CAPITOLO

4

Le funzioni circolari

Un punto che gira su una circonferenza torna sempre dove è già stato: per questo le sue coordinate sono il linguaggio di tutto ciò che si ripete.

OBIETTIVI

1. Misurare angoli orientati di ampiezza qualsiasi in gradi e in radianti, e calcolare archi e settori.
2. Definire seno, coseno e tangente sulla circonferenza goniometrica, usare la relazione fondamentale e i valori degli angoli notevoli.
3. Ricondurre ogni angolo al primo quadrante con le simmetrie degli angoli associati.
4. Descrivere i grafici e le proprietà delle funzioni circolari e leggere ampiezza, periodo e fase di una sinusoide, anche come modello di un fenomeno periodico.
5. Dimostrare la formula di sottrazione del coseno e usare le formule di addizione e di duplicazione.
6. Risolvere le equazioni goniometriche elementari e quelle che vi si riconducono, anche con le funzioni inverse sulla calcolatrice.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Angoli orientati e radianti 2
4.2 Seno, coseno e tangente 3
4.3 Gli angoli associati 7
4.4 I grafici delle funzioni circolari 9
4.5 Formule di addizione e di duplicazione 14
4.6 Equazioni goniometriche elementari 18

Matematica 4 · Parte II · Funzioni circolari, vettori e spazio · versione 1.0
Capitolo 4: Le funzioni circolari · pagine 103–130 del volume completo · estratto per lo studio

Il Sole non sorge ogni giorno alla stessa ora: in una città italiana le ore di luce passano da circa nove, a dicembre, a più di quindici, a giugno, e poi tornano indietro, anno dopo anno. Una corda di chitarra pizzicata vibra avanti e indietro centinaia di volte al secondo; l'acqua del mare sale e scende con la marea; la cabina di una ruota panoramica si alza e si abbassa a ogni giro. Sono tutti **fenomeni periodici**: dopo un certo intervallo di tempo, il periodo, ricominciano uguali.

Per descriverli serve una famiglia di funzioni che si ripetano da sole. La matematica le trova in una figura antica, la circonferenza: un punto che la percorre torna dopo ogni giro nella stessa posizione, e le sue coordinate si ripetono con lui. Da questa idea nascono il **seno**, il **coseno** e la **tangente**, le **funzioni circolari** (o goniometriche) di questo capitolo. Ne vedremo le definizioni, i valori esatti per gli angoli più importanti, i grafici e le formule che le legano; alla fine sapremo risolvere le equazioni più semplici in cui compaiono. Nel capitolo 5 le useremo per risolvere i triangoli e per lavorare con i vettori.

4.1 Angoli orientati e radianti

4.1.1 Che cosa sappiamo già

In *Matematica 3* (cap. 4) abbiamo introdotto la misura degli angoli in radianti. Archi che insistono sullo stesso angolo al centro in circonferenze diverse sono proporzionali ai raggi, quindi il rapporto tra la lunghezza l dell'arco e il raggio r dipende soltanto dall'angolo: è la sua **misura in radianti**, $\alpha = \dfrac{l}{r}$. Un **radiante** è l'angolo al centro che insiste su un arco lungo quanto il raggio, circa 57,3°. L'angolo giro misura 2π, l'angolo piatto π, l'angolo retto $\dfrac{\pi}{2}$, e la proporzione $\alpha° : 180° = \alpha : \pi$ permette di passare da un'unità all'altra (Tabella 4.1): da gradi a radianti si moltiplica per $\dfrac{\pi}{180°}$, da radianti a gradi per $\dfrac{180°}{\pi}$.

Tabella 4.1 Angoli notevoli in gradi e in radianti.

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Quando un angolo è espresso in radianti di solito non si scrive l'unità: «l'angolo $\dfrac{\pi}{3}$» significa $\dfrac{\pi}{3}$ rad, cioè 60°. Con gli angoli in radianti le formule per gli archi e i settori di un cerchio di

raggio r sono semplicissime: l'arco è lungo $l = \alpha r$ e il settore ha area $A = \frac{1}{2}\alpha r^2$. Per esempio, in venti minuti la lancetta dei minuti di un orologio, lunga 12 cm, ruota di un terzo di giro, cioè di $\frac{2\pi}{3}$: la sua punta percorre un arco di $\frac{2\pi}{3} \cdot 12 = 8\pi \approx 25{,}1$ cm e la lancetta spazza un settore di $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 144 = 48\pi \approx 151$ cm^2.

4.1.2 Angoli di ampiezza qualsiasi

Finora un angolo è stato una parte di piano compresa tra due semirette, e la sua ampiezza non superava l'angolo giro. Per descrivere una rotazione serve qualcosa di più. Un **angolo orientato** è un angolo in cui si distingue un *lato origine* e un *lato termine*: si immagina che il lato origine ruoti attorno al vertice fino a sovrapporsi al lato termine. Per convenzione l'angolo è **positivo** se la rotazione avviene in verso antiorario, **negativo** se avviene in verso orario, come per le rotazioni di *Matematica 2* (cap. 7).

Un angolo orientato può anche superare l'angolo giro: una ruota che compie un giro e mezzo in verso antiorario descrive un angolo di 540°, cioè 3π. Gli angoli α e $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, hanno lo stesso lato termine, perché differiscono per un numero intero di giri. Per esempio $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ e $-\frac{7\pi}{4}$ individuano la stessa posizione finale della semiretta. Per ricondurre un angolo all'intervallo $[0; 2\pi[$ si tolgono (o si aggiungono) giri interi, come fa un orologio che dopo dodici ore ricomincia da capo: $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$, e $1110° = 3 \cdot 360° + 30°$.

4.2 Seno, coseno e tangente

4.2.1 La circonferenza goniometrica

Fissiamo nel piano cartesiano la circonferenza con centro nell'origine O e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 = 1$: è la **circonferenza goniometrica**. Disegniamo ogni angolo orientato α con il vertice in O e il lato origine sul semiasse positivo delle x. Il lato termine incontra la circonferenza in un punto P, il *punto associato* ad α; il punto $A(1; 0)$, da cui partono le rotazioni, corrisponde all'angolo 0 (Figura 4.1).

IN SINTESI

Sia P il punto della circonferenza goniometrica associato all'angolo α.

Il **coseno** di α, $\cos\alpha$, è l'ascissa di P; il **seno** di α, $\operatorname{sen}\alpha$, è l'ordinata di P: $P(\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\alpha)$.

La **tangente** di α è il rapporto $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, definita quando $\cos\alpha \neq 0$, cioè per $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

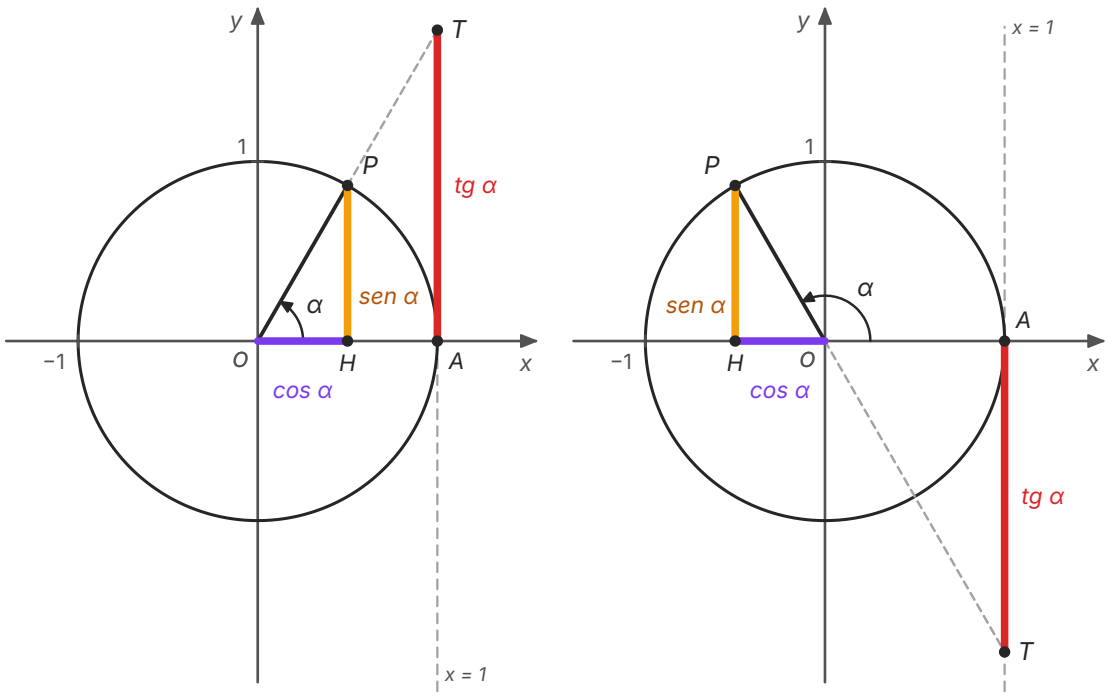

Figura 4.1 La circonferenza goniometrica. Il punto P associato all'angolo α ha coordinate $(\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\alpha)$: il coseno è il segmento orientato OH sull'asse x, il seno è HP. La retta OP incontra la retta $x = 1$ nel punto $T(1;\ \operatorname{tg}\alpha)$. A sinistra $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; a destra $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, nel II quadrante: il coseno e la tangente sono negativi e T si trova sotto l'asse x.

Seno e coseno sono definiti per ogni angolo, e poiché P sta su una circonferenza di raggio 1 le sue coordinate non superano 1 in valore assoluto: $-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$ e $-1 \le \cos\alpha \le 1$. Angoli che differiscono di un numero intero di giri individuano lo stesso punto P, quindi hanno lo stesso seno e lo stesso coseno: $\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$.

Anche la tangente ha un significato geometrico. Tracciamo la retta $x = 1$, tangente alla circonferenza in A, e prolunghiamo il raggio OP fino a incontrarla nel punto T. I triangoli rettango-

li OHP e OAT sono simili, quindi $AT : OA = HP : OH$; poiché $OA = 1$, l'ordinata di T è proprio $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$. C'è di più: la retta OP passa per l'origine e per $T(1; \text{tg } \alpha)$, quindi ha equazione $y = (\text{tg } \alpha)\, x$. Il **coefficiente angolare** di una retta (vedi *Matematica 2*, cap. 5) è la tangente dell'angolo α che la retta forma con il semiasse positivo delle x: $m = \text{tg } \alpha$. La bisettrice $y = x$ forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$, e infatti $\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$; le rette verticali non hanno coefficiente angolare, come $\frac{\pi}{2}$ non ha tangente.

Il reciproco della tangente si chiama **cotangente**: $\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$, definita per $\alpha \neq k\pi$. In questo volume la useremo poco.

4.2.2 La relazione fondamentale

Il punto $P(\cos \alpha; \text{sen } \alpha)$ sta sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Sostituendo le sue coordinate nell'equazione (cioè applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHP) otteniamo la **relazione fondamentale della goniometria**:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{per ogni angolo } \alpha$$

Qui $\text{sen}^2\alpha$ è un'abbreviazione per $(\text{sen } \alpha)^2$. La relazione fondamentale e la definizione della tangente permettono di ricavare tutte le funzioni di un angolo conoscendone una sola, a patto di sapere in quale quadrante si trova l'angolo. Il segno, infatti, dipende dal quadrante in cui cade P (Tabella 4.2): il coseno è positivo nel I e nel IV quadrante, il seno nel I e nel II; la tangente, quoziente dei due, è positiva dove seno e coseno hanno lo stesso segno, cioè nel I e nel III.

Tabella 4.2 Segni delle funzioni circolari nei quattro quadranti.

	I	II	III	IV
sen α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Sappiamo che $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$: calcola $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$. b) Sappiamo che $\text{tg}\,\beta = 2$ e che $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$: calcola $\text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta$.

Soluzione. a) Dalla relazione fondamentale $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, quindi $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ oppure $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. L'angolo è nel II quadrante, dove il coseno è negativo: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Infine $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$.

b) Da $\text{tg}\,\beta = 2$ segue $\text{sen}\,\beta = 2\cos\beta$. Sostituendo nella relazione fondamentale: $4\cos^2\beta + \cos^2\beta = 1$, cioè $\cos^2\beta = \frac{1}{5}$. Nel III quadrante seno e coseno sono negativi, quindi $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\beta = 2\cos\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Controllo: $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ ✓, e il rapporto $\text{sen}\,\beta : \cos\beta$ è 2 ✓.

Osservazione. Senza l'informazione sul quadrante avremmo trovato due risposte: tra 0 e 2π esistono due angoli con seno $\frac{3}{5}$, uno acuto e uno ottuso, e due angoli con tangente 2.

4.2.3 I valori per gli angoli notevoli

Per alcuni angoli seno e coseno si calcolano esattamente con i triangoli studiati in *Matematica 2* (cap. 3). Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, il triangolo OHP è rettangolo isoscele con ipotenusa $OP = 1$: i cateti sono uguali e, per il teorema di Pitagora, misurano $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se $\alpha = \frac{\pi}{6}$, il triangolo OHP è la metà di un triangolo equilatero di lato 1 (il simmetrico di P rispetto all'asse x completa il triangolo): il cateto HP è metà del lato, $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, e l'altro cateto è l'altezza del triangolo equilatero, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$, il triangolo OAP è equilatero e i ruoli si scambiano: $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (Figura 4.2). Per gli angoli 0 e $\frac{\pi}{2}$ basta guardare la circonferenza: i punti associati sono $A(1; 0)$ e $B(0; 1)$.

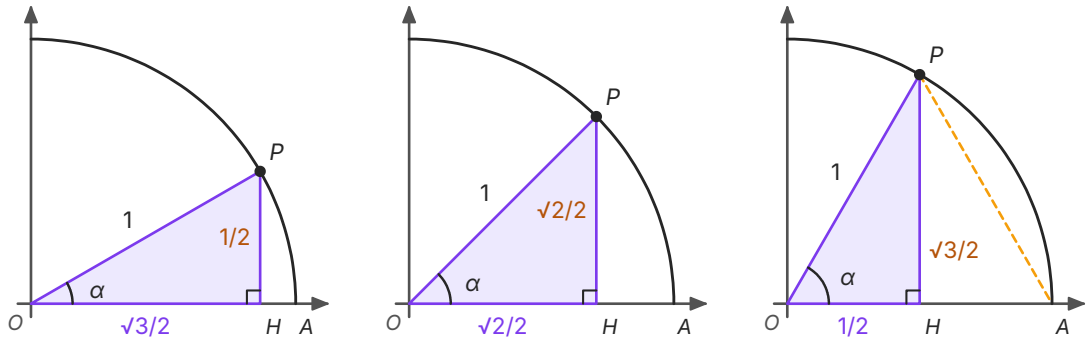

Figura 4.2 I valori esatti per gli angoli notevoli. Per $\frac{\pi}{6}$ il triangolo *OHP* è metà di un triangolo equilatero di lato 1; per $\frac{\pi}{4}$ è rettangolo isoscele; per $\frac{\pi}{3}$ il triangolo *OAP* è equilatero e *H* è il punto medio di *OA*. In viola il coseno, in arancione il seno.

Tabella 4.3 Seno, coseno e tangente degli angoli notevoli del primo quadrante («—»: non definita).

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Non serve imparare la tabella a memoria: basta ricordare i due triangoli e il fatto che il seno cresce da 0 a 1 mentre l'angolo va da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e il coseno fa il contrario. Per la tangente si divide: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.3 Gli angoli associati

Conoscendo seno e coseno degli angoli del primo quadrante si ottengono quelli di tutti gli altri, grazie alle simmetrie della circonferenza goniometrica. Due angoli si dicono **angoli associati** quando i loro punti sulla circonferenza si corrispondono in una simmetria che trasforma la cir-

conferenza in sé: rispetto a un asse cartesiano, all'origine o alla bisettrice $y = x$ (Figura 4.3). Le formule non vanno imparate a memoria: si leggono ogni volta sulla figura, guardando come cambiano le coordinate di P.

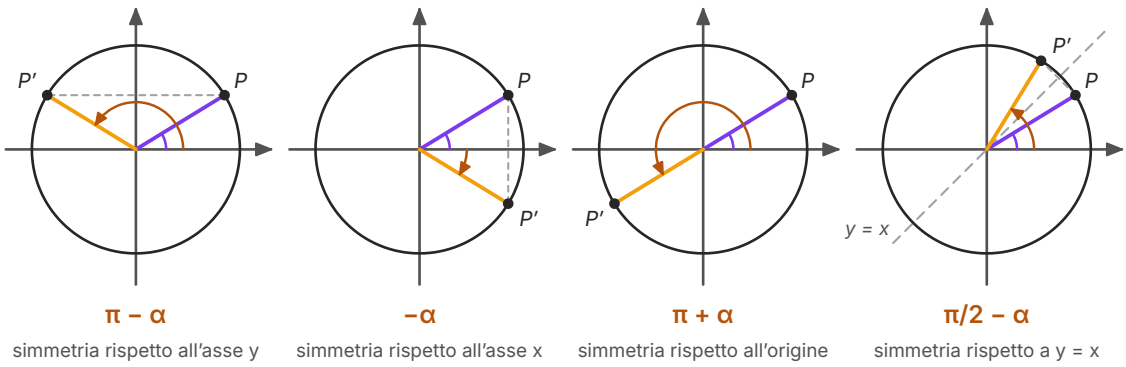

Figura 4.3 Angoli associati: il punto P corrisponde all'angolo α (in viola), il punto P' all'angolo associato (in arancione). Ogni simmetria trasforma la circonferenza goniometrica in sé e cambia in modo semplice le coordinate del punto.

- **Angoli supplementari**, α e $\pi - \alpha$: i punti sono simmetrici rispetto all'asse y, che cambia il segno dell'ascissa. $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.
- **Angoli opposti**, α e $-\alpha$: i punti sono simmetrici rispetto all'asse x, che cambia il segno dell'ordinata. $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$. Gli **angoli esplementari**, α e $2\pi - \alpha$, hanno lo stesso punto di $-\alpha$, quindi le stesse formule.
- **Angoli che differiscono di π**, α e $\pi + \alpha$: i punti sono simmetrici rispetto all'origine, che cambia il segno di entrambe le coordinate. $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$.
- **Angoli complementari**, α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$: i punti sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, che scambia ascissa e ordinata. $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$.

Dalla terza riga segue che la tangente si ripete ogni π: due angoli che differiscono di mezzo giro hanno la stessa tangente, perché i loro punti stanno sulla stessa retta per l'origine. L'ultima riga spiega il nome «coseno»: è il *seno del complemento*, il seno dell'angolo complementare.

Con queste simmetrie ogni angolo si riconduce a un angolo acuto. Prima si tolgono i giri interi; poi si guarda in quale quadrante cade l'angolo e lo si scrive come $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ o $2\pi - \alpha$ con α acuto; infine si sceglie il segno in base al quadrante. Per esempio $\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \text{sen}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\,\frac{11\pi}{6} = \text{tg}(2\pi - \frac{\pi}{6}) =$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$; sen $\frac{17\pi}{6}$ = sen $\frac{5\pi}{6}$ = sen$(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Un controllo rapido dei segni: $\frac{2\pi}{3}$ è nel II quadrante (seno positivo), $\frac{5\pi}{4}$ nel III (coseno negativo), $\frac{11\pi}{6}$ nel IV (tangente negativa).

4.4 I grafici delle funzioni circolari

4.4.1 Seno e coseno

Associando a ogni numero reale x, inteso come misura di un angolo in radianti, il valore sen x, otteniamo una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$: la **funzione seno**, $y = \text{sen } x$. Allo stesso modo si definiscono $y = \cos x$ e $y = \text{tg } x$. Si usano i radianti perché sull'asse x vogliamo un numero puro, misurato con la stessa unità dell'asse y: in una circonferenza di raggio 1 il numero x è proprio la lunghezza dell'arco da A a P, percorso in verso antiorario se $x > 0$. D'ora in poi, quando scriviamo sen x senza il simbolo °, x è un numero reale.

Per disegnare il grafico di $y = \text{sen } x$ basta seguire il punto P sulla circonferenza goniometrica e annotarne l'ordinata. Mentre x va da 0 a $\frac{\pi}{2}$ l'ordinata sale da 0 a 1; da $\frac{\pi}{2}$ a π scende di nuovo a 0; da π a 2π il punto percorre la metà inferiore della circonferenza, il seno diventa negativo, raggiunge -1 per $x = \frac{3\pi}{2}$ e torna a 0. Dopo un giro intero tutto si ripete. La curva che si ottiene si chiama **sinusoide** (Figura 4.4); il grafico del coseno, che segue l'ascissa di P, ha la stessa forma spostata verso sinistra di $\frac{\pi}{2}$, perché $\cos x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ (lo verificheremo con le formule di addizione).

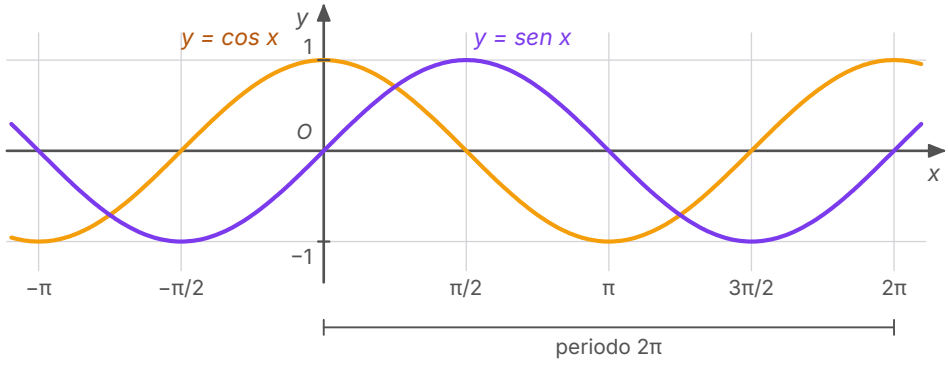

Figura 4.4 I grafici di $y = \text{sen } x$ (in viola) e $y = \cos x$ (in arancione), con la stessa unità sui due assi. Entrambi oscillano tra -1 e 1 e si ripetono con periodo 2π; il coseno anticipa di $\frac{\pi}{2}$ il seno.

Nel capitolo 1 abbiamo chiamato **periodica** una funzione per cui esiste un numero $T > 0$ tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio, e **periodo** il più piccolo T con questa proprietà. Seno e coseno sono periodiche di periodo 2π: nessun numero positivo più piccolo va bene, perché il punto P torna nella stessa posizione solo dopo un giro intero. Il grafico di una funzione periodica si ottiene ripetendo un suo tratto lungo T. Le simmetrie degli angoli associati si vedono sui grafici: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$ dice che il seno è una funzione **dispari**, con grafico simmetrico rispetto all'origine; $\cos(-x) = \cos x$ dice che il coseno è **pari**, con grafico simmetrico rispetto all'asse y (Tabella 4.4).

4.4.2 La tangente

Il grafico della tangente è molto diverso (Figura 4.5). Quando x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ da sinistra, il punto P si avvicina a $B(0; 1)$, la retta OP diventa quasi verticale e il punto T sale sulla retta $x = 1$ senza limite: per $x = 0{,}9 \cdot \frac{\pi}{2}$ la tangente vale già circa 6,3, per $x = 0{,}99 \cdot \frac{\pi}{2}$ circa 63,7. Da destra di $\frac{\pi}{2}$ avviene il contrario, e T scende sempre più in basso. Il grafico è fatto di rami separati dalle rette verticali $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, che la curva avvicina senza mai toccare; nel quinto anno questo comportamento diventerà il concetto di limite. In ogni intervallo $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ la tangente cresce e assume tutti i valori reali; il periodo è π, come abbiamo visto con gli angoli che differiscono di π.

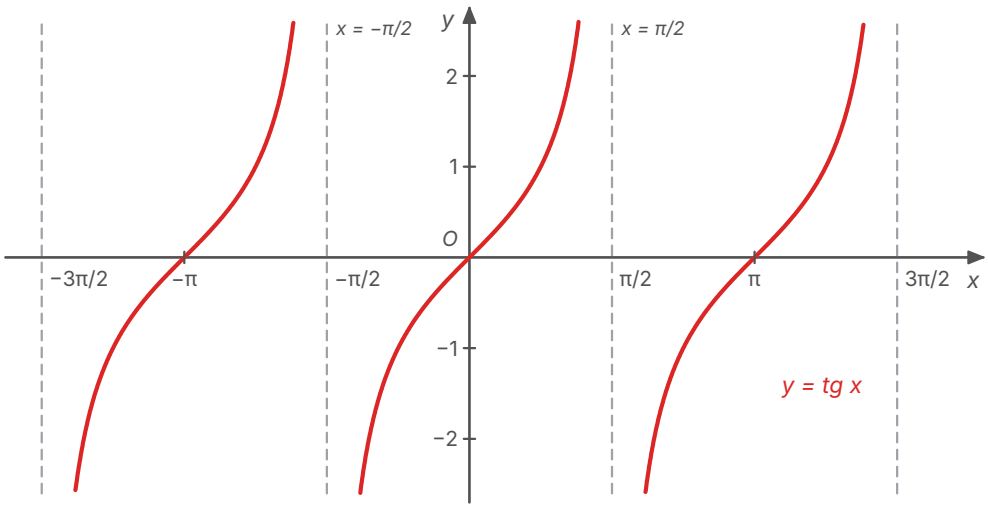

Figura 4.5 Il grafico di $y = \text{tg}\, x$, con la stessa unità sui due assi. Le rette tratteggiate $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono escluse dal dominio; tra due di esse la funzione cresce da valori negativi grandi a piacere a valori positivi grandi a piacere. Il periodo è π.

Tabella 4.4 Le proprietà delle funzioni circolari ($k \in \mathbb{Z}$).

	$y = \text{sen}\, x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg}\, x$
dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
immagine	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
periodo	2π	2π	π
parità	dispari	pari	dispari
zeri	$x = k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = k\pi$
massimo 1	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x = 2k\pi$	—
minimo −1	$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$	$x = \pi + 2k\pi$	—
crescente in	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$	$[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$

4.4.3 La sinusoide e i suoi parametri

Con i grafici deducibili del capitolo 1, e con una trasformazione nuova, la dilatazione orizzontale, dalla curva $y = \text{sen}\, x$ si ottiene un'intera famiglia di funzioni, quelle della forma

$$y = A\, \text{sen}(\omega x + \varphi) + c, \quad \text{con } A \neq 0 \text{ e } \omega > 0$$

Ogni parametro ha un significato preciso. Il numero $|A|$ è l'**ampiezza**: la dilatazione verticale $y = A\, \text{sen}\, x$ fa oscillare la curva tra $-|A|$ e $|A|$ (se $A < 0$ il grafico viene anche ribaltato rispetto all'asse x). Il numero ω (si legge «omega») stringe o allarga la curva in orizzontale: $\text{sen}(\omega x)$ compie un'oscillazione completa quando ωx va da 0 a 2π, cioè quando x va da 0 a $\frac{2\pi}{\omega}$, quindi il **periodo** è $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Il numero φ («fi») si chiama **fase**: scrivendo $\omega x + \varphi = \omega(x + \frac{\varphi}{\omega})$ si vede che il grafico è traslato orizzontalmente di $\frac{\varphi}{\omega}$, verso sinistra se $\varphi > 0$. Infine c trasla il grafico in verticale: la curva oscilla attorno alla retta $y = c$, tra $c - |A|$ e $c + |A|$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Descrivi il grafico di $y = 2\,\mathrm{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$: ampiezza, periodo, valori massimo e minimo, traslazioni. Trova il primo massimo con $x \geq 0$.

Soluzione. Qui $A = 2$, $\omega = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $c = 1$. L'ampiezza è 2 e la retta attorno alla quale la curva oscilla è $y = 1$: il valore massimo è $1 + 2 = 3$, il minimo $1 - 2 = -1$, e l'immagine è $[-1; 3]$. Il periodo è $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Scriviamo $2x - \frac{\pi}{3} = 2(x - \frac{\pi}{6})$: il grafico è quello di $y = 2\,\mathrm{sen}\,2x$ traslato di $\frac{\pi}{6}$ verso destra e di 1 verso l'alto. Il seno vale 1 quando il suo argomento è $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: da $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ si ottiene $x = \frac{5\pi}{12}$, primo massimo con $x \geq 0$; i massimi successivi si ripetono ogni π. Il primo minimo con $x \geq 0$ è in $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{12}$, mezzo periodo dopo. Controllo: $y(\frac{5\pi}{12}) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} + 1 = 3$ ✓; $y(0) = 2\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{3}) + 1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73$, un valore compreso tra -1 e 3 ✓.

4.4.4 Andamenti periodici, nel continuo e nel discreto

In *Matematica 3* (cap. 7) abbiamo descritto il moto circolare uniforme senza seno e coseno. Ora possiamo completarlo. Un punto P percorre una circonferenza di raggio R con centro nell'origine, con **velocità angolare** costante ω (in radianti al secondo), partendo all'istante $t = 0$ dalla posizione P_0 che forma l'angolo φ con l'asse x. All'istante t il raggio OP ha descritto l'angolo $\omega t + \varphi$, quindi

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi), \quad y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Il punto Q, proiezione di P sull'asse y, va su e giù lungo un diametro con legge $y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$: è il **moto armonico** che studierai in fisica, per esempio per una massa appesa a una molla (Figura 4.6). Il suo grafico è una sinusoide di ampiezza R e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, il tempo di un giro; il numero di oscillazioni al secondo è la **frequenza** $f = \frac{1}{T}$, che si misura in hertz (Hz). La fase φ dice da dove parte il moto: all'istante 0 l'altezza di Q è $R\,\mathrm{sen}\,\varphi$.

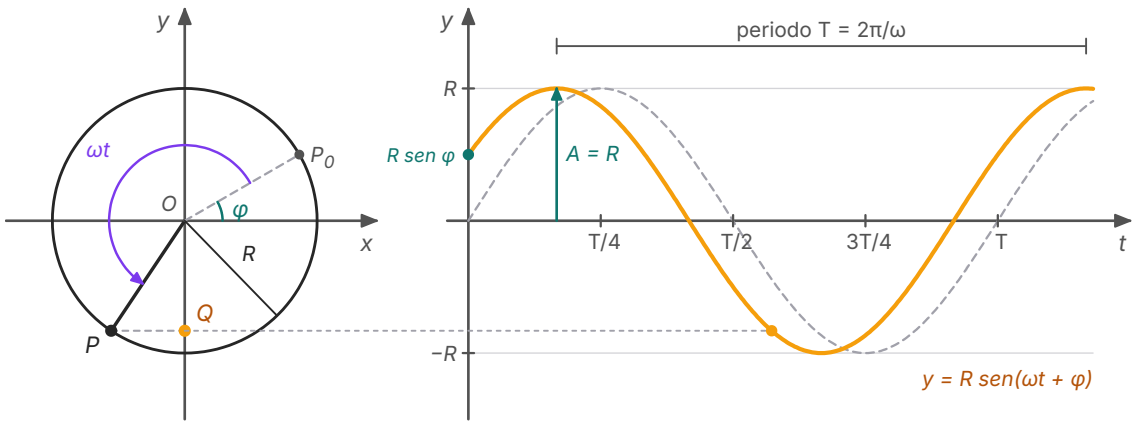

Figura 4.6 Dal moto circolare uniforme al moto armonico. A sinistra il punto P ruota con velocità angolare ω partendo da P_0, a un angolo $\varphi = \frac{\pi}{6}$; la sua proiezione Q sull'asse y oscilla lungo un diametro. A destra l'altezza di Q in funzione del tempo: una sinusoide di ampiezza R e periodo T, anticipata di $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{T}{12}$ rispetto a $R \operatorname{sen} \omega t$ (tratteggio). Le scale dei due assi sono diverse: in orizzontale il tempo, in frazioni di periodo.

Le equazioni di P descrivono anche altre curve. Se le due coordinate hanno «raggi» diversi, $x = a \cos t$ e $y = b \operatorname{sen} t$, allora $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$: al variare di t il punto descrive l'**ellisse** di semiassi a e b del capitolo 2. È la descrizione dell'ellisse come cerchio «schiacciato» che avevamo annunciato: la dilatazione verticale di rapporto $\frac{b}{a}$ porta il punto $(a \cos t; a \operatorname{sen} t)$ della circonferenza di raggio a nel punto $(a \cos t; b \operatorname{sen} t)$ dell'ellisse.

Molti fenomeni periodici, però, non si osservano in modo continuo ma **campionati**: se ne misura il valore a intervalli regolari. La Tabella 4.5 riporta le ore di luce, a metà di ogni mese, in una città immaginaria alla latitudine dell'Italia centrale (dati inventati). È una successione di dodici numeri, un andamento **discreto**; per descriverlo cerchiamo una sinusoide, un modello **continuo**. Il valore massimo è 15,2 (giugno) e il minimo 9,1 (dicembre): la retta di oscillazione è $c = \frac{15{,}2 + 9{,}1}{2} = 12{,}15$ e l'ampiezza è $A = \frac{15{,}2 - 9{,}1}{2} = 3{,}05$. Il periodo è un anno, $T = 12$ mesi, quindi $\omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Il massimo deve cadere a giugno, $t = 6$, dove l'argomento del seno deve valere $\frac{\pi}{2}$: il modello è

$$L(t) = 12{,}15 + 3{,}05 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t - 3)\right) \quad (t = \text{numero del mese, 1 = gennaio})$$

Tabella 4.5 Ore di luce a metà mese in una città immaginaria (dati inventati) e valori del modello $L(t)$, arrotondati ai decimi.

mese t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
dati (h)	9,4	10,5	11,9	13,4	14,6	15,2	14,9	13,9	12,5	11,0	9,8	9,1
modello (h)	9,5	10,6	12,2	13,7	14,8	15,2	14,8	13,7	12,2	10,6	9,5	9,1

Il modello riproduce i dati con scarti di qualche decimo di ora, più grandi in primavera e in autunno: la curva vera non è esattamente una sinusoide. Ma permette di rispondere a domande che la tabella da sola non risolve, per esempio in quali giorni le ore di luce sono più di 12 o come cambiano da una settimana all'altra.

COLLEGAMENTI

Fisica e musica. Un suono puro, come quello di un diapason, è una variazione di pressione dell'aria che segue una sinusoide nel tempo. La frequenza determina l'altezza della nota: il *la* usato per accordare gli strumenti ha frequenza 440 Hz, quindi periodo $\frac{1}{440}$ s $\approx 2{,}27$ millesimi di secondo; l'ampiezza determina l'intensità. Già la tradizione pitagorica aveva legato gli intervalli musicali consonanti a rapporti semplici tra le lunghezze delle corde ($2:1$ per l'ottava, $3:2$ per la quinta); oggi sappiamo che salire di un'ottava significa raddoppiare la frequenza.

Filosofia: legge o modello? Il moto armonico di una molla ideale e la sinusoide delle ore di luce sono formule dello stesso tipo, ma hanno uno statuto diverso. La prima discende dalle leggi della meccanica: nella visione della fisica classica a ogni fenomeno corrisponde una legge matematica, una sola. La seconda è un **modello matematico**: l'abbiamo scelta perché descrive bene i dati, e avremmo potuto usarne un'altra (una spezzata, una somma di due sinusoidi) adatta a scopi diversi. All'inizio dell'Ottocento Joseph Fourier mostrò che moltissimi andamenti periodici si ottengono sommando sinusoidi: il seno diventò così il «mattone» con cui la scienza costruisce i suoi modelli di ciò che si ripete, dalla marea al battito del cuore.

4.5 Formule di addizione e di duplicazione

Conosciamo il seno di $\frac{\pi}{4}$ e quello di $\frac{\pi}{6}$: possiamo calcolare il seno della loro differenza, $\frac{\pi}{12}$ (cioè 15°)? La tentazione di scrivere $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ va respinta subito: le funzioni circolari **non** si comportano come la moltiplicazione per un numero. Servono formule apposite, che si ricavano tutte da una sola.

4.5.1 Il coseno della differenza

IN SINTESI

Teorema (formula di sottrazione del coseno). Ipotesi: α e β sono numeri reali qualsiasi. **Tesi:** $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Dimostrazione. Sulla circonferenza goniometrica consideriamo i punti $P(\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q(\cos\beta;\ \operatorname{sen}\beta)$ associati agli angoli α e β. Con la formula della distanza, e usando la relazione fondamentale per α e per β,

$$PQ^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

Ruotiamo ora entrambi i punti attorno all'origine dell'angolo $-\beta$. Il punto Q va in $A(1;\ 0)$, associato all'angolo 0, e P va nel punto P' associato all'angolo $\alpha - \beta$, cioè $P'(\cos(\alpha - \beta);\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$. La distanza tra P' e A è

$$P'A^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Una rotazione è un'isometria (*Matematica 2*, cap. 7), quindi $P'A = PQ$. Uguagliando le due espressioni si ottiene $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. c.v.d.

4.5.2 Le altre formule

Dalla formula appena dimostrata si ricavano tutte le altre, senza nuove figure. Sostituendo $-\beta$ al posto di β, e ricordando che $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$, si ha $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. Per il seno usiamo gli angoli complementari: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)$, e applicando la formula di sottrazione con $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ si ottiene $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; sostituendo di nuovo $-\beta$ a β si ha la formula per $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$. Infine, dividendo numeratore e denominatore di $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ per $\cos\alpha\cos\beta$, si trova la formula della tangente.

IN SINTESI

Formule di addizione e sottrazione (per ogni α, β; per la tangente, purché α, β e $\alpha \pm \beta$ siano diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi$):

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Formule di duplicazione (ponendo $\beta = \alpha$):

- $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, con $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Le tre forme di $\cos 2\alpha$ sono la stessa formula: le ultime due si ottengono dalla prima sostituendo $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ oppure $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Conviene scegliere ogni volta quella che contiene la funzione che conosciamo. Nella formula della tangente il segno $\pm$ in alto corrisponde al segno $\mp$ in basso: per la somma il denominatore è $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

ERRORE FREQUENTE

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \neq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$, e $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 2\operatorname{sen}\alpha$. Basta un esempio: con $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$ si ha $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$, mentre $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, un valore che un seno non può nemmeno assumere. Lo stesso vale per il coseno e per la tangente. Le parentesi in $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ indicano l'argomento di una funzione, non un prodotto da sviluppare con la proprietà distributiva.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Calcola in forma esatta $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ e $\cos\frac{5\pi}{12}$. b) Sapendo che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcola $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$. c) Scrivi $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x$ nella forma $y = R\operatorname{sen}(x + \varphi)$ e descrivine il grafico.

Soluzione. a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}2588$. Poiché $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, gli angoli sono complementari e $\cos\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Controllo con la calcolatrice in modalità RAD: $\operatorname{sen}(\pi : 12) \approx 0{,}2588$ ✓.

b) L'angolo è acuto, quindi $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Allora $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$ e $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$. Controllo: $(\frac{24}{25})^2 + (\frac{7}{25})^2 = \frac{576+49}{625} = 1$ ✓. Il coseno di 2α è negativo perché $\alpha > \frac{\pi}{4}$ (infatti $\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$), quindi 2α cade nel II quadrante.

c) Vogliamo $R\operatorname{sen}(x + \varphi) = R\cos\varphi\operatorname{sen} x + R\operatorname{sen}\varphi\cos x$ uguale a $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x$ per ogni x: basta che $R\cos\varphi = 1$ e $R\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3}$. Sommando i quadrati, $R^2 = 1 + 3 = 4$, cioè $R = 2$; poi $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Dunque $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 2\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3})$: una sinusoide di ampiezza 2 e periodo 2π, traslata di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra. In generale $A\operatorname{sen} x + B\cos x = R\operatorname{sen}(x + \varphi)$ con $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos\varphi = \frac{A}{R}$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{B}{R}$: la somma di due oscillazioni con lo stesso periodo è ancora un'oscillazione con quel periodo, come accade per due suoni della stessa frequenza.

APPROFONDIMENTO · BISEZIONE, FORMULE PARAMETRICHE, PROSTAFERESI

Dalle formule di addizione si ricavano molte altre identità. Le riportiamo solo per completezza: non sono richieste dal programma e non le useremo negli esercizi.

formule	enunciato	condizioni
bisezione	$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	segno dal quadrante di $\alpha/2$
parametriche	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, con $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$	$\alpha \neq \pi + 2k\pi$
prostaferesi	$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	per ogni p, q
	$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	per ogni p, q

Le formule di prostaferesi (dal greco: «aggiungere e togliere») trasformano una somma in un prodotto e, lette al contrario, un prodotto in una somma: negli ultimi decenni del Cinquecento alcuni astronomi le usavano proprio per sostituire le lunghe moltiplicazioni con addizioni, prima che Nepero pubblicasse i logaritmi (1614), che servono allo stesso scopo (capitolo 8).

4.6 Equazioni goniometriche elementari

4.6.1 Le tre equazioni fondamentali

Un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione circolare si dice **equazione goniometrica**. Le più semplici sono le **equazioni elementari** $\operatorname{sen} x = m$, $\cos x = m$ e $\operatorname{tg} x = m$, con m numero reale dato. Si risolvono leggendo la circonferenza goniometrica, e la loro caratteristica principale è che, quando hanno soluzioni, ne hanno infinite: se x è una soluzione, lo è anche $x + 2k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. Cerchiamo i punti della circonferenza goniometrica con ordinata $\frac{1}{2}$: sono le intersezioni con la retta $y = \frac{1}{2}$, i punti associati a $\frac{\pi}{6}$ e al suo supplementare $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (Figura 4.7). Sul grafico la stessa cosa si vede come intersezione della sinusoide con la retta $y = \frac{1}{2}$: in ogni periodo ci sono due soluzioni, e tutte le altre si ottengono aggiungendo multipli di 2π. Le soluzioni sono

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

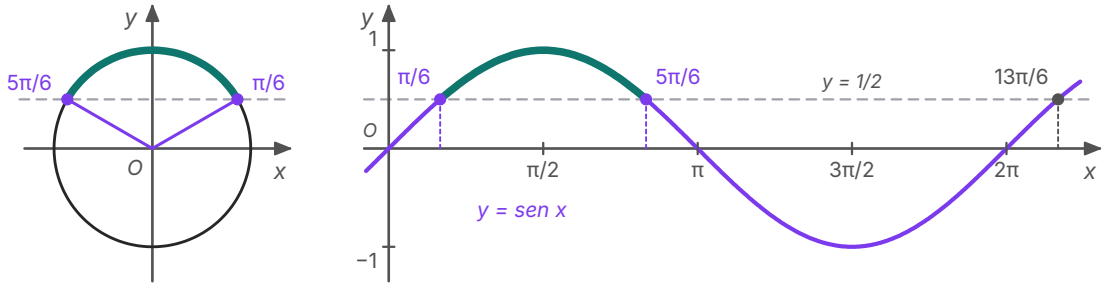

Figura 4.7 L'equazione sen $x = \frac{1}{2}$ letta sulla circonferenza goniometrica e sul grafico, con la stessa unità sui due assi. In ogni periodo ci sono due soluzioni, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$; le altre, come $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, si ottengono aggiungendo multipli di 2π. In verde l'arco e il tratto di grafico in cui sen $x > \frac{1}{2}$.

Lo stesso ragionamento vale in generale (Tabella 4.6). L'equazione sen $x = m$ ha soluzioni solo se $-1 \le m \le 1$, perché la retta $y = m$ deve incontrare la circonferenza: sen $x = 2$ è **impossibile**. Se α è un angolo con sen $\alpha = m$, le soluzioni sono $\alpha + 2k\pi$ e $\pi - \alpha + 2k\pi$ (angoli supplementari, stesso seno). Per cos $x = m$, ancora con $-1 \le m \le 1$, i punti sono le intersezioni con la retta verticale $x = m$, simmetrici rispetto all'asse x: le soluzioni sono $\pm\alpha + 2k\pi$ (angoli opposti, stesso coseno). L'equazione tg $x = m$ ha soluzione per ogni m reale, perché la retta $x = 1$ contiene tutti i punti $T(1; m)$; i punti della circonferenza sono due, diametralmente opposti, quindi le soluzioni si ripetono ogni π: $x = \alpha + k\pi$.

Tabella 4.6 Le equazioni goniometriche elementari ($k \in \mathbb{Z}$; α è un angolo noto con la funzione uguale a m).

equazione	ha soluzioni se	soluzioni	esempio
sen $x = m$	$-1 \le m \le 1$	$x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi$	sen $x = -1/2$: $x = -\pi/6 + 2k\pi \vee x = 7\pi/6 + 2k\pi$
cos $x = m$	$-1 \le m \le 1$	$x = \pm\alpha + 2k\pi$	cos $x = 1/2$: $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$
tg $x = m$	ogni $m \in \mathbb{R}$	$x = \alpha + k\pi$	tg $x = -1$: $x = -\pi/4 + k\pi$

Quando $m = \pm 1$ le due famiglie di soluzioni coincidono, perché la retta tocca la circonferenza in un solo punto, e basta scriverne una: sen $x = 1$ ha le sole soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, sen $x = -1$ le sole $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; cos $x = 1$ ha le sole soluzioni $x = 2k\pi$ e cos $x = -1$ le sole $x = \pi + 2k\pi$. Ancora, sen $x = 0$ ha soluzioni $x = k\pi$: i punti A e $(-1; 0)$ distano mezzo giro.

4.6.2 Equazioni riconducibili a quelle elementari

Molte equazioni si riportano a quelle elementari in uno o due passaggi: isolando la funzione circolare, ponendo l'argomento uguale a una nuova incognita, oppure, quando la funzione compare con potenze diverse, sostituendo $t = \operatorname{sen} x$ o $t = \cos x$ e risolvendo un'equazione di secondo grado. Non affronteremo equazioni più complicate: le Indicazioni nazionali chiedono di saper risolvere «casi semplici e significativi».

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi: a) $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$; b) $\operatorname{tg}^2 x = 3$; c) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$; d) $2\cos^2 x - \cos x = 0$. e) Risolvi la disequazione $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0; 2\pi[$.

Soluzione. a) Isoliamo il seno: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, che è l'equazione di Figura 4.7: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ oppure $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. La prima dà $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, la seconda $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; in breve $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. Nell'intervallo $[0; 2\pi[$ sono quattro: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

c) Poniamo $z = 2x$: $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2}$ dà $z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Tornando a x si divide **tutto** per 2, anche il periodo: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$. In $[0; 2\pi[$ le soluzioni sono quattro: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$. Era prevedibile: $\operatorname{sen} 2x$ ha periodo π, quindi compie due oscillazioni in $[0; 2\pi[$.

d) Con $t = \cos x$: $2t^2 - t = 0$, cioè $t(2t - 1) = 0$, da cui $t = 0 \vee t = \frac{1}{2}$. Allora $\cos x = 0$, con soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, oppure $\cos x = \frac{1}{2}$, con soluzioni $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Controllo con $x = \frac{\pi}{3}$: $2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ ✓.

e) Sulla circonferenza goniometrica cerchiamo i punti con ordinata maggiore di $\frac{1}{2}$, cioè quelli che stanno sopra la retta $y = \frac{1}{2}$: formano l'arco che va dal punto associato a $\frac{\pi}{6}$ a quello associato a $\frac{5\pi}{6}$, estremi esclusi. Le soluzioni sono $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, cioè l'intervallo $]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}[$. Sul grafico di Figura 4.7 è il tratto verde, in cui la sinusoide sta sopra la retta tratteggiata. Controllo con un valore interno e uno esterno: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2}$ ✓, $\operatorname{sen}\pi = 0 < \frac{1}{2}$ ✓.

4.6.3 Le funzioni inverse e la calcolatrice

Spesso il valore m non è uno di quelli notevoli: per risolvere $\cos x = 0{,}3$ serve un angolo α con coseno 0,3, che nessuna tabella contiene. Lo fornisce la calcolatrice, con i tasti **$\sin^{-1}$**, **$\cos^{-1}$** e **$\tan^{-1}$** (talvolta indicati con asin, acos, atan). Ma di angoli con coseno 0,3 ce ne sono infiniti: quale sceglie la calcolatrice?

La risposta viene dal capitolo 1. Una funzione ha un'inversa solo se è biiettiva; seno, coseno e tangente non sono iniettive (sono periodiche!), ma lo diventano se le restringiamo a un intervallo opportuno, come abbiamo fatto restringendo $y = x^2$ a $x \geq 0$ per ottenere la radice quadrata. Il seno, ristretto a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, è crescente e assume una volta sola ogni valore di $[-1; 1]$; la sua inversa si chiama **arcoseno**, arcsen: $[-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Allo stesso modo il coseno ristretto a $[0; \pi]$ ha per inversa l'**arcocoseno**, arccos: $[-1; 1] \to [0; \pi]$, e la tangente ristretta a $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ha per inversa l'**arcotangente**, arctg: $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Così arcsen m è «l'angolo dell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ il cui seno è m»: per esempio $\text{arcsen } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\text{arccos}(-1) = \pi$, $\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$. I grafici si ottengono per simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ (Figura 4.8).

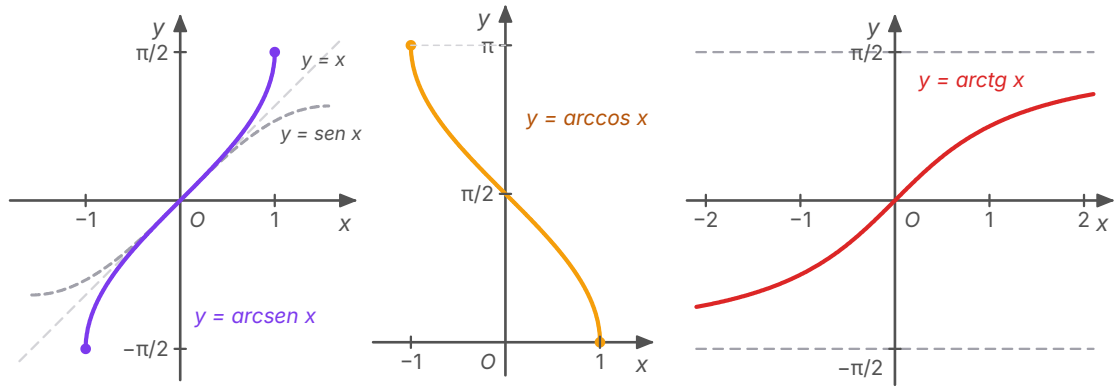

Figura 4.8 I grafici di $y = \text{arcsen } x$, $y = \text{arccos } x$ e $y = \text{arctg } x$, con la stessa unità sui due assi. Il primo è il simmetrico, rispetto alla bisettrice $y = x$, del seno ristretto a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (tratteggio grigio). L'arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$ e ha i valori compresi tra le rette tratteggiate $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

La calcolatrice restituisce sempre il **valore principale**, quello che appartiene all'intervallo di restrizione; le altre soluzioni sono compito nostro. Per cos $x = 0{,}3$ la calcolatrice in modalità RAD dà arccos 0,3 ≈ 1,2661, e le soluzioni sono $x \approx \pm 1{,}2661 + 2k\pi$; in $[0; 2\pi[$ sono $x \approx 1{,}2661$ e $x \approx 2\pi - 1{,}2661 \approx 5{,}0171$. In gradi: arccos 0,3 ≈ 72,54° e 360° − 72,54° = 287,46°.

ERRORE FREQUENTE

Gradi o radianti? La calcolatrice lavora in una delle due modalità, indicata sul display con DEG (gradi) o RAD (radianti). In modalità DEG il tasto sin applicato a 2 dà circa 0,0349, il seno di 2°; in modalità RAD dà circa 0,9093, il seno di 2 radianti (circa 114,6°). Prima di ogni calcolo controlla la modalità: nelle equazioni di questo capitolo, con soluzioni scritte con π, deve essere RAD.

Un solo angolo non basta. I tasti inversi restituiscono un solo angolo. Per sen $x = 0{,}6$ la calcolatrice dà arcsen 0,6 ≈ 0,6435, ma è soluzione anche il supplementare π − 0,6435 ≈ 2,4981, che la calcolatrice non mostra. Dimenticarlo significa perdere metà delle soluzioni.

APPROFONDIMENTO · DALLE CORDE DI TOLOMEO ALLA PAROLA «SENO»

Gli astronomi greci non usavano il seno ma la *corda*: a ogni angolo al centro di una circonferenza associavano la lunghezza della corda corrispondente. L'opera più antica che ci è giunta con una tavola di corde completa è la *Sintassi matematica* di Claudio Tolomeo (II secolo d.C.), nota con il titolo arabo di *Almagesto*. La tavola dà le corde in una circonferenza di raggio 60, per angoli da mezzo grado a 180° a passi di mezzo grado, ed era calcolata con risultati che oggi riconosciamo come formule di addizione e di bisezione.

In una circonferenza di raggio r la corda di un angolo al centro θ è lunga $2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$: il seno è la metà della corda dell'angolo doppio. Questa «mezza corda» compare nell'astronomia indiana, per esempio nell'opera di Aryabhata (intorno al 500 d.C.), con il nome sanscrito *jīvā*, «corda dell'arco». I matematici di lingua araba ripresero la parola come *jība*; la scrittura araba non annota le vocali, e la parola fu letta come *jayb*, che significa «piega, insenatura». I traduttori latini del XII secolo resero quel termine con il suo equivalente latino, *sinus*: il nostro «seno» nasce dunque da un fraintendimento.

SINTESI

- Un angolo orientato è positivo se la rotazione è antioraria; α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, hanno lo stesso lato termine. In radianti: $\alpha = \frac{l}{r}$, arco $l = \alpha r$, settore $\frac{1}{2}\alpha r^2$.
- Sulla circonferenza goniometrica il punto associato ad α è $P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, è l'ordinata del punto della retta $x = 1$ allineato con O e P, ed è il coefficiente angolare della retta OP.
- Relazione fondamentale: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ per ogni α. Con essa e con il quadrante si ricavano tutte le funzioni di un angolo da una sola.
- Valori notevoli: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e i coseni in ordine inverso; si ricavano dai triangoli con angoli di 30°, 45° e 60°.
- Angoli associati ($\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $-\alpha$, $2\pi - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$): si leggono sulle simmetrie della circonferenza e riconducono ogni angolo al primo quadrante.
- Seno e coseno sono definiti su $\mathbb{R}$, con immagine $[-1; 1]$ e periodo 2π; il seno è dispari, il coseno pari. La tangente ha periodo π e non è definita in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- $y = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) + c$ è una sinusoide di ampiezza $|A|$, periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, fase φ, che oscilla attorno alla retta $y = c$.
- La proiezione di un moto circolare uniforme è un moto armonico, $y(t) = R\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$; frequenza $f = \frac{1}{T}$. Un andamento periodico campionato si può descrivere con una sinusoide: un modello, non una legge.
- Formule di addizione: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; in generale $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \neq \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$.
- Duplicazione: $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Inoltre $A\operatorname{sen}x + B\cos x = R\operatorname{sen}(x + \varphi)$ con $R = \sqrt{A^2 + B^2}$.
- $\operatorname{sen}x = m$ e $\cos x = m$ hanno soluzioni solo se $|m| \leq 1$: $\alpha + 2k\pi$ e $\pi - \alpha + 2k\pi$ per il seno, $\pm\alpha + 2k\pi$ per il coseno; $\operatorname{tg}x = m$ ha soluzioni $\alpha + k\pi$ per ogni m.
- arcsen, arccos e arctg sono le inverse delle restrizioni a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $[0; \pi]$ e $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; la calcolatrice dà solo il valore principale, in modalità RAD o DEG.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● L'angolo di 150° misura, in radianti:
   - **A.** $\frac{3\pi}{4}$
   - **B.** $\frac{5\pi}{6}$
   - **C.** $\frac{2\pi}{3}$
   - **D.** $\frac{5\pi}{3}$

2. ● Se l'angolo α è nel III quadrante:
   - **A.** $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$
   - **B.** $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\text{tg}\,\alpha < 0$
   - **C.** $\cos\alpha < 0$ e $\text{tg}\,\alpha > 0$
   - **D.** $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\text{tg}\,\alpha > 0$

3. ● La funzione $y = 3\,\text{sen}\,4x + 1$ ha periodo:
   - **A.** $\frac{\pi}{2}$
   - **B.** 4π
   - **C.** 8π
   - **D.** $\frac{\pi}{4}$

4. ● Per ogni α, $\cos(\pi - \alpha)$ è uguale a:
   - **A.** $\cos\alpha$
   - **B.** $-\text{sen}\,\alpha$
   - **C.** $\text{sen}\,\alpha$
   - **D.** $-\cos\alpha$

5. ● L'equazione $\text{sen}\,x = 1{,}2$:
   - **A.** ha due soluzioni in $[0; 2\pi[$
   - **B.** ha la sola soluzione $x = \frac{\pi}{2}$
   - **C.** non ha soluzioni
   - **D.** ha soluzioni $x = \text{arcsen}\,1{,}2 + 2k\pi$

6. ●● Quale uguaglianza è vera per ogni α?

   A. $\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$

   B. $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha - 1$

   C. $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha$

   D. $\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \text{sen}\,\alpha + 1$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ vale solo per gli angoli acuti.
   b) La funzione $y = \text{tg}\,x$ ha periodo π.
   c) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta$ per ogni α e β.
   d) La funzione $y = \cos x$ è pari.
   e) $\arcsen(\text{sen}\,x) = x$ per ogni numero reale x.

8. ● Completa. La circonferenza goniometrica ha centro _____ e raggio _____ ; il punto associato all'angolo α ha coordinate _____ . La tangente di α non è definita per $\alpha =$ _____ , $k \in \mathbb{Z}$. La funzione $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi) + c$, con $\omega > 0$, ha ampiezza _____ e periodo _____ ; il suo grafico oscilla attorno alla retta _____ .

Calcolare

9. ● a) Esprimi in radianti: 210°, 135°, −45°, 540°. b) Esprimi in gradi: $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{12}$, 3 (radianti; approssima ai centesimi di grado).

10. ● In una circonferenza di raggio 6 cm l'angolo al centro misura $\frac{2\pi}{5}$. a) Calcola la lunghezza dell'arco e l'area del settore, in forma esatta e approssimata. b) In una circonferenza di raggio 4 cm un arco è lungo 9 cm: quanto misura l'angolo al centro, in radianti e in gradi?

11. ● Riduci al primo giro e calcola: a) $\text{sen}\,\frac{13\pi}{6}$; b) $\cos(-\frac{7\pi}{3})$; c) $\text{tg}\,\frac{17\pi}{4}$; d) $\cos 750°$.

12. ●● a) Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcola $\text{sen}\,\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$. b) Sapendo che $\text{tg}\,\beta = -3$ e $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, calcola $\text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta$.

13. ● Con gli angoli associati calcola senza calcolatrice: a) $\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$; b) $\cos\frac{5\pi}{4}$; c) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{6}$; d) $\text{sen}(-\frac{\pi}{3})$; e) $\cos\frac{11\pi}{6}$; f) $\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}$.

14. ●● Semplifica l'espressione $E = \text{sen}(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha) - \text{sen}(-\alpha) + \cos(-\alpha)$.

15. ● Per ciascuna funzione indica ampiezza, periodo, immagine e traslazioni rispetto al grafico di $y = \operatorname{sen} x$ o di $y = \cos x$: a) $y = 3 \operatorname{sen} 2x$; b) $y = -\cos \frac{x}{2} + 1$; c) $y = 2 \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$.

16. ●● Con le formule di addizione calcola in forma esatta: a) $\cos \frac{\pi}{12}$; b) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}$; c) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$; d) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$.

17. ●● Sapendo che $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcola: a) $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ e $\operatorname{tg} 2\alpha$; b) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$.

18. ● Risolvi le equazioni: a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = -\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg} x = 1$; d) $\cos x = 2$; e) $\operatorname{sen} x = -1$.

19. ●● Risolvi le equazioni: a) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; b) $\operatorname{tg}^2 x = 1$; c) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; d) $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$.

20. ●● Con la calcolatrice in modalità RAD trova, con quattro cifre decimali, le soluzioni in $[0; 2\pi[$ di: a) $\operatorname{sen} x = 0{,}4$; b) $\cos x = -0{,}8$; c) $\operatorname{tg} x = 3$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra le identità, indicando le condizioni di esistenza quando servono: a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$; b) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$; c) $\cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

22. ●● Dimostra in due modi che $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ e $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$: a) con le formule di addizione; b) con due simmetrie della circonferenza goniometrica, scrivendo $\frac{\pi}{2} + \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

23. ●● Trova l'errore. a) Luca risolve $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ e scrive soltanto $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. b) Sara risolve $\cos 2x = 1$ e scrive $2x = 2k\pi$, quindi $x = 2k\pi$. c) Marco calcola sen 2 con la calcolatrice e ottiene 0,0349. Spiega che cosa ha sbagliato ciascuno e correggi.

24. ●● Spiega perché: a) la funzione $y = \operatorname{sen} x$ non è invertibile su $\mathbb{R}$, mentre lo è la sua restrizione a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; b) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$ non è uguale a $-\frac{\pi}{3}$, e quanto vale; c) $\operatorname{tg} x$ ha periodo π mentre seno e coseno hanno periodo 2π.

Problemi

25. ●● Un punto percorre una circonferenza di raggio 0,5 m compiendo 2 giri al secondo; all'istante $t = 0$ si trova nel punto (0,5; 0). La sua proiezione sull'asse y si muove con legge $y(t) = 0{,}5 \operatorname{sen}(4\pi t)$ (t in secondi, y in metri). a) Calcola il periodo e la frequenza del moto. b) Dove si trova la proiezione all'istante $t = \frac{1}{24}$ s? c) Qual è il primo istante in cui la proiezione si trova nel punto più basso?

26. ●● La cabina di una ruota panoramica di raggio 25 m, con il centro a 30 m da terra, compie un giro in 20 minuti partendo dal punto più basso. La sua altezza è $h(t) = 30 - 25\cos(\frac{\pi}{10}t)$, con t in minuti e h in metri. a) Verifica che $h(0) = 5$ e calcola $h(5)$ e $h(10)$. b) In quali istanti del primo giro la cabina si trova a 42,5 m da terra? c) Per quanto tempo, in ogni giro, la cabina sta sopra i 42,5 m?

27. ●● In una località immaginaria le ore di luce sono descritte dal modello $L(t) = 12 + 3{,}5\,\text{sen}(\frac{\pi}{6}(t - 3))$, con t numero del mese (dati inventati). a) Quali sono il valore massimo e il valore minimo, e in quali mesi si raggiungono? b) Calcola $L(6)$ e $L(12)$. c) Per quanti mesi all'anno, secondo il modello, le ore di luce superano 13,75?

28. ●● In Italia la tensione della rete elettrica oscilla con frequenza 50 Hz; il suo valore istantaneo si può scrivere $v(t) = 325\,\text{sen}(100\pi t)$, con t in secondi e v in volt. a) Verifica che il periodo è 0,02 s. b) Calcola $v(\frac{1}{600})$. c) In quali istanti del primo periodo la tensione vale 162,5 V?

Con il computer

29. ●● In un foglio di calcolo scrivi nella colonna A i numeri da 0 a 2π con passo $\frac{\pi}{12}$ (la funzione PI.GRECO() restituisce un'approssimazione di π). Nelle colonne da B a F calcola, nell'ordine, SEN(A), COS(A), SEN(A)^2 + COS(A)^2, SEN(2*A) e 2*SEN(A)*COS(A). a) Che cosa osservi nella colonna D e nelle colonne E e F? b) Costruisci il grafico a dispersione delle colonne B e C in funzione della colonna A. c) Con un software di geometria dinamica crea tre slider A, ω, φ e il grafico di $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi)$: descrivi l'effetto di ciascun parametro e verifica con lo slider di ω che il periodo è $\frac{2\pi}{\omega}$.

Verso la verifica

30. ●● È data la funzione $f(x) = 2\,\text{sen}(x + \frac{\pi}{6})$. a) Indica ampiezza, periodo e immagine. b) Calcola $f(0)$. c) Con la formula di addizione scrivi $f(x)$ nella forma $a\,\text{sen}\,x + b\cos x$. d) Risolvi l'equazione $f(x) = 1$ nell'intervallo $[0; 2\pi[$.

31. ●● Sapendo che $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcola: a) $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$; b) $\text{sen}\,2\alpha$ e $\cos 2\alpha$; c) $\text{sen}(\pi + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

32. ●●● Sfida. Risolvi nell'intervallo $[0; 2\pi[$ l'equazione $\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = 1$. (Suggerimento: scrivi il primo membro come una sola sinusoide.) Verifica le soluzioni per sostituzione.

PER APPROFONDIRE

- [MAOT] Maor, *Trigonometric Delights*: la tavola delle corde di Tolomeo, la storia della parola «seno» e molte curiosità sulle funzioni circolari e sui fenomeni periodici.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli sulla trigonometria greca (Ipparco e Tolomeo), indiana e araba.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sulle funzioni trigonometriche e sulla rappresentazione di un moto circolare come composizione di oscillazioni.

Glossario del capitolo

Ampiezza (di una sinusoide)
Il numero $|A|$ nella sinusoide $y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) + c$: metà della differenza tra il valore massimo e il valore minimo.

Angoli associati
Angoli come $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $-\alpha$, $2\pi - \alpha$, $\pi/2 - \alpha$, i cui punti sulla circonferenza goniometrica corrispondono a quello di α in una simmetria; le loro funzioni circolari differiscono da quelle di α al più per il segno o per lo scambio di seno e coseno.

Angolo orientato
Angolo in cui si distinguono lato origine e lato termine; positivo se la rotazione dall'uno all'altro è antioraria, negativo se è oraria. Può avere ampiezza qualsiasi.

Arcoseno, arcocoseno, arcotangente
Le funzioni inverse del seno ristretto a $[-\pi/2; \pi/2]$, del coseno ristretto a $[0; \pi]$ e della tangente ristretta a $]-\pi/2; \pi/2[$.

Circonferenza goniometrica
Circonferenza con centro nell'origine e raggio 1; il punto associato all'angolo α ha coordinate $(\cos\alpha; \mathrm{sen}\,\alpha)$.

Equazione goniometrica elementare
Equazione della forma $\mathrm{sen}\,x = m$, $\cos x = m$ o $\mathrm{tg}\,x = m$; ha infinite soluzioni oppure nessuna.

Fase
Il numero φ nella sinusoide $y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) + c$; il grafico è traslato orizzontalmente di φ/ω rispetto a $y = A\,\mathrm{sen}\,\omega x$.

Formule di addizione
Formule che esprimono le funzioni circolari di $\alpha \pm \beta$ con quelle di α e di β, per esempio $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$.

Frequenza
Numero di oscillazioni nell'unità di tempo, $f = 1/T$; si misura in hertz (Hz).

Modello matematico
Descrizione matematica di un fenomeno scelta perché ne riproduce i dati entro certi limiti; per lo stesso fenomeno sono possibili modelli diversi.

Moto armonico
Moto della proiezione su un diametro di un punto in moto circolare uniforme; la legge oraria è $y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$.

Radiante
Angolo al centro che insiste su un arco lungo quanto il raggio (circa 57,3°); la misura in radianti di un angolo al centro è il rapporto l/r tra arco e raggio.

Relazione fondamentale
L'identità $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valida per ogni α.

Seno, coseno
Ordinata e ascissa del punto della circonferenza goniometrica associato all'angolo α.

Sinusoide
Grafico di $y = \mathrm{sen}\,x$ e, più in generale, di $y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi) + c$.

Tangente (di un angolo)
$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{sen}\,\alpha / \cos\alpha$, definita per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$; è l'ordinata del punto in cui la retta OP incontra la retta $x = 1$ ed è il coefficiente angolare della retta OP.

Valore principale
L'angolo restituito da arcsen, arccos o arctg (e dai tasti inversi della calcolatrice): l'unico dell'intervallo di restrizione con il valore dato.

Soluzioni

1. B. $150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

2. C. Nel III quadrante seno e coseno sono negativi, quindi la tangente, loro quoziente, è positiva.

3. A. $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

4. D. I punti associati a α e $\pi - \alpha$ sono simmetrici rispetto all'asse y: l'ascissa cambia segno.

5. C. Il seno di qualsiasi angolo è compreso tra -1 e 1, e $1{,}2 > 1$.

6. A. È una delle tre forme di $\cos 2\alpha$. B è falsa: per $\alpha = \pi$ il primo membro vale $\cos 2\pi = 1$, il secondo $2\cos\pi - 1 = -3$. C è falsa: per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha $\operatorname{sen}\pi = 0$, mentre $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2$. D è falsa: per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il primo membro vale $\operatorname{sen}\pi = 0$, il secondo $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1 = 2$.

7. a) F: vale per ogni angolo α. b) V. c) F: per esempio con $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ il primo membro vale 1, il secondo $\sqrt{2}$; la formula corretta è $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$. d) V: $\cos(-x) = \cos x$. e) F: vale solo per $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; per esempio $\arcsen(\operatorname{sen}\pi) = \arcsen 0 = 0 \neq \pi$.

8. Centro l'origine O, raggio 1; $P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$; ampiezza $|A|$, periodo $\frac{2\pi}{\omega}$; retta $y = c$.

9. a) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 3\pi$. b) $210°, 300°, -15°$, $3 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 171{,}89°$.

10. a) $l = \frac{2\pi}{5} \cdot 6 = \frac{12\pi}{5} \approx 7{,}54$ cm; $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot 36 = \frac{36\pi}{5} \approx 22{,}62$ cm^2. b) $\alpha = \frac{9}{4} = 2{,}25$ rad, cioè $2{,}25 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 128{,}92°$.

11. a) $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$: $\frac{1}{2}$. b) $-\frac{7\pi}{3} = -2\pi - \frac{\pi}{3}$: $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. c) $\frac{17\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$: 1. d) $750° = 2 \cdot 360° + 30°$: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. a) $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$; nel III quadrante il seno è negativo: $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-12/13}{-5/13} = \frac{12}{5}$. b) $\operatorname{sen}\beta = -3\cos\beta$, quindi $10\cos^2\beta = 1$; nel IV quadrante il coseno è positivo e il seno negativo: $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{sen}\beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

13. a) $\operatorname{sen}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\operatorname{tg}(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\operatorname{sen}(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

14. $E = \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha$.

15. a) Ampiezza 3, periodo π, immagine $[-3; 3]$; dilatazione verticale e contrazione orizzontale di $y = \operatorname{sen} x$, nessuna traslazione. b) Ampiezza 1, periodo 4π, immagine $[0; 2]$; il grafico di $y = \cos\frac{x}{2}$ ribaltato rispetto all'asse x e traslato di 1 verso l'alto. c) Ampiezza 2, periodo 2π, immagine $[-2; 2]$; il grafico di $y = 2\operatorname{sen} x$ traslato di $\frac{\pi}{4}$ verso destra.

16. a) $\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. b) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. c) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{1 + \sqrt{3}/3}{1 - \sqrt{3}/3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. d) È $\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$. b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$.

18. a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; b) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; d) impossibile, perché $2 > 1$; e) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (oppure $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$). Sempre $k \in \mathbb{Z}$.

19. a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. b) $\operatorname{tg} x = \pm 1$: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. c) $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, quindi $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$. d) $\operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$: $\operatorname{sen} x = 0$, cioè $x = k\pi$, oppure $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, cioè $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

20. a) $\operatorname{arcsen} 0{,}4 \approx 0{,}4115$ e $\pi - 0{,}4115 \approx 2{,}7301$. b) $\arccos(-0{,}8) \approx 2{,}4981$ e $2\pi - 2{,}4981 \approx 3{,}7851$. c) $\operatorname{arctg} 3 \approx 1{,}2490$ e $1{,}2490 + \pi \approx 4{,}3906$.

21. a) Sviluppando: $\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$, per la relazione fondamentale e la duplicazione del seno. b) C.E. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ (devono esistere $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ e $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 0$). $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$. c) $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha = (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = \cos 2\alpha \cdot 1$.

22. a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$; $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha$. b) Traccia: la simmetria rispetto a $y = x$ porta $P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$ nel punto $P'(\operatorname{sen}\alpha; \cos\alpha)$ associato a $\frac{\pi}{2} - \alpha$; la simmetria rispetto all'asse y porta P' in $P''(-\operatorname{sen}\alpha; \cos\alpha)$, associato a $\pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Le coordinate di P'' danno le due formule.

23. a) Manca la seconda famiglia: anche $\frac{5\pi}{6}$ (supplementare di $\frac{\pi}{6}$) ha seno $\frac{1}{2}$; le soluzioni sono $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. b) Dividendo per 2 bisogna dividere anche il periodo: $x = k\pi$ (per esempio $x = \pi$ è soluzione, perché $\cos 2\pi = 1$, ma non è della forma $2k\pi$). c) La calcolatrice era in modalità DEG: 0,0349 è il seno di 2°; il seno di 2 radianti è circa 0,9093.

24. a) Non è iniettiva: valori diversi di x, come 0, π e 2π, hanno lo stesso seno. In $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ il seno è crescente, quindi iniettivo, e assume tutti i valori di $[-1; 1]$: è una biiezione tra $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ e $[-1; 1]$, e ha un'inversa. b) $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e l'arcocoseno dà un valore di $[0; \pi]$: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. c) Angoli che differiscono di π hanno punti simmetrici rispetto all'origine: seno e coseno cambiano entrambi segno, e il loro quoziente resta uguale; seno e coseno, presi da soli, tornano uguali solo dopo un giro intero.

25. a) $T = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5$ s; $f = 2$ Hz. b) $y = 0{,}5\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0{,}25$ m. c) $4\pi t = \frac{3\pi}{2}$, cioè $t = \frac{3}{8} = 0{,}375$ s.

26. a) $h(0) = 30 - 25 = 5$; $h(5) = 30 - 25\cos\frac{\pi}{2} = 30$ m; $h(10) = 30 - 25\cos\pi = 55$ m. b) $\cos(\frac{\pi}{10}t) = -\frac{1}{2}$: nel primo giro ($0 \le \frac{\pi}{10}t < 2\pi$) si ha $\frac{\pi}{10}t = \frac{2\pi}{3}$ oppure $\frac{4\pi}{3}$, cioè $t = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ min (6 min 40 s) e $t = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$ min (13 min 20 s). c) Tra i due istanti: $\frac{20}{3}$ min, cioè 6 min 40 s, un terzo del giro.

27. a) Massimo $12 + 3{,}5 = 15{,}5$ quando $\frac{\pi}{6}(t - 3) = \frac{\pi}{2}$, cioè $t = 6$ (giugno); minimo $12 - 3{,}5 = 8{,}5$ per $t = 12$ (dicembre). b) $L(6) = 15{,}5$; $L(12) =$

$12 + 3{,}5 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 8{,}5$. c) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}(t-3)) > \frac{1}{2}$ quando $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}(t-3) < \frac{5\pi}{6}$, cioè $4 < t < 8$: per 4 mesi.

28. a) $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} = 0{,}02$ s. b) $v = 325 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 162{,}5$ V. c) $\operatorname{sen}(100\pi t) = \frac{1}{2}$ con $0 \le 100\pi t < 2\pi$: $100\pi t = \frac{\pi}{6}$ oppure $\frac{5\pi}{6}$, cioè $t = \frac{1}{600} \approx 0{,}00167$ s e $t = \frac{1}{120} \approx 0{,}00833$ s.

29. Traccia. a) La colonna D vale 1 in ogni riga (a meno degli arrotondamenti): è la relazione fondamentale. Le colonne E e F coincidono: è la formula $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. b) Si ottengono i punti di due sinusoidi, con il coseno anticipato di $\frac{\pi}{2}$. c) A cambia l'altezza delle oscillazioni (con $A < 0$ il grafico si ribalta), ω le stringe o le allarga (con $\omega = 2$ due oscillazioni in 2π, periodo π), φ trasla il grafico orizzontalmente di $\frac{\varphi}{\omega}$, verso sinistra se $\varphi > 0$.

30. a) Ampiezza 2, periodo 2π, immagine $[-2; 2]$. b) $f(0) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 1$. c) $2(\operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$. d) $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$: $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, cioè $x = 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; in $[0; 2\pi[$: $x = 0$ e $x = \frac{2\pi}{3}$.

31. a) Nel II quadrante $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} : (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. b) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$. c) $-\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 0$.

32. Per l'esempio svolto sulle formule di addizione, $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2 \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3})$; l'equazione diventa $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, quindi $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, cioè $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. In $[0; 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$. Verifica: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$ ✓; $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ ✓.