CAPITOLO

6

Rette e piani nello spazio

Nel piano due rette che non si incontrano sono parallele; nello spazio possono anche ignorarsi. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Conoscere i postulati dello spazio e i modi di determinare un piano.
2. Riconoscere le posizioni reciproche di due rette, di una retta e un piano, di due piani, e in particolare le rette sghembe.
3. Dimostrare i principali teoremi sul parallelismo e sulla perpendicolarità, fino al teorema delle tre perpendicolari.
4. Definire distanze, proiezioni, angoli tra retta e piano e diedri, e misurarli con la trigonometria.
5. Risolvere problemi su cubo, parallelepipedo, piramide e cono individuando triangoli rettangoli nello spazio.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Dal piano allo spazio 2
6.2 Posizioni reciproche di rette e piani 5
6.3 Il parallelismo 7
6.4 La perpendicolarità 10
6.5 Diedri e piani perpendicolari 14
6.6 Tecniche piane nello spazio 17

Matematica 4 · Parte II · Funzioni circolari, vettori e spazio · versione 1.0
Capitolo 6: Rette e piani nello spazio · pagine 157–182 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda l'aula in cui ti trovi. Il pavimento e il soffitto non si incontrano mai; due pareti vicine si toccano lungo uno spigolo verticale; il filo di una lampada scende dritto verso il pavimento. Ora considera la riga in cui il soffitto incontra la parete della lavagna e uno degli spigoli verticali della parete di fondo: non si incontrano, per quanto le prolunghi, eppure non sono parallele. Nel piano questo non può succedere: due rette o si incontrano o sono parallele. Nello spazio c'è una terza possibilità, e da questa piccola differenza nasce una geometria nuova.

Finora (*Matematica 1–3*) la geometria è stata quasi tutta geometria del piano: triangoli, poligoni, circonferenze, rette nel piano cartesiano. In questo capitolo portiamo le stesse idee — postulati, dimostrazioni, parallelismo, perpendicolarità, il teorema di Pitagora — nello spazio a tre dimensioni. Lavoriamo senza coordinate, con il metodo sintetico di Euclide, che nel libro XI degli *Elementi* ha fatto proprio questo passo. Alla fine useremo la trigonometria del capitolo 5 per misurare angoli tra rette e piani: l'inclinazione di un tetto, di una faccia di una piramide, della generatrice di un cono.

6.1 Dal piano allo spazio

6.1.1 Enti primitivi e postulati

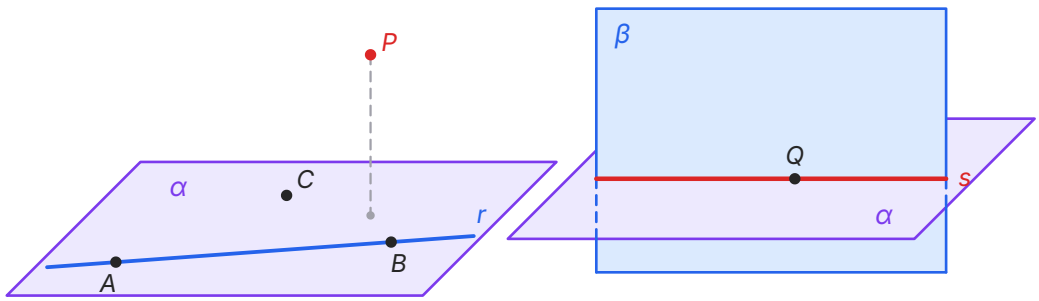
Come nel piano, **punto**, **retta** e **piano** sono enti primitivi: non li definiamo, ne fissiamo le proprietà con alcuni **postulati**, cioè affermazioni che accettiamo senza dimostrazione e da cui ricaviamo tutto il resto. Lo **spazio** è l'insieme di tutti i punti. Indichiamo i punti con lettere maiuscole (A, B, P), le rette con lettere minuscole (r, s) e i piani con lettere greche (α, β, γ). Ai postulati della geometria piana (*Matematica 1*), che continuano a valere in ogni piano, aggiungiamo questi.

IN SINTESI

Postulati dello spazio.

- **P1.** Ogni piano contiene almeno tre punti non allineati, ed esistono quattro punti che non appartengono a uno stesso piano.
- **P2.** Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
- **P3.** Se una retta ha due punti distinti in un piano, giace tutta nel piano.
- **P4.** Se due piani distinti hanno un punto in comune, hanno in comune una retta che passa per quel punto.
- **P5.** Ogni piano divide lo spazio in due parti, i semispazi (vedi più avanti).

Il postulato P1 dice che lo spazio non è un piano: c'è sempre un punto «fuori». P2 e P3 dicono come un piano è legato ai suoi punti e alle sue rette. P4 descrive l'incontro di due piani: due piani distinti con un punto comune non si toccano in quel punto soltanto, ma lungo un'intera retta. E non possono avere in comune altro: se avessero anche un punto fuori da quella retta, avrebbero in comune tre punti non allineati e per P2 coinciderebbero. Due piani distinti che si incontrano hanno dunque in comune **esattamente una retta**, la loro **retta intersezione** (Figura 6.1, b).



a) Il piano α per A, B, C b) Due piani incidenti nella retta s

Figura 6.1 A sinistra, i tre punti non allineati *A*, *B*, *C* determinano il piano α (postulato P2); la retta *r* = *AB* ha due punti in α e quindi giace in α (P3); il punto *P* è esterno al piano. A destra, i piani α e β hanno in comune il punto *Q* e quindi l'intera retta *s* (P4); la parte di β sotto α è nascosta e i suoi contorni sono tratteggiati.

6.1.2 Come si determina un piano

Prima di enunciare il primo teorema ci serve una definizione. Nello spazio due rette si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene entrambe. Due rette sono **parallele** se sono complanari e non hanno punti in comune, oppure se coincidono. Attenzione: rispetto al piano si aggiunge la condizione «complanari», e tra poco vedremo che non è un dettaglio.

IN SINTESI

Teorema 1 (determinazione del piano). Esiste uno e un solo piano che contiene: a) una retta e un punto che non le appartiene; b) due rette incidenti; c) due rette parallele distinte.

Dimostrazione. a) Siano *r* la retta e *P* il punto esterno. Scegliamo su *r* due punti distinti *A* e *B*: i punti *A*, *B*, *P* non sono allineati (altrimenti *P* starebbe sulla retta *AB*, cioè su *r*), dunque per P2 c'è uno e un solo piano α che li contiene. La retta *r* ha due punti, *A* e *B*, in α, quindi per P3 giace in α. Ogni altro piano che contenesse *r* e *P* conterrebbe *A*, *B*, *P* e per P2 coinciderebbe con α. b)

Se r e s si incontrano in O, scegliamo su s un punto P diverso da O: P non sta su r, e il piano di r e P (caso a) contiene s per P3, perché contiene O e P. c) Due rette parallele distinte stanno per definizione in un piano; il piano è unico perché è il piano di una delle due rette e di un punto dell'altra (caso a). c.v.d.

COLLEGAMENTI

Il treppiede. Le tre punte di un cavalletto fotografico, poggiate su un pavimento anche irregolare, stanno sempre in un piano (P2): per questo il cavalletto non traballa mai. Una sedia a quattro gambe, invece, traballa quando la quarta punta non sta nel piano delle altre tre. Per lo stesso motivo gli strumenti dei topografi poggiano su tre piedi.

6.1.3 Semispazi

Una retta divide il piano in due semipiani; analogamente un piano α divide lo spazio in due **semispazi**, che hanno α come origine (postulato P5). Due punti A e B fuori da α stanno nello stesso semispazio se il segmento AB non incontra α, in semispazi opposti se il segmento AB lo attraversa. Ogni semispazio è una figura convessa: il segmento che unisce due suoi punti vi è tutto contenuto.

Disegnare lo spazio

Un foglio ha due dimensioni, lo spazio tre: per disegnare le figure solide dobbiamo rinunciare a qualcosa. In questo capitolo usiamo l'**assonometria cavaliera**: le figure parallele al foglio sono disegnate in vera forma, le rette che vanno «in profondità» sono tracciate inclinate di 45° e con le lunghezze dimezzate. Rette parallele restano parallele nel disegno e i punti medi restano punti medi, ma gli angoli in profondità sono deformati: un angolo retto può sembrare acuto o ottuso, e lo segnamo con il quadratino. Le linee nascoste dietro una faccia o sotto un piano sono **tratteggiate**. Un piano, che è illimitato, si rappresenta con un parallelogramma, come in Figura 6.1: è solo la porzione che ci interessa.

APPROFONDIMENTO · IL LIBRO XI DEGLI ELEMENTI

Il libro XI degli *Elementi* apre la geometria solida con una serie di definizioni: il solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità; una retta è perpendicolare a un piano quando forma angoli retti con tutte le rette del piano che la incontrano; piani paralleli sono quelli che non si incontrano. Sono, quasi parola per parola, le definizioni di questo capitolo.

Le prime proposizioni del libro XI, però, cercano di *dimostrare* fatti che oggi prendiamo come postulati: che una retta non può stare in parte in un piano e in parte fuori (proposizione 1), che due rette che si tagliano stanno in un piano (2), che due piani che si tagliano hanno in comune una retta (3). Queste dimostrazioni usano in modo nascosto proprio ciò che vogliono provare. Alla fine dell'Ottocento David Hilbert, nei *Fondamenti della geometria* (1899), diede un sistema completo di assiomi per il piano e per lo spazio, in cui queste proprietà sono postulati dichiarati.

COLLEGAMENTI

Filosofia: che cosa sono i postulati? Per Euclide i postulati erano verità evidenti sullo spazio in cui viviamo. Kant, nella *Critica della ragion pura*, spiegò questa evidenza sostenendo che lo spazio non è ricavato dall'esperienza ma è una forma a priori della nostra sensibilità: per questo, secondo lui, la geometria è universale e necessaria pur dicendo qualcosa di nuovo (giudizi sintetici a priori). Nell'Ottocento le discussioni sul quinto postulato, quello delle parallele, portarono alle geometrie non euclidee: oggi gli assiomi sono punti di partenza scelti, ed è la fisica a stabilire quale geometria descrive meglio il mondo. È la differenza, che le *Indicazioni* ti chiedono di cogliere, tra la matematica come specchio della natura e la matematica come costruzione di modelli.

6.2 Posizioni reciproche di rette e piani

6.2.1 Due rette

Due rette distinte r e s dello spazio possono essere complanari o no. Se sono complanari, nel loro piano vale tutto ciò che sai dalla geometria piana: o si incontrano in un punto, e sono **incidenti**, o non si incontrano, e sono parallele. Se invece non esiste alcun piano che le contenga entrambe, le rette si dicono **sghembe**. Due rette sghembe non hanno punti in comune: se ne avessero uno, sarebbero incidenti e quindi complanari per il teorema 1, b.

Il cubo è il laboratorio più comodo per vedere i tre casi. Chiamiamo $ABCD$ la base inferiore e $EFGH$ quella superiore, con E sopra A, F sopra B, G sopra C e H sopra D (Figura 6.2). Le rette AB e AE sono incidenti in A. Le rette AB e HG sono parallele: non stanno su una stessa faccia, ma stanno nel piano $ABGH$, che taglia il cubo in diagonale. Le rette AB e CG non hanno punti in co-

mune e non sono parallele (le loro direzioni sono una orizzontale e una verticale): sono sghembe.

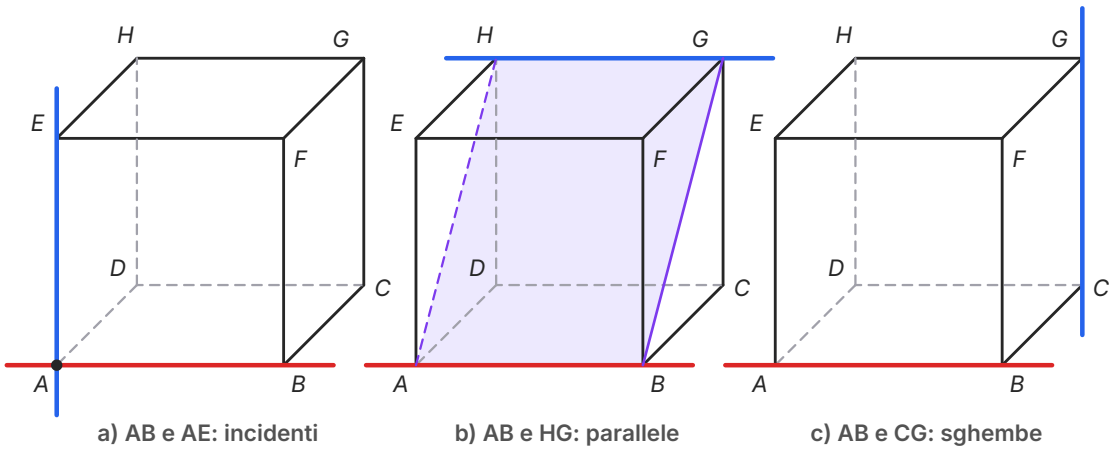


Figura 6.2 Le posizioni di due rette sugli spigoli del cubo *ABCDEFGH*: a) *AB* e *AE* si incontrano in *A*; b) *AB* e *HG* sono parallele, perché stanno nel piano *ABGH* (colorato) e non si incontrano; c) *AB* e *CG* non si incontrano e non stanno in uno stesso piano: sono sghembe. Gli spigoli nascosti sono tratteggiati.

ERRORE FREQUENTE

«Le rette r e s non si incontrano, quindi sono parallele.» Nello spazio è falso: due rette senza punti comuni possono essere **sghembe**. Per concludere che sono parallele bisogna sapere anche che sono complanari. Attenzione anche ai disegni: in assonometria due rette sghembe possono sembrare incidenti, perché i loro disegni si incrociano sul foglio. Il disegno da solo non decide: bisogna ragionare sulla figura nello spazio.

Anche a due rette sghembe si può attribuire un angolo: è l'angolo formato da due rette incidenti parallele a esse, condotte da un punto qualsiasi. Se questo angolo è retto, le rette sghembe si dicono **ortogonali**. Nel cubo *AB* e *CG* sono ortogonali, perché *CG* è parallela a *BF* e l'angolo $\angle ABF$ è retto.

6.2.2 Retta e piano

Per il postulato P3, se una retta r e un piano α hanno due punti in comune, r giace in α. Restano quindi tre possibilità: r è **contenuta** in α (infiniti punti comuni); r è **incidente** ad α, cioè lo incontra in un solo punto; r è **parallela al piano**, cioè non ha punti in comune con α (diremo parallela anche una retta contenuta nel piano, come per due rette coincidenti). Nel cubo lo spigolo *EF* è parallelo al piano della base *ABCD*, lo spigolo *AE* incide la base in *A*, la diagonale *AC* vi è contenuta.

6.2.3 Due piani

Due piani distinti α e β possono avere in comune una retta, e si dicono **incidenti** (per P4 non c'è altra possibilità se hanno un punto comune), oppure non avere alcun punto in comune: sono allora **piani paralleli**, come il pavimento e il soffitto di una stanza. Due piani coincidenti si considerano anch'essi paralleli. La Tabella 6.1 riassume tutti i casi.

Tabella 6.1 Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, con il numero di punti in comune.

Oggetti	Posizione	Punti comuni	Esempio nel cubo
due rette	incidenti	1	*AB* e *AE*
due rette	parallele (complanari)	0	*AB* e *HG*
due rette	sghembe (non complanari)	0	*AB* e *CG*
retta e piano	retta contenuta	infiniti	*AC* e il piano *ABCD*
retta e piano	retta incidente	1	*AE* e il piano *ABCD*
retta e piano	retta parallela	0	*EF* e il piano *ABCD*
due piani	incidenti	una retta	*ABCD* e *BCGF* (retta *BC*)
due piani	paralleli	0	*ABCD* e *EFGH*

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel cubo *ABCDEFGH* stabilisci la posizione reciproca di: a) le rette *AC* e *BD*; b) le rette *EG* e *BF*; c) la retta *EG* e il piano *ABCD*; d) i piani *ABFE* e *DCGH*.

Soluzione. a) *AC* e *BD* sono le diagonali della base: stanno nello stesso piano e si tagliano nel centro *O* della base. Sono incidenti.

b) *EG* è orizzontale (sta nella faccia superiore), *BF* è verticale: non sono parallele. Non si incontrano nemmeno, perché la retta *BF* incontra il piano della faccia superiore soltanto in *F*, che non sta su *EG*. Dunque *EG* e *BF* sono sghembe.

c) *EG* sta nella faccia superiore, che non ha punti comuni con la base: *EG* è parallela al piano *ABCD*.

d) Le facce *ABFE* (davanti) e *DCGH* (dietro) sono opposte: non si incontrano, sono piani paralleli.

6.3 Il parallelismo

Per stabilire se una retta è parallela a un piano non possiamo controllare uno per uno gli infiniti punti della retta. Il primo teorema riduce il problema a una sola retta del piano.

IN SINTESI

Teorema 2 (criterio di parallelismo tra retta e piano). Se una retta r non contenuta in un piano α è parallela a una retta s di α, allora r è parallela ad α.

Ipotesi: $s \subset \alpha$, $r \not\subset \alpha$, $r \parallel s$. **Tesi:** $r \parallel \alpha$.

Dimostrazione. Le rette parallele distinte r e s determinano un piano β (teorema 1, c), diverso da α perché contiene r. I piani α e β hanno in comune la retta s e, per quanto visto dopo P4, nient'altro. Supponiamo per assurdo che r incontri α in un punto P. Allora P sta in α e in β (perché sta su r, che giace in β), cioè sta sulla retta comune s: le rette r e s avrebbero il punto P in comune, contro l'ipotesi che siano parallele. Dunque r non incontra α. c.v.d.

Il secondo teorema riguarda due piani paralleli tagliati da un terzo piano, come due ripiani di una libreria tagliati dal piano di un fianco.

IN SINTESI

Teorema 3 (piani paralleli tagliati da un piano). Se due piani paralleli α e β sono tagliati da un piano γ, le rette intersezione $a = \alpha \cap \gamma$ e $b = \beta \cap \gamma$ sono parallele.

Dimostrazione. Le rette a e b stanno entrambe nel piano γ, quindi sono complanari. Un loro punto comune starebbe sia in α (perché sta su a) sia in β (perché sta su b), ma α e β non hanno punti comuni. Dunque a e b sono complanari e senza punti comuni: sono parallele. c.v.d.

Nel piano due rette parallele a una terza sono parallele tra loro. Nello spazio la stessa proprietà è vera, ma va dimostrata, perché le tre rette possono non stare in un piano (pensa a tre spigoli verticali del cubo, AE, BF, CG).

IN SINTESI

Teorema 4 (transitività del parallelismo). Due rette a e b dello spazio parallele a una stessa retta c sono parallele tra loro.

Traccia della dimostrazione (nel caso in cui le tre rette non sono complanari). Prendiamo un punto P su b che non stia su a e consideriamo il piano γ di a e P. Poiché $a \parallel c$ e c non sta in γ, per il teorema 2 la retta c è parallela a γ. Il piano di b e c incontra γ in una retta b' per P, e b' non può incontrare c (un punto comune starebbe in γ, che c non incontra): quindi b' è la parallela a c per P nel piano di b e c. Per il postulato delle parallele di Euclide, in quel piano la parallela per P è unica: $b' = b$. Così b sta in γ insieme ad a; e a, b non possono incontrarsi, perché da un loro punto comune uscirebbero due parallele distinte a c, contro lo stesso postulato. Dunque $a \parallel b$. c.v.d.

IN SINTESI

Teorema 5 (segmenti paralleli tra piani paralleli). I segmenti di rette parallele compresi tra due piani paralleli sono congruenti.

Ipotesi: $\alpha \parallel \beta$; $A, B \in \alpha$; $A', B' \in \beta$; $AA' \parallel BB'$. **Tesi:** $AA' \cong BB'$.

Dimostrazione. Le rette parallele AA' e BB' determinano un piano γ, che taglia α nella retta AB e β nella retta $A'B'$. Per il teorema 3, $AB \parallel A'B'$. Il quadrilatero $ABB'A'$ ha dunque i lati opposti paralleli: è un parallelogramma, e i lati opposti AA' e BB' sono congruenti (Figura 6.3). c.v.d.

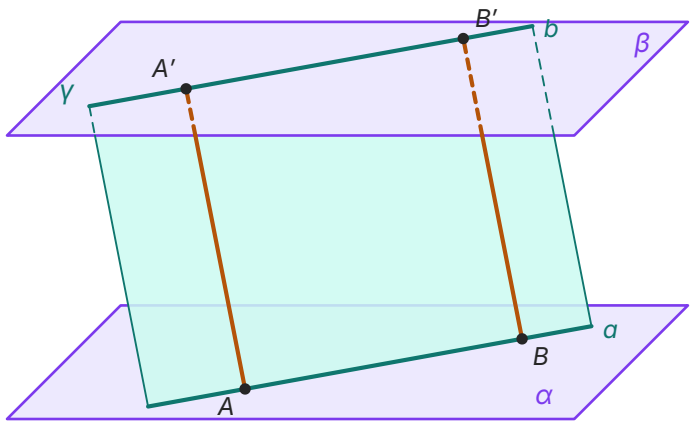


Figura 6.3 Il teorema 3 e il teorema 5. Il piano γ taglia i piani paralleli α e β nelle rette parallele a e b; i segmenti paralleli AA' e BB' compresi tra i due piani sono i lati opposti del parallelogramma $ABB'A'$ e quindi sono congruenti. Le parti dei segmenti nascoste dal piano β sono tratteggiate.

DA RICORDARE

Valgono anche questi fatti, che usiamo senza dimostrarli:

- per un punto esterno a un piano passa **uno e un solo piano** parallelo a esso;
- se un piano contiene **due rette incidenti** parallele a un altro piano, i due piani sono paralleli (criterio di parallelismo tra piani);
- due piani paralleli a un terzo sono paralleli tra loro.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel cubo $ABCDEFGH$ dimostra che la diagonale EG della faccia superiore è parallela al piano della base e che $ACGE$ è un parallelogramma.

Soluzione. I piani delle due basi sono paralleli (sono facce opposte). Il piano che contiene gli spigoli paralleli AE e CG (teorema 1, c) taglia la base inferiore nella retta AC e quella superiore nella retta EG: per il teorema 3, $AC \parallel EG$. Poiché EG non sta nel piano $ABCD$ ed è parallela alla retta AC di quel piano, per il teorema 2 è parallela al piano della base. Il quadrilatero $ACGE$ ha $AE \parallel CG$ e $AC \parallel EG$: è un parallelogramma (anzi un rettangolo, perché, come vedremo, AE è perpendicolare alla base e quindi ad AC). I segmenti AE e CG, paralleli e compresi tra i piani paralleli delle basi, sono congruenti, come vuole il teorema 5.

6.4 La perpendicolarità

6.4.1 Retta perpendicolare a un piano

Una retta r che incontra un piano α nel punto H si dice **perpendicolare al piano** se è perpendicolare a **tutte** le rette di α che passano per H; il punto H si chiama **piede** della perpendicolare. È la definizione di Euclide. Il filo a piombo che pende fermo è perpendicolare al pavimento: forma un angolo retto con ogni riga tracciata sul pavimento a partire dal punto in cui lo tocca. Controllare infinite rette è impossibile; per fortuna ne bastano due.

IN SINTESI

Teorema 6 (criterio di perpendicolarità). Se una retta r è perpendicolare a due rette incidenti a e b di un piano α nel loro punto comune H, allora r è perpendicolare ad α.

Ipotesi: $a, b \subset \alpha$; $a \cap b = \{H\}$; $r \perp a$ e $r \perp b$ in H. **Tesi:** $r \perp \alpha$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che r è perpendicolare a una qualsiasi altra retta c di α per H (Figura 6.4). Prendiamo su r, da parti opposte rispetto ad α, due punti A e A' con $HA \cong HA'$. Tracciamo in α una retta che incontri a in B, b in C e c in D, scelta in modo che D cada tra B e C. Nel piano di r e a la retta a è l'asse del segmento AA' (è perpendicolare ad AA' nel punto medio H), quindi $AB \cong A'B$; allo stesso modo $AC \cong A'C$. I triangoli ABC e $A'BC$ hanno i tre lati congruenti (BC in comune), dunque sono congruenti e in particolare $\angle ABC \cong \angle A'BC$. Allora anche i triangoli ABD e $A'BD$ sono congruenti (primo criterio: $AB \cong A'B$, BD in comune, angoli compresi congruenti), e quindi $AD \cong A'D$. Il triangolo ADA' è isoscele sulla base AA' e DH è la sua mediana: in un triangolo isoscele la mediana relativa alla base è anche altezza, quindi $DH \perp AA'$, cioè $c \perp r$. c.v.d.

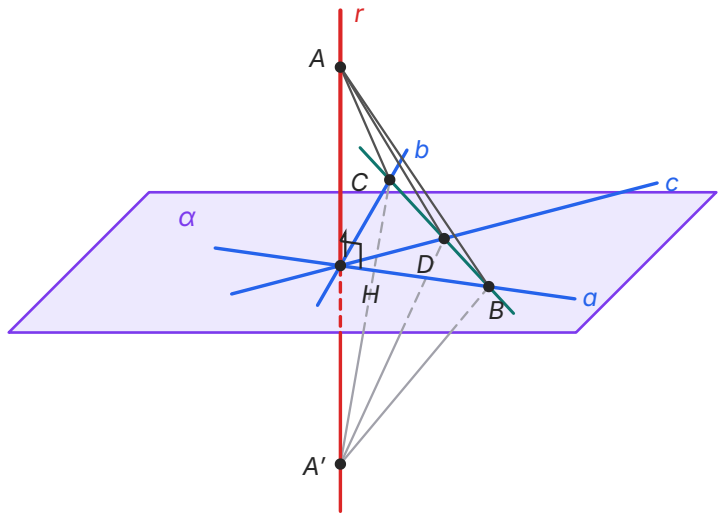


Figura 6.4 La dimostrazione del teorema 6. La retta r è perpendicolare alle rette a e b di α nel punto H, e $HA \cong HA'$. Una retta di α taglia a, b e una terza retta c in B, C, D: dalle congruenze dei triangoli segue $AD \cong A'D$, quindi anche c è perpendicolare a r. Le parti sotto il piano sono tratteggiate.

ERRORE FREQUENTE

Una retta perpendicolare a **una sola** retta di un piano non è, in generale, perpendicolare al piano. Una scala appoggiata a una parete, di fronte a essa, forma un angolo retto con la riga del pavimento che passa per il suo piede ed è parallela alla parete; ma la scala è inclinata, non perpendicolare al pavimento. Le due rette del criterio devono essere **incidenti**: due rette parallele del piano non bastano.

COLLEGAMENTI

Il muratore e il criterio. Per controllare che uno spigolo sia verticale, il muratore accosta il filo a piombo da due lati diversi: se lo spigolo segue il filo in due piani verticali distinti, è perpendicolare al pavimento. Per controllare che un ripiano sia orizzontale, appoggia la livella in due direzioni che si incrociano: il ripiano contiene allora due rette incidenti perpendicolari al filo a piombo, e per il teorema 6 è perpendicolare alla verticale.

Dal criterio discendono altri fatti, che enunciamo senza dimostrazione.

DA RICORDARE

- Per un punto dello spazio passa **una e una sola retta** perpendicolare a un piano dato, e **uno e un solo piano** perpendicolare a una retta data.
- Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele; due piani perpendicolari a una stessa retta sono paralleli.
- Se una retta è perpendicolare a un piano, è ortogonale (o perpendicolare) a ogni retta del piano, anche a quelle che non passano per il suo piede.

6.4.2 Distanze, proiezioni e angolo tra retta e piano

Sia P un punto esterno al piano α e H il piede della perpendicolare da P ad α. Se Q è un altro punto di α, il triangolo PHQ è rettangolo in H e per il teorema di Pitagora

$$PQ^2 = PH^2 + HQ^2 > PH^2.$$

Il segmento perpendicolare PH è dunque più corto di ogni segmento obliquo PQ: la sua lunghezza è la **distanza del punto dal piano**. Se due piani sono paralleli, i segmenti perpendicolari compresi tra loro sono paralleli (sono perpendicolari allo stesso piano) e quindi congruenti per il teorema 5: la loro lunghezza comune è la **distanza tra i due piani**. È l'altezza di una stanza, la stessa in ogni punto se pavimento e soffitto sono paralleli.

Il piede H si chiama anche **proiezione ortogonale** del punto P sul piano. La proiezione di un segmento AB è il segmento $A'B'$ che unisce le proiezioni degli estremi; la proiezione di una retta non perpendicolare al piano è una retta. L'ombra di un bastone con il Sole allo zenit è la sua proiezione ortogonale sul terreno. Se AB è parallelo ad α la proiezione è congruente ad AB; altrimenti è più corta.

Se una retta r incontra il piano α in Q senza essere perpendicolare, l'**angolo tra la retta e il piano** è l'angolo acuto θ che r forma con la sua proiezione ortogonale r' su α (è la definizione di inclinazione di Euclide, e si dimostra che è il più piccolo degli angoli che r forma con le rette di α per Q). Se P è un punto di r e H la sua proiezione, nel triangolo rettangolo PHQ valgono le relazioni del capitolo 5:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PH}{PQ}, \qquad \cos\theta = \frac{HQ}{PQ}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{PH}{HQ}.$$

Per una retta perpendicolare al piano si pone $\theta = 90°$; per una retta parallela, $\theta = 0°$.

6.4.3 Il teorema delle tre perpendicolari

Il teorema seguente collega una perpendicolare a un piano con una perpendicolare a una retta del piano. È lo strumento più usato per calcolare la distanza di un punto da una retta nello spazio.

IN SINTESI

Teorema 7 (teorema delle tre perpendicolari). Sia PH perpendicolare al piano α nel punto H, e sia r una retta di α che non passa per H. Se K è il piede della perpendicolare condotta da H a r nel piano α, allora PK è perpendicolare a r.

Ipotesi: $PH \perp \alpha$; $r \subset \alpha$, $H \notin r$; $HK \perp r$, $K \in r$. **Tesi:** $PK \perp r$.

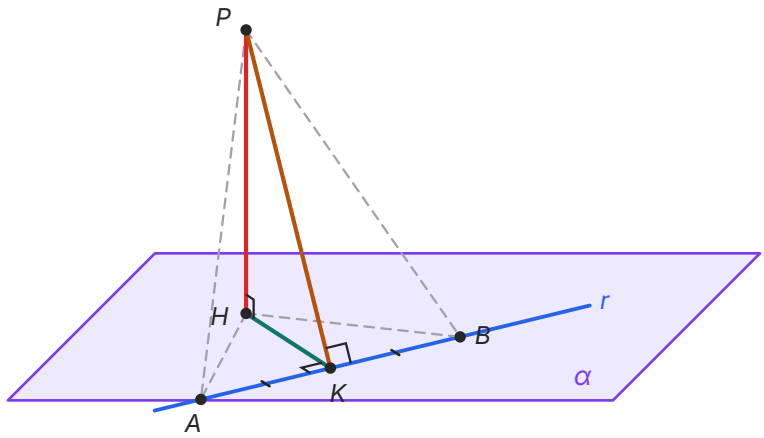


Figura 6.5 Il teorema delle tre perpendicolari. Le tre perpendicolari sono PH (al piano α), HK (alla retta r, nel piano) e PK (alla retta r). Nella dimostrazione i punti A e B sono scelti su r alla stessa distanza da K, e i segmenti ausiliari sono tratteggiati.

Dimostrazione. Prendiamo su r due punti A e B da parti opposte rispetto a K, con $KA \cong KB$ (Figura 6.5). Nel piano α i triangoli HKA e HKB sono rettangoli in K, hanno HK in comune e $KA \cong KB$: sono congruenti, quindi $HA \cong HB$. Ora consideriamo i triangoli PHA e PHB: sono rettangoli in H, perché PH è perpendicolare a ogni retta di α per H; hanno PH in comune e $HA \cong HB$; sono quindi congruenti e $PA \cong PB$. Il triangolo PAB è isoscele sulla base AB, e PK è la mediana relativa alla base, quindi anche l'altezza: $PK \perp r$. c.v.d.

Le tre perpendicolari del nome sono PH, HK e PK. Tutte le ipotesi servono: se HK non fosse perpendicolare a r, nemmeno PK lo sarebbe. Il teorema ha anche una conseguenza utile: la retta r è perpendicolare sia a HK sia a PK, che si incontrano in K, quindi per il criterio è **perpendicolare al piano** PHK. Infine, poiché $PK \perp r$, la lunghezza di PK è la distanza del punto P dalla retta r, e si calcola con Pitagora nel triangolo rettangolo PHK: $PK = \sqrt{PH^2 + HK^2}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Un punto P si trova a 12 cm dal piano α; la sua proiezione H dista 5 cm da una retta r di α. a) Calcola la distanza di P da r. b) Un segmento PQ, con $Q \in \alpha$, è lungo 20 cm: quale angolo forma con il piano?

Soluzione. a) Sia K il piede della perpendicolare da H a r, quindi $HK = 5$ cm. Per il teorema delle tre perpendicolari $PK \perp r$, e PK è la distanza cercata. Il triangolo PHK è rettangolo in H:

$$PK = \sqrt{12^2 + 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{169}\ \text{cm} = 13\ \text{cm}.$$

b) Nel triangolo PHQ, rettangolo in H, l'angolo θ in Q è l'angolo tra PQ e α: $\text{sen}\,\theta = PH/PQ = 12/20 = 0{,}6$, quindi $\theta = \text{arcsen}\,0{,}6 \approx 36{,}87°$. La proiezione di PQ sul piano è lunga $HQ = \sqrt{20^2 - 12^2}$ cm $= 16$ cm, e infatti $\cos\theta = 16/20 = 0{,}8$.

6.5 Diedri e piani perpendicolari

6.5.1 Il diedro e la sua sezione normale

Una retta di un piano lo divide in due **semipiani**, che hanno quella retta come origine. Due semipiani con la stessa origine dividono lo spazio in due parti; ciascuna, insieme ai due semipiani, si chiama **diedro** (dal greco: «due facce»). La retta comune è lo **spigolo** del diedro, i due semipiani sono le sue **facce**. Un libro aperto, una porta socchiusa rispetto al muro, le due falde di un tetto sono modelli di diedri.

Come si misura un diedro? Si taglia con un piano perpendicolare allo spigolo: la sezione è un angolo, la **sezione normale** del diedro, i cui lati OA e OB stanno uno per faccia e sono entrambi perpendicolari allo spigolo nel punto O (Figura 6.6, a). Le sezioni normali di uno stesso diedro sono tutte congruenti: due di esse stanno in piani paralleli (perpendicolari alla stessa retta), quindi, per il teorema 3, hanno i lati paralleli e orientati allo stesso modo. L'**ampiezza del diedro** è l'ampiezza della sua sezione normale. Un diedro è retto, acuto o ottuso secondo la sua sezione normale.

Due piani incidenti formano quattro diedri, a due a due congruenti; se uno di essi è retto lo sono tutti, e i piani si dicono **perpendicolari**. Una parete e il pavimento, due pareti vicine, le pagine di un libro aperto ad angolo retto sono piani (o semipiani) perpendicolari.

IN SINTESI

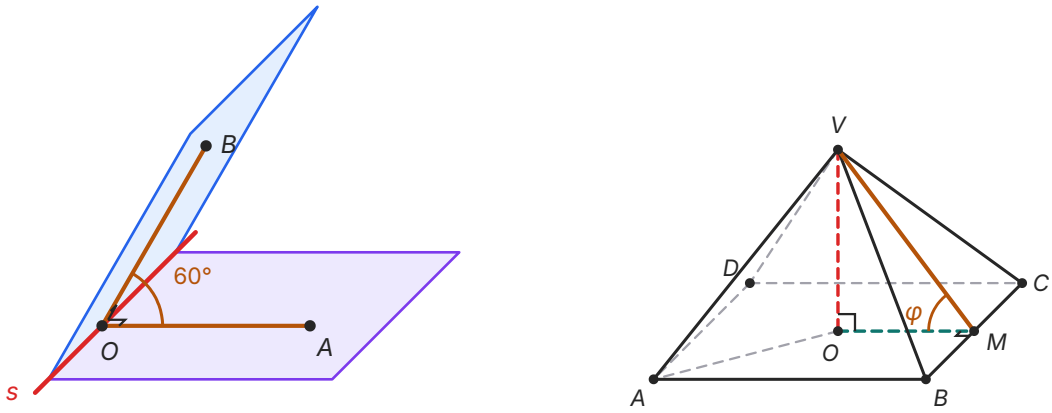
Teorema 8 (piani perpendicolari). Se un piano β contiene una retta r perpendicolare a un piano α, allora β è perpendicolare ad α.

Dimostrazione. Sia H il piede di r su α. Il punto H è comune ai due piani, che quindi si incontrano in una retta s passante per H (P4). Nel piano α tracciamo per H la retta t perpendicolare a s. La retta s è perpendicolare a t (per costruzione) e a r (perché r è perpendicolare a tutte le rette di α per H): per il criterio, s è perpendicolare al piano di r e t. Dunque l'angolo formato da r e t è una sezione normale del diedro formato da β e α; ed è retto, perché $r \perp t$. c.v.d.

> **ERRORE FREQUENTE**
> Due piani perpendicolari a uno stesso piano **non** sono necessariamente paralleli: due pareti vicine di una stanza sono entrambe perpendicolari al pavimento, ma si incontrano lungo lo spigolo. E se due piani sono perpendicolari, non tutte le rette di uno sono perpendicolari all'altro: lo sono soltanto quelle perpendicolari alla retta comune.

6.5.2 Misurare un diedro con la trigonometria

Per calcolare l'ampiezza di un diedro si cerca un triangolo rettangolo che stia nel piano di una sezione normale. Il caso tipico è l'angolo φ che una faccia laterale di una piramide forma con la base (Figura 6.6, b). In una piramide con la base quadrata e il vertice V sulla perpendicolare al centro O della base, il segmento OM che va dal centro al punto medio M di uno spigolo di base è perpendicolare a quello spigolo; per il teorema delle tre perpendicolari lo è anche VM. L'angolo $\angle VMO$ è dunque la sezione normale del diedro tra la faccia e la base, e nel triangolo VOM, rettangolo in O, si ha $\operatorname{tg} \varphi = VO/OM$.



a) Diedro e sezione normale

b) L'angolo φ tra una faccia e la base

Figura 6.6 a) Il diedro di spigolo *s* e la sua sezione normale $\angle AOB$: i lati *OA* e *OB* stanno nelle due facce e sono perpendicolari allo spigolo; qui il diedro misura 60°. b) In una piramide quadrangolare regolare l'angolo φ tra una faccia laterale e la base è l'angolo $\angle VMO$ del triangolo rettangolo *VOM*; *VO* è l'altezza e *VM* l'apotema (spigoli e segmenti nascosti tratteggiati).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una piramide ha per base un quadrato di lato 6 cm e il vertice *V* a 4 cm sulla perpendicolare al centro *O* della base. Calcola l'apotema *VM*, l'angolo φ tra una faccia laterale e la base, lo spigolo laterale *VA* e l'angolo che esso forma con la base.

Soluzione. *OM* è metà del lato: 3 cm. Nel triangolo *VOM*, rettangolo in *O*: $VM = \sqrt{4^2 + 3^2}$ cm = 5 cm e $\operatorname{tg}\varphi = 4/3$, quindi $\varphi = \operatorname{arctg}(4/3) \approx 53{,}13°$.

Lo spigolo *VA* si proietta sulla base nel segmento *OA*, metà della diagonale del quadrato: $OA = 3\sqrt{2}$ cm ≈ 4,24 cm. Nel triangolo *VOA*, rettangolo in *O*: $VA = \sqrt{16 + 18}$ cm = $\sqrt{34}$ cm ≈ 5,83 cm; l'angolo ψ tra lo spigolo e la base ha $\operatorname{tg}\psi = 4/(3\sqrt{2}) \approx 0{,}943$, quindi $\psi \approx 43{,}31°$.

Controllo. Anche nel triangolo *VMA*, rettangolo in *M*: $VM^2 + MA^2 = 25 + 9 = 34 = VA^2$.

ERRORE FREQUENTE

L'angolo tra una faccia della piramide e la base si misura sull'**apotema** *VM*, non sullo spigolo laterale *VA*. Lo spigolo forma con la base un angolo più piccolo (nell'esempio 43,31° contro 53,13°), perché la sua proiezione *OA* è più lunga di *OM* a parità di altezza. Solo la sezione normale misura il diedro.

COLLEGAMENTI

La pendenza di un tetto. Gli artigiani indicano l'inclinazione di una falda con la pendenza percentuale, come per le strade (capitolo 5): una falda al 35% sale di 35 cm ogni metro orizzontale, misurato perpendicolarmente alla linea di colmo. Il diedro tra la falda e il piano orizzontale ha quindi ampiezza α con $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}35$, cioè $\alpha \approx 19{,}29°$. In un tetto a capanna simmetrico il diedro tra le due falde, lungo il colmo, è $180° - 2\alpha \approx 141{,}42°$. Per una casa larga 10 m il colmo sta $5 \cdot 0{,}35$ m $= 1{,}75$ m sopra la linea di gronda, e ogni falda è larga $\sqrt{5^2 + 1{,}75^2}$ m $\approx 5{,}30$ m.

6.6 Tecniche piane nello spazio

Quasi tutti i calcoli della geometria dello spazio si riducono a un'idea: trovare un triangolo rettangolo nascosto nella figura, e lavorare in quel piano con Pitagora e con la trigonometria. Vediamolo su tre solidi.

6.6.1 La diagonale del parallelepipedo

Un **parallelepipedo rettangolo** è un solido con sei facce rettangolari, a due a due parallele e congruenti; i tre spigoli che escono da un vertice misurano a, b, c e sono a due a due perpendicolari. Una **diagonale** unisce due vertici che non stanno sulla stessa faccia, come A e G (Figura 6.7, a).

Nella base $ABCD$ la diagonale $AC = p$ si calcola con Pitagora: $p^2 = a^2 + b^2$. Lo spigolo CG è perpendicolare al piano della base, quindi è perpendicolare ad AC, che passa per il suo piede C: il triangolo ACG è rettangolo in C, e $d^2 = p^2 + c^2$.

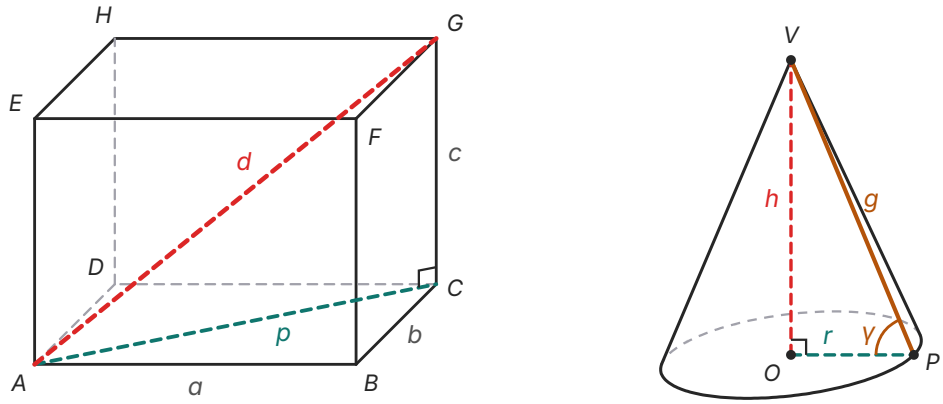
IN SINTESI

Diagonale del parallelepipedo rettangolo e del cubo.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad \text{nel cubo di spigolo } l\text{:} \qquad d = l\sqrt{3}.$$

L'angolo θ tra la diagonale e la base ha $\operatorname{tg}\theta = c/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Per esempio, un parallelepipedo con spigoli 3 cm, 4 cm e 12 cm ha la diagonale della base di 5 cm e la diagonale $d = \sqrt{9 + 16 + 144}$ cm $= 13$ cm; essa forma con la base un angolo θ con $\operatorname{tg}\theta = 12/5$, cioè $\theta \approx 67{,}38°$. Nel cubo $\operatorname{tg}\theta = l/(l\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ e $\theta \approx 35{,}26°$, qualunque sia lo spigolo.



a) La diagonale del parallelepipedo

b) Il cono retto: altezza, raggio, generatrice

Figura 6.7 a) Nel parallelepipedo rettangolo la diagonale $AG = d$ è l'ipotenusa del triangolo ACG, rettangolo in C, che ha per cateti la diagonale di base $AC = p$ e lo spigolo $CG = c$. b) Nel cono circolare retto l'altezza $VO = h$, il raggio $OP = r$ e la generatrice $VP = g$ formano un triangolo rettangolo; γ è l'angolo della generatrice con la base.

6.6.2 La piramide retta

Una piramide si dice **retta** quando la base è un poligono circoscrivibile a una circonferenza e il piede dell'altezza è il centro O di questa circonferenza; è **regolare** se, inoltre, la base è un poligono regolare. In una piramide retta le altezze delle facce laterali condotte dal vertice V sono tutte congruenti (per il teorema delle tre perpendicolari, cadono nei punti di tangenza della circonferenza inscritta): la loro lunghezza comune è l'**apotema** della piramide. In una piramide regolare con altezza h, apotema a, spigolo laterale s, lato di base l, raggio r della circonferenza inscritta nella base (l'apotema di base) e raggio R di quella circoscritta, si trovano tre triangoli rettangoli.

IN SINTESI

I triangoli rettangoli della piramide regolare.

- VOM (altezza, apotema di base, apotema): $a^2 = h^2 + r^2$;
- VOA (altezza, raggio circoscritto, spigolo): $s^2 = h^2 + R^2$;
- VMA (apotema, metà del lato, spigolo): $s^2 = a^2 + (l/2)^2$.

L'angolo tra una faccia e la base ha $\text{tg}\,\varphi = h/r$; l'angolo tra uno spigolo laterale e la base ha $\text{tg}\,\psi = h/R$.

Per la base quadrata di lato l si ha $r = l/2$ e $R = l\sqrt{2}/2$; per l'esagono regolare $R = l$ e $r = l\sqrt{3}/2$; per il triangolo equilatero $R = l\sqrt{3}/3$ e $r = l\sqrt{3}/6$ (*Matematica 2*).

6.6.3 Il cono, rivisto

Nel capitolo 3 il cono era una superficie illimitata a due falde, generata da una retta che ruota attorno all'asse. In geometria solida il **cono circolare retto** è invece il solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a un cateto. Quel cateto sta sull'**asse** del cono, e la sua lunghezza è l'altezza h; l'altro cateto è il raggio r della base; l'ipotenusa, ruotando, descrive la superficie laterale ed è la **generatrice** g. L'asse è perpendicolare al piano della base nel centro O, quindi ogni generatrice forma con l'altezza e con un raggio un triangolo rettangolo (Figura 6.7, b):

$$g^2 = h^2 + r^2, \qquad \cos\gamma = \frac{r}{g}, \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{r},$$

dove γ è l'angolo tra la generatrice e il piano della base. L'angolo in V dello stesso triangolo è la **semiapertura** α del capitolo 3, complementare di γ: $\alpha = 90° - \gamma$, e $\operatorname{sen}\alpha = r/g$. Un cono con $r = 8$ cm e $h = 15$ cm ha $g = \sqrt{64 + 225}$ cm $= 17$ cm, $\gamma = \arccos(8/17) \approx 61{,}93°$ e $\alpha \approx 28{,}07°$. Ricordi il criterio del capitolo 3? Un piano che non passa per il vertice e forma con l'asse un angolo β taglia la superficie conica in un'ellisse se $\beta > \alpha$ (in una circonferenza se $\beta = 90°$), in una parabola se $\beta = \alpha$, in un'iperbole se $\beta < \alpha$.

Le aree e i volumi dei solidi non sono oggetto di questo capitolo: negli esercizi, quando servono, le formule che conosci dalla scuola media sono richiamate nel testo.

APPROFONDIMENTO · I CINQUE POLIEDRI REGOLARI

Un poliedro si dice regolare (**poliedro regolare**) se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce. Il libro XIII, l'ultimo degli *Elementi*, costruisce i cinque poliedri regolari — tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro — e dimostra che non ce ne sono altri. L'idea è semplice: in un vertice concorrono almeno tre facce, e la somma dei loro angoli deve essere minore di 360°, altrimenti le facce si stenderebbero in un piano. Con triangoli equilateri (angoli di 60°) si possono unire 3, 4 o 5 facce; con quadrati (90°) solo 3; con pentagoni regolari (108°) solo 3; con esagoni (120°) già tre facce danno 360°. Restano cinque possibilità, e ciascuna si realizza.

Platone, nel *Timeo*, associa quattro di questi solidi agli elementi — il tetraedro al fuoco, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua, il cubo alla terra — e il dodecaedro all'ordinamento del tutto; per questo sono chiamati anche «solidi platonici». Molti secoli dopo Eulero osservò che in ogni poliedro convesso il numero dei vertici V, degli spigoli S e delle facce F soddisfa la relazione $V - S + F = 2$. La Tabella 6.2 la verifica sui cinque solidi regolari.

Tabella 6.2 I poliedri regolari e la relazione di Eulero.

Poliedro	Facce	Facce per vertice	V	S	F	$V - S + F$
tetraedro	triangoli	3	4	6	4	2
cubo (esaedro)	quadrati	3	8	12	6	2
ottaedro	triangoli	4	6	12	8	2
dodecaedro	pentagoni	3	20	30	12	2
icosaedro	triangoli	5	12	30	20	2

COLLEGAMENTI

Arte: la prospettiva. L'assonometria dei nostri disegni non è ciò che vede l'occhio: nella visione reale le rette parallele che si allontanano sembrano convergere, come i binari di una ferrovia. All'inizio del Quattrocento Filippo Brunelleschi mostrò a Firenze, con una tavoletta dipinta che raffigurava il Battistero, che una costruzione geometrica poteva riprodurre esattamente questa impressione. Nella seconda metà del secolo Piero della Francesca, pittore e matematico, costruì nel *De prospectiva pingendi* la prospettiva passo per passo con la geometria, e scrisse anche un libretto sui cinque corpi regolari. Nel disegno prospettico le rette perpendicolari al quadro convergono nel **punto di fuga** principale, mentre quelle parallele al quadro restano parallele.

SINTESI

- Punto, retta e piano sono enti primitivi. I **postulati dello spazio**: per tre punti non allineati passa un solo piano; una retta con due punti in un piano vi giace; due piani distinti con un punto comune hanno in comune una retta; ogni piano divide lo spazio in due semispazi.
- Un piano è determinato da tre punti non allineati, da una retta e un punto esterno, da due rette incidenti o da due rette parallele distinte (teorema 1).
- Due rette distinte sono **incidenti**, **parallele** (complanari senza punti comuni) o **sghembe** (non complanari). Due rette senza punti comuni non sono necessariamente parallele.
- Una retta e un piano: retta contenuta, incidente (un punto) o parallela (nessun punto). Due piani: incidenti lungo una retta o paralleli.
- Una retta esterna a un piano e parallela a una retta del piano è parallela al piano; due piani paralleli tagliati da un terzo piano danno rette parallele; il parallelismo tra rette è transitivo; segmenti paralleli tra piani paralleli sono congruenti.
- Una retta è **perpendicolare a un piano** se è perpendicolare a tutte le rette del piano per il suo piede; basta che lo sia a **due rette incidenti** (teorema 6).
- La **distanza** di un punto da un piano è la lunghezza del segmento perpendicolare, più corto di ogni obliquo. L'angolo tra una retta e un piano è l'angolo tra la retta e la sua proiezione ortogonale.
- **Teorema delle tre perpendicolari**: se $PH \perp \alpha$ e $HK \perp r$ in α, allora $PK \perp r$; $PK = \sqrt{PH^2 + HK^2}$ è la distanza di P da r.
- Un **diedro** si misura sulla sua **sezione normale**; due piani sono perpendicolari se formano diedri retti, e un piano che contiene una perpendicolare a un altro piano è perpendicolare a esso.
- Gli angoli nello spazio si calcolano in triangoli rettangoli: $\text{tg}\,\varphi = h/r$ per la faccia di una piramide regolare, $\cos\gamma = r/g$ per la generatrice del cono.
- Diagonale del parallelepipedo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; del cubo: $d = l\sqrt{3}$. Nella piramide regolare: $a^2 = h^2 + r^2$, $s^2 = h^2 + R^2$.
- I poliedri regolari sono cinque (Euclide, libro XIII) e soddisfano la relazione di Eulero $V - S + F = 2$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Per tre punti non allineati passano:
   A. infiniti piani
   B. uno e un solo piano
   C. esattamente due piani
   D. nessun piano

2. ● Due rette dello spazio che non hanno punti in comune:
   A. sono sempre parallele
   B. sono sempre sghembe
   C. sono parallele se sono complanari, sghembe altrimenti
   D. sono sempre perpendicolari

3. ● Una retta e un piano che hanno due punti distinti in comune:
   A. la retta giace nel piano
   B. la retta è incidente al piano
   C. la retta è parallela al piano e non vi giace
   D. la retta è perpendicolare al piano

4. ● Nel cubo $ABCDEFGH$ (base $ABCD$, E sopra A, F sopra B, G sopra C, H sopra D) le rette AB e CG sono:
   A. incidenti
   B. parallele
   C. coincidenti
   D. sghembe

5. ●● Una retta r incontra il piano α nel punto H ed è perpendicolare a una retta s di α passante per H. Allora:
   A. r è certamente perpendicolare ad α
   B. r è parallela ad α
   C. r può non essere perpendicolare ad α
   D. r giace in α

6. ● L'ampiezza di un diedro è l'ampiezza:
   A. della sua sezione normale
   B. dell'angolo tra due rette qualsiasi delle due facce
   C. dell'angolo tra lo spigolo e una faccia
   D. di un angolo retto, sempre

7. ●● La diagonale di un cubo di spigolo 2 cm misura:
   A. $2\sqrt{2}$ cm
   B. 6 cm
   C. 4 cm
   D. $2\sqrt{3}$ cm

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Due piani distinti con un punto in comune hanno in comune una retta. b) Due rette parallele a uno stesso piano sono parallele tra loro. c) Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele. d) Se una retta è parallela a un piano, è parallela a ogni retta del piano. e) Per un punto esterno a un piano passa un solo piano parallelo a esso. f) Due piani perpendicolari a uno stesso piano sono paralleli.

9. ● Completa: «Due rette si dicono sghembe se _____ . Una retta è perpendicolare a un piano se è perpendicolare a _____ le rette del piano passanti per il suo piede; per verificarlo basta che sia perpendicolare a _____ del piano. L'angolo tra una retta e un piano è l'angolo tra la retta e _____ .»

Calcolare

10. ● Nel cubo *ABCDEFGH* stabilisci se le rette sono incidenti, parallele o sghembe: a) *AB* e *EF*; b) *AB* e *FG*; c) *AC* e *BD*; d) *AE* e *CG*; e) *AF* e *DG*; f) *AG* e *BH*.

11. ● Nel cubo *ABCDEFGH* stabilisci la posizione della retta rispetto al piano: a) *EF* e il piano *ABCD*; b) *AG* e il piano *ABCD*; c) *BD* e il piano *ABCD*; d) *CG* e il piano *ABFE*; e) *HF* e il piano *ABCD*.

12. ● Un punto *P* dista 8 cm dal piano α; un punto *Q* di α dista 17 cm da *P*. Calcola la lunghezza della proiezione di *PQ* su α e l'angolo che *PQ* forma con il piano.

13. ● Calcola la diagonale di un parallelepipedo rettangolo di spigoli 2 cm, 3 cm e 6 cm e l'angolo che essa forma con la faccia di spigoli 2 cm e 3 cm.

14. ●● La diagonale di un cubo misura 12 cm. Calcola lo spigolo e la diagonale di una faccia.

15. ●● Un punto *P* dista 9 cm dal piano α; la sua proiezione *H* dista 12 cm dalla retta *r* di α. Calcola la distanza di *P* da *r* e l'ampiezza del diedro formato da α con il piano che contiene *P* e *r*.

16. ●● Una piramide quadrangolare regolare ha lo spigolo di base di 10 cm e l'altezza di 12 cm. Calcola l'apotema, lo spigolo laterale e l'angolo tra una faccia laterale e la base.

17. ●● Una piramide esagonale regolare ha lo spigolo di base di 4 cm e lo spigolo laterale di 5 cm. Calcola l'altezza, l'apotema e l'angolo tra una faccia laterale e la base. (Nell'esagono regolare il raggio circoscritto è uguale al lato.)

18. ●● La generatrice di un cono circolare retto misura 10 cm e forma con la base un angolo di 60°. Calcola il raggio e l'altezza.

19. ●● Un tetto a capanna copre una casa larga 8 m; il colmo è 1,5 m più alto della linea di gronda. Calcola la pendenza percentuale delle falde, l'angolo che esse formano con l'orizzontale e la larghezza di ciascuna falda (dalla gronda al colmo).

20. ●● Un tetraedro regolare ha lo spigolo di 6 cm. Calcola la sua altezza e l'angolo tra due facce. (Il piede dell'altezza è il centro del triangolo equilatero di base: $R = l\sqrt{3}/3$, $r = l\sqrt{3}/6$.)

Dimostrare e argomentare

21. ●● Una retta r è parallela a un piano α e non vi giace. Dimostra che ogni piano β che contiene r e incontra α lo taglia in una retta parallela a r.

22. ●● Spiega perché un tavolo a tre gambe appoggiato su un pavimento irregolare non traballa mai, mentre un tavolo a quattro gambe può traballare. Quale postulato usi?

23. ●● Trova l'errore: «Nel cubo *ABCDEFGH* la retta *AB* è perpendicolare sia ad *AD* sia a *BC*, che stanno nel piano *ABCD*; quindi, per il criterio di perpendicolarità, *AB* è perpendicolare al piano *ABCD*.»

24. ●● Dimostra che due piani distinti perpendicolari a una stessa retta r sono paralleli. (Suggerimento: per assurdo, usa l'unicità del piano perpendicolare a una retta per un punto.)

25. ●●● Nel cubo *ABCDEFGH* sia *O* il centro della base *ABCD*. Dimostra che la diagonale *BD* è perpendicolare al piano *ACGE* e deduci che *BD* è ortogonale alla diagonale *AG* del cubo.

Problemi

26. ●● Un'antenna verticale alta 20 m è tenuta da tre tiranti tesi dalla cima a tre punti del terreno (orizzontale), ciascuno a 15 m dal piede dell'antenna. Calcola la lunghezza di un tirante e l'angolo che forma con il terreno.

27. ●● Una tenda canadese ha la forma di un prisma a sezione triangolare: la base appoggiata a terra è larga 2 m e il colmo è alto 1,2 m, sulla verticale del centro della base. Calcola l'angolo tra ciascun telo e il terreno, il diedro lungo il colmo e la larghezza di ciascun telo.

28. ●● Un bastone lungo 55 cm può entrare in una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni 40 cm × 30 cm × 20 cm, una volta chiusa? Giustifica la risposta.

29. ●●● (dati inventati) La copertura di vetro di un atrio ha la forma di una piramide quadrangolare regolare con lo spigolo di base di 8 m e le facce inclinate di 60° sulla base. Calcola l'altezza, l'apotema, lo spigolo laterale e l'area della superficie di vetro (area laterale = perimetro di base · apotema / 2).

Verso la verifica

30. ●● Nel cubo *ABCDEFGH* di spigolo 6 cm: a) stabilisci la posizione reciproca delle rette *AC* e *FH* e l'angolo tra loro; b) calcola la distanza di *E* dal piano *ABCD*; c) calcola la diagonale *AG*; d) calcola l'angolo tra *AG* e il piano *ABCD*.

31. ●● Il rettangolo $ABCD$ ha $AB = 8$ cm e $BC = 6$ cm e sta nel piano α; il segmento PA, lungo 6 cm, è perpendicolare ad α. a) Dimostra che $PB \perp BC$. b) Calcola PB e PC. c) Calcola l'angolo che PC forma con α.

32. ●●● **Sfida.** Una piramide quadrangolare regolare ha tutti gli otto spigoli lunghi l. a) Dimostra che gli spigoli laterali formano con la base un angolo di 45°. b) Calcola l'angolo φ tra una faccia laterale e la base. c) Unendo per la base due di queste piramidi si ottiene un ottaedro regolare: quanto misura il diedro tra due facce dell'ottaedro che hanno in comune uno spigolo della base?

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro XI (le definizioni della geometria solida e i teoremi sul parallelismo e sulla perpendicolarità) e libro XIII (i cinque poliedri regolari).
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i solidi platonici nella matematica greca e la prospettiva nel Rinascimento.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la formula di Eulero per i poliedri e la sua dimostrazione.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il problema della diagonale del parallelepipedo, risolto cercando un problema piano analogo.

Glossario del capitolo

Angolo tra retta e piano
Angolo acuto tra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano.

Apotema della piramide
In una piramide retta, l'altezza comune delle facce laterali condotta dal vertice.

Cono circolare retto
Solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a un cateto, che sta sull'asse; l'altro cateto è il raggio di base, l'ipotenusa è la generatrice.

Diedro
Ciascuna delle due parti dello spazio delimitate da due semipiani con la stessa origine (lo spigolo), insieme ai semipiani (le facce).

Distanza punto–piano
Lunghezza del segmento perpendicolare condotto dal punto al piano.

Piani paralleli
Piani senza punti comuni, oppure coincidenti.

Piani perpendicolari
Piani incidenti che formano diedri retti.

Poliedro regolare
Poliedro con facce poligoni regolari congruenti e lo stesso numero di facce in ogni vertice; ne esistono cinque.

Postulato
Affermazione accettata senza dimostrazione, da cui si ricavano i teoremi.

Proiezione ortogonale
Il piede della perpendicolare condotta da un punto a un piano; per un segmento, il segmento che unisce le proiezioni degli estremi.

Retta parallela a un piano
Retta che non ha punti comuni con il piano, oppure vi è contenuta.

Retta perpendicolare a un piano
Retta che incontra il piano ed è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incontro (il piede).

Rette complanari
Rette contenute in uno stesso piano.

Rette ortogonali
Rette sghembe le cui parallele condotte da uno stesso punto sono perpendicolari.

Rette parallele
Nello spazio, rette complanari senza punti comuni, oppure coincidenti.

Rette sghembe
Rette che non stanno in uno stesso piano; non hanno punti comuni.

Semispazio
Ciascuna delle due parti in cui un piano divide lo spazio, piano compreso.

Sezione normale
Angolo ottenuto tagliando un diedro con un piano perpendicolare allo spigolo; ne misura l'ampiezza.

Teorema delle tre perpendicolari
Se PH è perpendicolare a un piano e HK è perpendicolare a una retta r del piano, allora PK è perpendicolare a r.

Soluzioni

1. B. È il postulato P2.

2. C. Senza punti comuni le rette sono parallele se complanari, sghembe se non complanari.

3. A. È il postulato P3.

4. D. Non si incontrano e non sono parallele (una è orizzontale, l'altra verticale): sono sghembe, e anche ortogonali.

5. C. Il criterio richiede la perpendicolarità a due rette incidenti; per esempio una scala appoggiata a una parete (vedi l'Errore frequente sulla perpendicolarità).

6. A. Il diedro si misura sulla sezione normale.

7. D. $d = l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm ≈ 3,46 cm.

8. a) V. b) F: possono essere anche incidenti o sghembe (due rette del soffitto sono entrambe parallele al pavimento). c) V. d) F: se non giace nel piano, è parallela ad alcune rette del piano (quelle che hanno la sua direzione), mentre con tutte le altre è sghemba. e) V. f) F: possono essere incidenti, come due pareti vicine, entrambe perpendicolari al pavimento.

9. «...non esiste un piano che le contenga entrambe (non sono complanari)»; «...**tutte** le rette del piano...»; «...a **due rette incidenti** del piano (nel loro punto comune)»; «...la sua **proiezione ortogonale** sul piano».

10. a) parallele (lati opposti della faccia *ABFE*); b) sghembe (*AB* è nella base, *FG* nella faccia superiore, con direzioni diverse); c) incidenti nel centro della base; d) parallele (spigoli verticali, nel piano *ACGE*); e) parallele (diagonali delle facce opposte *ABFE* e *DCGH*, nel piano *ADGF*); f) incidenti nel centro del cubo (diagonali del rettangolo *ABGH*).

11. a) parallela; b) incidente in *A*; c) contenuta; d) parallela ($CG \parallel BF$, che sta nel piano *ABFE*: teorema 2); e) parallela (*HF* sta nella faccia superiore).

12. $HQ = \sqrt{17^2 - 8^2}$ cm = $\sqrt{225}$ cm = 15 cm. sen θ = 8/17, θ ≈ 28,07°.

13. $d = \sqrt{4 + 9 + 36}$ cm = 7 cm. La diagonale della faccia 2 × 3 è $\sqrt{13}$ cm ≈ 3,61 cm, e tg θ = $6/\sqrt{13}$ ≈ 1,664, θ ≈ 59,00°.

14. $l = 12/\sqrt{3}$ cm = $4\sqrt{3}$ cm ≈ 6,93 cm; diagonale di una faccia $l\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$ cm ≈ 9,80 cm.

15. Per il teorema delle tre perpendicolari $PK \perp r$, con $HK = 12$ cm: $PK = \sqrt{81 + 144}$ cm = 15 cm. Poiché $HK \perp r$ e $PK \perp r$, l'angolo $\angle PKH$ è la sezione normale del diedro: tg = 9/12 = 0,75, ampiezza ≈ 36,87°.

16. Apotema di base 5 cm; apotema $a = \sqrt{144 + 25}$ cm = 13 cm; spigolo $s = \sqrt{a^2 + 5^2} = \sqrt{194}$ cm ≈ 13,93 cm (oppure $\sqrt{144 + 50}$, con $R = 5\sqrt{2}$); tg φ = 12/5, φ ≈ 67,38°.

17. $R = 4$ cm, quindi $h = \sqrt{25 - 16}$ cm = 3 cm. Apotema di base $r = 2\sqrt{3}$ cm ≈ 3,46 cm; apotema $a = \sqrt{9 + 12}$ cm = $\sqrt{21}$ cm ≈ 4,58 cm (controllo: $a^2 + 2^2 = 21 + 4 = 25 = s^2$). tg φ = $3/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$ ≈ 0,866, φ ≈ 40,89°.

18. $r = g \cos 60° = 5$ cm; $h = g$ sen 60° = $5\sqrt{3}$ cm ≈ 8,66 cm.

19. Ogni falda sale di 1,5 m su 4 m orizzontali: pendenza 1,5/4 = 0,375 = 37,5%; angolo arctg 0,375 ≈ 20,56°; larghezza $\sqrt{4^2 + 1{,}5^2}$ m = $\sqrt{18{,}25}$ m ≈ 4,27 m.

20. Con $l = 6$ cm: $R = 2\sqrt{3}$ cm, $h = \sqrt{36 - 12}$ cm = $\sqrt{24}$ cm = $2\sqrt{6}$ cm ≈ 4,90 cm. L'angolo tra una faccia e la base si misura sulla sezione normale *VMO*, con $OM = r = \sqrt{3}$ cm: tg φ = $2\sqrt{6}/\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$ ≈ 2,828, φ ≈ 70,53°. Nel tetraedro regolare tutte le facce sono uguali, quindi questo è il diedro tra due facce qualsiasi.

21. Sia $s = \alpha \cap \beta$. Le rette *r* e *s* stanno entrambe in β, quindi sono complanari. Un loro punto comune starebbe su *r* e in α (perché sta su *s*), ma *r* non incontra α. Quindi *r* e *s* sono complanari senza punti comuni: $r \parallel s$. c.v.d.

22. Le tre punte stanno sempre in un piano (postulato P2: per tre punti non allineati passa un piano), su cui il tavolo poggia stabilmente. Le quattro punte di un tavolo a quattro gambe possono non essere complanari con i punti del pavimento su cui poggiano: allora il tavolo poggia su tre punte e oscilla sulla quarta.

23. Il criterio richiede due rette **incidenti** nel piede della retta. AD e BC sono parallele, non incidenti; e infatti AB non è affatto perpendicolare al piano $ABCD$: vi è contenuta.

24. Siano α e β i due piani, entrambi perpendicolari a r. Se avessero un punto comune Q, per Q passerebbero due piani distinti perpendicolari a r, mentre per un punto passa uno e un solo piano perpendicolare a una retta data. Dunque α e β non hanno punti comuni: sono paralleli. c.v.d.

25. Le diagonali del quadrato $ABCD$ sono perpendicolari, quindi $BD \perp AC$ in O. La retta t per O parallela ad AE sta nel piano $ACGE$ ed è perpendicolare alla base (perché lo è AE: due rette parallele, di cui una è perpendicolare a un piano, sono entrambe perpendicolari), quindi $t \perp BD$. La retta BD è perpendicolare in O alle due rette incidenti AC e t del piano $ACGE$: per il criterio (teorema 6) è perpendicolare al piano. Allora BD è ortogonale a ogni retta di quel piano, in particolare ad AG (che non passa per O: BD e AG sono sghembe e ortogonali).

26. Tirante $= \sqrt{20^2 + 15^2}$ m $= 25$ m; $\operatorname{tg}\theta = 20/15$, $\theta \approx 53{,}13°$.

27. Metà della base: 1 m. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}2/1 = 1{,}2$, $\alpha \approx 50{,}19°$; diedro al colmo $180° - 2\alpha \approx 79{,}61°$; larghezza del telo $\sqrt{1 + 1{,}44}$ m $= \sqrt{2{,}44}$ m $\approx 1{,}56$ m.

28. La massima distanza tra due punti della scatola è la diagonale: $\sqrt{40^2 + 30^2 + 20^2}$ cm $= \sqrt{2900}$ cm $\approx 53{,}85$ cm < 55 cm. Il bastone non entra.

29. Apotema di base 4 m. $h = 4 \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}$ m $\approx 6{,}93$ m; apotema $a = 4/\cos 60° = 8$ m; spigolo laterale $\sqrt{a^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ m $= 4\sqrt{5}$ m $\approx 8{,}94$ m; area laterale $= (32 \cdot 8)/2$ m$^2 = 128$ m^2.

30. a) AC sta nella base e FH nella faccia superiore: non si incontrano; non sono parallele, perché $FH \parallel BD$ ($BDHF$ è un rettangolo) e BD non è parallela ad AC. Sono sghembe, e poiché $AC \perp BD$ sono ortogonali: angolo 90°. b) 6 cm ($AE \perp ABCD$). c) $AG = 6\sqrt{3}$ cm $\approx 10{,}39$ cm. d) $\operatorname{tg}\theta = 6/(6\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, $\theta \approx 35{,}26°$.

31. a) $PA \perp \alpha$ e, nel piano α, $AB \perp BC$: per il teorema delle tre perpendicolari $PB \perp BC$. b) $PB = \sqrt{36 + 64}$ cm $= 10$ cm; il triangolo PBC è rettangolo in B: $PC = \sqrt{100 + 36}$ cm $= \sqrt{136}$ cm $= 2\sqrt{34}$ cm $\approx 11{,}66$ cm (controllo: $AC = 10$ cm e $PA^2 + AC^2 = 36 + 100 = 136$). c) La proiezione di PC è $AC = 10$ cm: $\operatorname{tg}\theta = 6/10$, $\theta \approx 30{,}96°$.

32. a) $R = l\sqrt{2}/2$ (metà della diagonale), quindi $h^2 = l^2 - l^2/2 = l^2/2$ e $h = l\sqrt{2}/2 = R$: nel triangolo VOA i cateti sono uguali, quindi $\psi = 45°$. b) $\operatorname{tg}\varphi = h/(l/2) = \sqrt{2}$, $\varphi \approx 54{,}74°$. c) Le due facce che hanno in comune uno spigolo di base appartengono alle due piramidi: il diedro è $2\varphi \approx 109{,}47°$.