CAPITOLO

7

La funzione esponenziale e il numero *e*

Aggiungere ogni giorno la stessa quantità disegna una retta; moltiplicare ogni giorno per lo stesso fattore disegna una curva che, prima o poi, supera qualunque retta. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire le potenze con esponente reale con le classi contigue e approssimarle con errore controllato.
2. Descrivere crescite discrete con le successioni geometriche e distinguere crescita lineare ed esponenziale.
3. Conoscere proprietà e grafici della funzione esponenziale per basi maggiori e minori di 1.
4. Introdurre il numero *e* con l'interesse composto e sapere perché è un numero trascendente.
5. Risolvere equazioni e disequazioni esponenziali nei casi semplici, e in modo approssimato quando manca una base comune.
6. Costruire e discutere modelli di crescita e di decadimento, con il tempo di raddoppio e di dimezzamento.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Le potenze con esponente reale 2
7.2 Crescite discrete 5
7.3 La funzione esponenziale 8
7.4 Il numero e 10
7.5 Equazioni e disequazioni esponenziali 15
7.6 Modelli di crescita e di decadimento 16

Matematica 4 · Parte III · Esponenziali e logaritmi · versione 1.0
Capitolo 7: La funzione esponenziale e il numero e · pagine 189–212 del volume completo · estratto per lo studio

Un foglio di carta piegato a metà ha due strati; piegato ancora, quattro; dopo dieci piegature (se ci si riuscisse) gli strati sarebbero 1024. Un capitale lasciato in banca cresce ogni anno di una piccola percentuale; un farmaco viene eliminato dal sangue a un ritmo che dimezza la sua concentrazione in un tempo fisso; il carbonio-14 di un osso antico si riduce alla metà in circa 5730 anni. In tutti questi fenomeni, in intervalli uguali di tempo, la grandezza non aumenta o diminuisce della stessa *quantità*: viene moltiplicata per lo stesso *fattore*.

Per descrivere questi fenomeni ci serve una funzione nuova, $y = a^x$, in cui la variabile sta all'esponente. Prima però dobbiamo dare un significato a una potenza come $2^{\sqrt{2}}$, con esponente irrazionale. Poi studieremo la crescita «a passi», moltiplicando ogni volta per lo stesso numero, e la funzione esponenziale con il suo grafico. Incontreremo il numero e, che come π non è soluzione di nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi. Chiuderemo con i casi più semplici di equazioni e disequazioni esponenziali e con i modelli di crescita e di decadimento che userai in fisica, in scienze e in economia. Il capitolo 8, sui logaritmi, completerà il quadro.

7.1 Le potenze con esponente reale

7.1.1 Che cosa sappiamo già

In *Matematica 2* (cap. 2) abbiamo definito, per una base $a > 0$, la potenza con esponente razionale: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, con m intero e n intero positivo. Per esempio $8^{2/3} = \sqrt[3]{64} = 4$ e $9^{-1/2} = \frac{1}{3}$. Abbiamo anche visto perché la base deve essere positiva: con una base negativa lo stesso numero razionale, scritto in due modi diversi, darebbe risultati diversi. Infatti $(-8)^{1/3}$ «dovrebbe» valere -2, perché $(-2)^3 = -8$; ma $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Per evitare contraddizioni, le potenze con esponente non intero si definiscono solo per basi positive.

Con questa definizione restano vere tutte le proprietà delle potenze. Ce ne serve un'altra, che sarà la chiave del capitolo: **se $a > 1$, le potenze razionali di a crescono al crescere dell'esponente**. Per esempio $2^{1,4} < 2^{1,5}$, perché $2^{1,5} = 2^{1,4} \cdot 2^{0,1}$ e $2^{0,1} = \sqrt[10]{2}$ è maggiore di 1. Se invece $0 < a < 1$ vale il contrario: al crescere dell'esponente le potenze diminuiscono, come mostrano $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}5$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$.

7.1.2 Un esponente irrazionale: che cosa vuol dire $2^{\sqrt{2}}$?

Il numero $\sqrt{2}$ non è una frazione, quindi la definizione precedente non si applica. Possiamo però avvicinarci a $\sqrt{2}$ quanto vogliamo con numeri razionali, per difetto e per eccesso:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, poi $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, poi $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, e così via. Per ogni coppia di esponenti calcoliamo le potenze di 2, che sono potenze razionali e quindi già definite. Poiché la base è maggiore di 1, la potenza con l'esponente per difetto è minore di quella con l'esponente per eccesso. La Tabella 7.1 raccoglie i risultati.

Tabella 7.1 Le potenze di 2 con gli esponenti che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto e per eccesso (valori arrotondati alla quarta cifra decimale; l'ampiezza è la differenza tra le due potenze). A ogni riga l'intervallo che contiene $2^{\sqrt{2}}$ diventa circa dieci volte più stretto.

Esponenti	Potenza per difetto	Potenza per eccesso	Ampiezza
$1 < \sqrt{2} < 2$	2	4	2
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	2,6390	2,8284	0,1894
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	2,6574	2,6759	0,0185
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	2,6647	2,6666	0,0018
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$	2,6651	2,6653	0,0002

Le potenze per difetto formano una classe di numeri che crescono, quelle per eccesso una classe di numeri che diminuiscono; ogni numero della prima è minore di ogni numero della seconda, e la distanza tra le due classi può diventare piccola quanto vogliamo. Sono due **classi contigue**, come quelle con cui in *Matematica 2* (cap. 1) abbiamo costruito i numeri reali. Due classi contigue hanno **uno e un solo** elemento separatore: è questo numero che chiamiamo $2^{\sqrt{2}}$. La Figura 7.1 mostra gli intervalli, uno dentro l'altro, che lo stringono.

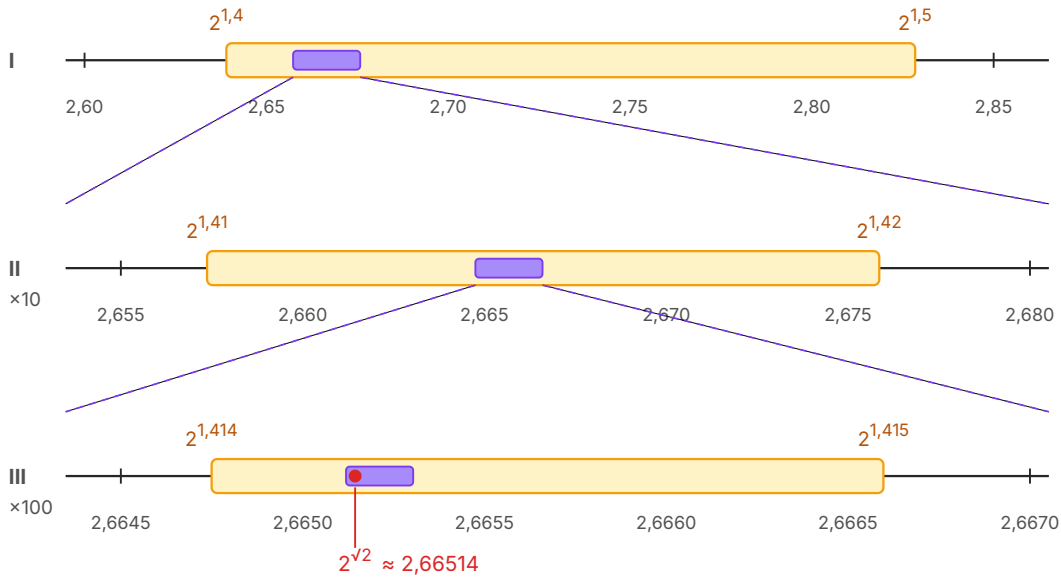

Figura 7.1 Come si stringe $2^{\sqrt{2}}$ su una retta numerica, con tre ingrandimenti successivi (I, II, III; ×10 e ×100 indicano l'ingrandimento rispetto alla riga I). In ogni riga la fascia arancione è l'intervallo tra le due potenze di 2 indicate, quella viola l'intervallo della riga successiva della Tabella 7.1, che la riga sotto ingrandisce. Gli intervalli sono uno dentro l'altro e si restringono attorno a un solo punto, $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}66514$. Valori calcolati.

La stessa costruzione vale per ogni base $a > 1$ e ogni esponente irrazionale x: le potenze a^r, con r razionale minore di x, e le potenze a^s, con s razionale maggiore di x, formano due classi contigue, e il loro elemento separatore si chiama a^x. Per $0 < a < 1$ le disuguaglianze si rovesciano, ma il risultato è lo stesso; infine si pone $1^x = 1$. Abbiamo così definito la **potenza con esponente reale** a^x per ogni base $a > 0$ e ogni esponente reale x.

La definizione è anche un metodo di calcolo approssimato con errore controllato. Ogni riga della tabella non fornisce solo un valore, ma un intervallo che *contiene sicuramente* $2^{\sqrt{2}}$: dalla quarta riga sappiamo che $2{,}6647 < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}6666$, quindi le prime due cifre decimali, 66, sono certe. La calcolatrice mostra $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665144143$: anche questo è un numero con un numero finito di cifre, cioè un'approssimazione, mai il valore esatto.

IN SINTESI

Proprietà delle potenze con esponente reale. Per $a > 0$, $b > 0$ e per ogni x, y reali:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$; $a^0 = 1$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- $a^x > 0$ per ogni x;
- se $a > 1$: $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$; se $0 < a < 1$: $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$.

Le proprietà valgono per gli esponenti razionali e si conservano passando agli elementi separatori: qui le accettiamo senza dimostrazione.

Con queste regole si calcolano espressioni che a prima vista sembrano intrattabili. Per esempio $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{1-\sqrt{2}} = 3^1 = 3$, perché gli esponenti si sommano; $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 5^3 = 125$, perché si moltiplicano. E senza calcolatrice si possono confrontare potenze: poiché $\sqrt{3} \approx 1{,}732 > 1{,}7$ e la base 2 è maggiore di 1, si ha $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$; con la base $\frac{1}{2}$, minore di 1, l'ordine si rovescia: $(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{2})^{1,7}$.

7.2 Crescite discrete

7.2.1 Moltiplicare per lo stesso fattore

Una cellula si divide in due; ciascuna delle due si divide a sua volta, e così via. Se tutte le cellule si dividono insieme, a ogni generazione il loro numero raddoppia: 1, 2, 4, 8, 16, … Dopo n divisioni le cellule sono 2^n: dopo 10 divisioni 1024, dopo 20 più di un milione. È il modello più semplice di **crescita esponenziale**: una grandezza che, a ogni passo, viene moltiplicata per lo stesso numero.

In generale, indichiamo con a_0 il valore iniziale e con a_n il valore dopo n passi. Se a ogni passo il valore viene moltiplicato per lo stesso numero $q > 0$, vale la regola

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

che permette di calcolare ogni termine a partire dal precedente: $a_1 = q\ a_0$, $a_2 = q\ a_1 = q^2\ a_0$, $a_3 = q^3\ a_0$, e in generale

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Una sequenza di numeri definita in questo modo si chiama **successione geometrica** di **ragione** q; la regola $a_{n+1} = q\ a_n$, che dà ogni termine a partire dal precedente, è la sua *definizione per ricorrenza*. Se $q > 1$ la grandezza cresce, se $0 < q < 1$ diminuisce; con $q = 1$ resta costante.

Un'antica leggenda, raccontata in molte versioni, mostra quanto rapidamente cresca una successione geometrica. L'inventore degli scacchi avrebbe chiesto al suo re, come ricompensa,

un chicco di grano sulla prima casella della scacchiera, due sulla seconda, quattro sulla terza, e così via, raddoppiando fino alla sessantaquattresima. Il re accettò, credendo la richiesta modesta. Ma sulla casella k vanno 2^{k-1} chicchi: sull'ultima $2^{63} \approx 9{,}2 \cdot 10^{18}$, più di nove miliardi di miliardi, e in tutto, si può dimostrare, $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ chicchi, un numero di venti cifre. La storia è una leggenda, non un fatto storico; la matematica che racconta, invece, è esatta.

7.2.2 Percentuali che si ripetono

Un aumento del p % moltiplica una grandezza per $1 + \frac{p}{100}$; una diminuzione del p % la moltiplica per $1 - \frac{p}{100}$. Se la stessa variazione percentuale si ripete a ogni passo, si ottiene una successione geometrica. È il caso dell'**interesse composto**: alla fine di ogni anno la banca aggiunge al capitale gli interessi, e l'anno dopo gli interessi si calcolano anche sugli interessi già maturati. Un capitale C_0 al tasso annuo i (per esempio $i = 0{,}03$, il 3 %) dopo n anni diventa $C_n = C_0\,(1+i)^n$.

ESEMPIO SVOLTO

Due percentuali ripetute (dati inventati). a) Si depositano 1000 € al 3 % annuo con interesse composto: quanto si ha dopo 10 anni? Quanto si avrebbe se gli interessi, sempre il 3 % di 1000 €, venissero ritirati ogni anno? b) Un'automobile che costa 20 000 € perde il 15 % del suo valore ogni anno: quanto vale dopo 3 anni?

a) Il fattore annuo è $q = 1{,}03$, quindi $C_{10} = 1000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 1343{,}92$ €. Se gli interessi vengono ritirati, ogni anno si guadagnano 30 €, e in 10 anni si ottengono $1000 + 10 \cdot 30 = 1300$ €: questo è l'*interesse semplice*, una crescita in cui ogni anno si *aggiunge* la stessa quantità. La differenza, circa 44 €, è l'interesse maturato sugli interessi.

b) Perdere il 15 % significa conservare l'85 %: il fattore è $q = 0{,}85$. Quindi $V_3 = 20000 \cdot 0{,}85^3 = 20000 \cdot 0{,}614125 = 12282{,}50$ €. Attenzione: in tre anni l'auto non ha perso il 45 %, ma 100 % − 61,4 % ≈ 38,6 %, perché ogni anno il 15 % si calcola su un valore già diminuito.

7.2.3 Lineare o esponenziale?

Confrontiamo due grandezze che partono entrambe da 100: la prima aumenta di 100 a ogni passo, la seconda viene moltiplicata per 1,5. La prima è una **crescita lineare**, $a_n = 100 + 100n$: tra due termini consecutivi è costante la *differenza*. La seconda è una crescita esponenziale, $b_n = 100 \cdot 1{,}5^n$: è costante il *rapporto* $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1{,}5$. La Tabella 7.2 e la Figura 7.2 le mettono a confronto.

Tabella 7.2 Crescita lineare (+100 a ogni passo) e crescita esponenziale (×1,5 a ogni passo) a partire dallo stesso valore 100. Valori esatti.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$100 + 100n$	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$100 \cdot 1{,}5^n$	100	150	225	337,5	506,25	759,375	1139,0625	1708,59375	2562,890625

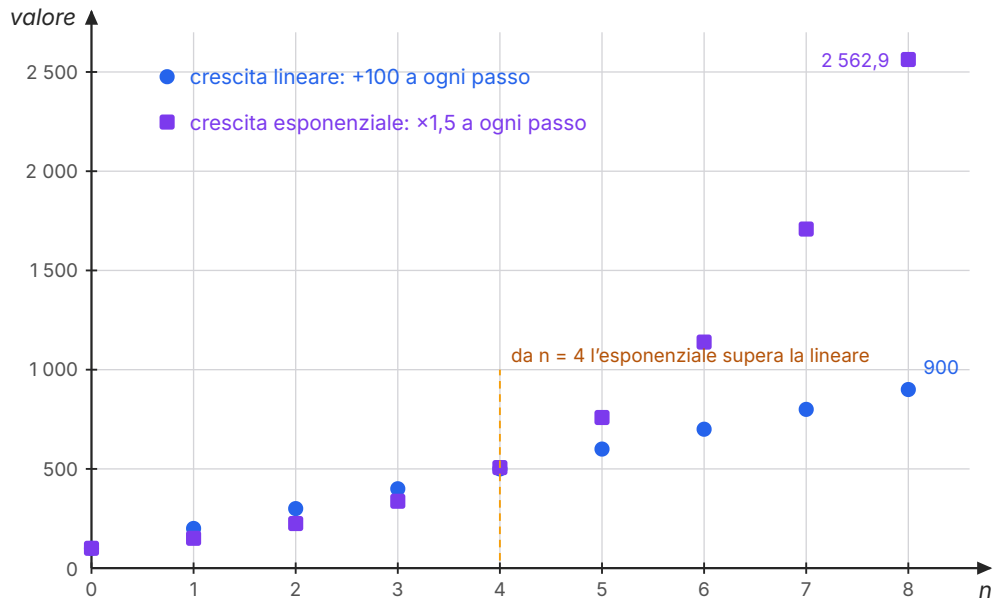

Figura 7.2 I valori della Tabella 7.2: in blu la crescita lineare $a_n = 100 + 100n$, in viola la crescita esponenziale $b_n = 100 \cdot 1{,}5^n$, per n da 0 a 8 (i punti sono isolati perché n è un numero di passi). All'inizio la crescita lineare è più rapida, ma da $n = 4$ la successione geometrica la supera e poi se ne allontana sempre di più. Scale diverse sui due assi.

All'inizio sembra vincere la crescita lineare; ma al quarto passo la successione geometrica la sorpassa, e all'ottavo vale quasi il triplo. Non è un caso: aggiungere ogni volta la stessa quantità produce incrementi che restano uguali, mentre moltiplicare per un fattore maggiore di 1 produce incrementi che crescono anch'essi (50, 75, 112,5, ...). Si può dimostrare che una crescita esponenziale con $q > 1$ finisce sempre per superare qualunque crescita lineare, per quanto rapida.

COLLEGAMENTI

Economia, storia e filosofia: Malthus e le due progressioni. Nel 1798 l'economista inglese Thomas Robert Malthus pubblicò il *Saggio sul principio di popolazione*, in cui sosteneva che una popolazione libera di crescere aumenta in «progressione geometrica», mentre i mezzi di sussistenza possono aumentare al più in «progressione aritmetica», cioè in modo lineare. Il confronto della Figura 7.2 era per lui la ragione di carestie e miserie ricorrenti.

La matematica del suo argomento è corretta: una crescita esponenziale supera sempre una lineare. Le premesse, invece, si sono rivelate discutibili: la produzione agricola è cresciuta molto più che linearmente e la natalità è diminuita in molti paesi. È un buon esempio di una distinzione che ritroveremo in tutto il capitolo: un ragionamento può essere matematicamente impeccabile e dare previsioni sbagliate, se il modello da cui parte non descrive bene la realtà.

7.3 La funzione esponenziale

7.3.1 Definizione e grafico

Ora che le potenze con esponente reale sono definite, possiamo lasciar variare l'esponente su tutto $\mathbb{R}$. Fissato un numero $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = a^x$$

si chiama **funzione esponenziale** di base a. A differenza delle funzioni $y = x^2$ o $y = x^3$, qui la base è fissa e la *variabile sta all'esponente*. La base 1 si esclude perché darebbe la funzione costante $y = 1$; le basi negative e lo zero perché la potenza non sarebbe definita per molti esponenti (0^{-1} non ha senso, $(-2)^{1/2}$ non è un numero reale).

Disegniamo per punti $y = 2^x$: per $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ si ottiene $y = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$. Ogni passo di 1 verso destra raddoppia l'ordinata, ogni passo verso sinistra la dimezza. Verso destra la curva sale sempre più ripida; verso sinistra si schiaccia sull'asse x senza mai toccarlo: $2^{-10} = \frac{1}{1024}$ è meno di un millesimo, ma è positivo. I punti della successione geometrica 1, 2, 4, 8, … stanno sulla curva: la funzione esponenziale «riempie» gli spazi tra un passo e l'altro.

Per la base $\frac{1}{2}$ i valori si invertono: $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, quindi $y = (\frac{1}{2})^x$ assume in x lo stesso valore che $y = 2^x$ assume in $-x$. Come abbiamo visto nel capitolo 1, il grafico di $y = f(-x)$ è il simmetrico del grafico di $y = f(x)$ rispetto all'asse y: i due grafici della Figura 7.3 sono uno l'immagine speculare dell'altro. In generale, il grafico di $y = (\frac{1}{a})^x$ è il simmetrico di quello di $y = a^x$ rispetto all'asse y.

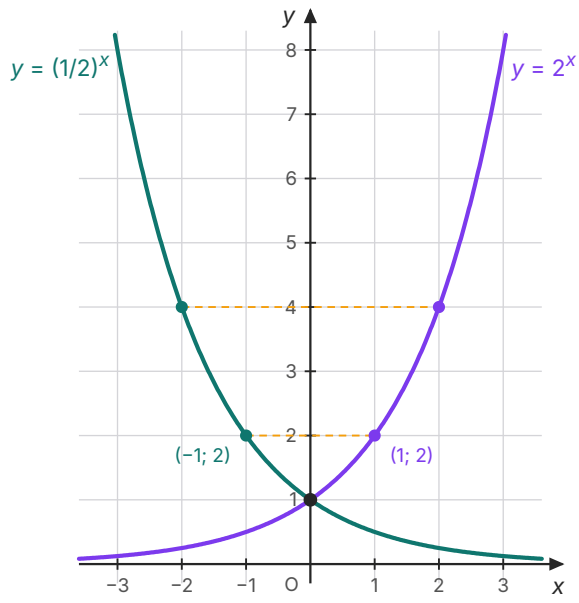

Figura 7.3 I grafici di $y = 2^x$ (viola) e di $y = (\frac{1}{2})^x$ (verde), calcolati dalle equazioni, con la stessa unità sui due assi. Sono simmetrici rispetto all'asse y: per esempio (1; 2) e (−1; 2), (2; 4) e (−2; 4). Entrambi passano per (0; 1) e stanno sopra l'asse x, a cui si avvicinano senza toccarlo: il primo verso sinistra, il secondo verso destra.

IN SINTESI

La funzione esponenziale $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$):

- ha dominio $\mathbb{R}$ e immagine $]0; +\infty[$: assume tutti i valori positivi, e solo quelli;
- il grafico passa per (0; 1), perché $a^0 = 1$, e per (1; a);
- è **crescente** se $a > 1$, **decrescente** se $0 < a < 1$;
- si avvicina quanto si vuole all'asse x senza toccarlo: verso sinistra se $a > 1$, verso destra se $0 < a < 1$;
- è **iniettiva**: a esponenti diversi corrispondono potenze diverse. Considerata da $\mathbb{R}$ a $]0; +\infty[$ è biiettiva, quindi invertibile: la sua inversa è il logaritmo (capitolo 8).

Due osservazioni. Che l'immagine sia *tutto* l'intervallo $]0; +\infty[$, senza «buchi», dipende dalla completezza dei numeri reali: qui lo accettiamo guardando il grafico. La retta $y = 0$ a cui il grafico si avvicina si chiama **asintoto orizzontale**; la definizione precisa richiede il concetto di limite, che studierai al quinto anno. L'iniettività, invece, è una conseguenza diretta della monotonia: se $x_1 < x_2$, allora a^{x_1} e a^{x_2} sono diversi, perché uno dei due è minore dell'altro.

Come la successione geometrica supera ogni crescita lineare, così la funzione esponenziale con base maggiore di 1, per x abbastanza grande, supera qualunque potenza di x. Confronta 2^x e x^3: per $x = 9$ vince ancora la potenza (512 contro 729), ma per $x = 10$ l'esponenziale passa in testa (1024 contro 1000), e per $x = 20$ vale più di un milione contro ottomila. È questo il senso preciso dell'espressione «crescita esponenziale».

Con le trasformazioni del capitolo 1 si ottengono molti altri grafici. Il grafico di $y = 2^{x-3}$ è quello di $y = 2^x$ traslato di 3 verso destra; $y = 2^x + 1$ è traslato di 1 verso l'alto, e il suo asintoto diventa la retta $y = 1$; $y = -2^x$ è il simmetrico rispetto all'asse x e sta tutto sotto l'asse.

ERRORE FREQUENTE

Tre sviste da evitare.

- «$(-2)^x$ è una funzione esponenziale di base -2.» No: la base deve essere positiva e diversa da 1; $(-2)^{1/2}$ non esiste in $\mathbb{R}$.
- «3^x è negativo se x è negativo.» No: $3^{-2} = \frac{1}{9}$. Una potenza con base positiva è **sempre positiva**; per questo un'equazione come $3^x = -5$ non ha soluzioni.
- «$2^{x+3} = 2^x + 2^3$.» No: un esponente somma corrisponde a un *prodotto* di potenze, $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$. Allo stesso modo $2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$, e non 2^{2x}.

7.4 Il numero *e*

7.4.1 Interessi accreditati sempre più spesso

Immaginiamo una banca molto generosa (e del tutto immaginaria) che offre un interesse del 100 % all'anno, e depositiamo 1 euro. Se l'interesse viene accreditato una volta sola, a fine anno abbiamo 1 + 1 = 2 euro. Se la banca accredita il 50 % ogni sei mesi, a metà anno abbiamo 1,5 euro, e nel secondo semestre l'interesse si calcola anche sugli interessi già maturati: a fine anno abbiamo $1{,}5^2 = 2{,}25$ euro. Con quattro accrediti trimestrali del 25 % il capitale diventa $1{,}25^4 \approx 2{,}44$ euro.

Se l'anno viene diviso in n periodi, in ognuno il capitale viene moltiplicato per $1 + \frac{1}{n}$, e a fine anno diventa $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Accreditando gli interessi ogni mese, ogni giorno, ogni ora, il capitale finale cresce senza limiti? La Tabella 7.3 risponde di no.

Tabella 7.3 Il valore di $(1 + \frac{1}{n})^n$: il capitale finale, in euro, prodotto in un anno da 1 euro al tasso annuo del 100 % con l'interesse accreditato n volte (valori arrotondati alla sesta cifra decimale; i primi due sono esatti).

Accredito	n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
annuale	1	2
semestrale	2	2,25
trimestrale	4	2,441406
mensile	12	2,613035
giornaliero	365	2,714567
orario	8760	2,718127
un milione di volte	10^6	2,718280

I valori crescono, ma sempre più lentamente, e si avvicinano a un numero poco più grande di 2,718; si può dimostrare che restano tutti minori di 3, anzi minori di quel numero. Il valore a cui si avvicina $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n diventa sempre più grande si indica con la lettera e e si chiama **numero *e*** (o numero di Nepero):

$$e \approx 2{,}718281828$$

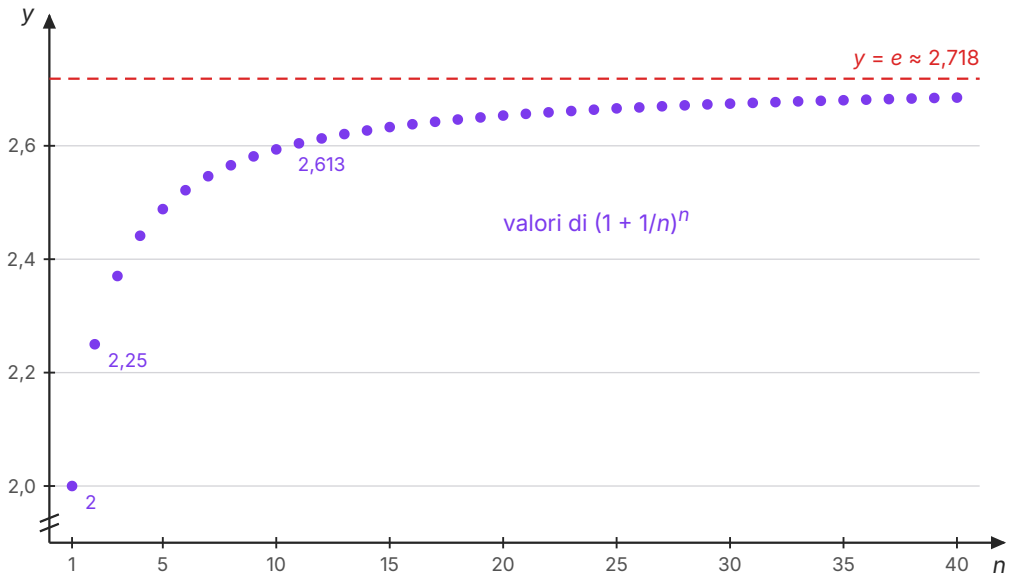

Figura 7.4 I valori di $(1 + \frac{1}{n})^n$ per n da 1 a 40, calcolati: crescono e si avvicinano alla retta tratteggiata $y = e$ senza mai raggiungerla. Già per $n = 12$ il valore è 2,613, ma per guadagnare ogni nuova cifra esatta di e bisogna aumentare n di circa dieci volte (Tabella 7.3). L'asse verticale parte da 1,9; scale diverse sui due assi.

Nel linguaggio del quinto anno diremo che e è il *limite* di $(1 + \frac{1}{n})^n$ per n che tende all'infinito; per ora ci basta l'idea, che la Figura 7.4 rende visibile. Osserva che la definizione stessa di e è un processo infinito: nessun valore di n, per quanto grande, dà e esattamente; ognuno ne dà un'approssimazione per difetto.

7.4.2 Un numero trascendente

Ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ è soluzione di un'equazione di primo grado a coefficienti interi, $nx - m = 0$; il numero $\sqrt{2}$, irrazionale, è soluzione di $x^2 - 2 = 0$. Un numero reale che è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi (non tutti nulli) si chiama **numero algebrico**; un numero reale che non lo è si chiama **numero trascendente**. In *Matematica 3* (cap. 4) abbiamo incontrato il primo esempio celebre, π, di cui Ferdinand Lindemann dimostrò la trascendenza nel 1882.

Il numero e è irrazionale (lo aveva già dimostrato Eulero nel Settecento), e anzi trascendente, come dimostrò Charles Hermite nel 1873, nove anni prima del risultato su π; il metodo di Hermite fu anche il punto di partenza di Lindemann. Dire che e è trascendente significa che nessuna combinazione finita di sue potenze con esponente naturale e coefficienti interi non tutti nulli, come $2e^3 - 5e + 1$, può dare 0. I due numeri più importanti dell'analisi, π e e, sono

quindi entrambi fuori dalla portata dell'algebra: non si ottengono risolvendo equazioni polinomiali, ma solo come risultato di processi infiniti di approssimazione.

APPROFONDIMENTO · ALGEBRICI, TRASCENDENTI E INFINITO

Che i numeri trascendenti esistano non era affatto ovvio. Per secoli i matematici sospettarono che π non fosse algebrico, ma nessuno sapeva indicare con certezza *un solo* numero trascendente. I primi esempi li costruì Joseph Liouville nel 1844, con numeri fatti apposta; la trascendenza di e (Hermite, 1873) fu la prima dimostrata per un numero «naturale», nato da un problema matematico e non costruito allo scopo.

Poco dopo, nel 1874, Georg Cantor capovolse la prospettiva. I numeri algebrici si possono mettere in fila, uno dopo l'altro, come i numeri naturali: sono «tanti quanti» i naturali. I numeri reali, invece, non si possono mettere in fila (è il risultato che in *Matematica 3*, cap. 4, abbiamo visto con l'argomento diagonale, che Cantor trovò nel 1891). Ne segue che i trascendenti, lungi dall'essere rari, sono «quasi tutti» i numeri reali: gli algebrici sono l'eccezione.

Qui la matematica tocca una questione che la filosofia discute da Aristotele: l'infinito. Aristotele ammetteva solo un infinito *potenziale*, un processo che si può sempre continuare, come la tabella di $(1 + \frac{1}{n})^n$ o le cifre di e; rifiutava un infinito *attuale*, dato tutto insieme. Cantor, per confrontare la «grandezza» di insiemi infiniti, li tratta invece come oggetti compiuti. Il numero e, definito da un processo infinito ma pensato come un unico numero ben determinato, sta proprio sul confine tra i due modi di intendere l'infinito.

7.4.3 La funzione $y = e^x$

Poiché $2 < e < 3$, il grafico della funzione $y = e^x$ sta tra quelli di $y = 2^x$ e di $y = 3^x$ (Figura 7.5): per $x > 0$ sopra il primo e sotto il secondo, per $x < 0$ il contrario. La funzione $y = e^x$, chiamata **esponenziale naturale**, è quella che le scienze usano di preferenza; il motivo profondo, legato alla rapidità con cui cresce, si capirà al quinto anno con il calcolo differenziale. Sulla calcolatrice il tasto è e^x, spesso come seconda funzione del tasto «ln».

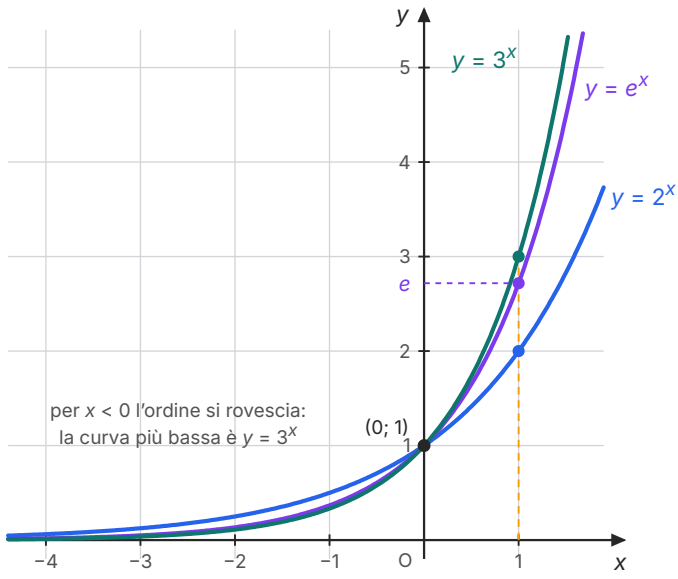

Figura 7.5 I grafici di $y = 2^x$ (blu), $y = e^x$ (viola) e $y = 3^x$ (verde), calcolati dalle equazioni con la stessa unità sui due assi. Passano tutti per (0; 1); nel punto di ascissa 1 valgono 2, $e \approx 2{,}718$ e 3. Per $x > 0$ la curva con la base più grande sta più in alto, per $x < 0$ più in basso.

Ritroviamo e anche in un problema realistico di interessi. Un capitale C_0 al tasso annuo i, con l'interesse accreditato n volte all'anno, dopo t anni diventa $C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$. Se gli accrediti diventano sempre più frequenti, si dimostra che il capitale si avvicina a

$$C(t) = C_0 \cdot e^{it}$$

È la **capitalizzazione continua**: l'interesse viene aggiunto istante per istante. Con 1000 € al 3 % per 10 anni si ottiene $1000 \cdot e^{0{,}3} \approx 1349{,}86$ €, contro i 1343,92 € dell'accredito annuale: la differenza è piccola, ma il modello continuo è molto più comodo, e lo ritroveremo nei fenomeni naturali.

DA RICORDARE

$e \approx 2{,}718$ è il valore a cui si avvicina $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ al crescere di n; per ogni n si ha $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. È irrazionale e trascendente (Hermite, 1873), come π (Lindemann, 1882). Il grafico di $y = e^x$ sta tra quelli di $y = 2^x$ e $y = 3^x$.

7.5 Equazioni e disequazioni esponenziali

7.5.1 Equazioni con la stessa base

Un'**equazione esponenziale** è un'equazione in cui l'incognita compare all'esponente, come $2^x = 32$. La più semplice ha la forma $a^x = b$. Poiché a^x assume solo valori positivi, se $b \le 0$ l'equazione è **impossibile**; se $b > 0$ ha **una e una sola** soluzione, perché la funzione esponenziale assume ogni valore positivo esattamente una volta. Quando i due membri si possono scrivere come potenze della stessa base, l'iniettività permette di «togliere» la base:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $2^x = 32$; b) $9^x = 27$; c) $4^{x+1} = 8$; d) $3^{x^2-1} = 1$.

a) $32 = 2^5$, quindi $2^x = 2^5$ e $x = 5$.

b) 9 e 27 sono potenze di 3: $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ e $27 = 3^3$. Quindi $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$. Verifica: $9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 27$ ✓.

c) Base comune 2: $4^{x+1} = 2^{2(x+1)} = 2^{2x+2}$ e $8 = 2^3$. Quindi $2x + 2 = 3$, $x = \frac{1}{2}$. Verifica: $4^{3/2} = 8$ ✓.

d) $1 = 3^0$, quindi $x^2 - 1 = 0$, $x = -1 \vee x = 1$. L'esponente può essere un polinomio: l'equazione esponenziale si riduce allora a un'equazione algebrica.

Talvolta una sostituzione riconduce l'equazione al secondo grado. Risolviamo $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$. Poiché $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$, poniamo $t = 2^x$, con $t > 0$: l'equazione diventa $t^2 - 3t - 4 = 0$, cioè $(t - 4)(t + 1) = 0$, con soluzioni $t = 4$ e $t = -1$. La seconda si scarta, perché $2^x = -1$ è impossibile; resta $2^x = 4$, cioè $x = 2$. Verifica: $16 - 12 - 4 = 0$ ✓.

7.5.2 Disequazioni con la stessa base

Una **disequazione esponenziale** ha l'incognita all'esponente. Con una base comune decide tutto la monotonia: se $a > 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (il verso si **conserva**); se $0 < a < 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (il verso si **inverte**). Inoltre, poiché $a^x > 0$, una disequazione come $a^{f(x)} > -3$ è sempre vera e $a^{f(x)} < 0$ non è mai vera.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi a) $3^{x-1} > 9$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$; c) $2^{x^2} < 16$.

a) $9 = 3^2$ e la base 3 è maggiore di 1: $x - 1 > 2$, cioè $x > 3$, l'intervallo $]3; +\infty[$. Controllo: per $x = 4$, $3^3 = 27 > 9$ ✓; per $x = 0$, $\frac{1}{3} > 9$ è falso ✓.

b) $8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. La base $\frac{1}{2}$ è minore di 1, quindi il verso si inverte: $x \leq -3$, l'intervallo $]-\infty; -3]$. Controllo: per $x = -4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \geq 8$ ✓; per $x = 0$, $1 \geq 8$ è falso ✓.

c) $16 = 2^4$, base 2: $x^2 < 4$, cioè $-2 < x < 2$, l'intervallo $]-2; 2[$. Controllo: per $x = 1$, $2 < 16$ ✓; per $x = 3$, $2^9 = 512 < 16$ è falso ✓.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare di invertire il verso. Da $0{,}5^x > 0{,}5^3$ *non* segue $x > 3$: la funzione $y = 0{,}5^x$ è decrescente, e infatti per $x = 4$ si ha $0{,}0625 < 0{,}125$. La soluzione è $x < 3$. Prima di «togliere la base», chiediti sempre se è maggiore o minore di 1. E dopo una sostituzione $t = a^x$, ricorda che t è positivo: le soluzioni con $t \leq 0$ si scartano.

7.5.3 Quando la base comune non c'è

L'equazione $2^x = 5$ ha una e una sola soluzione, perché 5 è positivo; ma 5 non è una potenza «visibile» di 2. Possiamo però *localizzarla*: $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$, quindi la soluzione è tra 2 e 3. Con il metodo di bisezione (capitolo 1) la stringiamo: si calcola la potenza nel punto medio e si tiene la metà dell'intervallo in cui il valore 5 è ancora compreso. Poiché $2^{2{,}5} \approx 5{,}66 > 5$, la soluzione è tra 2 e 2,5; poiché $2^{2{,}25} \approx 4{,}76 < 5$, è tra 2,25 e 2,5; poiché $2^{2{,}375} \approx 5{,}19 > 5$, è tra 2,25 e 2,375; e così via. Dopo qualche altro passo si trova $x \approx 2{,}32$.

Ogni passo dimezza l'intervallo, quindi l'errore è sempre sotto controllo, esattamente come nella costruzione di $2^{\sqrt{2}}$. Ma un metodo che dia la soluzione in forma esatta qui non l'abbiamo: il numero che risolve $2^x = 5$ avrà un nome nel capitolo 8, il logaritmo in base 2 di 5, e la calcolatrice lo fornirà con un solo tasto.

7.6 Modelli di crescita e di decadimento

7.6.1 Dal discreto al continuo

Una coltura di laboratorio (dati inventati) contiene 500 batteri, e il loro numero raddoppia ogni 20 minuti. Misurando ogni 20 minuti si trovano 500, 1000, 2000, … batteri: una successione geometrica di ragione 2, $a_n = 500 \cdot 2^n$ dopo n intervalli. Ma la coltura esiste anche tra una misura e

l'altra, e i batteri non si dividono tutti nello stesso istante. Poiché dopo t minuti sono trascorsi $\frac{t}{20}$ intervalli, il modello continuo è

$$N(t) = 500 \cdot 2^{t/20}$$

definito per ogni $t \geq 0$. Dopo 30 minuti, un intervallo e mezzo, $N(30) = 500 \cdot 2^{1,5} \approx 1414$ batteri. La successione geometrica è fatta dai valori della funzione negli istanti multipli di 20 minuti: è il modello *discreto*, mentre la funzione è il modello *continuo* dello stesso fenomeno.

Nelle scienze la crescita continua si scrive di solito con la base e:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

dove $N_0 = N(0)$ è il valore iniziale e k è la **costante di crescita**. Se $k > 0$ la grandezza cresce; se $k < 0$ decresce, e si parla di *decadimento*. Le due scritture, con base 2 o con base e, descrivono la stessa famiglia di funzioni: ogni base positiva si può scrivere come potenza di e (per esempio $2 \approx e^{0,693}$), e il capitolo 8 insegnerà a calcolare l'esponente. In ogni caso vale la proprietà che caratterizza la crescita esponenziale: **in intervalli di tempo uguali la grandezza viene moltiplicata per lo stesso fattore**, perché $\frac{N(t+h)}{N(t)} = e^{kh}$ non dipende da t.

7.6.2 Tempo di raddoppio e tempo di dimezzamento

Una cittadina (dati inventati) ha 20 000 abitanti e cresce con legge $N(t) = 20000 \cdot e^{0,02t}$, con t in anni. Dopo 10 anni gli abitanti sarebbero $20000 \cdot e^{0,2} \approx 24428$. In quanto tempo raddoppiano? Bisogna trovare t tale che $e^{0,02t} = 2$; per tentativi, $e^{0,02 \cdot 34} \approx 1,974$ e $e^{0,02 \cdot 35} \approx 2,014$, quindi circa 35 anni. Il valore non dipende dal numero di partenza: da 20 000 a 40 000 come da 40 000 a 80 000 occorre sempre lo stesso tempo. È il **tempo di raddoppio** T, e il modello si può scrivere $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$. La formula esatta per calcolarlo arriverà con i logaritmi.

Allo stesso modo, una grandezza in decadimento esponenziale si dimezza sempre nello stesso tempo, il **tempo di dimezzamento** T:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$$

L'esempio più importante è il **decadimento radioattivo**. I nuclei di un isotopo instabile si trasformano spontaneamente in nuclei di un altro elemento: il carbonio-14, per esempio, in azoto-14. Non si può prevedere quando decadrà un singolo nucleo, ma in un campione con moltissimi nuclei il numero di quelli rimasti segue con ottima precisione la legge esponenziale. Il carbonio-14 è presente in tutti gli organismi viventi e ha un tempo di dimezzamento di circa 5730 anni. Quando un organismo muore smette di assorbirne, e il carbonio-14 che contiene diminuisce come nella Figura 7.6: misurando quanto ne resta si stima da quanto tempo è morto.

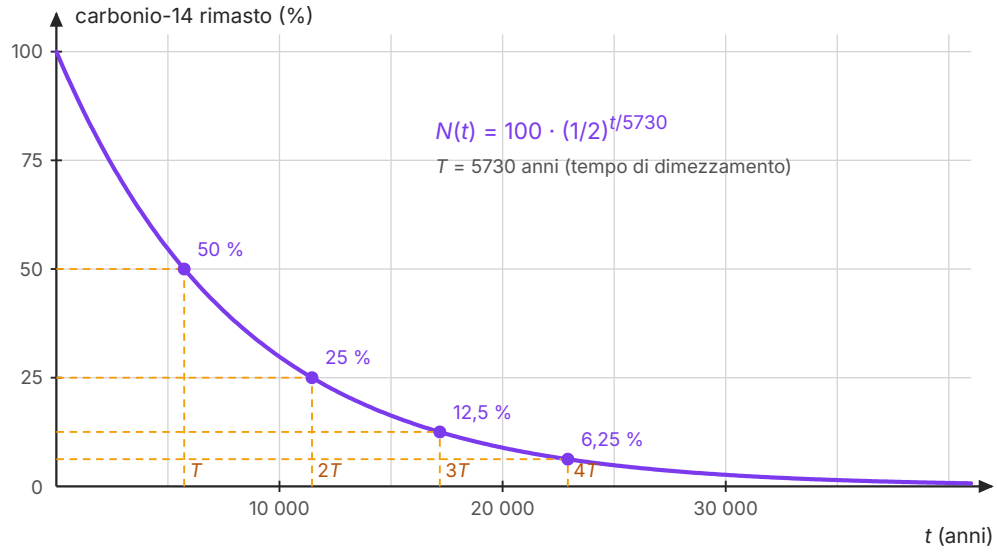

Figura 7.6 Il decadimento del carbonio-14, calcolato da $N(t) = 100 \cdot (\frac{1}{2})^{t/5730}$ (percentuale rimasta, t in anni). Dopo un tempo di dimezzamento $T \approx 5730$ anni resta il 50 % dei nuclei, dopo $2T$ il 25 %, dopo $3T$ il 12,5 %, dopo $4T$ il 6,25 %: in tempi uguali la quantità si dimezza sempre. Scale diverse sui due assi.

ESEMPIO SVOLTO

Datare un reperto. In un frammento di legno resta il 25 % del carbonio-14 presente quando l'albero era vivo. Quanto tempo è passato? E quale percentuale resterebbe dopo 10 000 anni?

Con $T = 5730$ anni: $(\frac{1}{2})^{t/5730} = 0{,}25 = (\frac{1}{2})^2$. Stessa base, quindi $\frac{t}{5730} = 2$, $t = 11460$ anni: due tempi di dimezzamento. Poiché anche il tempo di dimezzamento è un valore approssimato, è più corretto dire «circa 11 500 anni».

Dopo 10 000 anni: $(\frac{1}{2})^{10000/5730} \approx 0{,}5^{1{,}745} \approx 0{,}298$, cioè circa il 30 %. Il risultato è coerente con il grafico: 10 000 anni sono tra uno e due tempi di dimezzamento, e la percentuale sta tra il 50 % e il 25 %.

7.6.3 Modello e realtà

Un modello esponenziale nasce da un'ipotesi precisa: che la grandezza cambi, in ogni intervallo di tempo, in proporzione alla quantità presente. Più batteri ci sono, più ne nascono; più nuclei radioattivi restano, più ne decadono. Finché l'ipotesi è vera il modello funziona, e funziona molto bene: il decadimento radioattivo segue la legge esponenziale per migliaia di anni.

Ma nessuna crescita esponenziale reale dura per sempre. La coltura del nostro esempio, dopo 24 ore, conterebbe $500 \cdot 2^{72}$ batteri, un numero con 25 cifre: molto prima il nutrimento finisce e lo spazio manca, e la crescita rallenta fino a fermarsi. Un modello descrive un fenomeno solo in un certo intervallo di tempi e di condizioni; ogni volta che lo usiamo per prevedere, dobbiamo chiederci per quali valori è stato controllato e se ha senso estenderlo oltre. È la stessa lezione di Malthus, vista dall'altro lato: un modello corretto in matematica può essere sbagliato come descrizione.

APPROFONDIMENTO · OLTRE L'ESPONENZIALE

Il raffreddamento. Una tazza di tè bollente si raffredda prima rapidamente, poi sempre più lentamente, avvicinandosi alla temperatura della stanza. Una buona descrizione, che porta il nome di Newton, dice che decresce in modo esponenziale non la temperatura, ma la sua *differenza* rispetto a quella dell'ambiente: $T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt}$, con $k > 0$. Per un tè a 90 °C in una stanza a 20 °C, con $k = 0{,}05$ al minuto (dati inventati), dopo 10 minuti si ha $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0{,}5} \approx 62{,}5$ °C, dopo 40 minuti circa 29,5 °C: la temperatura si avvicina a 20 °C senza mai scendere sotto.

La curva logistica. Per una popolazione che dispone di risorse limitate, nell'Ottocento il matematico belga Pierre-François Verhulst propose un modello diverso: all'inizio la crescita è quasi esponenziale, poi rallenta e la popolazione si avvicina a un valore massimo, detto *capacità portante* dell'ambiente. Il grafico ha la forma di una S allungata e si chiama *curva logistica*. La sua equazione va oltre il programma; basta sapere che l'esponenziale ne descrive bene solo la prima parte.

SINTESI

- Per $a > 0$ e x irrazionale, a^x è l'elemento separatore delle due classi contigue formate dalle potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto e per eccesso; per esempio $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665$. Le proprietà delle potenze restano valide.
- Le potenze non intere si definiscono solo con base positiva; $a^x > 0$ per ogni x.
- Una successione geometrica di ragione q è definita da $a_{n+1} = q\, a_n$; il termine generale è $a_n = a_0\, q^n$. Interesse composto: $C_n = C_0\,(1 + i)^n$.
- Nella crescita lineare è costante la differenza tra due termini consecutivi, nella crescita esponenziale il rapporto; con $q > 1$ la crescita esponenziale finisce per superare ogni crescita lineare.
- La funzione $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ha dominio $\mathbb{R}$, immagine $]0; +\infty[$, passa per $(0; 1)$, è crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$; è iniettiva, quindi invertibile.
- Il grafico di $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ è il simmetrico di quello di $y = a^x$ rispetto all'asse y.
- Il numero $e \approx 2{,}718281828$ è il valore a cui si avvicina $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ al crescere di n; è irrazionale e trascendente (Hermite, 1873). Capitalizzazione continua: $C(t) = C_0\, e^{it}$.
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$; con la sostituzione $t = a^x$ si scartano i valori $t \leq 0$; $a^x = b$ è impossibile se $b \leq 0$.
- Nelle disequazioni con la stessa base il verso si conserva se $a > 1$ e si inverte se $0 < a < 1$.
- Le equazioni come $2^x = 5$ si risolvono per ora in modo approssimato, con il grafico o la bisezione.
- Modelli continui: $N(t) = N_0\, e^{kt}$ (crescita se $k > 0$, decadimento se $k < 0$); con il tempo di raddoppio T il modello è $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T}$, con il tempo di dimezzamento T è $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$; carbonio-14: $T \approx 5730$ anni.
- Un modello esponenziale vale finché è vera l'ipotesi da cui nasce: la variazione proporzionale alla quantità presente.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti è una funzione esponenziale?

   A. $y = 0{,}4^x$

   B. $y = x^3$

   C. $y = (-2)^x$

   D. $y = 1^x$

2. ● Il grafico di $y = 5^x$ passa per il punto:

   A. (0; 0)

   B. (1; 0)

   C. (0; 1)

   D. (0; 5)

3. ● Una successione è definita da $a_0 = 3$ e $a_{n+1} = 2a_n$. Il termine a_4 vale:

   A. 11

   B. 48

   C. 24

   D. 96

4. ● La disequazione $0{,}3^x > 0{,}3^2$ equivale a:

   A. $x > 2$

   B. $x < -2$

   C. $x > -2$

   D. $x < 2$

5. ● Arrotondato al millesimo, il numero e vale:

   A. 2,714

   B. 2,783

   C. 2,718

   D. 3,142

6. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) $2^{x+1} = 2^x + 2$ per ogni x reale.

   b) $3^x > 0$ per ogni x reale.

   c) Una successione geometrica a termini positivi di ragione 1,05 aumenta del 5 % a ogni passo.

   d) Per n abbastanza grande, $(1 + \frac{1}{n})^n$ supera 3.

   e) Il numero e è razionale, ma ha moltissime cifre decimali.

7. ● Completa. «La funzione $y = a^x$ è definita per a _____ e a _____ ; ha dominio _____ e immagine _____ ; è crescente se _____ e decrescente se _____ ; il suo grafico passa per il punto _____ . Un numero reale che non è soluzione di alcuna equazione polinomiale a coefficienti interi si dice _____ .»

Calcolare

8. ● Semplifica: a) $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{2-\sqrt{3}}$; b) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; c) $7^{\pi} : 7^{\pi-1}$; d) $(9^{\sqrt{2}})^{1/2} : 3^{\sqrt{2}}$.

9. ● Ordina in senso crescente senza calcolatrice: a) $3^{\sqrt{2}}$, $3^{1,4}$, $3^{1,5}$; b) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{2})^{1,7}$, $(\frac{1}{2})^{1,8}$.

10. ●● Con la calcolatrice, usa gli esponenti 1,41 e 1,42 e poi 1,414 e 1,415 per trovare due intervalli che contengono $3^{\sqrt{2}}$ (quattro cifre decimali). Quali cifre di $3^{\sqrt{2}}$ sono certe dopo il secondo passo?

11. ● Una successione geometrica ha $a_0 = 80$. a) Con ragione $q = 1{,}5$ calcola a_1, a_2, a_3, a_4 e scrivi a_n. b) Fai lo stesso con $q = 0{,}5$.

12. ●● Si depositano 2500 € al 2 % annuo. Calcola il capitale dopo 5 e dopo 10 anni a) con interesse composto; b) con interesse semplice (ogni anno si aggiunge il 2 % del capitale iniziale). Quale delle due crescite è lineare?

13. ●● Per ciascuna funzione indica dominio, immagine, asintoto orizzontale, intersezioni con gli assi e monotonia, e descrivi il grafico come trasformazione di un grafico noto: a) $y = 3^x - 3$; b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; c) $y = 2^x + 1$.

14. ● Risolvi: a) $2^x = 64$; b) $3^{x-1} = 81$; c) $5^x = \frac{1}{25}$; d) $8^x = 4$; e) $9^{x+1} = 27$; f) $2^x = -4$.

15. ●● Risolvi: a) $4^x = 2^{x+3}$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{x-3}$; c) $2^{x^2} = 16$; d) $3^{x+1} + 3^x = 36$.

16. ●● Risolvi con la sostituzione $t = a^x$: a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; b) $4^x - 2^x - 2 = 0$.

17. ●● Risolvi le disequazioni, scrivendo le soluzioni anche come intervalli: a) $2^{x+1} > 8$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$; c) $5^{x^2-1} < 125$; d) $0{,}5^{2x} > 0{,}25$.

18. ●● L'equazione $3^x = 20$ ha una sola soluzione. Trova due interi consecutivi tra cui è compresa, poi esegui tre passi di bisezione e scrivi un intervallo di ampiezza 0,125 che la contiene.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Spiega perché nella definizione della funzione esponenziale $y = a^x$ si escludono le basi $a \leq 0$ e la base $a = 1$; per ciascun caso escluso porta un esempio.

20. ●● a) Dimostra che in una successione geometrica con $a_0 > 0$ e $q > 0$ il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è costante, mentre in $a_n = a_0 + nd$ è costante la differenza $a_{n+1} - a_n$. b) Dimostra che se una grandezza aumenta del p % per due volte di seguito ($p > 0$), in tutto aumenta di più del $2p$ %.

21. ●● Trova l'errore: «$2^x + 2^x = 2^{2x}$, quindi l'equazione $2^x + 2^x = 16$ equivale a $2^{2x} = 2^4$ e ha soluzione $x = 2$.» Correggi il ragionamento e risolvi l'equazione.

22. ●●● Spiega perché, se $a > 1$, la funzione $y = a^x$ è iniettiva, e deduci che $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ equivale a $f(x) = g(x)$. Perché la stessa conclusione vale anche per $0 < a < 1$?

Problemi

23. ●● In una coltura (dati inventati) ci sono 200 cellule, e ogni 6 ore ciascuna si divide in due. a) Quante cellule ci sono dopo 1 giorno? E dopo 3 giorni? b) Dopo quante ore, per la prima volta, si superano le 100 000 cellule?

24. ●● Un paese di montagna (dati inventati) ha 12 000 abitanti e ne perde il 2 % ogni anno. a) Scrivi il modello. b) Quanti abitanti avrà dopo 5 e dopo 10 anni? c) Per tentativi, dopo quanti anni, per la prima volta, avrà meno di 10 000 abitanti?

25. ●● In un osso resta il 12,5 % del carbonio-14 iniziale. a) Quanti anni sono passati ($T = 5730$ anni)? b) Quale percentuale resta dopo 2000 anni?

26. ●●● Si investono 5000 € al tasso annuo del 4 % per 10 anni. Calcola il capitale finale a) con accredito annuale; b) con accredito mensile, cioè $5000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{120}$; c) con capitalizzazione continua. Commenta i risultati.

Con il computer

27. ●● Con un foglio di calcolo, scrivi in una colonna $n = 1, 2, \ldots, 50$ e poi 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, e nella colonna accanto $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. a) Controlla che i valori crescano e restino minori di 2,7183. b) In una terza colonna calcola $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ per gli stessi n (da $n = 2$): a quale numero sembrano avvicinarsi i valori? Confrontalo con $\frac{1}{e}$.

Verso la verifica

28. ●● Risolvi: a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 8$.

29. ●● Data $f(x) = 2^{x-1} - 4$, determina dominio, immagine, asintoto orizzontale, intersezioni con gli assi e segno; poi descrivi il grafico.

30. ●●● **Sfida.** Un capitale, con accredito annuale degli interessi, raddoppia in 12 anni. a) Qual è il fattore annuo q, e quindi il tasso? b) Quanto diventano 1000 € dopo 30 anni? c) Spiega perché il tempo di raddoppio non dipende dal capitale iniziale.

PER APPROFONDIRE

- [MAOE] Maor, *e: The Story of a Number*: l'interesse composto, Jakob Bernoulli, Eulero e la storia del numero *e*.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sui numeri algebrici e trascendenti e sulla numerabilità.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli sull'Ottocento, con Liouville, Hermite, Lindemann e Cantor.

Glossario del capitolo

Asintoto orizzontale
Retta orizzontale a cui il grafico di una funzione si avvicina quanto si vuole, senza raggiungerla; per $y = a^x$ è l'asse x.

Capitalizzazione continua
Accredito degli interessi istante per istante: un capitale C_0 al tasso i diventa $C_0\, e^{it}$ dopo t anni.

Classi contigue
Due insiemi di numeri tali che ogni elemento del primo è minore di ogni elemento del secondo e che la loro distanza può diventare piccola quanto si vuole; hanno un solo elemento separatore.

Costante di crescita
Il numero k nel modello $N(t) = N_0\, e^{kt}$: crescita se $k > 0$, decadimento se $k < 0$.

Crescita esponenziale
Crescita in cui, in passi o intervalli di tempo uguali, la grandezza viene moltiplicata per lo stesso fattore maggiore di 1.

Crescita lineare
Crescita in cui, in passi uguali, si aggiunge sempre la stessa quantità: è costante la differenza tra termini consecutivi.

Decadimento radioattivo
Trasformazione spontanea dei nuclei di un isotopo instabile; in un campione grande il numero di nuclei rimasti diminuisce in modo esponenziale.

Disequazione esponenziale
Disequazione in cui l'incognita compare all'esponente; con una base comune il verso si conserva se $a > 1$ e si inverte se $0 < a < 1$.

Equazione esponenziale
Equazione in cui l'incognita compare all'esponente.

Funzione esponenziale
La funzione $y = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, definita su $\mathbb{R}$, con immagine $]0; +\infty[$.

Interesse composto
Regime in cui gli interessi maturati si aggiungono al capitale e producono a loro volta interessi: $C_n = C_0\,(1 + i)^n$.

Numero algebrico
Numero reale che è soluzione di un'equazione polinomiale a coefficienti interi non tutti nulli, come $\sqrt{2}$, soluzione di $x^2 - 2 = 0$.

Numero e
Il numero $e \approx 2{,}718281828$, a cui si avvicina $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ al crescere di n; è irrazionale e trascendente.

Numero trascendente
Numero reale che non è algebrico, come π ed e.

Potenza con esponente reale
Per $a > 0$ e x irrazionale, l'elemento separatore delle classi contigue formate dalle potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto e per eccesso.

Ragione
In una successione geometrica, il fattore costante q per cui si moltiplica ogni termine per ottenere il successivo.

Successione geometrica
Sequenza di numeri in cui ogni termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per lo stesso numero q: $a_{n+1} = q\, a_n$, quindi $a_n = a_0\, q^n$.

Tempo di dimezzamento
In un decadimento esponenziale, il tempo, sempre uguale, in cui la grandezza si riduce alla metà; per il carbonio-14 circa 5730 anni.

Tempo di raddoppio
In una crescita esponenziale, il tempo, sempre uguale, in cui la grandezza raddoppia.

Soluzioni

1. A. La base deve essere positiva e diversa da 1: $y = 0{,}4^x$.

2. C. $5^0 = 1$.

3. B. $a_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

4. D. La base 0,3 è minore di 1: il verso si inverte, $x < 2$.

5. C. $e \approx 2{,}718281828$.

6. a) Falso: $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$. b) Vero. c) Vero: il fattore $1{,}05 = 1 + \frac{5}{100}$. d) Falso: $(1 + \frac{1}{n})^n < e < 3$ per ogni n. e) Falso: e è irrazionale, anzi trascendente.

7. $a > 0$ e $a \neq 1$; dominio $\mathbb{R}$, immagine $]0; +\infty[$; crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$; il punto $(0; 1)$; trascendente.

8. a) $5^2 = 25$. b) $2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = 2^4 = 16$. c) $7^1 = 7$. d) $(9^{\sqrt{2}})^{1/2} = 9^{\sqrt{2}/2} = 3^{\sqrt{2}}$, quindi il quoziente è 1.

9. a) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ e base $3 > 1$: $3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$. b) $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ e base minore di 1: $(\frac{1}{2})^{1,8} < (\frac{1}{2})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{2})^{1,7}$.

10. $3^{1,41} \approx 4{,}7070$ e $3^{1,42} \approx 4{,}7590$: $4{,}7070 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7590$. $3^{1,414} \approx 4{,}7277$ e $3^{1,415} \approx 4{,}7329$: $4{,}7277 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7329$. Sono certe le cifre 4,7 (la seconda cifra decimale può essere 2 o 3); il valore è $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288$.

11. a) $a_1 = 120$, $a_2 = 180$, $a_3 = 270$, $a_4 = 405$; $a_n = 80 \cdot 1{,}5^n$. b) 40, 20, 10, 5; $a_n = 80 \cdot 0{,}5^n$.

12. a) $2500 \cdot 1{,}02^5 \approx 2760{,}20$ €; $2500 \cdot 1{,}02^{10} \approx 3047{,}49$ €. b) Ogni anno +50 €: 2750 € e 3000 €. L'interesse semplice è una crescita lineare.

13. a) D = $\mathbb{R}$, Im $]-3; +\infty[$, asintoto $y = -3$, intersezioni $(0; -2)$ e $(1; 0)$, crescente; $y = 3^x$ traslata di 3 verso il basso. b) D = $\mathbb{R}$, Im $]0; +\infty[$, asintoto $y = 0$, interseca l'asse y in $(0; \frac{1}{2})$, nessuna intersezione con l'asse x, decrescente; $y = (\frac{1}{2})^x$ traslata di 1 verso sinistra. c) D = $\mathbb{R}$, Im $]1; +\infty[$, asintoto $y = 1$, interseca l'asse y in $(0; 2)$, nessuna intersezione con l'asse x, crescente; $y = 2^x$ traslata di 1 verso l'alto.

14. a) $x = 6$. b) $x - 1 = 4$, $x = 5$. c) $5^x = 5^{-2}$, $x = -2$. d) $2^{3x} = 2^2$, $x = \frac{2}{3}$. e) $3^{2x+2} = 3^3$, $x = \frac{1}{2}$. f) Impossibile: $2^x > 0$.

15. a) $2^{2x} = 2^{x+3}$, $x = 3$. b) $3^{-x} = 3^{2x-6}$, $-x = 2x - 6$, $x = 2$. c) $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. d) $3^x(3 + 1) = 36$, $3^x = 9$, $x = 2$.

16. a) $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t = 1 \vee t = 3$: $3^x = 1$ dà $x = 0$, $3^x = 3$ dà $x = 1$. b) $t^2 - t - 2 = 0$, $t = 2 \vee t = -1$ (scartata): $2^x = 2$, $x = 1$.

17. a) $2^{x+1} > 2^3$, $x > 2$: $]2; +\infty[$. b) $27 = (\frac{1}{3})^{-3}$, base minore di 1: $x \geq -3$, $[-3; +\infty[$. c) $x^2 - 1 < 3$, $-2 < x < 2$: $]-2; 2[$. d) $0{,}25 = 0{,}5^2$, base minore di 1: $2x < 2$, $x < 1$: $]-\infty; 1[$.

18. $3^2 = 9 < 20 < 27 = 3^3$: tra 2 e 3. $3^{2,5} \approx 15{,}59 < 20$: tra 2,5 e 3. $3^{2,75} \approx 20{,}52 > 20$: tra 2,5 e 2,75. $3^{2,625} \approx 17{,}88 < 20$: tra 2,625 e 2,75. (Il valore è $x \approx 2{,}727$.)

19. *Traccia.* Con $a < 0$ la potenza non è definita per molti esponenti: $(-4)^{1/2}$ non è un numero reale. Con $a = 0$: 0^{-1} non ha senso, e 0^x vale 0 per ogni $x > 0$. Con $a = 1$: $1^x = 1$ per ogni x, la funzione è costante e non è invertibile.

20. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_0\, q^{n+1}}{a_0\, q^n} = q$; $a_{n+1} - a_n = a_0 + (n + 1)d - a_0 - nd = d$. b) Con $r = \frac{p}{100} > 0$ il fattore complessivo è $(1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2 > 1 + 2r$: l'aumento è del $2p$ % più $r^2 \cdot 100$ %. Per esempio, due aumenti del 10 % danno il 21 %.

21. L'errore: $2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$, non 2^{2x}. Corretto: $2^{x+1} = 2^4$, $x = 3$. Verifica: $8 + 8 = 16$ ✓.

22. *Traccia.* Se $x_1 \neq x_2$, per esempio $x_1 < x_2$, con $a > 1$ si ha $a^{x_1} < a^{x_2}$: le due potenze sono diverse, quindi la funzione è iniettiva. Dunque $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ può accade-

re solo se gli esponenti sono uguali, e viceversa esponenti uguali danno potenze uguali. Per $0 < a < 1$ la funzione è decrescente: $x_1 < x_2$ implica $a^{x_1} > a^{x_2}$, e le potenze sono ancora diverse.

23. a) Un giorno = 4 divisioni: $200 \cdot 2^4 = 3200$; 3 giorni = 12 divisioni: $200 \cdot 2^{12} = 819200$. b) $200 \cdot 2^n > 100000 \Leftrightarrow 2^n > 500$: $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, quindi $n = 9$ divisioni, cioè dopo 54 ore (102 400 cellule).

24. a) $N(n) = 12000 \cdot 0{,}98^n$, n in anni. b) $N(5) \approx 10847$; $N(10) \approx 9805$. c) $N(9) \approx 10005$, ancora sopra 10 000; $N(10) \approx 9805$: dopo 10 anni.

25. a) 12,5 % = $(\frac{1}{2})^3$: tre tempi di dimezzamento, $3 \cdot 5730 = 17190$ anni (circa 17 000). b) $(\frac{1}{2})^{2000/5730} \approx 0{,}785$: circa il 78,5 %.

26. a) $5000 \cdot 1{,}04^{10} \approx 7401{,}22$ €. b) $5000 \cdot (1 + \frac{0{,}04}{12})^{120} \approx 7454{,}16$ €. c) $5000 \cdot e^{0{,}4} \approx 7459{,}12$ €. Più gli accrediti sono frequenti, più il capitale cresce, ma la crescita rallenta: il capitale resta sotto il valore della capitalizzazione continua, a cui il caso mensile è già molto vicino.

27. a) I valori crescono: 2; 2,25; 2,370...; per $n = 50$ si ha 2,691588; per $n = 10^6$ si ha 2,718280, sempre meno di 2,7183. b) $(1 - \frac{1}{n})^n$: 0,25 per $n = 2$; 0,348678 per $n = 10$; 0,366032 per $n = 100$; 0,367879 per $n = 10^6$. I valori si avvicinano a $\frac{1}{e} \approx 0{,}367879$.

28. a) $t = 5^x$: $t^2 - 6t + 5 = 0$, $t = 1 \vee t = 5$: $x = 0 \vee x = 1$. b) $(\frac{1}{4})^x = 2^{-2x}$ e $8 = 2^3$: $-2x > 3$, $x < -\frac{3}{2}$, cioè $]-\infty; -\frac{3}{2}[$.

29. D = $\mathbb{R}$; poiché $2^{x-1} > 0$, Im $]-4; +\infty[$ e l'asintoto è $y = -4$. Asse y: $f(0) = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$, il punto $(0; -\frac{7}{2})$. Asse x: $2^{x-1} = 4 = 2^2$, $x = 3$, il punto (3; 0). Segno: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 2 \Leftrightarrow x > 3$; negativa per $x < 3$. Il grafico è quello di $y = 2^x$ traslato di 1 verso destra e di 4 verso il basso; è crescente.

30. a) $q^{12} = 2$, quindi $q = 2^{1/12} \approx 1{,}0595$: tasso di circa il 5,95 %. b) 30 anni sono 2,5 tempi di raddoppio: $1000 \cdot 2^{30/12} = 1000 \cdot 2^{2,5} \approx 5656{,}85$ €. c) Dopo 12 anni il capitale è $C_0\, q^{12} = 2C_0$ qualunque sia C_0; più in generale, in ogni intervallo di 12 anni il capitale viene moltiplicato per $q^{12} = 2$, da qualunque valore parta.