 5000 €? Verifica il risultato calcolando il capitale dopo quell'anno e dopo l'anno precedente.

25. ●● a) Calcola il pH di una soluzione con $[H^+] = 10^{-4}$ mol/L e di una con $[H^+] = 4{,}0 \cdot 10^{-10}$ mol/L; dì se sono acide o basiche. b) Qual è la concentrazione degli ioni idrogeno in una soluzione a pH 2,7? c) Se il pH di una soluzione passa da 6 a 4, come cambia $[H^+]$?

26. ●● a) Calcola il livello in decibel di un suono di intensità 10^{-6} W/m^2. b) Quale intensità corrisponde a 85 dB? c) Tre sorgenti uguali producono ciascuna 60 dB nello stesso punto: qual è il livello complessivo, se le intensità si sommano?

27. ●● Nel sistema temperato equabile ogni semitono moltiplica la frequenza per $2^{1/12}$. a) Partendo dal La di 440 Hz, calcola la frequenza della nota 3 semitoni più acuta. b) Quanti semitoni separano due note di 440 Hz e 660 Hz?

Con il computer

28. ●● Con un foglio di calcolo: nella colonna A scrivi $t = 0, 1, \ldots, 10$; nella colonna B il modello $N = 500 \cdot 1{,}3^t$; nella colonna C il logaritmo decimale di B (funzione LOG10). a) Calcola le differenze tra valori successivi della colonna C e confrontale con log 1,3. b) Disegna B in funzione di A, prima con l'asse verticale lineare, poi con la scala logaritmica (opzione del grafico): che cosa osservi? c) Da quale t intero N supera 5000? Confronta con la soluzione di $1{,}3^t = 10$.

Verso la verifica

29. ●● a) Calcola $\log_2 8 + \log_3 \frac{1}{3} - \log 0{,}01$. b) Risolvi $5^{x+1} = 30$ (soluzione esatta e approssimata). c) Risolvi $\log_2 (x + 3) - \log_2 (x - 1) = 2$.

30. ●● Disegna nello stesso riferimento, con la stessa unità sui due assi, $y = 3^x$ e $y = \log_3 x$, segnando per ciascuna tre punti con coordinate intere o frazionarie semplici. Scrivi dominio e immagine di $y = \log_3 x$ e risolvi graficamente e algebricamente $\log_3 x > 2$ e $\log_3 x < 0$.

31. ●●● *Sfida.* Due colture di batteri (dati inventati) crescono in modo esponenziale: la coltura A parte da 1000 batteri e raddoppia ogni 3 ore, la coltura B parte da 8000 batteri e raddoppia ogni 5 ore. a) Scrivi le due leggi $N_A(t)$ e $N_B(t)$, con t in ore. b) Dopo quanto tempo le due colture hanno lo stesso numero di batteri? c) Quanti batteri ha allora ciascuna coltura?

PER APPROFONDIRE

- [MAOE] Maor, *e: The Story of a Number*: i primi capitoli raccontano Nepero, Briggs, le tavole dei logaritmi e il regolo calcolatore, e il legame tra logaritmi e numero *e*.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: il capitolo sul Seicento, con l'invenzione dei logaritmi e il loro uso in astronomia.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la funzione esponenziale e il logaritmo naturale, visti dal punto di vista dell'analisi che studierai nel quinto anno.

Glossario del capitolo

Acidità (pH)
Misura dell'acidità: pH = $-\log [H^+]$; 7 indica una soluzione neutra a 25 °C.

Argomento
Il numero $b > 0$ di cui si calcola il logaritmo.

Asintoto verticale
Retta verticale a cui un grafico si avvicina quanto si vuole senza toccarla; per $y = \log_a x$ è l'asse y.

Base (di un logaritmo)
Il numero a, positivo e diverso da 1, che si eleva all'esponente $\log_a b$.

Cambiamento di base
La formula $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, che riconduce ogni logaritmo a log o ln.

Decibel
Unità del livello di intensità sonora $L = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$, con $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

Disequazione logaritmica
Disequazione con l'incognita nell'argomento di un logaritmo; il verso si inverte se la base è tra 0 e 1.

Equazione logaritmica
Equazione con l'incognita nell'argomento di un logaritmo; si risolve dopo aver scritto le condizioni di esistenza.

Formula del tempo di raddoppio
Nel modello $N_0\, e^{kt}$ il tempo di raddoppio ($k > 0$) e quello di dimezzamento ($k < 0$) valgono $T = \dfrac{\ln 2}{|k|}$.

Funzione logaritmica
La funzione $y = \log_a x$, inversa di $y = a^x$; dominio $]0; +\infty[$, immagine $\mathbb{R}$.

Grafico semilogaritmico
Grafico con scala logaritmica sull'asse verticale: i dati di un modello esponenziale vi si allineano su una retta.

Legge di Weber–Fechner
Modello psicofisico approssimato: la sensazione cresce come il logaritmo dello stimolo.

Logaritmo
Per $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$: l'unico numero c tale che $a^c = b$; si scrive $\log_a b$.

Logaritmo decimale
Il logaritmo in base 10, scritto log.

Logaritmo naturale
Il logaritmo in base $e \approx 2{,}718$, scritto ln.

Proprietà dei logaritmi
$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$, per $x, y > 0$.

Regolo calcolatore
Strumento con scale graduate in proporzione ai logaritmi: sommando lunghezze moltiplica i numeri.

Scala logaritmica
Scala in cui a passi uguali corrispondono rapporti uguali (di solito un fattore 10).

Soluzioni

1. A. $2^5 = 32$.

2. C. L'argomento -5 è negativo; le altre valgono -1, 0, -3.

3. B. $\log(4 \cdot 25) = \log 100 = 2$.

4. D. La base $\frac{1}{3}$ è minore di 1: funzione decrescente; $\log_{1/3} 1 = 0$. L'asintoto è $x = 0$.

5. A. Serve $x - 2 > 0$, cioè $x > 2$.

6. C. 20 dB in più = due passi da 10 dB = intensità moltiplicata per $10^2 = 100$.

7. a) V. b) V ($4 < 5 < 8$). c) F: per una somma non c'è regola; vale $\log(ab) = \log a + \log b$. d) F: $\log_a x < 0$ per $x > 1$. e) V. f) F: $\log_2(-8)$ non esiste; $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.

8. a) $\log_3 81 = 4$. b) $2^{-4} = \frac{1}{16}$. c) $\log 0{,}001 = -3$. d) $e^0 = 1$. e) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$.

9. a) 7. b) -2. c) -3. d) -2. e) 5. f) $\frac{3}{2}$ ($2^{2c} = 2^3$). g) $\frac{1}{2}$.

10. a) $x^2 = 25$, base positiva: $x = 5$. b) $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. c) $x = 2^{1/2} = \sqrt{2}$. d) $x^3 = 8$: $x = 2$.

11. a) $\log_6 36 = 2$. b) $\log_2 8 = 3$. c) $\log 8 + \log 125 = \log 1000 = 3$. d) $\log_3 \sqrt{81} = \log_3 9 = 2$. e) $\log \frac{50 \cdot 2}{10} = \log 10 = 1$.

12. a) $\log 2 + \log 3 \approx 0{,}7781$. b) $2 \log 3 \approx 0{,}9542$. c) $1 - \log 2 \approx 0{,}6990$. d) $\log 3 - \log 2 \approx 0{,}1761$. e) $2 \log 2 + \log 3 \approx 1{,}0791$. f) $\frac{1}{2} \log 3 \approx 0{,}2386$.

13. a) $\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3{,}3219$. b) $\frac{\ln 50}{\ln 3} \approx 3{,}5609$. c) -1 esattamente, perché $5^{-1} = 0{,}2$. d) $\frac{\ln 3}{\ln 0{,}5} \approx -1{,}5850$.

14. $64 \cdot 0{,}30103 \approx 19{,}27$: 2^{64} ha 20 cifre. $50 \cdot 0{,}47712 \approx 23{,}86$: 3^{50} ha 24 cifre.

15. a) $x = \log_2 12 \approx 3{,}585$. b) $x = \log 0{,}05 \approx -1{,}301$. c) $x = \frac{\ln 9}{2} = \ln 3 \approx 1{,}099$. d) $3^x = 5$, $x = \log_3 5 \approx 1{,}465$.

16. a) C.E. $x > 2$; $x - 2 = 9$, $x = 11$. b) C.E. $x > -\frac{1}{3}$; $3x + 1 = 16$, $x = 5$. c) C.E. $x > \frac{1}{2}$; $2x - 1 = x + 4$, $x = 5$. d) C.E. $x > 0$; $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

17. a) C.E. $x > 0$; $x(x + 2) = 8$, $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x = 2$ o $x = -4$: solo $x = 2$ (controllo: $1 + 2 = 3$). b) C.E. $x > 2$; $(x + 1)(x - 2) = 10$, $x^2 - x - 12 = 0$, $x = 4$ o $x = -3$: solo $x = 4$ ($\log 5 + \log 2 = 1$). c) C.E. $x > 0$; $\frac{x + 6}{x} = 3$, $x = 3$ ($\log_3 9 - \log_3 3 = 2 - 1 = 1$).

18. a) $0 < x < 9$, cioè $]0; 9[$. b) C.E. $x > 1$; $x - 1 \geq 8$: $x \geq 9$, cioè $[9; +\infty[$. c) C.E. $x > 0$; $-1 = \log_{1/3} 3$, base minore di 1: $x < 3$; soluzioni $0 < x < 3$. d) $x > \log_2 7 \approx 2{,}807$. e) Base minore di 1: $x \geq \log_{0{,}5} 0{,}1 = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} \approx 3{,}322$.

19. Posto $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, si ha $a^u = x$, $a^v = y$ e $\frac{x}{y} = a^u : a^v = a^{u-v}$; per definizione di logaritmo $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$. c.v.d.

20. a) Per il cambiamento di base in base 10: $\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1$ (i denominatori non sono nulli perché $a, b \neq 1$). b) $\log_{1/a} x = \frac{\log_a x}{\log_a (1/a)} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x$: i grafici di $y = \log_{1/a} x$ e $y = \log_a x$ sono simmetrici rispetto all'asse x.

21. Marco non ha scritto le C.E.: $x > 0$ e $x - 3 > 0$, cioè $x > 3$. Il valore $x = -1$ rende negativi entrambi gli argomenti (-1 e -4), anche se il loro prodotto 4 è positivo: va scartato. L'unica soluzione è $x = 4$ (controllo: $\log_2 4 + \log_2 1 = 2 + 0 = 2$).

22. a) Se $c = \log_a x$ fosse ≥ 0 con $a > 1$, sarebbe $x = a^c \geq a^0 = 1$; quindi per $0 < x < 1$ il logaritmo è negativo. b) Nessuna potenza di base positiva vale 0: l'equazione $10^c = 0$ è impossibile e log 0 non esiste. c) La simmetria rispetto a $y = x$ scambia le coordinate $(p; q) \to (q; p)$; si vede come riflessione nella bisettrice solo se l'unità è la stessa sui due assi, altrimenti la bisettrice non forma angoli di 45° con gli assi e la figura risulta deformata.

23. a) $T = \dfrac{\ln 2}{0{,}02} \approx 34{,}7$ giorni. b) $e^{0{,}02t} = 3$, $t = \dfrac{\ln 3}{0{,}02} \approx 54{,}9$ giorni.

24. $1{,}02^n > 1{,}25$, $n > \dfrac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}02} \approx 11{,}27$: dopo 12 anni. Dopo 11 anni il capitale è circa 4973,50 €, dopo 12 circa 5072,97 €.

25. a) pH 4, acida; $\text{pH} = 10 - \log 4 \approx 9{,}40$, basica. b) $[H^+] = 10^{-2{,}7} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ mol/L. c) Diventa 100 volte maggiore.

26. a) $L = 10 \log 10^6 = 60$ dB. b) $\log \dfrac{I}{I_0} = 8{,}5$, $I = 10^{-3{,}5} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ W/m^2. c) Intensità tripla: $60 + 10 \log 3 \approx 64{,}8$ dB.

27. a) $440 \cdot 2^{3/12} \approx 523{,}3$ Hz. b) $n = 12 \log_2 \dfrac{660}{440} = 12 \log_2 1{,}5 \approx 7{,}02$: circa 7 semitoni.

28. a) Le differenze sono tutte uguali a $\log 1{,}3 \approx 0{,}1139$. b) Con l'asse lineare la curva si impenna; con la scala logaritmica i punti stanno su una retta. c) $1{,}3^t > 10$ per $t > \dfrac{\ln 10}{\ln 1{,}3} \approx 8{,}78$: il primo intero è $t = 9$ ($N \approx 5302$; per $t = 8$, $N \approx 4079$).

29. a) $3 + (-1) - (-2) = 4$. b) $x + 1 = \log_5 30$, $x = \log_5 30 - 1 = \log_5 6 \approx 1{,}113$. c) C.E. $x > 1$; $\log_2 \dfrac{x+3}{x-1} = 2$, $x + 3 = 4(x - 1)$, $x = \dfrac{7}{3}$, accettabile (controllo: $\dfrac{16/3}{4/3} = 4 = 2^2$).

30. Punti di $y = 3^x$: (0; 1), (1; 3), $(-1; \dfrac{1}{3})$; di $y = \log_3 x$: (1; 0), (3; 1), $(\dfrac{1}{3}; -1)$, simmetrici rispetto a $y = x$. Dominio $]0; +\infty[$, immagine $\mathbb{R}$. $\log_3 x > 2 \Leftrightarrow x > 9$; $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

31. a) $N_A(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$, $N_B(t) = 8000 \cdot 2^{t/5}$. b) $2^{t/3} : 2^{t/5} = 8$, cioè $2^{2t/15} = 2^3$: $\dfrac{2t}{15} = 3$, $t = 22{,}5$ ore. c) $1000 \cdot 2^{7{,}5} \approx 181\,000$ batteri (e infatti $8000 \cdot 2^{4{,}5} \approx 181\,000$).