CAPITOLO

5

Trigonometria e vettori

Una base misurata con cura e qualche angolo: tanto basta per conoscere la distanza di una nave che nessuno può raggiungere. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Risolvere un triangolo rettangolo e calcolare pendenze, altezze e distanze con le funzioni circolari.
2. Calcolare l'area di un triangolo con il seno e l'area di un segmento circolare qualsiasi.
3. Dimostrare e applicare il teorema della corda, il teorema dei seni e il teorema del coseno.
4. Risolvere un triangolo qualsiasi nei quattro casi, riconoscendo il caso ambiguo, e calcolare misure inaccessibili.
5. Operare con i vettori, anche in componenti cartesiane, e calcolare il prodotto scalare e il lavoro di una forza.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 I triangoli rettangoli 2
5.2 L'area di un triangolo e il teorema della corda 5
5.3 Il teorema dei seni e il teorema del coseno 8
5.4 Risolvere i triangoli 10
5.5 I vettori 14
5.6 Il prodotto scalare 18

Matematica 4 · Parte II · Funzioni circolari, vettori e spazio · versione 1.0
Capitolo 5: Trigonometria e vettori · pagine 131–156 del volume completo · estratto per lo studio

Come si misura l'altezza di un campanile senza salirci, la larghezza di un fiume senza attraversarlo, la distanza di una nave dalla costa? Nel capitolo 4 abbiamo costruito il seno, il coseno e la tangente sulla circonferenza goniometrica e li abbiamo studiati come funzioni periodiche. In questo capitolo li usiamo per lo scopo da cui sono nati: **risolvere i triangoli**, cioè calcolarne tutti i lati e tutti gli angoli a partire da pochi dati misurati. Il nome stesso lo dice: *trigonometria* viene dal greco τρίγωνον, «triangolo», e μέτρον, «misura».

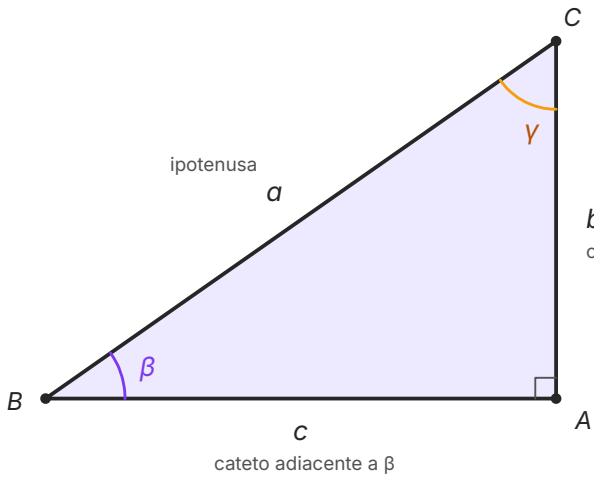
Gli strumenti sono pochi e potenti: le relazioni nel triangolo rettangolo, la formula dell'area con il seno, il teorema della corda e i due teoremi che valgono per ogni triangolo, quello dei seni e quello del coseno. Nella seconda parte del capitolo gli stessi strumenti diventano il linguaggio dei **vettori**, le grandezze che in fisica hanno un'intensità, una direzione e un verso: impareremo a sommarli, a scomporli lungo gli assi e a moltiplicarli con il **prodotto scalare**, l'operazione che in fisica misura il lavoro di una forza.

5.1 I triangoli rettangoli

5.1.1 Seno, coseno e tangente di un angolo acuto

In un triangolo rettangolo ABC, retto in A, chiamiamo a l'ipotenusa BC, b e c i cateti CA e AB, β e γ gli angoli acuti in B e in C (Figura 5.1). Il cateto b è *opposto* all'angolo β e *adiacente* all'angolo γ; per il cateto c è il contrario. Poiché la somma degli angoli è $180°$, gli angoli acuti sono complementari: $\beta + \gamma = 90°$.

Mettiamo il vertice B nell'origine di un riferimento cartesiano, con il cateto c sul semiasse positivo delle x e il vertice C nel primo quadrante. La circonferenza goniometrica taglia la semiretta BC, che contiene l'ipotenusa, in un punto $P(\cos\beta;\ \text{sen}\,\beta)$; la perpendicolare da P all'asse x forma con l'origine un triangolo rettangolo che ha ipotenusa 1 e cateti $\cos\beta$ e $\text{sen}\,\beta$. Questo triangolo e il triangolo ABC hanno gli stessi angoli, quindi sono simili (*Matematica 2*, cap. 4), con rapporto di similitudine a: i lati di ABC sono quelli del triangolino moltiplicati per a. Ne seguono i teoremi seguenti, validi per qualunque triangolo rettangolo.



$b = a \operatorname{sen} \beta$

$b = a \cos \gamma$

$c = a \cos \beta$

$c = a \operatorname{sen} \gamma$

$b = c \operatorname{tg} \beta$

$c = b \operatorname{tg} \gamma$

Figura 5.1 Il triangolo rettangolo *ABC*, retto in *A*: l'ipotenusa *a*, i cateti *b* e *c* e gli angoli acuti β e γ (qui β = 35°). A destra le relazioni fra lati e angoli: in viola quelle scritte con β, in arancio quelle scritte con γ.

IN SINTESI

Teorema (triangoli rettangoli). Ipotesi: *ABC* è un triangolo rettangolo in *A*, con ipotenusa *a*, cateti *b* e *c*, angoli acuti β (opposto a *b*) e γ (opposto a *c*). **Tesi:**

- un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, o per il coseno dell'angolo adiacente: $b = a \operatorname{sen} \beta = a \cos \gamma$, $c = a \operatorname{sen} \gamma = a \cos \beta$;
- un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo: $b = c \operatorname{tg} \beta$, $c = b \operatorname{tg} \gamma$.

Viceversa: $\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a}$ (cateto opposto su ipotenusa), $\cos \beta = \frac{c}{a}$ (cateto adiacente su ipotenusa), $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$ (cateto opposto su cateto adiacente).

La seconda relazione si ottiene dividendo le prime due: $\frac{b}{c} = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{a \cos \beta} = \operatorname{tg} \beta$. Le uguaglianze $\operatorname{sen} \beta = \cos \gamma$ e $\cos \beta = \operatorname{sen} \gamma$ sono le relazioni fra angoli complementari del capitolo 4 lette su un triangolo; e i triangoli 30°–60°–90° e 45°–45°–90° di *Matematica 2* (cap. 3) sono i casi in cui tutto si calcola senza calcolatrice.

5.1.2 Risolvere un triangolo rettangolo

Risolvere un triangolo significa calcolare le misure di tutti i suoi lati e di tutti i suoi angoli a partire da quelle note. In un triangolo rettangolo, oltre all'angolo retto, bastano due dati, purché almeno uno sia un lato: con i soli angoli si conosce la forma del triangolo, ma non la sua grandezza. Si usa la calcolatrice in modalità DEG; per un angolo acuto i tasti inversi non creano ambiguità, perché arcsen, arccos e arctg di un numero positivo sono angoli acuti.

ESEMPIO SVOLTO

a) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura $a = 15$ cm e un angolo acuto $\beta = 40°$. Risolvi il triangolo. b) I cateti di un triangolo rettangolo misurano 8 cm e 15 cm. Calcola l'ipotenusa e gli angoli acuti.

a) L'altro angolo acuto è $\gamma = 90° - 40° = 50°$. I cateti: $b = a \operatorname{sen} \beta = 15 \cdot \operatorname{sen} 40° \approx 15 \cdot 0{,}6428 \approx 9{,}64$ cm e $c = a \cos \beta = 15 \cdot \cos 40° \approx 15 \cdot 0{,}7660 \approx 11{,}49$ cm. **Controllo** con il teorema di Pitagora: $9{,}642^2 + 11{,}491^2 \approx 92{,}97 + 132{,}04 = 225{,}01 \approx 15^2$.

b) L'ipotenusa è $\sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ cm. Se β è l'angolo opposto al cateto di 8 cm, $\operatorname{tg} \beta = \frac{8}{15}$, quindi $\beta = \operatorname{arctg} \frac{8}{15} \approx 28{,}07°$ e $\gamma = 90° - \beta \approx 61{,}93°$. **Controllo**: $\operatorname{sen} \beta = \frac{8}{17} \approx 0{,}4706$, e anche $\operatorname{arcsen} 0{,}4706 \approx 28{,}07°$.

5.1.3 Pendenze e angoli di elevazione

Sui cartelli stradali la ripidità di una salita si indica con la **pendenza**, il rapporto fra il dislivello e lo spostamento orizzontale, espresso in percentuale: una pendenza del 10% significa che la strada sale di 10 m ogni 100 m percorsi *in orizzontale*. Il dislivello e lo spostamento orizzontale sono i cateti di un triangolo rettangolo, quindi la pendenza è la tangente dell'angolo α che la strada forma con l'orizzontale:

$$\text{pendenza in percentuale} = 100 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Per una pendenza del 10% si ha $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}1$ e $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}1 \approx 5{,}71°$: un angolo molto più piccolo di quanto il cartello faccia pensare. Lungo 2 km misurati sulla strada, cioè sull'ipotenusa, si sale di $2000 \cdot \operatorname{sen} 5{,}71° \approx 199$ m. E una pendenza del 100% non è una parete verticale, ma una salita di 45°, perché $\operatorname{tg} 45° = 1$.

Sul campo gli angoli e le distanze orizzontali si misurano facilmente, le altezze spesso no. L'**angolo di elevazione** di un punto è l'angolo che la retta che congiunge l'occhio dell'osservatore con il punto forma con il piano orizzontale; se il punto è più in basso dell'osservatore si parla di **angolo di depressione**. In *Matematica 2* (cap. 4) un albero si misurava con la sua ombra; ora non serve più il Sole. Se da un punto del terreno, a 50 m dalla base di un edificio, la cima si vede sotto un angolo di elevazione di 32°, e gli occhi dell'osservatore sono a 1,60 m da terra, l'edificio

è alto $50 \cdot \text{tg}\, 32° + 1{,}60 \approx 31{,}24 + 1{,}60 \approx 32{,}8$ m. Un grado di errore nell'angolo sposta il risultato di circa un metro: bastano poche cifre significative.

5.2 L'area di un triangolo e il teorema della corda

Da qui in avanti, in un triangolo qualsiasi ABC indichiamo con a, b, c i lati opposti ai vertici A, B, C e con α, β, γ gli angoli in quei vertici. Per gli angoli ottusi useremo i valori del capitolo 4 nel secondo quadrante: seno positivo, coseno negativo, e $\text{sen}(180° - \gamma) = \text{sen}\,\gamma$.

5.2.1 L'area con il seno

Conosciamo due lati a e b di un triangolo e l'angolo γ compreso fra essi. Conduciamo da A l'altezza AH relativa al lato $a = CB$ (Figura 5.2). Se γ è acuto, H cade sulla retta CB dalla parte di B, e AH è il cateto opposto all'angolo γ nel triangolo rettangolo AHC, di ipotenusa b: $AH = b\,\text{sen}\,\gamma$. Se γ è ottuso, H cade sul prolungamento di BC oltre C, e nel triangolo rettangolo AHC l'angolo in C è $180° - \gamma$: $AH = b\,\text{sen}(180° - \gamma) = b\,\text{sen}\,\gamma$. Se γ è retto, $AH = b = b\,\text{sen}\,90°$. In ogni caso l'area è $\frac{1}{2} a \cdot AH$.

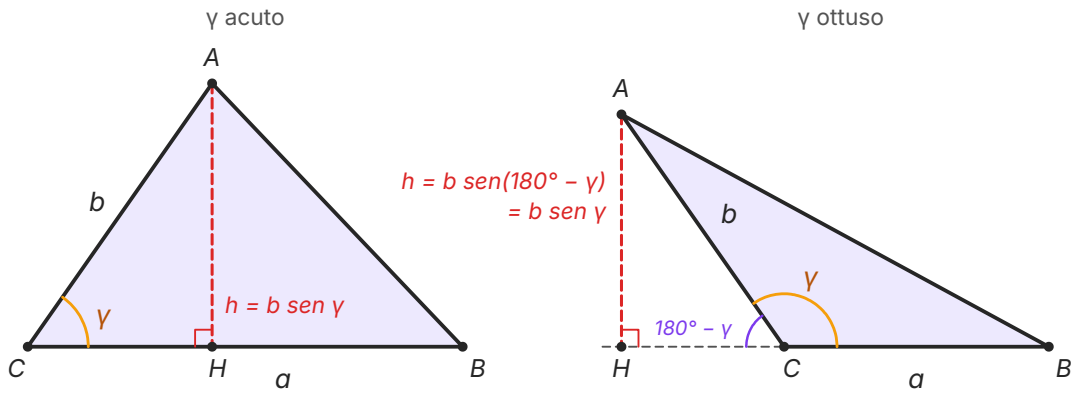


Figura 5.2 L'altezza relativa al lato a vale $b\,\text{sen}\,\gamma$ sia quando γ è acuto (a sinistra) sia quando è ottuso (a destra): in questo caso il piede H cade sul prolungamento di BC e l'angolo del triangolo rettangolo AHC in C è $180° - \gamma$, che ha lo stesso seno di γ.

Un parallelogramma di lati a e b che formano l'angolo γ è diviso da una diagonale in due triangoli congruenti, ciascuno di area $\frac{1}{2} ab\,\text{sen}\,\gamma$: l'area del parallelogramma è quindi $ab\,\text{sen}\,\gamma$. Per

esempio un triangolo con due lati di 6 cm e 10 cm che formano un angolo di 45°, o di 135°, ha area $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} \approx 21{,}2$ cm^2.

5.2.2 Il segmento circolare

In *Matematica 3* (cap. 4) abbiamo calcolato l'area di un **segmento circolare**, la parte di cerchio compresa fra un arco e la sua corda, solo quando l'angolo al centro era di 60°, 90° o 120°: per gli altri angoli serviva «una funzione dell'angolo, il seno». Ora l'abbiamo. Sia α l'angolo al centro, misurato in radianti, che insiste sull'arco AB di un cerchio di raggio r (Figura 5.3, a sinistra). Se $\alpha \le \pi$ il segmento è il settore circolare, di area $\frac{1}{2}r^2\alpha$, meno il triangolo OAB, che ha due lati uguali al raggio e l'angolo α compreso, quindi area $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\alpha$:

$$A_{\text{seg}} = \frac{1}{2}r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$$

La formula vale anche se $\pi < \alpha < 2\pi$: allora il triangolo va sommato al settore, e la sua area è $\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\alpha$, positiva perché $\operatorname{sen}\alpha < 0$. L'angolo α che compare da solo va espresso in radianti: con 60° al posto di $\frac{\pi}{3}$ si otterrebbe un'area più grande del cerchio. Ritroviamo il risultato di *Matematica 3*: con $r = 6$ cm e $\alpha = \frac{\pi}{3}$ si ha $18(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 6\pi - 9\sqrt{3} \approx 3{,}26$ cm^2.

ESEMPIO SVOLTO

In un cerchio di raggio 10 cm una corda è lunga 12 cm. Calcola l'area dei due segmenti circolari in cui la corda divide il cerchio.

L'angolo al centro. Il raggio perpendicolare alla corda la divide a metà (*Matematica 3*, cap. 3) e divide a metà anche l'angolo al centro α. Nel triangolo rettangolo che ha per ipotenusa un raggio e per cateto mezza corda, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$, quindi $\frac{\alpha}{2} = \arcsen 0{,}6 \approx 36{,}87°$ e $\alpha \approx 73{,}74°$. In radianti (calcolatrice in modalità RAD) $\alpha \approx 1{,}2870$.

Il seno. Poiché $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$, la formula di duplicazione del capitolo 4 dà $\operatorname{sen}\alpha = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = 0{,}96$.

Le aree. Il segmento minore ha area $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (1{,}2870 - 0{,}96) \approx 50 \cdot 0{,}3270 \approx 16{,}35$ cm^2. Il maggiore è il resto del cerchio: $100\pi - 16{,}35 \approx 297{,}81$ cm^2. Lo stesso numero si ottiene con la formula e l'angolo $2\pi - \alpha$: $50(4{,}9962 + 0{,}96) \approx 297{,}81$ cm^2.

5.2.3 Il teorema della corda

Sia BC una corda di una circonferenza di centro O e raggio r, e sia A un punto della circonferenza diverso da B e da C: l'angolo $\angle BAC = \alpha$ è un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda (Figura 5.3, a destra). Tracciamo il diametro BD. Se A e D stanno sullo stesso arco, l'angolo $\angle BDC$ insiste sullo stesso arco BC e quindi è congruente ad α (*Matematica 3*, cap. 3); il triangolo BCD è inscritto in una semicirconferenza, quindi è retto in C. Per il teorema sui triangoli rettangoli $BC = BD \cdot \operatorname{sen} \alpha = 2r \operatorname{sen} \alpha$. Se invece A sta sull'altro arco, $ABDC$ è un quadrilatero inscritto, gli angoli opposti in A e in D sono supplementari e $\operatorname{sen} \angle BDC = \operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$: il risultato non cambia.

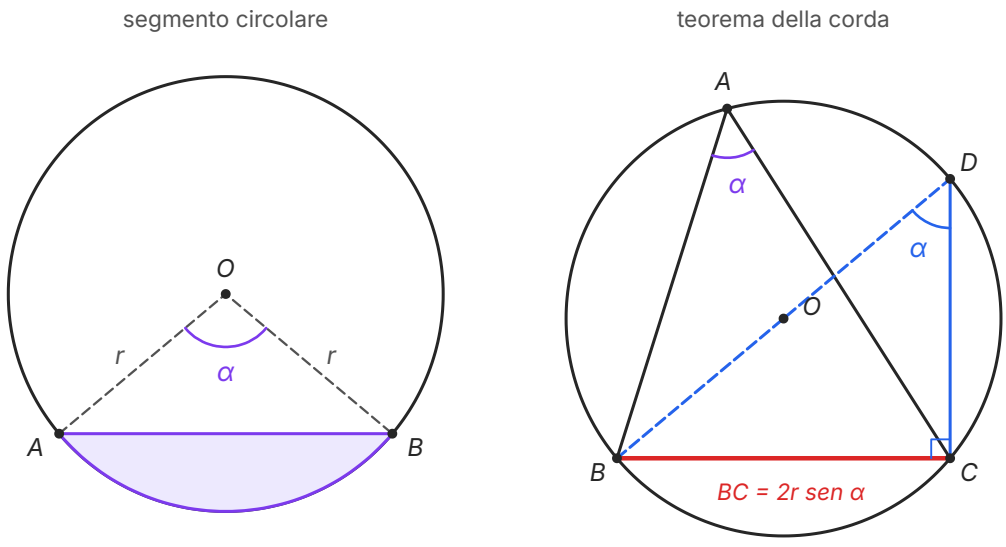


Figura 5.3 A sinistra, il segmento circolare (in viola) staccato dalla corda AB: è il settore OAB di angolo α meno il triangolo OAB. A destra, il teorema della corda: l'angolo $\angle BDC$ e l'angolo $\angle BAC$ insistono sullo stesso arco BC; il triangolo BCD, inscritto in una semicirconferenza, è retto in C, e $BC = BD \cdot \operatorname{sen} \alpha$.

IN SINTESI

Area di un triangolo: $\frac{1}{2}ab$ sen γ, il semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso.

Area di un parallelogramma: ab sen γ.

Segmento circolare: $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$, con r raggio e α angolo al centro in radianti.

Teorema della corda. Ipotesi: BC è una corda di una circonferenza di raggio r e α è un angolo alla circonferenza che insiste su di essa. **Tesi:** $BC = 2r$ sen α. In una circonferenza una corda è uguale al diametro per il seno di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste su di essa.

Poiché l'angolo al centro θ che insiste sulla corda è il doppio dell'angolo alla circonferenza, il teorema si scrive anche $BC = 2r \text{ sen } \frac{\theta}{2}$. Per esempio, in una circonferenza di raggio 5 cm una corda vista da un punto della circonferenza sotto un angolo di 40° misura $10 \cdot \text{sen } 40° \approx 6{,}43$ cm.

5.3 Il teorema dei seni e il teorema del coseno

5.3.1 Il teorema dei seni

Ogni triangolo è inscritto in una circonferenza, quella che ha il centro nel circocentro, il punto d'incontro degli assi dei lati (*Matematica 3*, cap. 3): la **circonferenza circoscritta** al triangolo. Sia r il suo raggio. Il lato $a = BC$ è una corda di questa circonferenza e l'angolo α del triangolo, con il vertice in A, è un angolo alla circonferenza che insiste su di essa: per il teorema della corda $a = 2r$ sen α. Lo stesso ragionamento per gli altri due lati dà $b = 2r$ sen β e $c = 2r$ sen γ. Dividendo ciascuna uguaglianza per il seno (che non è mai nullo, perché gli angoli di un triangolo sono compresi fra 0° e 180°) otteniamo il teorema enunciato più avanti. c.v.d.

5.3.2 Il teorema del coseno

Se si conoscono due lati e l'angolo compreso, il teorema dei seni non basta: in ogni rapporto restano due incognite. Serve una generalizzazione del teorema di Pitagora. Mettiamo il vertice C nell'origine e il lato CB sul semiasse positivo delle x: allora $B(a; 0)$. Il vertice A sta a distanza b da C, sulla semiretta che forma l'angolo γ con il semiasse positivo delle x; per la definizione di seno e coseno del capitolo 4, applicata a una circonferenza di raggio b, le sue coordinate sono $A(b \cos\gamma; b \text{ sen } \gamma)$. Con la formula della distanza fra due punti (*Matematica 2*, cap. 5):

$$c^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + (b \text{ sen } \gamma)^2 = a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2(\cos^2\gamma + \text{sen}^2\gamma) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

perché $\cos^2\gamma + \text{sen}^2\gamma = 1$. La dimostrazione vale per qualunque angolo γ, acuto, retto od ottuso: le coordinate di A sono date in ogni caso dalle definizioni sulla circonferenza goniometrica.

c.v.d.

IN SINTESI

Teorema dei seni. Ipotesi: *ABC* è un triangolo qualsiasi e r è il raggio della circonferenza circoscritta. **Tesi:** i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, e il rapporto costante è il diametro della circonferenza circoscritta:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2r$$

Teorema del coseno (o di Carnot). **Ipotesi:** *ABC* è un triangolo qualsiasi. **Tesi:** il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuita del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Se $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$ e il teorema del coseno diventa il teorema di Pitagora, $a^2 = b^2 + c^2$: il teorema di Pitagora è il caso particolare del teorema del coseno in cui l'angolo compreso è retto. Il termine $-2bc\cos\alpha$ misura quanto il triangolo si allontana dall'essere rettangolo in A: è negativo se α è acuto, positivo se α è ottuso. Ricavando il coseno,

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

il teorema permette di calcolare gli angoli di un triangolo di cui si conoscono i tre lati. Il segno del numeratore decide la forma del triangolo. In un triangolo l'angolo maggiore è opposto al lato maggiore, e solo l'angolo maggiore può essere retto od ottuso; quindi, se a è il lato maggiore:

- se $a^2 < b^2 + c^2$ il triangolo è **acutangolo**;
- se $a^2 = b^2 + c^2$ il triangolo è **rettangolo** (è l'inverso del teorema di Pitagora);
- se $a^2 > b^2 + c^2$ il triangolo è **ottusangolo**.

Per esempio il triangolo di lati 7, 8, 12 è ottusangolo ($144 > 49 + 64 = 113$), quello di lati 5, 6, 7 è acutangolo ($49 < 25 + 36 = 61$). Non serve calcolare nessun angolo: bastano i quadrati dei lati.

ERRORE FREQUENTE

Il segno meno del teorema del coseno **non** si cambia quando l'angolo è ottuso: è il coseno a essere negativo. Con $b = 5$, $c = 7$, $\alpha = 120°$ si ha $a^2 = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (-\frac{1}{2}) = 74 + 35 = 109$, cioè $a \approx 10{,}44$, e non $74 - 35 = 39$. Il controllo è immediato: il lato opposto all'angolo ottuso deve risultare il più lungo del triangolo, e $\sqrt{39} \approx 6{,}24$ sarebbe più corto di 7.

5.4 Risolvere i triangoli

5.4.1 I quattro casi

Per i criteri di congruenza di *Matematica 1* (cap. 9 e 10) un triangolo è determinato da tre lati (LLL), da due lati e dall'angolo compreso (LAL), da un lato e due angoli (ALA e LAA). I criteri dicono che il triangolo è unico; i teoremi dei seni e del coseno dicono *come* calcolarne gli elementi mancanti. La Tabella 5.1 riassume la strategia, compreso il quarto caso, due lati e un angolo non compreso (LLA), che non è un criterio di congruenza.

Tabella 5.1 Come risolvere un triangolo qualsiasi. In ogni caso si conclude con un controllo: la somma degli angoli è 180° e al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore.

Dati	Strategia	Triangoli possibili
tre lati (LLL)	gli angoli con il teorema del coseno, a partire da quello opposto al lato maggiore (l'unico che può essere ottuso)	uno, se ogni lato è minore della somma degli altri due
due lati e l'angolo compreso (LAL)	il terzo lato con il teorema del coseno; poi un secondo angolo con il teorema del coseno; il terzo per differenza	uno
un lato e due angoli (ALA, LAA)	il terzo angolo per differenza da 180°; poi i lati con il teorema dei seni	uno, se la somma dei due angoli è minore di 180°
due lati e un angolo non compreso (LLA)	l'angolo opposto al secondo lato con il teorema dei seni, senza dimenticare il supplementare; poi il terzo angolo e il terzo lato	nessuno, uno o due

ESEMPIO SVOLTO

a) Risolvi il triangolo con $b = 5$, $c = 8$, $\alpha = 70°$ (LAL). b) Calcola gli angoli del triangolo di lati $a = 10$, $b = 8$, $c = 7$ (LLL).

a) Il terzo lato: $a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 70° \approx 89 - 80 \cdot 0{,}3420 \approx 61{,}64$, quindi $a \approx 7{,}851$. Un secondo angolo, con il teorema del coseno: $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \dfrac{61{,}64 + 64 - 25}{2 \cdot 7{,}851 \cdot 8} \approx \dfrac{100{,}64}{125{,}62} \approx 0{,}8012$, da cui $\beta \approx 36{,}76°$. Il terzo: $\gamma \approx 180° - 70° - 36{,}76° = 73{,}24°$.

Controllo con il teorema dei seni: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \approx \dfrac{7{,}851}{0{,}9397} \approx 8{,}355$, $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} \approx \dfrac{5}{0{,}5985} \approx 8{,}355$, $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \approx \dfrac{8}{0{,}9575} \approx 8{,}355$ ✓. Il lato maggiore, $c = 8$, è opposto all'angolo maggiore, γ.

b) Si comincia dall'angolo opposto al lato maggiore: $\cos\alpha = \dfrac{64 + 49 - 100}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \dfrac{13}{112} \approx 0{,}1161$, quindi $\alpha \approx 83{,}33°$: il triangolo è acutangolo. Poi $\cos\beta = \dfrac{100 + 49 - 64}{2 \cdot 10 \cdot 7} = \dfrac{85}{140} \approx 0{,}6071$, $\beta \approx 52{,}62°$. Infine $\gamma \approx 180° - 83{,}33° - 52{,}62° = 44{,}05°$. **Controllo:** $\cos\gamma = \dfrac{100 + 64 - 49}{2 \cdot 10 \cdot 8} = \dfrac{115}{160} \approx 0{,}7188$ dà proprio $\gamma \approx 44{,}05°$ ✓.

Nel caso LAL, per il secondo angolo si potrebbe usare anche il teorema dei seni, ma con una cautela: il seno non distingue un angolo acuto dal suo supplementare, e la calcolatrice restituisce sempre l'angolo acuto. Si applica allora il teorema dei seni a uno dei due lati *minori*, il cui angolo opposto è certamente acuto. Il teorema del coseno, invece, non ha ambiguità: fra 0° e 180° il coseno determina l'angolo.

5.4.2 Il caso ambiguo

Supponiamo noti $\alpha = 30°$, $b = AC = 10$ e il lato opposto ad α, $a = 6$ (Figura 5.4). Il vertice B deve stare sull'altro lato dell'angolo α, a distanza 6 da C: è un'intersezione fra una semiretta e la circonferenza di centro C e raggio 6, e le intersezioni possono essere due, una o nessuna. Per questo il caso LLA si chiama **caso ambiguo**.

Con il teorema dei seni: $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b \operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{10 \cdot 0{,}5}{6} \approx 0{,}8333$. La calcolatrice dà $\beta_1 = \arcsen 0{,}8333 \approx 56{,}44°$, ma anche il supplementare $\beta_2 \approx 123{,}56°$ ha lo stesso seno, e in entrambi i casi $\alpha + \beta < 180°$: i triangoli sono **due**. Nel primo $\gamma_1 \approx 93{,}56°$ e $c_1 = \dfrac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha} \approx 11{,}98$; nel secondo $\gamma_2 \approx 26{,}44°$ e $c_2 \approx 5{,}34$.

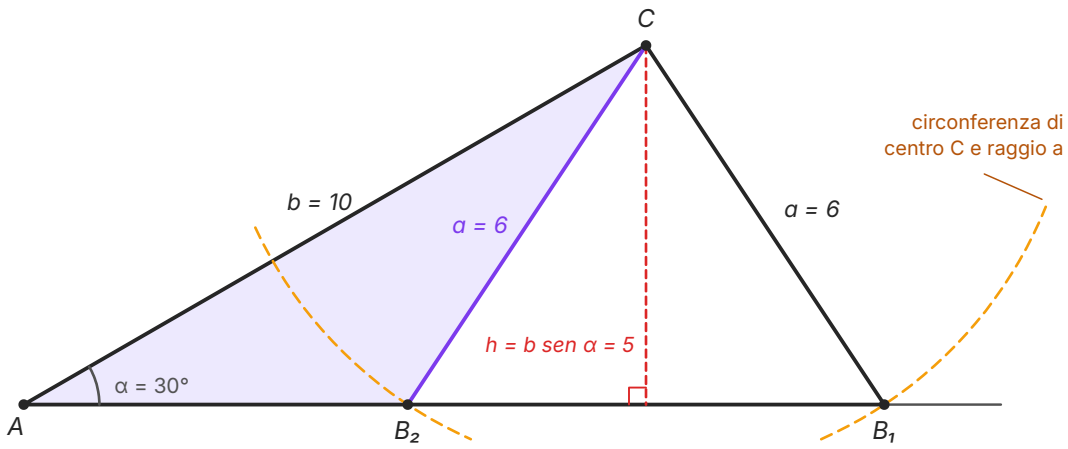


Figura 5.4 Il caso ambiguo: con α = 30°, b = 10 e a = 6 la circonferenza di centro C e raggio 6 (tratteggiata) taglia il lato dell'angolo in due punti, B_1 e B_2. I triangoli possibili sono AB_1C (con γ_1 ottuso) e AB_2C (in viola, con β_2 ottuso), perché l'altezza $h = b$ sen α = 5 è minore di a, e a è minore di b.

Quando accade? Se α è acuto, la distanza di C dal lato dell'angolo è l'altezza $h = b$ sen α. Se $a < h$ non c'è alcun triangolo (il teorema dei seni darebbe sen $\beta > 1$); se $a = h$ ce n'è uno, rettangolo in B; se $h < a < b$ ce ne sono due; se $a \geq b$ uno solo. Se invece α è retto od ottuso, è l'angolo maggiore del triangolo: c'è un triangolo, uno solo, se $a > b$, nessuno altrimenti. Più che la casistica conta l'abitudine: dopo arcsen considera sempre anche il supplementare, e controlla che la somma degli angoli resti minore di 180°.

5.4.3 Misure inaccessibili

I teoremi dei seni e del coseno permettono di calcolare distanze che non si possono misurare direttamente, partendo da una sola distanza misurata, la **base**, e da alcuni angoli, che si misurano con un teodolite o, a scuola, con un goniometro e un mirino. Il metodo si chiama **triangolazione**.

ESEMPIO SVOLTO

L'altezza di una torre da due stazioni. La base H di una torre non è raggiungibile. Da un punto A del terreno pianeggiante la cima T si vede sotto un angolo di elevazione di 25°; avvicinandosi di 50 m in linea retta verso la torre, fino al punto B, l'angolo di elevazione diventa 40°. Quanto è alta la torre? (Trascura l'altezza dello strumento.)

Il triangolo ABT (Figura 5.5). L'angolo in A è 25°, quello in B è il supplementare di 40°, cioè 140°, quindi quello in T è $180° - 25° - 140° = 15°$. È un caso ALA: con il teorema dei seni

$$BT = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} 25°}{\operatorname{sen} 15°} \approx \frac{50 \cdot 0{,}4226}{0{,}2588} \approx 81{,}64 \text{ m}$$

L'altezza. Nel triangolo rettangolo BHT l'altezza è il cateto opposto all'angolo di 40°: $h = BT \cdot \operatorname{sen} 40° \approx 81{,}64 \cdot 0{,}6428 \approx 52{,}5$ m. Inoltre $BH = BT \cdot \cos 40° \approx 62{,}5$ m.

Controllo. Dal triangolo rettangolo AHT: $\operatorname{tg} 25° = \frac{h}{AH} \approx \frac{52{,}48}{112{,}54} \approx 0{,}4663$, e infatti $\operatorname{tg} 25° \approx 0{,}4663$ ✓.

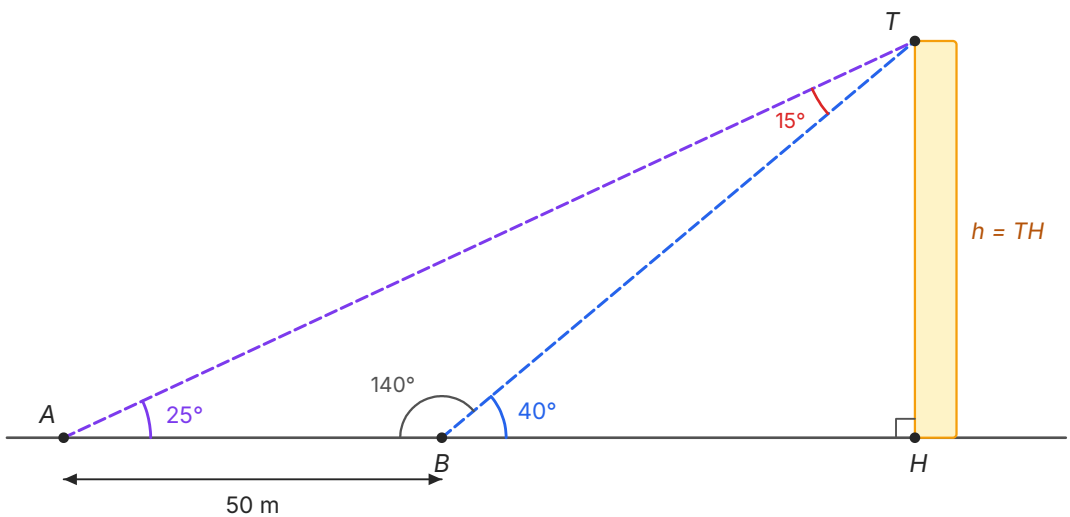


Figura 5.5 La misura dell'altezza di una torre da due stazioni A e B, allineate con la base H e distanti 50 m. Gli angoli di elevazione sono 25° e 40°; nel triangolo ABT gli angoli sono 25°, 140° e 15°. Il teorema dei seni dà BT, il triangolo rettangolo BHT dà $h = BT \operatorname{sen} 40° \approx 52{,}5$ m. La figura è in scala.

Con lo stesso schema si misura la larghezza di un fiume: si fissano sulla propria riva due paletti A e B a distanza nota e si mira un albero C sulla riva opposta, misurando gli angoli $\angle CAB$ e $\angle CBA$. Il triangolo ABC è noto (ALA) e la larghezza è la sua altezza relativa ad AB; la distanza di una nave dalla costa si misura allo stesso modo, e la nave fa la parte dell'albero.

COLLEGAMENTI

Fisica: il piano inclinato. Su un piano inclinato di un angolo α sull'orizzontale, il peso $P = mg$ di un corpo si scompone in una componente parallela al piano, $P_{\parallel} = P$ sen α, che lo fa scivolare, e in una perpendicolare, $P_{\perp} = P$ cos α, che lo preme contro il piano. L'angolo fra il peso e la perpendicolare al piano è proprio α, perché ha i lati perpendicolari a quelli dell'angolo di inclinazione (Figura 5.8, a destra).

Per una cassa di 12 kg ($P \approx 12 \cdot 9{,}8 = 117{,}6$ N, con $g \approx 9{,}8$ m/s^2) su un piano di 25°: $P_{\parallel} \approx 117{,}6 \cdot 0{,}4226 \approx 49{,}7$ N e $P_{\perp} \approx 117{,}6 \cdot 0{,}9063 \approx 106{,}6$ N. In *Fisica 3* (cap. 7) il piano inclinato si studiava con i triangoli simili, attraverso il rapporto fra l'altezza h e la lunghezza l del piano: quel rapporto è proprio sen α.

APPROFONDIMENTO · ERATOSTENE E LA TRIANGOLAZIONE

Nel III secolo a.C. Eratostene di Cirene misurò la circonferenza della Terra con un solo angolo. Secondo il racconto che ci è giunto, a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole era allo zenit a Siene, mentre ad Alessandria l'ombra di uno gnomone mostrava che i raggi formavano con la verticale un cinquantesimo dell'angolo giro. Se i raggi sono paralleli e le due città stanno sullo stesso meridiano, quello è anche l'angolo al centro della Terra che insiste sull'arco Siene–Alessandria: la circonferenza è 50 volte la distanza fra le due città. Il valore in chilometri dipende dalla lunghezza dello stadio usato da Eratostene, che gli storici discutono ancora.

Il metodo moderno di misurare la Terra è la triangolazione. All'inizio del Seicento l'olandese Willebrord Snell misurò un arco di meridiano con una catena di triangoli: una sola base misurata con cura, poi soltanto angoli, e il teorema dei seni dà, un triangolo dopo l'altro, tutti i lati. Con lo stesso metodo, negli anni della Rivoluzione francese, Delambre e Méchain misurarono l'arco di meridiano fra Dunkerque e Barcellona: su quella misura si fondò la definizione originaria del metro, la decimilionesima parte di un quarto di meridiano terrestre.

5.5 I vettori

5.5.1 Grandezze scalari e vettoriali

Se un amico ti dice «ho camminato per 3 km», sai quanta strada ha fatto, ma non dove è arrivato. La massa, la temperatura, l'energia si descrivono con un numero e un'unità di misura: sono **grandezze scalari**. Lo spostamento, la velocità e la forza richiedono anche una direzione e un verso: sono **grandezze vettoriali**. In *Fisica 3* (cap. 5) le hai rappresentate con frecce e scomposte usando i triangoli notevoli; qui diventano oggetti di calcolo, e le funzioni circolari permettono di trattare qualunque angolo.

Un **segmento orientato** AB è un segmento di cui si stabilisce quale estremo è il primo (la coda A) e quale il secondo (la punta B); si disegna con una freccia da A a B. Due segmenti orien-

tati si dicono **equipollenti** se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione (stanno sulla stessa retta o su rette parallele) e lo stesso verso: uno si ottiene dall'altro con una traslazione (*Matematica 2*, cap. 7). Se AB e CD sono equipollenti e non allineati, $ABDC$ è un parallelogramma.

Un **vettore** è l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti a un segmento orientato dato; ciascuno di essi lo rappresenta. Lo indichiamo con una lettera in grassetto, $\mathbf{v}$. La lunghezza comune dei segmenti è il **modulo** del vettore, $|\mathbf{v}|$ o semplicemente v. Il vettore rappresentato da un segmento «degenere» AA è il **vettore nullo** $\mathbf{0}$, di modulo 0 e senza direzione; il **vettore opposto** di $\mathbf{v}$, indicato con $-\mathbf{v}$, ha lo stesso modulo e la stessa direzione ma verso contrario. Un vettore, dunque, si può disegnare a partire da qualunque punto.

5.5.2 Somma, differenza, prodotto per un numero

Una ragazza cammina 3 km verso est e poi 4 km verso nord: lo spostamento complessivo va dal punto di partenza a quello di arrivo, e per il teorema di Pitagora è lungo 5 km, non 7. La **somma** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ di due vettori si costruisce in due modi equivalenti (Figura 5.6):

- **regola punta-coda:** si disegna $\mathbf{a}$ a partire da un punto O, poi $\mathbf{b}$ a partire dalla punta di $\mathbf{a}$; la somma va dalla coda di $\mathbf{a}$ alla punta di $\mathbf{b}$;
- **regola del parallelogramma:** si disegnano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ a partire dallo stesso punto e si completa il parallelogramma che li ha per lati; la somma è la diagonale uscente da quel punto.

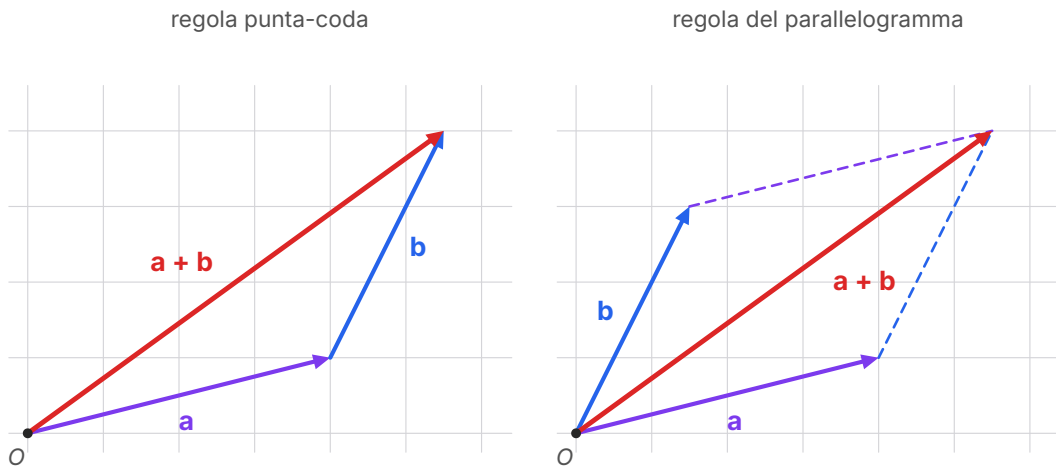


Figura 5.6 La somma dei vettori $\mathbf{a}(4; 1)$ e $\mathbf{b}(1{,}5; 3)$ con la regola punta-coda (a sinistra) e con la regola del parallelogramma (a destra): le due costruzioni danno lo stesso vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (5{,}5; 4)$, perché il lato del parallelogramma opposto a quello che rappresenta $\mathbf{b}$ gli è equipollente. Il quadretto della griglia è l'unità.

Nel triangolo formato da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ogni lato è minore della somma degli altri due, quindi vale la **disuguaglianza triangolare** $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, con l'uguaglianza solo se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno la stessa

direzione e lo stesso verso (o uno dei due è nullo). Il modulo della somma si calcola con il teorema del coseno: se θ è l'angolo fra i due vettori disegnati dallo stesso punto, nel triangolo punta-coda l'angolo opposto alla somma è 180° − θ, e poiché cos(180° − θ) = −cos θ

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta.$$

Per θ = 90° si ritrova il teorema di Pitagora della passeggiata: $\sqrt{9+16} = 5$.

La **differenza** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ è la somma di $\mathbf{a}$ con l'opposto di $\mathbf{b}$: se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ partono dallo stesso punto, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ va dalla punta di $\mathbf{b}$ alla punta di $\mathbf{a}$, ed è l'altra diagonale del parallelogramma. Il **prodotto di un vettore per uno scalare** k (un numero reale) è il vettore $k\mathbf{v}$ di modulo $|k| \cdot |\mathbf{v}|$, con la direzione di $\mathbf{v}$, lo stesso verso se $k > 0$ e verso opposto se $k < 0$; se $k = 0$ si ottiene il vettore nullo. Un vettore di modulo 1 si chiama **versore**: se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\dfrac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ è il versore di $\mathbf{v}$. Valgono le proprietà che ci si aspetta, e con i vettori si calcola come con le espressioni letterali di primo grado:

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (commutativa) e $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (associativa);
- $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;
- $h(k\mathbf{a}) = (hk)\mathbf{a}$, $(h + k)\mathbf{a} = h\mathbf{a} + k\mathbf{a}$, $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.

5.5.3 Le componenti cartesiane

Nel piano cartesiano chiamiamo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi, rappresentati dai segmenti orientati che vanno da O a (1; 0) e da O a (0; 1). Ogni vettore $\mathbf{v}$ si rappresenta con un segmento orientato OP che parte dall'origine; se $P(v_x; v_y)$, il vettore è la somma di un vettore orizzontale e di uno verticale, $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$. I numeri v_x e v_y sono le **componenti cartesiane** di $\mathbf{v}$ e scriviamo $\mathbf{v}(v_x; v_y)$. Se il vettore è rappresentato da AB, le componenti sono le differenze delle coordinate: $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Le componenti sono i cateti, con segno, di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il segmento orientato. Se θ è l'angolo orientato che il vettore forma con il semiasse positivo delle x, il punto P sta sulla circonferenza di raggio $|\mathbf{v}|$ e le definizioni del capitolo 4 danno, per qualunque θ:

$$v_x = |\mathbf{v}|\cos\theta, \quad v_y = |\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\theta; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (v_x \neq 0).$$

Con questa formula si completa il moto del proiettile di *Matematica 3* (cap. 6), che avevamo studiato solo per un lancio a 45°, quando le due componenti della velocità sono uguali. Un pallone calciato con velocità di 20 m/s a 30° sull'orizzontale ha velocità orizzontale $20 \cos 30° = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ m/s, che resta costante, e velocità verticale iniziale 20 sen 30° = 10 m/s, che la gravità riduce; per qualunque angolo di lancio il moto si studia separando le due componenti.

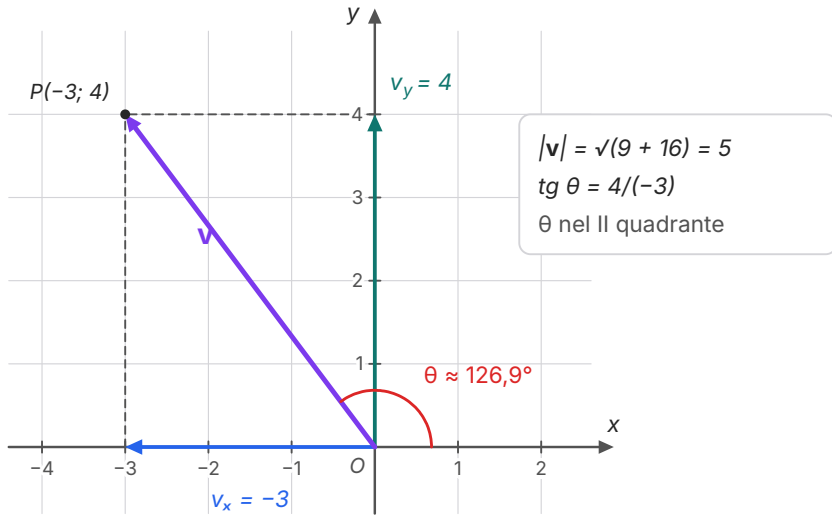


Figura 5.7 Il vettore $\mathbf{v}(-3; 4)$, rappresentato dal segmento orientato OP, è la somma della componente orizzontale $-3\mathbf{i}$ (in blu) e di quella verticale $4\mathbf{j}$ (in verde). Il modulo è 5; l'angolo con il semiasse positivo delle x è $\theta \approx 126{,}9°$, nel II quadrante, mentre la calcolatrice, da $\text{tg}\,\theta = -\frac{4}{3}$, restituisce $-53{,}1°$. Scala uguale sui due assi.

ERRORE FREQUENTE

La direzione dalla tangente ha bisogno del quadrante. Per $\mathbf{v}(-3; 4)$ si ha $\text{tg}\,\theta = -\frac{4}{3}$ e la calcolatrice dà $\text{arctg}(-\frac{4}{3}) \approx -53{,}13°$: un angolo del IV quadrante. Ma il vettore ha la componente x negativa e la y positiva, quindi punta nel II quadrante (Figura 5.7): poiché la tangente ha periodo 180°, l'angolo giusto è $-53{,}13° + 180° = 126{,}87°$. Per $\mathbf{w}(-2; -2)$ la calcolatrice dà 45°, ma il vettore punta nel III quadrante e $\theta = 225°$. Prima di usare arctg, guarda i segni delle componenti.

Poiché $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$, le proprietà delle operazioni danno $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j}$: per sommare due vettori si sommano le componenti, e allo stesso modo si sottraggono e si moltiplicano per un numero:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x;\, a_y + b_y), \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x;\, a_y - b_y), \quad k\mathbf{a} = (ka_x;\, ka_y).$$

Per i vettori della Figura 5.6, $\mathbf{a}(4; 1) + \mathbf{b}(1{,}5; 3) = (5{,}5; 4)$, di modulo $\sqrt{30{,}25 + 16} \approx 6{,}80$: il calcolo in componenti e il disegno danno lo stesso vettore.

Un esempio dalla statica. Due funi tirano un anello fissato a terra: la prima con 50 N lungo l'asse x, la seconda con 30 N a 60° dalla prima. In componenti $\mathbf{F}_1(50; 0)$ e $\mathbf{F}_2(15; 15\sqrt{3})$, perché $30 \cos 60° = 15$ e $30 \operatorname{sen} 60° = 15\sqrt{3}$; quindi la risultante è $\mathbf{R}(65; 15\sqrt{3})$, di modulo

$\sqrt{4225 + 675} = \sqrt{4900} = 70$ N, e forma con la prima fune un angolo θ del I quadrante (le componenti sono positive) con $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{13} \approx 0{,}3997$, cioè $\theta \approx 21{,}79°$. Il teorema del coseno conferma: $50^2 + 30^2 + 2 \cdot 50 \cdot 30 \cdot \cos 60° = 4900$.

5.6 Il prodotto scalare

5.6.1 Definizione e proprietà

Dati due vettori non nulli, l'**angolo tra due vettori** è l'angolo θ, compreso fra 0° e 180°, formato da due segmenti orientati che li rappresentano a partire dallo stesso punto. Il **prodotto scalare** di **a** e **b** è il **numero**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\theta$$

e, per convenzione, è 0 se uno dei due vettori è nullo. Il segno dipende soltanto dall'angolo: il prodotto è positivo se θ è acuto, nullo se è retto, negativo se è ottuso. Il numero $|\mathbf{b}| \cos\theta$ è la misura con segno della **proiezione** di **b** sulla retta di **a**: positiva se cade dalla parte di **a**, negativa se cade dalla parte opposta. Il prodotto scalare è quindi il modulo di **a** moltiplicato per la proiezione di **b** su **a** (Figura 5.8, a sinistra).

Dalla definizione seguono le proprietà. Il prodotto scalare è commutativo, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, perché l'angolo fra i due vettori è lo stesso; vale $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$; vale la proprietà distributiva $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, perché la proiezione di una somma sulla retta di **a** è la somma delle proiezioni. Inoltre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, perché l'angolo di un vettore con sé stesso è 0° e $\cos 0° = 1$. Infine, poiché fra 0° e 180° il coseno si annulla solo in 90°, **due vettori non nulli sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è zero**.

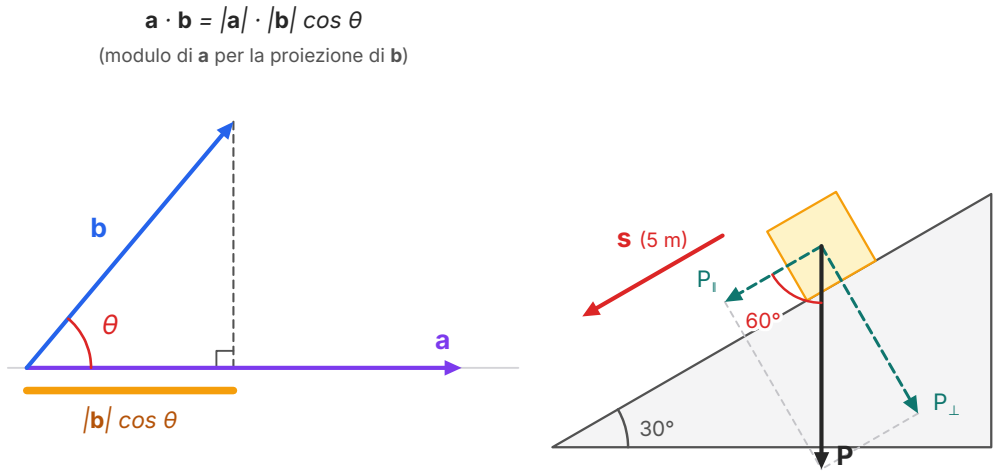


Figura 5.8 A sinistra, il prodotto scalare come proiezione: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ è il prodotto di $|\mathbf{a}|$ per $|\mathbf{b}|\cos\theta$, la proiezione di **b** sulla retta di **a** (segmento arancione). A destra, una cassa scivola di 5 m lungo un piano inclinato di 30°: il peso **P** forma 60° con lo spostamento **s** e si scompone in $P_{\parallel}$, parallela al piano, e $P_{\perp}$, perpendicolare.

5.6.2 Il prodotto scalare in componenti

Per calcolare il prodotto scalare non serve conoscere l'angolo: bastano le componenti. Siano $\mathbf{a}(a_x;\, a_y)$ e $\mathbf{b}(b_x;\, b_y)$ non nulli e non paralleli, rappresentati da segmenti orientati con la coda nello stesso punto: con il vettore $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, che va dalla punta di **b** alla punta di **a**, formano un triangolo in cui l'angolo opposto al lato $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ è θ. Per il teorema del coseno

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Scriviamo i moduli con le componenti: $(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + b_x{}^2 + b_y{}^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Sviluppando i quadrati a sinistra, i termini $a_x{}^2$, $a_y{}^2$, $b_x{}^2$, $b_y{}^2$ si semplificano e resta $-2a_xb_x - 2a_yb_y = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, cioè la formula seguente. Se i due vettori sono paralleli, o uno è nullo, la formula si verifica direttamente. c.v.d.

IN SINTESI

Prodotto scalare. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta$, dove $\theta \in [0°;\, 180°]$ è l'angolo fra i due vettori. È un numero: positivo, nullo o negativo secondo che θ sia acuto, retto od ottuso.

In componenti: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y$. **Angolo fra due vettori non nulli:** $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$.

Proprietà: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$; $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$; per **a**, **b** non nulli, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Due esempi. a) L'angolo fra $\mathbf{a}(4; 2)$ e $\mathbf{b}(-1; 3)$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -4 + 6 = 2$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{20}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{10}$, quindi $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0{,}1414$ e $\theta \approx 81{,}87°$; qui la calcolatrice non inganna, perché arccos restituisce proprio un angolo fra 0° e 180°. b) Il vettore $\mathbf{c}(k; 3)$ è perpendicolare a $\mathbf{d}(6; -4)$ se $6k - 12 = 0$, cioè per $k = 2$.

Una retta di coefficiente angolare m ha la direzione del vettore $(1; m)$, perché avanzando di 1 in orizzontale sale di m. Due rette di coefficienti m e m' sono quindi perpendicolari se $(1; m) \cdot (1; m') = 1 + mm' = 0$, cioè $mm' = -1$: è la condizione di *Matematica 2* (cap. 5), ritrovata con i vettori. Nello spazio i vettori hanno tre componenti e la formula acquista un termine $a_z b_z$.

Attenzione: a differenza del prodotto di due numeri, un prodotto scalare nullo **non** richiede un fattore nullo: $(3; 4) \cdot (-8; 6) = -24 + 24 = 0$, e i due vettori sono semplicemente perpendicolari. E il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è un numero, mentre il prodotto per uno scalare $k\mathbf{v}$ è un vettore.

5.6.3 Il ruolo in fisica: lavoro e potenza

In *Fisica 3* (cap. 15) il **lavoro** di una forza costante era il prodotto dello spostamento per la componente della forza lungo lo spostamento. Quella componente è $|\mathbf{F}| \cos\theta$: il lavoro è un prodotto scalare.

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos\theta$$

Il lavoro si misura in joule (1 J = 1 N · 1 m) e il suo segno è quello del prodotto scalare: positivo (lavoro motore) se la forza forma un angolo acuto con lo spostamento, nullo se è perpendicolare, negativo (lavoro resistente) se forma un angolo ottuso. Una cassa di 8 kg, il cui peso è $|\mathbf{P}| \approx 8 \cdot 9{,}8 = 78{,}4$ N, scivola di 5 m lungo un piano inclinato di 30° (Figura 5.8, a destra). L'angolo fra il peso, verticale, e lo spostamento, diretto lungo il piano verso il basso, è 90° − 30° = 60°, quindi

$$W_P = 78{,}4 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 196 \text{ J}.$$

Lo stesso numero si ottiene con la componente del peso parallela al piano, 78,4 · sen 30° = 39,2 N, moltiplicata per 5 m, oppure con il peso per il dislivello, 78,4 N · 2,5 m. La reazione del piano, perpendicolare allo spostamento, compie lavoro nullo ($\cos 90° = 0$); un attrito di 15 N, opposto allo spostamento ($\theta = 180°$), compie il lavoro $15 \cdot 5 \cdot \cos 180° = -75$ J.

La **potenza** è il lavoro compiuto nell'unità di tempo, $P = \frac{W}{\Delta t}$, e si misura in watt (1 W = 1 J/s). Quando una forza costante agisce su un corpo che si muove con velocità costante $\mathbf{v}$, in un tempo Δt lo spostamento è $\mathbf{v}\Delta t$, e la potenza è ancora un prodotto scalare: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Chi trascina una slitta a 1,5 m/s con una fune che tira con 60 N a 30° sull'orizzontale sviluppa $60 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 30° \approx 78$ W.

SINTESI

- In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente, e all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo. Risolvere un triangolo vuol dire calcolarne tutti i lati e gli angoli.
- La pendenza di una strada è $100 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ per cento: una pendenza del 100% corrisponde a 45°. Angoli di elevazione e di depressione permettono di calcolare altezze inaccessibili.
- L'area di un triangolo è $\frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$, quella di un parallelogramma $ab \operatorname{sen} \gamma$; angoli supplementari danno la stessa area.
- Il segmento circolare di angolo al centro α (in radianti) ha area $\frac{1}{2} r^2(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$, per ogni α fra 0 e 2π.
- Teorema della corda: $BC = 2r \operatorname{sen} \alpha$, con α angolo alla circonferenza che insiste sulla corda. Applicato ai tre lati dà il teorema dei seni: $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r$.
- Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$; per $\alpha = 90°$ è il teorema di Pitagora. Se a è il lato maggiore, il triangolo è acutangolo, rettangolo od ottusangolo secondo che a^2 sia minore, uguale o maggiore di $b^2 + c^2$.
- LLL e LAL si risolvono con il teorema del coseno, ALA e LAA con il teorema dei seni; nel caso LLA i triangoli possono essere zero, uno o due (caso ambiguo): dopo arcsen non si dimentica il supplementare.
- Con una base misurata e alcuni angoli (triangolazione) si calcolano distanze e altezze inaccessibili.
- Un vettore ha modulo, direzione e verso; si somma con la regola punta-coda o del parallelogramma, e $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.
- Componenti: $v_x = |\mathbf{v}| \cos \theta$, $v_y = |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; l'angolo θ dalla tangente va scelto nel quadrante indicato dai segni delle componenti. Le operazioni si eseguono componente per componente.
- Il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$ è un numero; per vettori non nulli è zero se e solo se sono perpendicolari.
- Il lavoro di una forza costante è $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$: positivo, nullo o negativo secondo l'angolo fra forza e spostamento; la potenza è $P = \frac{W}{\Delta t}$.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● In un triangolo rettangolo di ipotenusa a, il cateto b opposto all'angolo acuto β misura:
   - **A.** $a \cos \beta$
   - **B.** $a \operatorname{sen} \beta$
   - **C.** $a \operatorname{tg} \beta$
   - **D.** $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \beta}$

2. ● Un cartello stradale indica una pendenza del 100%. La strada forma con l'orizzontale un angolo di:
   - **A.** 90°
   - **B.** 60°
   - **C.** 45°
   - **D.** 100°

3. ● L'area del triangolo che ha due lati di 6 cm e 8 cm formanti un angolo di 150° è:
   - **A.** 12 cm²
   - **B.** 24 cm²
   - **C.** $12\sqrt{3}$ cm²
   - **D.** $24\sqrt{3}$ cm²

4. ●● Un triangolo ha lati $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$. Il triangolo è:
   - **A.** acutangolo
   - **B.** rettangolo
   - **C.** impossibile, perché non vale la disuguaglianza triangolare
   - **D.** ottusangolo

5. ●● Dati $\mathbf{a}(2; -3)$ e $\mathbf{b}(6; 4)$, il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:
   - **A.** è il vettore $(12; -12)$
   - **B.** vale 0, quindi i vettori sono perpendicolari
   - **C.** vale 0, quindi uno dei due vettori è nullo
   - **D.** vale 24

6. ●● Quanti triangoli hanno $\alpha = 30°$, $b = 8$ e $a = 3$ (con a opposto ad α)?
   - **A.** nessuno
   - **B.** uno, rettangolo
   - **C.** uno, ottusangolo
   - **D.** due

7. ●● Il vettore $\mathbf{w}(-2; -2)$ forma con il semiasse positivo delle x un angolo di:

   A. 45°

   B. 135°

   C. 225°

   D. 315°

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Con $\alpha = 90°$ il teorema del coseno diventa il teorema di Pitagora.

   b) Nel caso LLA il teorema dei seni dà sempre un solo triangolo.

   c) Per due vettori qualsiasi $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

   d) Il prodotto scalare di due vettori è un vettore perpendicolare a entrambi.

   e) Un segmento circolare di angolo al centro α, in radianti, ha area $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$.

9. ● Completa.

   a) In una circonferenza una corda è uguale al _____ per il seno di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste su di essa.

   b) In ogni triangolo $\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} =$ _____, dove r è il raggio della circonferenza _____.

   c) Se $\mathbf{v}$ forma l'angolo θ con il semiasse positivo delle x, allora $v_x = |\mathbf{v}|$ _____ e $v_y = |\mathbf{v}|$ _____.

   d) Due vettori non nulli sono perpendicolari se e solo se il loro _____ è uguale a zero.

Calcolare

10. ● Risolvi il triangolo ABC, rettangolo in A, con ipotenusa $a = 20$ cm e $\beta = 32°$.

11. ● I cateti di un triangolo rettangolo misurano 9 cm e 12 cm. Calcola l'ipotenusa e gli angoli acuti.

12. ●● Calcola l'area: a) del triangolo con due lati di 9 cm e 14 cm che formano un angolo di 40°; b) del parallelogramma di lati 5 cm e 8 cm con un angolo di 120°.

13. ●● In un cerchio di raggio 8 cm calcola l'area del segmento circolare minore staccato da una corda che corrisponde a un angolo al centro: a) di 120°; b) di 90°. Dai il risultato esatto e approssimato.

14. ●● Risolvi il triangolo con $b = 8$, $c = 5$, $\alpha = 60°$ (LAL).

15. ●● Calcola gli angoli del triangolo di lati 5, 7 e 9. Il triangolo è acutangolo od ottusangolo?

16. ●● Risolvi il triangolo con $a = 10$, $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$, e calcola il raggio della circonferenza circoscritta.

17. ●● Nel triangolo ABC si sa che $\alpha = 40°$, $a = 9$, $b = 12$. Quanti triangoli soddisfano i dati? Risolvili.

18. ● Dati $\mathbf{a}(3; -1)$ e $\mathbf{b}(-2; 4)$, calcola $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ e $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

19. ●● a) Scrivi le componenti del vettore $\mathbf{v}$ di modulo 10 che forma un angolo di 150° con il semiasse positivo delle x. b) Calcola il modulo e l'angolo con il semiasse positivo delle x del vettore $\mathbf{w}(-5; -12)$.

20. ●● a) Calcola il prodotto scalare e l'angolo fra $\mathbf{a}(5; 2)$ e $\mathbf{b}(-1; 3)$. b) Calcola $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ sapendo che $|\mathbf{u}| = 4$, $|\mathbf{v}| = 3$ e l'angolo fra i due vettori è 120°. c) Per quale k il vettore $(k; 2)$ è perpendicolare a $(3; -1)$?

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che l'area di un parallelogramma di lati a e b che formano un angolo γ è ab sen γ. Fra tutti i parallelogrammi con i lati assegnati, quale ha l'area massima? Perché?

22. ●● Spiega perché, nel teorema della corda, non importa su quale dei due archi si trovi il vertice dell'angolo alla circonferenza.

23. ●● Trova l'errore. «Nel triangolo con $b = 4$, $c = 6$ e $\alpha = 120°$ si ha $a^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0{,}5 = 28$, quindi $a \approx 5{,}29$.» Correggi il calcolo e spiega quale controllo avrebbe rivelato subito l'errore.

24. ●●● Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ i vettori rappresentati da due lati consecutivi di un rombo, uscenti dallo stesso vertice. Esprimi le diagonali con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e dimostra con il prodotto scalare che sono perpendicolari.

25. ●● Usando le proprietà del prodotto scalare, dimostra che $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Deduci che $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ se e solo se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono perpendicolari: quale teorema della geometria hai ritrovato?

Problemi

26. ●● Una strada di montagna ha pendenza costante del 12%. a) Quale angolo forma con l'orizzontale? b) Di quanti metri si sale percorrendo 3 km di strada? c) Una rampa forma un angolo di 3° con l'orizzontale: qual è la sua pendenza?

27. ●● Per misurare la larghezza di un fiume a sponde parallele si fissano su una riva due paletti A e B a 60 m di distanza e si mira un albero C sulla riva opposta: $\angle CAB = 70°$ e $\angle CBA = 48°$. Quanto è largo il fiume?

28. ●● Dalla cima di un faro, a 40 m sul livello del mare, si vede una barca sotto un angolo di depressione di 4°. Qualche minuto dopo, la barca, che si avvicina in linea retta al faro, si vede sotto un angolo di depressione di 7°. Quanta strada ha percorso la barca?

29. ●● Una cassa di 20 kg viene trascinata per 6 m su per una rampa inclinata di 15°, con una fune che tira con una forza di 150 N e forma un angolo di 20° con la rampa. Calcola il lavoro della forza della fune, il lavoro del peso e il lavoro della reazione normale della rampa ($g \approx 9{,}8$ m/s^2).

Verso la verifica

30. ●● Il triangolo ABC ha lati $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. a) Calcola il coseno e il seno dell'angolo γ opposto al lato maggiore. b) Calcola l'area del triangolo con la formula del seno. c) Calcola il raggio della circonferenza circoscritta.

31. ●● Una barca attraversa un fiume largo 80 m puntando la prua perpendicolarmente alla riva con velocità di 4 m/s rispetto all'acqua; la corrente ha velocità di 1,5 m/s parallela alla riva. a) Calcola il modulo della velocità della barca rispetto alla riva e l'angolo che essa forma con la perpendicolare alla riva. b) Quanto tempo impiega la barca ad attraversare il fiume, e di quanto viene trascinata a valle?

32. ●●● **Sfida.** Nel quadrilatero convesso $ABCD$ si sa che $AB = 6$, $BC = 10$, $\angle ABC = 60°$, $CD = 7$ e $\angle ACD = 45°$. Calcola la diagonale AC, l'area del quadrilatero e la lunghezza del lato AD.

PER APPROFONDIRE

- [MAOT] Maor, *Trigonometric Delights*: la nascita della trigonometria dalle tavole delle corde, il problema delle misure inaccessibili e le grandi triangolazioni geodetiche.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Eratostene e la misura della Terra; la trigonometria dei Greci, degli Indiani e degli Arabi.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: «hai già visto un problema simile?», la domanda che fa riconoscere in una torre, in un fiume e in una nave lo stesso triangolo.

Glossario del capitolo

Angolo di elevazione
Angolo fra il piano orizzontale e la retta che congiunge l'occhio dell'osservatore con un punto più in alto; se il punto è più in basso, angolo di depressione.

Caso ambiguo
Il caso LLA (due lati e un angolo non compreso), in cui i triangoli con i dati assegnati possono essere zero, uno o due.

Circonferenza circoscritta
La circonferenza che passa per i tre vertici di un triangolo; il centro è il circocentro, il diametro è $\frac{a}{\text{sen } \alpha}$.

Componenti cartesiane
I numeri $v_x = |\mathbf{v}| \cos \theta$ e $v_y = |\mathbf{v}| \text{ sen } \theta$ tali che $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$.

Disuguaglianza triangolare
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, con l'uguaglianza solo per vettori con la stessa direzione e lo stesso verso.

Grandezza vettoriale
Grandezza descritta da un modulo, una direzione e un verso, come lo spostamento o la forza; una grandezza scalare è descritta da un solo numero.

Lavoro
Di una forza costante $\mathbf{F}$ lungo uno spostamento $\mathbf{s}$: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, in joule.

Pendenza
Rapporto fra dislivello e spostamento orizzontale, di solito in percentuale: $100 \cdot \text{tg } \alpha$, dove α è l'angolo con l'orizzontale.

Prodotto scalare
Il numero $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$; è nullo per vettori perpendicolari.

Proiezione (di un vettore)
Di un vettore $\mathbf{b}$ sulla retta di $\mathbf{a}$: il numero con segno $|\mathbf{b}| \cos \theta$.

Risolvere un triangolo
Calcolare le misure di tutti i lati e di tutti gli angoli di un triangolo a partire da quelle note.

Segmento circolare
Parte di cerchio compresa fra un arco e la sua corda; con angolo al centro α in radianti ha area $\frac{1}{2} r^2(\alpha - \text{sen } \alpha)$.

Teorema dei seni
In ogni triangolo $\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2r$, con r raggio della circonferenza circoscritta.

Teorema del coseno
In ogni triangolo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (teorema di Carnot); generalizza il teorema di Pitagora.

Teorema della corda
Una corda è uguale al diametro per il seno di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste su di essa: $BC = 2r \text{ sen } \alpha$.

Triangolazione
Metodo di misura che ricava distanze inaccessibili da una base misurata e da angoli, risolvendo una catena di triangoli.

Versore
Vettore di modulo 1; $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori degli assi.

Vettore
Insieme dei segmenti orientati equipollenti a un segmento orientato dato: hanno la stessa lunghezza (il modulo), la stessa direzione e lo stesso verso.

Soluzioni

1. B. Il cateto opposto a un angolo è l'ipotenusa per il seno di quell'angolo.

2. C. tg $\alpha = 1$, cioè $\alpha = 45°$; una pendenza del 100% significa che il dislivello è uguale allo spostamento orizzontale.

3. A. $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen } 150° = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12 \text{ cm}^2$.

4. D. Il lato maggiore è 7 e $49 > 25 + 9 = 34$: l'angolo opposto è ottuso. La disuguaglianza triangolare vale: $3 + 5 > 7$.

5. B. $12 - 12 = 0$; i vettori non sono nulli, quindi sono perpendicolari.

6. A. L'altezza è $h = 8 \cdot \text{sen } 30° = 4 > 3 = a$: la circonferenza di centro C e raggio 3 non raggiunge l'altro lato dell'angolo (il teorema dei seni darebbe $\text{sen } \beta = \frac{4}{3} > 1$).

7. C. tg $\theta = 1$ dà 45° sulla calcolatrice, ma entrambe le componenti sono negative: il vettore è nel III quadrante, $\theta = 45° + 180° = 225°$.

8. a) V. b) F: i triangoli possono essere zero, uno o due (caso ambiguo). c) F: vale $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, con l'uguaglianza solo se i vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso (o uno è nullo). d) F: è un numero (uno scalare). e) V.

9. a) diametro ($2r$). b) $2r$; circoscritta al triangolo. c) cos θ; sen θ. d) prodotto scalare.

10. $\gamma = 58°$; $b = 20 \text{ sen } 32° \approx 10{,}60$ cm; $c = 20 \cos 32° \approx 16{,}96$ cm. Controllo: $10{,}598^2 + 16{,}961^2 \approx 400$.

11. Ipotenusa $\sqrt{81 + 144} = 15$ cm. L'angolo opposto al cateto di 9 cm ha tg $= \frac{9}{12} = 0{,}75$: circa 36,87°; l'altro circa 53,13°.

12. a) $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 14 \cdot \text{sen } 40° \approx 63 \cdot 0{,}6428 \approx 40{,}50 \text{ cm}^2$. b) $5 \cdot 8 \cdot \text{sen } 120° = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \approx 34{,}64 \text{ cm}^2$.

13. a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$: $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot (\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{64\pi}{3} - 16\sqrt{3} \approx 67{,}02 - 27{,}71 \approx 39{,}31$ cm^2. b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $32(\frac{\pi}{2} - 1) = 16\pi - 32 \approx 18{,}27 \text{ cm}^2$.

14. $a^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49$, $a = 7$.

cos $\beta = \frac{49 + 25 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$, $\beta \approx 81{,}79°$; $\gamma \approx 180° - 60° - 81{,}79° = 38{,}21°$. Controllo: $\frac{7}{\text{sen } 60°} \approx 8{,}083$, $\frac{8}{\text{sen } 81{,}79°} \approx 8{,}083$, $\frac{5}{\text{sen } 38{,}21°} \approx 8{,}083$.

15. Angolo opposto a 9: cos $= \frac{49 + 25 - 81}{2 \cdot 7 \cdot 5} = -\frac{7}{70} = -0{,}1$, circa 95,74°: il triangolo è ottusangolo (infatti $81 > 49 + 25$). Opposto a 7: cos $= \frac{81 + 25 - 49}{2 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{57}{90} \approx 0{,}6333$, circa 50,70°. Opposto a 5: circa $180° - 95{,}74° - 50{,}70° = 33{,}56°$ (controllo: cos $= \frac{81 + 49 - 25}{2 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{105}{126} \approx 0{,}8333$, circa 33,56°).

16. $\alpha = 180° - 45° - 75° = 60°$. $b = \frac{10 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 60°} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8{,}165$; $c = \frac{10 \text{ sen } 75°}{\text{sen } 60°} \approx 11{,}154$. $2r = \frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{20}{\sqrt{3}}$, quindi $r = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}77$.

17. $h = 12 \text{ sen } 40° \approx 7{,}71$; poiché $h < 9 < 12$ i triangoli sono due. sen $\beta = \frac{12 \text{ sen } 40°}{9} \approx 0{,}8571$. Primo: $\beta_1 \approx 58{,}99°$, $\gamma_1 \approx 81{,}01°$, $c_1 = \frac{9 \text{ sen } \gamma_1}{\text{sen } 40°} \approx 13{,}83$. Secondo: $\beta_2 \approx 121{,}01°$, $\gamma_2 \approx 18{,}99°$, $c_2 \approx 4{,}56$.

18. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1; 3)$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (5; -5)$; $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = (6 + 6; -2 - 12) = (12; -14)$; $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

19. a) $v_x = 10 \cos 150° = -5\sqrt{3} \approx -8{,}66$, $v_y = 10 \operatorname{sen} 150° = 5$. b) $|\mathbf{w}| = \sqrt{25 + 144} = 13$; $\operatorname{tg} \theta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{arctg} \frac{12}{5} \approx 67{,}38°$, ma il vettore è nel III quadrante: $\theta \approx 247{,}38°$.

20. a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -5 + 6 = 1$; $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{290}} \approx 0{,}0587$, $\theta \approx 86{,}63°$. b) $4 \cdot 3 \cdot \cos 120° = -6$. c) $3k - 2 = 0$, $k = \frac{2}{3}$.

21. Una diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti (*Matematica 1*), ciascuno con i lati a, b e l'angolo compreso γ, quindi di area $\frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$; l'area totale è $ab \operatorname{sen} \gamma$ (se si prende l'altro angolo, $180° - \gamma$, il seno è lo stesso). Poiché $\operatorname{sen} \gamma \leq 1$, con uguaglianza solo per $\gamma = 90°$, l'area massima, ab, è quella del rettangolo.

22. Traccia di risposta. Se il vertice A e il punto D (estremo del diametro per B) stanno sullo stesso arco, $\angle BDC \cong \angle BAC$ perché insistono sullo stesso arco. Se stanno su archi diversi, $ABDC$ è un quadrilatero inscritto e gli angoli in A e in D sono supplementari: hanno lo stesso seno. In entrambi i casi $BC = 2r \operatorname{sen} \angle BDC = 2r \operatorname{sen} \alpha$.

23. Il coseno di 120° è $-\frac{1}{2}$, non 0,5: $a^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 52 + 24 = 76$, $a = 2\sqrt{19} \approx 8{,}72$. Controllo: il lato opposto all'angolo ottuso deve essere il maggiore, e 5,29 è minore di 6.

24. Le diagonali sono $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (regola del parallelogramma e differenza). Per la distributività e la commutatività, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$. In un rombo i lati sono uguali, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, quindi il prodotto è 0 e, poiché le diagonali non sono nulle, sono perpendicolari. c.v.d.

25. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (distributività e commutatività). L'uguaglianza $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ vale se e solo se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, cioè (per vettori non nulli) se e solo se sono perpendicolari: è il teorema di Pitagora con il suo inverso, applicato al triangolo punta-coda.

26. a) $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}12 \approx 6{,}84°$. b) I 3 km sono misurati lungo la strada (ipotenusa): $3000 \cdot \operatorname{sen} 6{,}84° \approx 357$ m. c) $100 \cdot \operatorname{tg} 3° \approx 5{,}24\%$.

27. $\angle ACB = 180° - 70° - 48° = 62°$. $AC = \frac{60 \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 62°} \approx \frac{60 \cdot 0{,}7431}{0{,}8829} \approx 50{,}50$ m. La larghezza è la distanza di C dalla retta AB: $AC \cdot \operatorname{sen} 70° \approx 50{,}50 \cdot 0{,}9397 \approx 47{,}5$ m.

28. L'angolo di depressione è uguale all'angolo di elevazione dalla barca (angoli alterni). Distanze dalla base del faro: $\frac{40}{\operatorname{tg} 4°} \approx 572{,}0$ m e $\frac{40}{\operatorname{tg} 7°} \approx 325{,}8$ m. La barca ha percorso circa $572{,}0 - 325{,}8 \approx 246$ m.

29. Fune: $W = 150 \cdot 6 \cdot \cos 20° \approx 845{,}7$ J. Peso ($P = 20 \cdot 9{,}8 = 196$ N): l'angolo fra il peso e lo spostamento, che sale lungo la rampa, è $90° + 15° = 105°$, quindi $W = 196 \cdot 6 \cdot \cos 105° \approx -304{,}4$ J (oppure: $-P \cdot h$ con $h = 6 \operatorname{sen} 15° \approx 1{,}553$ m). Reazione normale: perpendicolare allo spostamento, lavoro nullo.

30. a) $\cos \gamma = \frac{169 + 196 - 225}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{140}{364} = \frac{5}{13}$; $\operatorname{sen} \gamma = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ (positivo, perché γ è un angolo di un triangolo). b) $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \frac{12}{13} = 84$. c) $2r = \frac{15}{12/13} = \frac{65}{4}$, $r = \frac{65}{8} = 8{,}125$.

31. a) Le due velocità sono perpendicolari: $|\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 2{,}25} = \sqrt{18{,}25} \approx 4{,}27$ m/s; l'angolo con la perpendicolare alla riva ha $\operatorname{tg} = \frac{1{,}5}{4} = 0{,}375$, circa 20,56°. b) Il moto perpendicolare alla riva avviene con la componente di 4 m/s: $t = \frac{80}{4} = 20$ s; nello stesso tempo la corrente trascina la barca di $1{,}5 \cdot 20 = 30$ m a valle.

32. Teorema del coseno in ABC: $AC^2 = 36 + 100 - 60 = 76$, $AC = 2\sqrt{19} \approx 8{,}718$. Area (somma di ABC e ACD, con la formula del seno): $15\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{38}}{2} \approx 25{,}98 + 21{,}58 \approx 47{,}56$. Teorema del coseno in ACD: $AD^2 = 76 + 49 - 14\sqrt{38} \approx 38{,}70$, $AD \approx 6{,}22$.