CAPITOLO

3

L'iperbole e le coniche

Dove l'ellisse somma, l'iperbole sottrae: e la curva, invece di chiudersi, si apre in due rami verso l'infinito.

OBIETTIVI

1. Ricavare l'equazione canonica dell'iperbole dalla sua definizione come luogo e leggerne vertici, fuochi, asintoti ed eccentricità.
2. Determinare l'equazione di un'iperbole da due condizioni e studiare le posizioni di una retta, distinguendo la tangenza dal caso della retta parallela a un asintoto.
3. Riconoscere l'iperbole equilatera riferita agli asintoti nel grafico della proporzionalità inversa e studiare la funzione omografica come iperbole traslata.
4. Descrivere le coniche come sezioni di un cono e spiegare l'origine greca dei loro nomi.
5. Dimostrare con le sfere di Dandelin che la sezione ellittica ha due fuochi e usare la proprietà fuoco–direttrice–eccentricità.
6. Confrontare il metodo sintetico e quello analitico nello studio delle coniche.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 L'iperbole come luogo geometrico 2
3.2 Asintoti ed eccentricità 5
3.3 Retta e iperbole 9
3.4 L'iperbole equilatera e la funzione omografica 11
3.5 Le coniche come sezioni del cono 16
3.6 Sintetico e analitico: Dandelin, fuoco e direttrice 18

Matematica 4 · Parte I · Funzioni, ellisse e iperbole · versione 1.0
Capitolo 3: L'iperbole e le coniche · pagine 71–96 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente l'ellisse è nata da una *somma* costante di distanze da due punti fissi. Che cosa succede se teniamo costante la *differenza*? Nasce una curva molto diversa, fatta di due pezzi separati che si allontanano senza fine avvicinandosi sempre di più a due rette: l'*iperbole*. La conosci già senza saperlo. Il grafico della proporzionalità inversa $y = \dfrac{k}{x}$, che hai disegnato nel primo anno, è un'iperbole; lo è la curva che lega pressione e volume di un gas a temperatura costante; lungo un'iperbole si muove una cometa che attraversa il Sistema solare troppo veloce per esserne catturata.

Seguiremo la strada già percorsa per la parabola, la circonferenza e l'ellisse: la definizione come luogo, l'equazione canonica, le posizioni di una retta e le tangenti. Incontreremo due novità, gli *asintoti* e la *funzione omografica*. Poi faremo un passo indietro di ventidue secoli: tutte le curve studiate finora sono *sezioni* di uno stesso cono, come sapeva Apollonio di Perga, e una dimostrazione puramente geometrica, quella delle sfere di Dandelin, ritrova i fuochi che finora avevamo soltanto calcolato. È l'occasione per confrontare, come chiedono le Indicazioni nazionali, il metodo sintetico e quello analitico.

3.1 L'iperbole come luogo geometrico

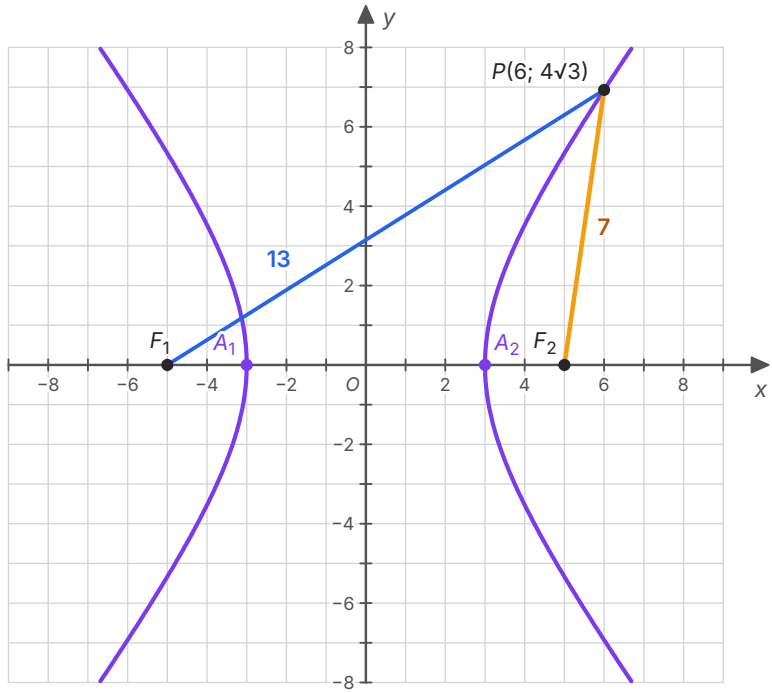
3.1.1 La definizione

Fissiamo nel piano due punti distinti F_1 e F_2, a distanza $2c$, e un numero a con $0 < a < c$. Si chiama **iperbole** di **fuochi** F_1 e F_2 il luogo dei punti P del piano per i quali il valore assoluto della differenza delle distanze dai fuochi è costante e uguale a $2a$:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a, \quad \text{con } 0 < 2a < 2c = F_1F_2.$$

Il punto medio O del segmento F_1F_2 è il **centro** dell'iperbole e c è la semidistanza focale. La condizione $2a < 2c$ non è un capriccio. Se P non sta sulla retta dei fuochi, P, F_1 e F_2 formano un triangolo e, per la disuguaglianza triangolare, la differenza di due lati è minore del terzo: $|PF_1 - PF_2| < F_1F_2$. Con $2a > 2c$ il luogo sarebbe vuoto; con $2a = 2c$ si ridurrebbe a due semirette della retta F_1F_2, con origine nei fuochi.

Il valore assoluto nasconde due casi. I punti più vicini a F_2 soddisfano $PF_1 - PF_2 = 2a$ e formano un **ramo** della curva; quelli più vicini a F_1 soddisfano $PF_2 - PF_1 = 2a$ e formano l'altro. A differenza dell'ellisse, l'iperbole non è una curva chiusa e non è «in un pezzo solo»: i due rami non hanno punti comuni. Nella Figura 3.1 il punto P del ramo destro dista 13 da F_1 e 7 da F_2: la differenza è $6 = 2a$.



$x^2 / 9 - y^2 / 16 = 1$

$a = 3$, $c = 5$

$PF_1 = 13$

$PF_2 = 7$

$PF_1 - PF_2 = 6 = 2a$

Per ogni punto del ramo destro la differenza vale $2a$; per il ramo sinistro vale $PF_2 - PF_1 = 2a$.

Figura 3.1 L'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ con fuochi $F_1(-5;\,0)$ e $F_2(5;\,0)$. Per il punto $P(6;\,4\sqrt{3})$ del ramo destro $PF_1 = 13$ e $PF_2 = 7$: la differenza è $6 = 2a$.

3.1.2 L'equazione canonica

Scegliamo il riferimento come per l'ellisse nel capitolo 2: asse x sulla retta dei fuochi, origine nel centro, quindi $F_1(-c;\,0)$ e $F_2(c;\,0)$. Il punto $P(x;\,y)$ appartiene all'iperbole se e solo se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Isoliamo il primo radicale ed eleviamo al quadrato:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Sviluppando, x^2, y^2 e c^2 si cancellano e, dividendo per 4, resta

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Eleviamo di nuovo al quadrato, e il doppio segno sparisce:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \quad \text{cioè} \quad (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Poiché $c > a$, il numero $c^2 - a^2$ è positivo: lo chiamiamo b^2, con $b > 0$. Dividendo per a^2b^2 otteniamo l'**equazione canonica dell'iperbole**.

IN SINTESI

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } c^2 = a^2 + b^2.$$

È l'iperbole con i fuochi $F_{1,2}(\pm c;\, 0)$ sull'asse x, simmetrici rispetto all'origine. Per l'ellisse era $c^2 = a^2 - b^2$; per l'iperbole $c^2 = a^2 + b^2$.

Abbiamo elevato al quadrato due volte, e sai che così si possono aggiungere soluzioni. Il viceversa però vale: se $P(x;\, y)$ soddisfa l'equazione canonica, un calcolo diretto (sostituendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$) dà $PF_1 = |\frac{c}{a}x + a|$ e $PF_2 = |\frac{c}{a}x - a|$; poiché sulla curva $|x| \geq a$, quindi $|\frac{c}{a}x| \geq c > a$, la differenza delle due distanze vale esattamente $\pm 2a$. I punti dell'equazione sono *tutti e soli* i punti del luogo.

3.1.3 Vertici, assi e simmetrie

Dall'equazione leggiamo le proprietà della curva (Figura 3.2).

- **Simmetrie.** x e y compaiono solo al quadrato: l'iperbole è simmetrica rispetto ai due assi cartesiani e rispetto all'origine.
- **Vertici.** Per $y = 0$ si ha $x = \pm a$: i punti $A_1(-a;\, 0)$ e $A_2(a;\, 0)$ sono i **vertici**. Per $x = 0$ si avrebbe $y^2 = -b^2$: la curva non taglia l'asse y.
- **Estensione.** Da $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ segue $|x| \geq a$: nella striscia $-a < x < a$ non ci sono punti, mentre y può assumere qualsiasi valore.
- **Assi.** Il segmento A_1A_2, lungo $2a$, è l'**asse trasverso** e a il semiasse trasverso. Il segmento di estremi $B_1(0;\, -b)$ e $B_2(0;\, b)$, che *non* sono punti della curva, è l'**asse non trasverso**.

Il rettangolo con i lati paralleli agli assi e i vertici nei punti $(\pm a;\, \pm b)$ si chiama **rettangolo fondamentale**. La sua semidiagonale misura $\sqrt{a^2 + b^2} = c$: la circonferenza di centro O che passa per i vertici del rettangolo passa anche per i fuochi. Dati a e b, riga e compasso bastano per trovare i fuochi.

3.1.4 I fuochi sull'asse y

Se i fuochi sono $F_{1,2}(0;\, \pm c)$, gli stessi passaggi con x e y scambiati portano all'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \text{con } c^2 = a^2 + b^2.$$

Ora i vertici sono $(0;\pm b)$, l'asse trasverso sta sull'asse y ed è lungo $2b$, e la curva non taglia l'asse x. Le due iperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ hanno lo stesso rettangolo fondamentale e si dicono **iperboli coniugate**.

ERRORE FREQUENTE

Usare le formule dell'ellisse. Per l'iperbole $c^2=a^2+b^2$, e non è affatto detto che sia $a>b$: in $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ il semiasse trasverso è 2 e l'altro è 5. Quale sia l'asse trasverso lo decide il *segno*, non la grandezza dei denominatori: il termine positivo indica l'asse su cui stanno vertici e fuochi.

3.2 Asintoti ed eccentricità

3.2.1 Gli asintoti

Nella Figura 3.2 i rami, allontanandosi dal centro, sembrano appoggiarsi alle rette delle diagonali del rettangolo fondamentale, $y=\pm\frac{b}{a}x$. Vediamo perché. Nel primo quadrante il ramo destro ha equazione $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, con $x\geq a$. Poiché $\sqrt{x^2-a^2}<x$, il punto della curva sta sempre *sotto* il punto della retta $y=\frac{b}{a}x$ con la stessa ascissa; la distanza verticale fra i due punti è

$$d(x)=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per $x+\sqrt{x^2-a^2}$, come nella razionalizzazione. Il numeratore è fisso, il denominatore cresce senza limite: la distanza diventa piccola quanto vogliamo, ma non è mai zero. La Tabella 3.1 lo mostra con i numeri.

Tabella 3.1 Ordinata della retta $y = \frac{4}{3}x$ e del ramo dell'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ nel primo quadrante, e loro distanza verticale $d(x)$ (valori arrotondati).

x	retta $\frac{4}{3}x$	iperbole $\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$	$d(x)$
3	4	0	4
5	6,667	5,333	1,333
10	13,333	12,719	0,614
30	40,000	39,799	0,201
100	133,333	133,273	0,060
1000	1333,333	1333,327	0,006

Per simmetria lo stesso accade negli altri quadranti. Le rette $y = \pm\frac{b}{a}x$ si chiamano **asintoti** dell'iperbole: rette a cui la curva si avvicina indefinitamente, allontanandosi dal centro, senza mai incontrarle. Usiamo la parola in senso intuitivo; la definizione precisa richiede il concetto di limite, che incontrerai nel quinto anno. Gli asintoti si ottengono ponendo uguale a zero il primo membro dell'equazione canonica, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; per questo sono gli stessi per l'iperbole coniugata con secondo membro -1.

Gli asintoti guidano il disegno: si traccia il rettangolo fondamentale, se ne prolungano le diagonali, si segnano i vertici e si disegnano i rami, che partono dai vertici perpendicolari all'asse trasverso e poi si accostano alle diagonali.

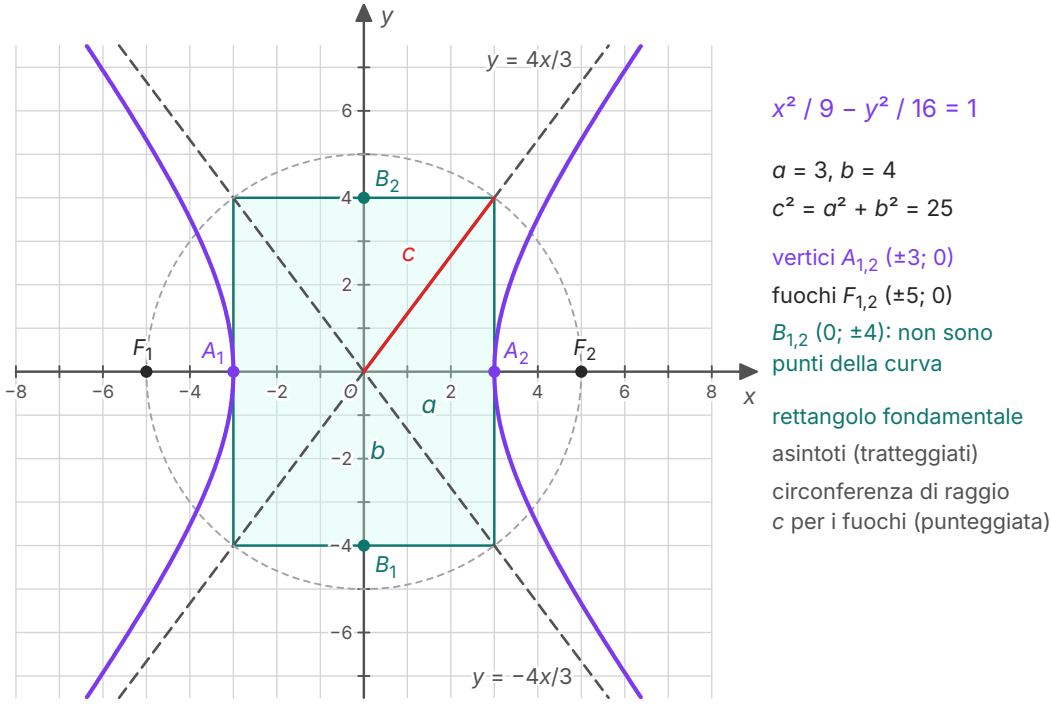


Figura 3.2 Gli elementi dell'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$: vertici A_1 e A_2, punti B_1 e B_2 dell'asse non trasverso, rettangolo fondamentale, asintoti (le rette delle sue diagonali) e fuochi sulla circonferenza di raggio $c = 5$.

3.2.2 L'eccentricità

Come per l'ellisse, l'eccentricità è il rapporto fra la semidistanza focale e il semiasse trasverso:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1 \quad \text{(fuochi sull'asse } x\text{)}, \qquad e = \frac{c}{b} \quad \text{(fuochi sull'asse } y\text{)}.$$

Per l'ellisse era $0 \le e < 1$; per l'iperbole, poiché $c > a$, è sempre $e > 1$. La formula lega l'eccentricità alla pendenza degli asintoti, $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$: con e di poco maggiore di 1 gli asintoti sono quasi orizzontali e i rami molto stretti; al crescere di e gli asintoti si raddrizzano e i rami si aprono. Il caso $e = \sqrt{2}$, cioè $b = a$, avrà un ruolo speciale. La Tabella 3.2 mette a confronto le due curve.

Tabella 3.2 Ellisse e iperbole a confronto (fuochi sull'asse x).

	ellisse	iperbole
definizione	$PF_1 + PF_2 = 2a$	$\lvert PF_1 - PF_2 \rvert = 2a$
equazione	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
fuochi	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
eccentricità	$0 \le e < 1$	$e > 1$
forma	chiusa e limitata	due rami illimitati, due asintoti

3.2.3 Determinare l'equazione

L'equazione canonica contiene due parametri, a^2 e b^2: servono due condizioni indipendenti, per esempio i vertici, i fuochi, l'eccentricità, gli asintoti, il passaggio per un punto. Quando le condizioni sono passaggi per punti conviene prendere come incognite $u = \frac{1}{a^2}$ e $v = \frac{1}{b^2}$: le equazioni diventano lineari. Alla fine si controlla sempre sostituendo i dati.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha i fuochi $F_1(-4;\,0)$ e $F_2(4;\,0)$ e passa per $P(4;\,6)$; trova l'eccentricità e gli asintoti.

Con la definizione. $PF_2 = 6$ (P sta sulla verticale di F_2) e $PF_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Quindi $2a = |10 - 6| = 4$, $a = 2$ e $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$: l'iperbole è $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Con l'equazione. Da $c = 4$: $a^2 + b^2 = 16$; dal passaggio per P: $\frac{16}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1$. Sostituendo $b^2 = 16 - a^2$ e liberando dai denominatori si arriva a $a^4 - 68a^2 + 256 = 0$, con soluzioni $a^2 = 4$ e $a^2 = 64$. La seconda si scarta, perché darebbe $b^2 = -48 < 0$ (e infatti $a = 8 > c$).

Elementi. $e = \frac{c}{a} = 2$; $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$, quindi gli asintoti sono $y = \pm\sqrt{3}x$. **Controllo:** $\frac{16}{4} - \frac{36}{12} = 4 - 3 = 1$. Il primo metodo è più rapido perché usa la proprietà che definisce la curva: un piccolo esempio di ragionamento sintetico contro ragionamento analitico.

3.3 Retta e iperbole

3.3.1 Le posizioni di una retta

I punti comuni a una retta e a un'iperbole si trovano risolvendo il sistema delle due equazioni. Sostituendo $y = mx + q$ in $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e moltiplicando per a^2b^2 si ottiene l'equazione risolvente

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mqx - a^2(q^2 + b^2) = 0.$$

Per la circonferenza e per l'ellisse questa equazione era sempre di secondo grado. Qui no: il coefficiente di x^2 si annulla se e solo se $m = \pm\frac{b}{a}$, cioè se la retta è *parallela a un asintoto*. In quel caso l'equazione è di primo grado: se $q \neq 0$ ha una sola soluzione, se $q = 0$ (la retta è l'asintoto) non ne ha nessuna.

IN SINTESI

Retta $y = mx + q$ e iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

- $m = \pm\frac{b}{a}$ (retta parallela a un asintoto): **un solo punto comune**, senza tangenza, se la retta non è l'asintoto; nessuno se lo è;
- $m \neq \pm\frac{b}{a}$ e $\Delta > 0$: retta **secante**, due punti comuni;
- $m \neq \pm\frac{b}{a}$ e $\Delta = 0$: retta **tangente**, un punto comune contato due volte;
- $m \neq \pm\frac{b}{a}$ e $\Delta < 0$: retta **esterna**, nessun punto comune.

Le rette verticali $x = k$ sono secanti se $|k| > a$, tangenti nei vertici se $|k| = a$, esterne se $|k| < a$.

Una secante può tagliare lo stesso ramo in due punti oppure ciascun ramo in un punto. Per le rette per il centro, $y = mx$, la risolvente è $(b^2 - a^2m^2)x^2 = a^2b^2$: ha due soluzioni opposte solo se $|m| < \frac{b}{a}$. Una retta per il centro taglia l'iperbole, un punto per ramo, solo se è «meno ripida» degli asintoti.

ERRORE FREQUENTE

«Un solo punto comune, dunque tangente». Per la circonferenza e per l'ellisse era vero; per l'iperbole no. Una retta parallela a un asintoto, diversa dall'asintoto, incontra la curva in un solo punto e la *attraversa*: passa dalla regione interna di un ramo a quella esterna. La tangente è caratterizzata da $\Delta = 0$ in un'equazione di *secondo* grado. Lo stesso accadeva, in *Matematica 3*, per le rette parallele all'asse di una parabola.

3.3.2 Le tangenti

Per le tangenti valgono i due metodi già noti. Le **tangenti da un punto** P_0 si cercano nel fascio di rette per P_0, imponendo $\Delta = 0$ alla risolvente, dopo aver escluso le rette parallele agli asintoti. La **tangente in un punto** $P_0(x_0; y_0)$ della curva si scrive con la formula di sdoppiamento, già usata per la parabola, la circonferenza e l'ellisse: x^2 diventa x_0x e y^2 diventa y_0y. Per l'iperbole con i fuochi sull'asse y il secondo membro resta -1.

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

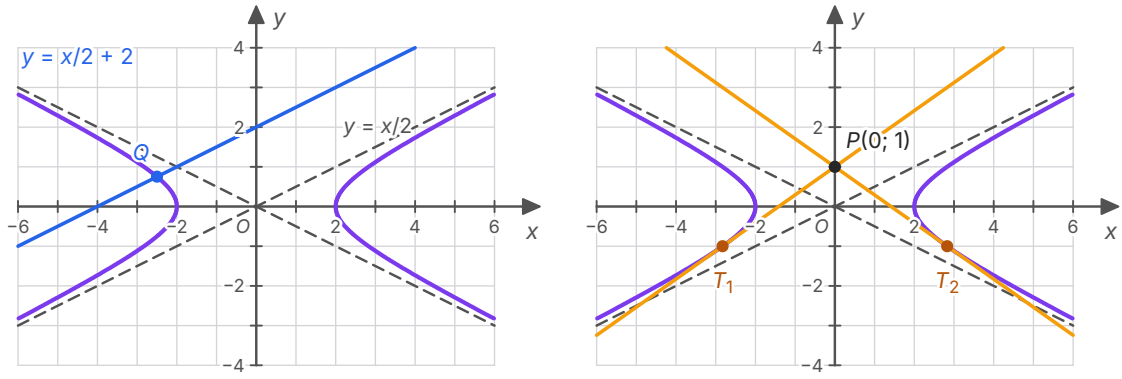
ESEMPIO SVOLTO

Problema. Data l'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$: a) studia la posizione della retta $y = \frac{x}{2} + 2$; b) trova le tangenti condotte da $P(0; 1)$ e i punti di tangenza.

a) $a = 2$, $b = 1$: gli asintoti sono $y = \pm\frac{x}{2}$ e la retta è parallela a uno di essi. Dall'equazione $x^2 - 4y^2 = 4$, sostituendo: $x^2 - 4(\frac{x}{2} + 2)^2 = 4$, cioè $x^2 - x^2 - 8x - 16 = 4$. I termini in x^2 si cancellano: $x = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{4}$. Un solo punto comune, $Q(-\frac{5}{2}; \frac{3}{4})$, ma la retta non è tangente (Figura 3.3, a sinistra). Controllo: $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$.

b) La retta $x = 0$ non incontra la curva; le altre rette per P sono $y = mx + 1$. Sostituendo: $(1 - 4m^2)x^2 - 8mx - 8 = 0$. Escluse $m = \pm\frac{1}{2}$, imponiamo $\frac{\Delta}{4} = 16m^2 + 8(1 - 4m^2) = 8 - 16m^2 = 0$: $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le tangenti sono $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$.

Con $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ l'equazione diventa $-x^2 - 4\sqrt{2}x - 8 = 0$, cioè $(x + 2\sqrt{2})^2 = 0$: tangenza in $T_1(-2\sqrt{2}; -1)$; per simmetria l'altra tangente tocca in $T_2(2\sqrt{2}; -1)$. **Controllo** con lo sdoppiamento in T_2: $\frac{2\sqrt{2}x}{4} + y = 1$, cioè $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$, che coincide.



una sola intersezione, senza tangenza

le due tangenti da P

Figura 3.3 L'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ e i suoi asintoti $y = \pm\frac{x}{2}$. A sinistra, la retta $y = \frac{x}{2} + 2$, parallela a un asintoto, incontra la curva nel solo punto Q senza esserle tangente. A destra, le due tangenti condotte da $P(0; 1)$, con i punti di tangenza T_1 e T_2.

Anche l'iperbole ha una proprietà focale, che qui enunciamo soltanto: la tangente in un punto P è la bisettrice dell'angolo F_1PF_2. Un raggio di luce diretto verso un fuoco, riflesso dalla parte convessa di uno specchio iperbolico, ripiega verso l'altro fuoco: è il principio dello specchio secondario di molti telescopi riflettori.

3.4 L'iperbole equilatera e la funzione omografica

3.4.1 Asintoti perpendicolari

Un'iperbole con i semiassi uguali, $a = b$, si chiama **iperbole equilatera**: la sua equazione è $x^2 - y^2 = a^2$ (oppure $x^2 - y^2 = -a^2$, con i fuochi sull'asse y). Il rettangolo fondamentale è un quadrato e gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti, $y = x$ e $y = -x$: sono *perpendicolari*. Viceversa, se gli asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$ sono perpendicolari, il prodotto dei coefficienti angolari è -1, cioè $\frac{b^2}{a^2} = 1$ e $b = a$. Inoltre $c = a\sqrt{2}$, quindi **ogni iperbole equilatera ha eccentricità $\sqrt{2}$**: tutte hanno la stessa forma e differiscono solo per la scala, come le circonferenze.

3.4.2 L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

Ruotiamo l'iperbole $x^2 - y^2 = a^2$ di 45° in senso antiorario intorno all'origine. Gli asintoti vanno sugli assi cartesiani e il fuoco $(a\sqrt{2}; 0)$ va sulla bisettrice del primo quadrante, alla stessa distanza $a\sqrt{2}$ da O: per il triangolo rettangolo isoscele (*Matematica 2*, cap. 3) le sue coordinate sono

$(a; a)$. Che equazione ha la curva ruotata? Mostriamo che è $xy = \frac{a^2}{2}$, verificando direttamente la definizione.

Sia $k > 0$ e sia $P(x; y)$ un punto con $xy = k$; poniamo $s = \sqrt{2k}$, così che $s^2 = 2k$, e prendiamo $F_1(-s; -s)$, $F_2(s; s)$. Poiché $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - s^2$,

$$PF_2{}^2 = (x - s)^2 + (y - s)^2 = x^2 + y^2 - 2s(x + y) + 2s^2 = (x + y - s)^2,$$

e allo stesso modo $PF_1{}^2 = (x + y + s)^2$. Nel primo quadrante $x + y \geq 2\sqrt{xy} = \sqrt{2}s > s$ (perché $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$), quindi $PF_1 = x + y + s$, $PF_2 = x + y - s$ e $PF_1 - PF_2 = 2s$; nel terzo quadrante, per simmetria, $PF_2 - PF_1 = 2s$. La curva $xy = k$ è dunque un'iperbole con fuochi $(\pm s; \pm s)$ e $a = s$, cioè $k = \frac{a^2}{2}$; la distanza dei fuochi da O è $s\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, come per un'iperbole equilatera. c.v.d.

IN SINTESI

L'**iperbole equilatera riferita agli asintoti** ha equazione

$$xy = k, \quad k \neq 0, \quad \text{con } |k| = \frac{a^2}{2}.$$

Gli asintoti sono gli assi cartesiani. Se $k > 0$ (rotazione antioraria di $x^2 - y^2 = a^2$) i rami stanno nel primo e nel terzo quadrante e vertici e fuochi sulla bisettrice $y = x$; se $k < 0$ (rotazione oraria) stanno nel secondo e nel quarto, sulla bisettrice $y = -x$.

Per esempio, per $xy = 4$ è $a^2 = 8$: è l'iperbole $x^2 - y^2 = 8$ ruotata (Figura 3.4). I vertici stanno sulla curva e su $y = x$, quindi $x^2 = 4$: $(2; 2)$ e $(-2; -2)$, a distanza $2\sqrt{2} = a$ da O; i fuochi sono $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ e $(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

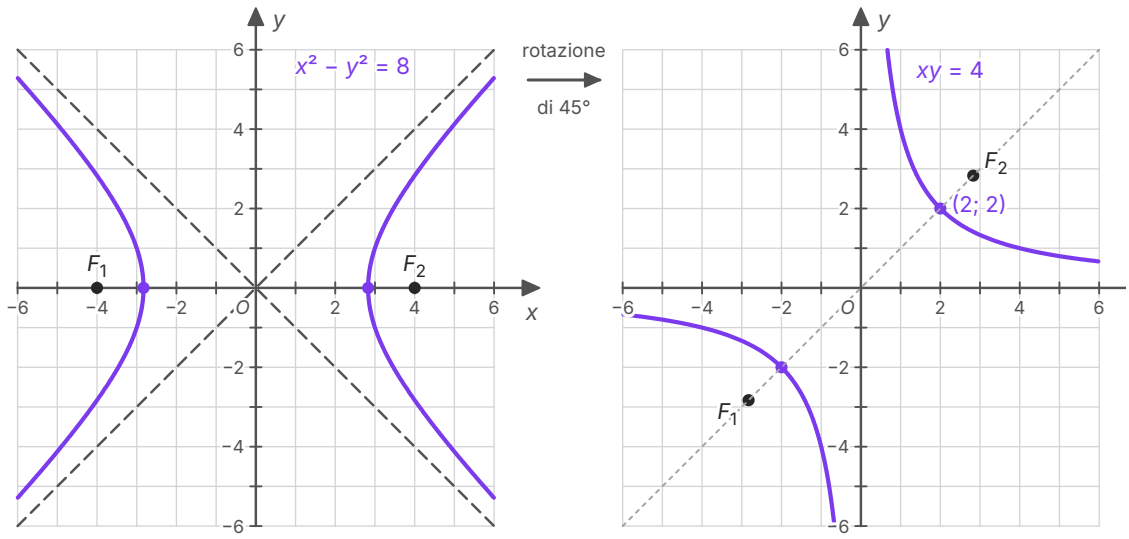


Figura 3.4 A sinistra, l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 8$ con gli asintoti $y = \pm x$ e i fuochi $(\pm 4; 0)$. A destra, la stessa curva ruotata di 45° in senso antiorario: l'iperbole $xy = 4$, che ha come asintoti gli assi, vertici $(2; 2)$ e $(-2; -2)$, fuochi sulla bisettrice $y = x$.

Scritta come $y = \dfrac{k}{x}$, l'equazione $xy = k$ è la proporzionalità inversa di *Matematica 1* (cap. 3 e 5): due grandezze sono inversamente proporzionali quando il loro prodotto è costante. Il nome «iperbole» che davamo al suo grafico è dunque esatto: è un'iperbole equilatera a tutti gli effetti, con fuochi, vertici e asintoti.

3.4.3 La funzione omografica

Si chiama **funzione omografica** una funzione del tipo

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0,$$

dove, attenzione, a, b, c, d sono coefficienti e non i semiassi. Il dominio è $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Dividendo il numeratore per il denominatore (capitolo 1) si ottiene $ax + b = \dfrac{a}{c}(cx + d) + b - \dfrac{ad}{c}$, quindi

$$y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \dfrac{d}{c}}, \quad \text{con } k = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0.$$

Posto $x_0 = -\frac{d}{c}$ e $y_0 = \frac{a}{c}$, la funzione è $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$: per i grafici deducibili del capitolo 1 il suo grafico si ottiene da quello di $y = \frac{k}{x}$ con la traslazione di vettore $(x_0; y_0)$. È un'iperbole equilatera traslata, con **centro** $C(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ e asintoti paralleli agli assi: $x = -\frac{d}{c}$, dove si annulla il denominatore, e $y = \frac{a}{c}$, il rapporto dei coefficienti di x.

Le due condizioni escludono i **casi degeneri**. Se $c = 0$ la funzione è lineare e il grafico è una retta. Se $ad - bc = 0$, allora $k = 0$ e la funzione vale $\frac{a}{c}$ per ogni x del dominio: il grafico è una retta orizzontale *privata di un punto*. Per esempio $y = \frac{2x + 4}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{x + 2}$ vale 2 per ogni $x \neq -2$.

ESEMPIO SVOLTO

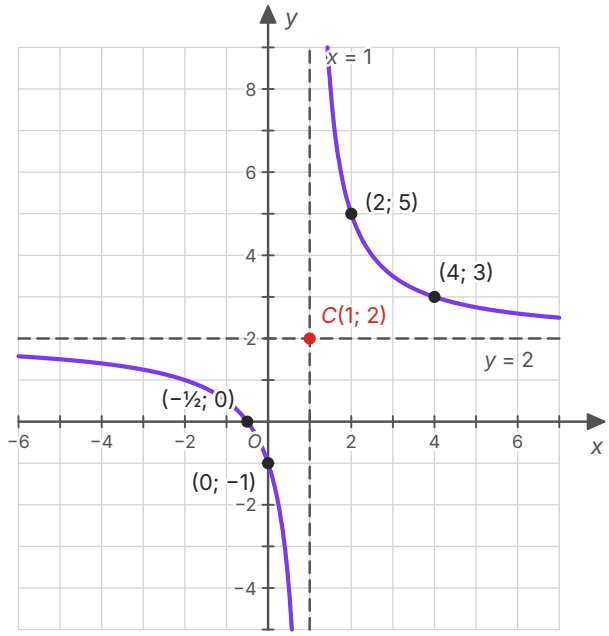
Problema. Studia e disegna $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

Controllo. $c = 1 \neq 0$ e $ad - bc = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$: il grafico è un'iperbole. C.E.: $x \neq 1$.

Centro e asintoti. $C(1; 2)$; asintoti $x = 1$ e $y = 2$. La divisione dà $y = 2 + \frac{3}{x - 1}$, cioè $(x - 1)(y - 2) = 3$: l'iperbole $XY = 3$ traslata di vettore $(1; 2)$; poiché $3 > 0$, i rami stanno nel primo e nel terzo «quadrante» rispetto al centro.

Punti. $y = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$; per $x = 0$ si ha $y = -1$. Altri punti: $(2; 5)$, $(4; 3)$ e il suo simmetrico rispetto al centro, $(-2; 1)$.

Immagine e monotonia. $y = 2$ non si raggiunge mai, perché $\frac{3}{x - 1} \neq 0$: l'immagine è $y \neq 2$. La funzione è decrescente in $]-\infty; 1[$ e in $]1; +\infty[$, ma *non* nel suo dominio: $f(0) = -1 < f(2) = 5$. Il grafico è nella Figura 3.5.



$y = (2x + 1) / (x - 1)$

$= 2 + 3 / (x - 1)$

centro $C(1; 2)$

asintoti $x = 1$ e $y = 2$

È l'iperbole equilatera $xy = 3$ traslata con vettore $(1; 2)$.

Figura 3.5 Il grafico della funzione omografica $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$: un'iperbole equilatera con centro $C(1; 2)$ e asintoti $x = 1$ e $y = 2$.

Il grafico aiuta anche con le disequazioni fratte. $\dfrac{2x+1}{x-1} > 2$ chiede dove la curva sta sopra l'asintoto orizzontale: sul ramo destro, cioè per $x > 1$. Algebricamente: $\dfrac{2x+1}{x-1} - 2 = \dfrac{3}{x-1} > 0$ per $x > 1$.

COLLEGAMENTI

Fisica e chimica: la legge di Boyle. Una quantità fissata di gas, a temperatura costante, segue con buona approssimazione la legge studiata nel Seicento da Robert Boyle: pressione e volume sono inversamente proporzionali, pV = costante. Nel piano $(V; p)$ gli stati del gas stanno su un ramo di iperbole equilatera riferita agli asintoti, l'isoterma; ha senso fisico solo il ramo con $V > 0$ e $p > 0$. Il modello ha un dominio di validità: a pressioni molto alte, o vicino alla liquefazione, i gas reali se ne allontanano.

Economia: il costo medio. Con un costo fisso di 2000 € e un costo di 5 € per pezzo (dati inventati), il costo medio per pezzo, prodotti x pezzi, è $C(x) = \dfrac{5x + 2000}{x} = 5 + \dfrac{2000}{x}$: un ramo di iperbole con asintoto orizzontale $y = 5$. Al crescere della produzione il costo fisso si «spalma» su più pezzi e il costo medio si avvicina a 5 € senza mai raggiungerlo.

3.5 Le coniche come sezioni del cono

3.5.1 Il cono a due falde

Prendiamo una retta r e un punto V su di essa, e facciamo ruotare attorno a r un'altra retta g che passa per V e forma con r un angolo acuto α. La superficie descritta da g è una **superficie conica**, o semplicemente un cono: V è il vertice, r l'asse, ogni posizione di g una **generatrice**, α la semiapertura. Poiché le generatrici sono rette intere, la superficie è formata da due «coppe» opposte al vertice, le due **falde**. Non è il cono solido della geometria: è soltanto una superficie, illimitata nei due versi, ed è proprio questo che permette all'iperbole di avere due rami, uno per falda.

3.5.2 Quattro curve da un solo cono

Tagliamo il cono con un piano che *non* passa per il vertice e chiamiamo β l'angolo fra il piano e l'asse ($\beta = 90°$ se il piano è perpendicolare all'asse, $\beta = 0°$ se gli è parallelo). La curva intersezione si chiama **sezione conica**, e il suo tipo dipende soltanto dal confronto fra β e α (Figura 3.6).

- $\beta = 90°$: tutti i punti della sezione hanno la stessa distanza dal punto in cui il piano incontra l'asse. È una **circonferenza**.
- $\alpha < \beta < 90°$: il piano taglia tutte le generatrici di una sola falda; la sezione è una curva chiusa, un'**ellisse**.
- $\beta = \alpha$: il piano è parallelo a una generatrice, che non viene tagliata; la curva «si apre» nella sua direzione ed è una **parabola**.
- $\beta < \alpha$: il piano taglia entrambe le falde, e la sezione ha due rami, uno per falda: è un'**iperbole**.

Se invece il piano passa per il vertice si ottengono le **coniche degeneri**: un punto, una retta (il piano è tangente al cono lungo una generatrice) oppure due rette incidenti (Tabella 3.3). Che la circonferenza sia una sezione si vede subito; che le altre siano proprio le curve definite come luoghi, con i fuochi, è invece un teorema tutt'altro che ovvio, che dimostreremo nel prossimo paragrafo.

Tabella 3.3 Le sezioni di un cono di semiapertura α con un piano che forma un angolo β con l'asse.

angolo β	piano che non passa per il vertice	piano che passa per il vertice
β = 90°	circonferenza	un punto
α < β < 90°	ellisse	un punto
β = α	parabola	una retta (generatrice)
0° ≤ β < α	iperbole (due rami)	due rette incidenti

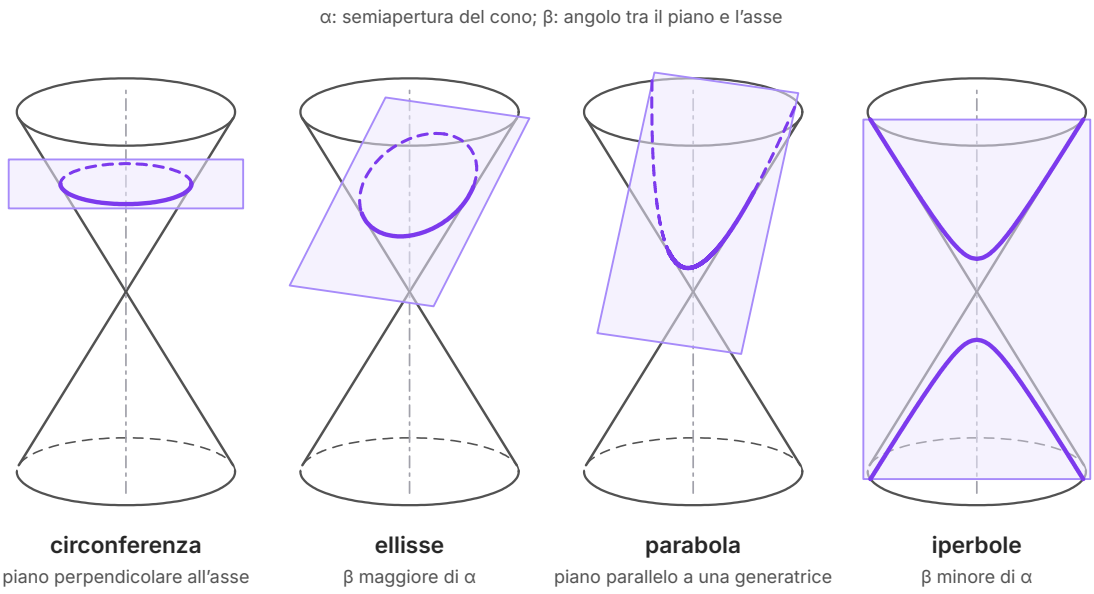


Figura 3.6 Le quattro sezioni di uno stesso cono a due falde (α = 30°), disegnate in proiezione ortogonale da un modello tridimensionale: piano perpendicolare all'asse (β = 90°), piano inclinato di β = 60°, piano parallelo a una generatrice (β = α = 30°), piano parallelo all'asse (β = 0°). Le parti delle curve sul lato nascosto del cono sono tratteggiate.

APPROFONDIMENTO · APOLLONIO E I NOMI DELLE CONICHE

I matematici greci studiavano le coniche già nel IV secolo a.C.; la tradizione attribuisce a Menecmo le prime definizioni, ottenute da tre coni diversi. Apollonio di Perga (III–II secolo a.C.) scrisse le *Coniche*, un trattato in otto libri: i primi quattro ci sono giunti in greco, i tre successivi soltanto in traduzione araba, l'ottavo è perduto. Apollonio ottenne tutte le curve da un unico cono a due falde, cambiando solo l'inclinazione del piano, e diede loro i nomi che usiamo ancora: ἔλλειψις (*élleipsis*, «mancanza, difetto»), παραβολή (*parabolé*, «accostamento», cioè uguaglianza) e ὑπερβολή (*hyperbolé*, «eccesso»).

I nomi vengono dall'*applicazione delle aree* della tradizione pitagorica, che Euclide espone nel libro VI degli *Elementi*: un rettangolo «applicato» a un segmento può mancare, eguagliare o eccedere. Lo si vede con le nostre equazioni, scritte con il vertice nell'origine e l'asse sull'asse x. Posto $2p = \frac{2b^2}{a}$, la parabola è $y^2 = 2px$, l'ellisse $y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2$ e l'iperbole $y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2$: il quadrato costruito sull'ordinata è uguale al rettangolo $2p \cdot x$, oppure ne «manca», oppure lo «eccede».

Le stesse parole sono passate alla grammatica e alla retorica: l'*ellissi* è l'omissione di una parola che si sottintende, l'*iperbole* l'esagerazione, la *parabola* il racconto che procede per confronto. Nella matematica come nella lingua le tre parole conservano il senso greco: mancanza, confronto, eccesso.

3.6 Sintetico e analitico: Dandelin, fuoco e direttrice

3.6.1 Le sfere di Dandelin

Nel capitolo 2 l'ellisse è il luogo dei punti con $PF_1 + PF_2 = 2a$; nel paragrafo precedente l'abbiamo ottenuta tagliando un cono. Sono la stessa curva? Nel 1822 Germinal Pierre Dandelin trovò una dimostrazione puramente geometrica, senza coordinate. Serve un solo fatto. Da un punto P esterno a una sfera di centro O e raggio r si conducono infinite tangenti; se T è un punto di contatto, il raggio OT è perpendicolare alla tangente e, per il teorema di Pitagora, $PT = \sqrt{PO^2 - r^2}$, che non dipende dalla tangente scelta. Dunque **i segmenti di tangenza condotti da un punto a una sfera sono tutti congruenti**, come quelli condotti a una circonferenza.

IN SINTESI

Teorema (Dandelin, 1822). **Ipotesi:** un piano π, che non passa per il vertice, taglia tutte le generatrici di una falda di un cono. **Tesi:** la sezione è un'ellisse, i cui fuochi sono i punti in cui π tocca le due sfere inscritte nel cono e tangenti a π.

Dimostrazione. Nella falda tagliata ci sono due sfere che toccano il cono lungo tutta una circonferenza e sono tangenti a π: una piccola, Σ_1, fra il vertice e il piano, e una grande, Σ_2, dall'altra parte (Figura 3.7). Sono le **sfere di Dandelin**. Siano F_1 e F_2 i punti in cui toccano π, e γ_1, γ_2 le circonferenze lungo cui toccano il cono: stanno in due piani perpendicolari all'asse, quindi paralleli.

Sia P un punto qualsiasi della sezione; la generatrice per P incontra γ_1 in A e γ_2 in B. I segmenti PF_1 e PA sono segmenti di tangenza da P alla sfera Σ_1: il primo perché π è tangente a Σ_1 in F_1, il secondo perché la generatrice è tangente a Σ_1 in A. Quindi $PF_1 = PA$, e per lo stesso motivo $PF_2 = PB$. Sommando, $PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB$, perché P sta fra A e B. Ma AB è il tratto di generatrice compreso fra i due piani paralleli di γ_1 e γ_2, ed è lo stesso per tutte le generatrici, perché il cono è di rotazione. Dunque $PF_1 + PF_2$ è costante: la sezione è un'ellisse di fuochi F_1 e F_2. c.v.d.

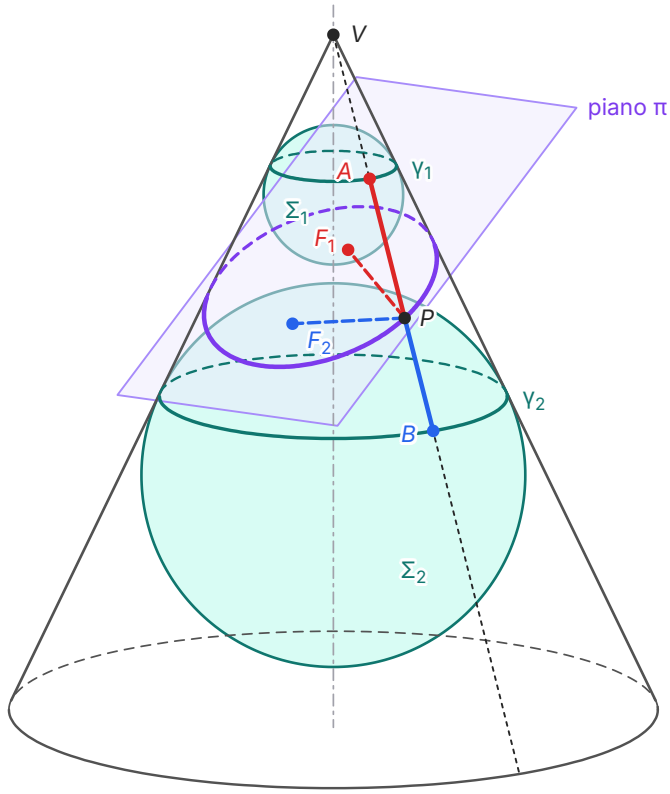


Figura 3.7 Le sfere di Dandelin, in proiezione ortogonale da un modello tridimensionale calcolato (α = 25°). Σ_1 e Σ_2 toccano il cono lungo le circonferenze γ_1, γ_2 e il piano π nei punti F_1, F_2. Per ogni punto P della sezione: $PF_1 = PA$ (in rosso) e $PF_2 = PB$ (in blu), quindi $PF_1 + PF_2 = AB$, costante.

Con una sfera per ciascuna falda lo stesso ragionamento dà, per l'iperbole, la *differenza* costante; la parabola ha una sola sfera di Dandelin. Le sfere nascondono anche un'altra retta: il piano

di γ_1 taglia π lungo la *direttrice* relativa a F_1, che ritroviamo ora.

3.6.2 Fuoco, direttrice, eccentricità

In *Matematica 3* (cap. 6) la parabola è il luogo dei punti equidistanti da un fuoco e da una **direttrice**. Generalizziamo: chiediamo che le due distanze siano in un rapporto fisso. Dati un punto F, una retta d che non passa per F e un numero $e > 0$, il luogo dei punti P tali che

$$PF = e \cdot d(P, d)$$

è un'**ellisse** se $0 < e < 1$, una **parabola** se $e = 1$, un'**iperbole** se $e > 1$; il numero e è proprio l'eccentricità della curva. È la **definizione unitaria delle coniche**, già nota ai Greci. Per la parabola è la definizione stessa; per le altre due vediamolo su un esempio. Prendiamo $F(0; 0)$ e d: $x = -2$; per $P(x; y)$, $PF = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $d(P, d) = |x + 2|$, ed elevando al quadrato (le distanze non sono negative) si ha

$$x^2 + y^2 = e^2(x + 2)^2.$$

Per $e = 1$: $y^2 = 4x + 4$, una parabola con vertice $(-1; 0)$. Per $e = \frac{1}{2}$ e per $e = 2$, completando il quadrato, si ottengono

$$\frac{(x - \frac{2}{3})^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{(x + \frac{8}{3})^2}{\frac{16}{9}} - \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1.$$

La prima è un'ellisse con $a = \frac{4}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, quindi $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ e un fuoco proprio in O. La seconda è un'iperbole con $a = \frac{4}{3}$, $c = \frac{8}{3}$, $e = 2$, e di nuovo un fuoco in O (Figura 3.8). Al crescere di e la curva si apre.

Per l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ e per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ le direttrici sono le rette $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$, ciascuna relativa al fuoco che sta dalla sua parte: per l'ellisse sono esterne alla curva, per l'iperbole cadono fra i due rami. La circonferenza non rientra nella definizione: le si attribuisce eccentricità 0, come caso limite.

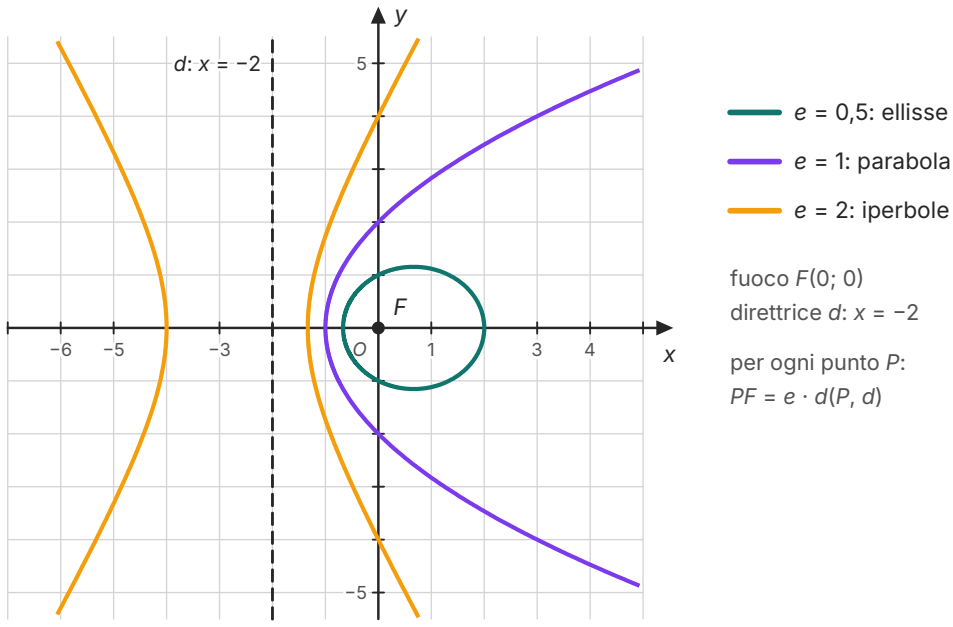


Figura 3.8 Tre coniche con lo stesso fuoco $F(0;\,0)$ e la stessa direttrice $d\colon x = -2$, calcolate da $x^2 + y^2 = e^2(x+2)^2$: ellisse ($e = 0{,}5$), parabola ($e = 1$) e iperbole ($e = 2$), il cui secondo ramo sta dall'altra parte della direttrice.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova le direttrici e verifica $PF = e \cdot d(P, d)$ in un punto.

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$: $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $e = \dfrac{4}{5}$; direttrici $x = \pm\dfrac{25}{4}$. Per $P(0;\,3)$ e $F_2(4;\,0)$: $PF_2 = \sqrt{16 + 9} = 5$; la distanza di P da $x = \dfrac{25}{4}$ è $\dfrac{25}{4}$, e $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{25}{4} = 5$. ✓

b) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$: $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $e = \dfrac{5}{4}$; direttrici $x = \pm\dfrac{16}{5}$. Per $x = 8$: $y^2 = 9(4 - 1) = 27$, quindi $P(8;\,3\sqrt{3})$. $PF_2 = \sqrt{9 + 27} = 6$; la distanza da $x = \dfrac{16}{5}$ è $8 - \dfrac{16}{5} = \dfrac{24}{5}$, e $\dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{24}{5} = 6$. ✓

3.6.3 Due modi di vedere le coniche

Abbiamo incontrato le coniche in due modi. Il punto di vista **sintetico** lavora con figure, distanze e triangoli: ci ha dato in una riga l'iperbole per $P(4;\,6)$, ha spiegato con la disuguaglianza triangolare perché deve essere $a < c$ e, con le sfere di Dandelin, ha mostrato *perché* una sezione del cono ha due fuochi, per ogni cono e ogni piano, senza un calcolo. Il punto di vista **analitico** traduce ogni domanda in un'equazione: è meno intuitivo, ma procede sempre allo stesso modo, anche quando non si vede la strada geometrica, come per le tangenti da un punto o per ricono-

scere una curva dopo aver completato i quadrati, ed è verificabile riga per riga, persino da una macchina. Il primo dà l'idea, il secondo la certezza del calcolo; i matematici greci conoscevano solo il primo, Cartesio e Fermat, nel Seicento, hanno aggiunto il secondo.

SINTESI

- L'iperbole è il luogo dei punti per cui $|PF_1 - PF_2| = 2a$, con $0 < a < c$; ha due rami, uno per ciascun segno della differenza.
- Con i fuochi $(\pm c; 0)$ l'equazione canonica è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $c^2 = a^2 + b^2$; con i fuochi sull'asse y il secondo membro è -1.
- I vertici sono $(\pm a; 0)$; la curva è simmetrica rispetto agli assi e all'origine e non ha punti nella striscia $|x| < a$.
- Gli asintoti $y = \pm \frac{b}{a} x$ sono le rette delle diagonali del rettangolo fondamentale: la curva vi si avvicina senza mai toccarle.
- L'eccentricità $e = \frac{c}{a}$ è sempre maggiore di 1 e cresce con l'apertura dei rami: $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$.
- Una retta parallela a un asintoto incontra l'iperbole in un solo punto senza esserle tangente; negli altri casi decide il discriminante.
- La tangente in $P_0(x_0; y_0)$ è $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ (formula di sdoppiamento).
- L'iperbole equilatera ($a = b$) ha asintoti perpendicolari ed $e = \sqrt{2}$; riferita agli asintoti ha equazione $xy = k$, con $|k| = \frac{a^2}{2}$: è il grafico della proporzionalità inversa.
- La funzione omografica $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ ha per grafico un'iperbole equilatera di centro $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$, traslata di $y = \frac{k}{x}$.
- Circonferenza, ellisse, parabola e iperbole sono sezioni di un cono a due falde; il tipo dipende dal confronto fra l'inclinazione del piano e la semiapertura. I nomi risalgono ad Apollonio.
- Le sfere di Dandelin dimostrano in modo sintetico che la sezione ellittica ha due fuochi; la proprietà $PF = e \cdot d(P, d)$ riunisce ellisse ($e < 1$), parabola ($e = 1$) e iperbole ($e > 1$).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● L'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ha i fuochi in:

   A. $(\pm 5; 0)$

   B. $(\pm\sqrt{7}; 0)$

   C. $(0; \pm 5)$

   D. $(\pm 4; 0)$

2. ● Gli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = -1$ sono:

   A. $y = \pm\frac{2}{5}x$

   B. $y = \pm\frac{5}{2}x$

   C. $y = \pm\frac{4}{25}x$

   D. non esistono, perché i fuochi stanno sull'asse y

3. ● Quale numero può essere l'eccentricità di un'iperbole?

   A. 0,5

   B. 1

   C. 0

   D. $\sqrt{3}$

4. ●● La retta $y = 2x + 1$ e l'iperbole $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$:

   A. sono tangenti

   B. hanno due punti comuni

   C. non hanno punti comuni

   D. hanno un solo punto comune, ma la retta non è tangente

5. ●● Il grafico di $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$ è un'iperbole di centro:

   A. $(2; 3)$

   B. $(-2; 3)$

   C. $(-2; -\frac{1}{2})$

   D. $(\frac{1}{3}; -2)$

6. ● Un piano che non passa per il vertice ed è parallelo a una sola generatrice taglia il cono secondo:

   A. un'ellisse
   B. un'iperbole
   C. una parabola
   D. due rette incidenti

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) In ogni iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è $a > b$.

   b) Le iperboli $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ e $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$ hanno gli stessi asintoti.

   c) Tutte le iperboli equilatere hanno la stessa eccentricità.

   d) La funzione $y = \frac{2x + 6}{x + 3}$ ha per grafico un'iperbole.

   e) Il punto $(0; 2)$ appartiene all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

8. ● Completa. L'iperbole è il luogo dei punti per cui è costante il valore assoluto della _____ delle distanze da due punti detti _____ . Nell'equazione canonica vale $c^2 =$ _____ e l'eccentricità è _____ di 1. Se un piano taglia entrambe le falde di un cono, la sezione è un' _____ ; il nome deriva dal greco e significa _____ .

Calcolare

9. ● Trova vertici, fuochi, eccentricità e asintoti: a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$; b) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = -1$; c) $4x^2 - y^2 = 16$.

10. ● Scrivi l'equazione canonica dell'iperbole: a) con vertici $(\pm 4; 0)$ e fuochi $(\pm 5; 0)$; b) con fuochi $(0; \pm 10)$ e vertici $(0; \pm 8)$; c) con i fuochi sull'asse x, semiasse trasverso 3 e asintoti $y = \pm 2x$.

11. ●● L'iperbole ha i fuochi $(\pm 2; 0)$ e passa per $P(3; \sqrt{2})$. Trovane l'equazione in due modi: con la definizione (calcola PF_1 e PF_2) e con il sistema.

12. ●● Trova l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ che passa per $(4; 3\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{2}; 3)$. Suggerimento: usa le incognite $u = \frac{1}{a^2}$, $v = \frac{1}{b^2}$.

13. ●● Un'iperbole con i fuochi sull'asse x ha eccentricità $\sqrt{5}$ e passa per $(3; 4\sqrt{2})$. Trovane l'equazione e gli asintoti.

14. ● Studia la posizione rispetto all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ delle rette: a) $y = x - 1$; b) $y = \frac{2}{3}x + 1$; c) $y = \frac{x}{3}$. Trova gli eventuali punti comuni.

15. ●● Scrivi la tangente all'iperbole $x^2 - 4y^2 = 12$ nel suo punto (4; 1) con la formula di sdoppiamento, e verifica il risultato con il discriminante.

16. ●●● Trova le tangenti all'iperbole $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ parallele alla bisettrice $y = x$ e i loro punti di tangenza.

17. ● Trova vertici e fuochi delle iperboli: a) $xy = 8$; b) $xy = -2$. Per ciascuna indica il semiasse a.

18. ●● Studia le funzioni (dominio, centro, asintoti, intersezioni con gli assi) e disegnane il grafico: a) $y = \frac{x+3}{x-1}$; b) $y = \frac{4-2x}{x+1}$; c) $y = \frac{3x+6}{x+2}$.

19. ●● Trova l'inversa della funzione $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$. Che cosa osservi? Spiegalo con il grafico e con la posizione del centro.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Spiega perché la retta $y = 3x$ non incontra l'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, mentre la retta $y = x$ la incontra in due punti.

21. ●● Trova l'errore. «L'iperbole con fuochi (±5; 0) e vertici (±4; 0) ha $b^2 = a^2 + c^2 = 41$, quindi è $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{41} = 1$.»

22. ●● Dimostra che un'iperbole è equilatera se e solo se la sua eccentricità è $\sqrt{2}$.

23. ●●● Sia $P(x_0; y_0)$ un punto dell'iperbole $xy = k$, con $k > 0$. Con il fascio di rette per P e la condizione $\Delta = 0$, dimostra che la tangente in P ha coefficiente angolare $-\frac{y_0}{x_0}$; poi dimostra che essa forma con gli asintoti un triangolo di area $2k$, la stessa per ogni P, e che P è il punto medio del segmento di tangente compreso fra gli asintoti.

Problemi

24. ●● Un gas a temperatura costante occupa 6 L alla pressione di 2 atm (dati inventati). a) Scrivi p in funzione di V. b) Calcola la pressione per $V = 4$ L e per $V = 1{,}5$ L, e il volume per $p = 8$ atm. c) In quale punto dell'isoterma p e V hanno lo stesso valore numerico? Che cosa rappresenta quel punto per l'iperbole?

25. ●● Una piccola azienda ha un costo fisso di 1200 € e spende 8 € per ogni pezzo (dati inventati). a) Scrivi il costo medio $C(x)$ per pezzo e trova il suo asintoto orizzontale. b) Quanti pezzi deve produrre perché il costo medio sia 10 €? c) Per quali x il costo medio è minore di 9 €?

26. ●●● Due stazioni radio $A(-50; 0)$ e $B(50; 0)$ (unità: km) trasmettono segnali sincronizzati. Una nave riceve il segnale di B 200 microsecondi prima di quello di A; le onde radio percorrono circa 0,3 km in un microsecondo. a) Su quale curva si trova la nave? Scrivine l'equazione e indica il ramo. b) La nave sa di trovarsi 40 km a nord della retta AB: trova la sua posizione (dati inventati).

27. ●● Una cometa (dati inventati) percorre un ramo di iperbole con il Sole in un fuoco; la sua distanza minima dal Sole è 1 UA e l'eccentricità dell'orbita è 1,5. Con il centro dell'iperbole nell'origine e il Sole nel fuoco F_2 sull'asse x positivo, trova a, c, b e l'equazione dell'orbita.

Verso la verifica

28. ●● Un'iperbole con i fuochi sull'asse x ha asintoti $y = \pm\frac{3}{4}x$ e passa per $(8; 3\sqrt{3})$. a) Trovane l'equazione. b) Trova fuochi ed eccentricità. c) Scrivi la tangente nel suo punto $P(5; \frac{9}{4})$. d) Trova i punti comuni con la retta $y = \frac{3}{4}x - 2$ e spiega perché la retta non è tangente.

29. ●● Trova a e d in modo che la funzione $y = \frac{ax + 3}{x + d}$ abbia asintoti $x = 2$ e $y = -1$; verifica che è un'iperbole, disegnala e risolvi la disequazione $f(x) > -1$.

30. ●●● **Sfida.** Trova il luogo dei punti P la cui distanza da $F(4; 0)$ è doppia della distanza dalla retta $x = 1$. Riconosci la conica, trovane semiassi, eccentricità e asintoti, e verifica che F è un suo fuoco e $x = 1$ la direttrice relativa.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: il capitolo su Apollonio di Perga e le *Coniche*, e quello sulla nascita della geometria analitica con Cartesio e Fermat.
- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro VI: le proposizioni sull'applicazione delle aree, da cui vengono i nomi di ellisse, parabola e iperbole.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sulle coniche nel capitolo sulla geometria proiettiva, per vedere le stesse curve da un terzo punto di vista.

Glossario del capitolo

Asintoti dell'iperbole
Le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$ a cui i rami di $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ si avvicinano indefinitamente senza incontrarle; sono le rette delle diagonali del rettangolo fondamentale.

Asse non trasverso
Il segmento di estremi $(0; -b)$ e $(0; b)$ dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; i suoi estremi non appartengono alla curva.

Asse trasverso
Il segmento che congiunge i due vertici dell'iperbole; è lungo $2a$ e sta sulla retta dei fuochi.

Coniche degeneri
Le sezioni di un cono con un piano che passa per il vertice: un punto, una retta o due rette incidenti.

Definizione unitaria delle coniche
Il luogo dei punti P con $PF = e \cdot d(P, d)$, dati un fuoco F, una direttrice d ed $e > 0$, è un'ellisse per $e < 1$, una parabola per $e = 1$, un'iperbole per $e > 1$.

Direttrice
La retta che, insieme a un fuoco e all'eccentricità, individua una conica nella definizione unitaria; per l'ellisse e l'iperbole canoniche sono le rette $x = \pm \frac{a}{e}$.

Eccentricità dell'iperbole
Il rapporto $e = \frac{c}{a}$ fra semidistanza focale e semiasse trasverso; per ogni iperbole è $e > 1$.

Funzione omografica
Una funzione $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$; il suo grafico è un'iperbole equilatera di centro $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ con asintoti paralleli agli assi.

Generatrice della superficie conica
Ciascuna delle rette per il vertice che, ruotando attorno all'asse, descrivono la superficie conica.

Iperbole
Il luogo dei punti del piano per i quali è costante, e uguale a $2a$, il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi, i fuochi, con $2a$ minore della distanza focale.

Iperbole equilatera
Un'iperbole con i semiassi uguali; ha asintoti perpendicolari ed eccentricità $\sqrt{2}$. Riferita agli asintoti ha equazione $xy = k$.

Iperboli coniugate
Le iperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, che hanno lo stesso rettangolo fondamentale e gli stessi asintoti.

Isoterma
Il grafico della legge di Boyle $pV =$ costante nel piano $(V; p)$: un ramo di iperbole equilatera riferita agli asintoti.

Rettangolo fondamentale
Il rettangolo con i vertici nei punti $(\pm a; \pm b)$; le sue diagonali stanno sugli asintoti e la sua semidiagonale è uguale a c.

Sezione conica
La curva intersezione di un cono a due falde con un piano che non passa per il vertice: circonferenza, ellisse, parabola o iperbole.

Sfere di Dandelin
Le sfere inscritte in un cono e tangenti al piano di una sezione; i loro punti di contatto con il piano sono i fuochi della sezione.

Superficie conica
La superficie descritta da una retta che ruota attorno a un'altra retta, l'asse, che la incontra nel vertice formando un angolo acuto costante; è formata da due falde.

Soluzioni

1. A. $c^2 = 16 + 9 = 25$, $c = 5$.

2. B. Gli asintoti si ottengono da $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 0$: $y = \pm\frac{5}{2}x$, qualunque sia il segno del secondo membro.

3. D. Per un'iperbole $e > 1$; 0,5 e 0 sono valori di ellissi (0 della circonferenza), 1 è la parabola.

4. D. La retta è parallela all'asintoto $y = 2x$. Sostituendo in $4x^2 - y^2 = 4$: $4x^2 - (4x^2 + 4x + 1) = 4$, cioè $x = -\frac{5}{4}$: un solo punto, $(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{2})$, senza tangenza.

5. B. $C(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}) = (-2; 3)$; inoltre $ad - bc = 6 + 1 = 7 \neq 0$.

6. C. È il caso $\beta = \alpha$.

7. a) Falso: in $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ è $a = 2 < b = 5$. b) Vero: sono iperboli coniugate, con asintoti $y = \pm\frac{2}{3}x$. c) Vero: $e = \sqrt{2}$. d) Falso: $ad - bc = 6 - 6 = 0$; la funzione vale 2 per ogni $x \neq -3$ e il grafico è una retta privata del punto $(-3; 2)$. e) Falso: per $x = 0$ si avrebbe $-\frac{4}{4} = -1 \neq 1$; l'iperbole non taglia l'asse y.

8. differenza; fuochi; $a^2 + b^2$; maggiore; iperbole; «eccesso».

9. a) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$: vertici $(\pm5; 0)$, fuochi $(\pm13; 0)$, $e = \frac{13}{5}$, asintoti $y = \pm\frac{12}{5}x$. b) $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$, fuochi sull'asse y: vertici $(0; \pm6)$, fuochi $(0; \pm10)$, $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$, asintoti $y = \pm\frac{3}{4}x$. c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$: $a = 2$, $b = 4$, $c = 2\sqrt{5}$; vertici $(\pm2; 0)$, fuochi $(\pm2\sqrt{5}; 0)$, $e = \sqrt{5}$, asintoti $y = \pm2x$.

10. a) $b^2 = 25 - 16 = 9$: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. b) Asse trasverso sull'asse y, $b = 8$, $a^2 = c^2 - b^2 = 36$: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$. c) $a = 3$, $\frac{b}{a} = 2$, $b = 6$: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$.

11. Definizione: $PF_1 = \sqrt{25 + 2} = 3\sqrt{3}$, $PF_2 = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$, $2a = 2\sqrt{3}$, $a^2 = 3$, $b^2 = 4 - 3 = 1$. Sistema: $a^2 + b^2 = 4$ e $\frac{9}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$ danno $a^4 - 15a^2 + 36 = 0$, $a^2 = 3$ oppure $a^2 = 12$ (da scartare: $b^2 < 0$). L'iperbole è $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$; controllo: $3 - 2 = 1$.

12. $16u - 27v = 1$ e $8u - 9v = 1$. Dalla seconda per 2 e sottraendo: $-9v = -1$, $v = \frac{1}{9}$, $u = \frac{1}{4}$. L'iperbole è $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Controllo: $4 - 3 = 1$ e $2 - 1 = 1$.

13. $e^2 = 5$ dà $c^2 = 5a^2$ e $b^2 = 4a^2$. Dal passaggio per il punto: $\frac{9}{a^2} - \frac{32}{4a^2} = \frac{1}{a^2} = 1$, quindi $a^2 = 1$, $b^2 = 4$: $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, asintoti $y = \pm2x$.

14. Asintoti $y = \pm\frac{2}{3}x$; si usa $4x^2 - 9y^2 = 36$. a) $5x^2 - 18x + 45 = 0$, $\frac{\Delta}{4} = 81 - 225 < 0$: esterna. b) Parallela a un asintoto: $-12x - 9 = 36$, $x = -\frac{15}{4}$, $y = -\frac{3}{2}$: un solo punto, non tangente. c) Per il centro con $|m| = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$: $3x^2 = 36$, punti $(2\sqrt{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3})$ e $(-2\sqrt{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3})$, secante.

15. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$; sdoppiamento: $\frac{4x}{12} - \frac{y}{3} = 1$, cioè $y = x - 3$. Verifica: $x^2 - 4(x - 3)^2 = 12$ dà $x^2 - 8x + 16 = 0$, con $\Delta = 0$ e radice doppia $x = 4$.

16. Rette $y = x + q$ in $x^2 - 3y^2 = 3$: $2x^2 + 6qx + 3q^2 + 3 = 0$; $\frac{\Delta}{4} = 9q^2 - 6q^2 - 6 = 3q^2 - 6 = 0$, $q = \pm\sqrt{2}$. Tangenti $y = x + \sqrt{2}$, con tangenza in

$(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$, e $y = x - \sqrt{2}$, con tangenza in $(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$. Controllo: $\frac{9/2}{3} - \frac{1}{2} = 1$.

17. a) $k = 8$: $a^2 = 16$, $a = 4$; vertici su $y = x$ con $x^2 = 8$: $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ e $(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$; fuochi a distanza $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ da O: $(4; 4)$ e $(-4; -4)$. b) $k = -2$: $a^2 = 4$, $a = 2$; vertici $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; fuochi $(2; -2)$ e $(-2; 2)$.

18. a) $x \neq 1$; $ad - bc = -1 - 3 = -4 \neq 0$; centro $(1; 1)$, asintoti $x = 1$, $y = 1$; $y = 1 + \frac{4}{x-1}$; punti $(-3; 0)$ e $(0; -3)$. b) $x \neq -1$; $ad - bc = -2 - 4 = -6 \neq 0$; centro $(-1; -2)$, asintoti $x = -1$, $y = -2$; $y = -2 + \frac{6}{x+1}$; punti $(2; 0)$ e $(0; 4)$. c) $ad - bc = 6 - 6 = 0$: caso degenere, $y = 3$ per $x \neq -2$, retta privata del punto $(-2; 3)$.

19. Da $y = \frac{x+3}{x-1}$: $xy - y = x + 3$, $x(y-1) = y + 3$, $x = \frac{y+3}{y-1}$. Scambiando le lettere, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1} = f(x)$: la funzione coincide con la propria inversa. Il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$: il centro $(1; 1)$ sta sulla bisettrice e gli asintoti $x = 1$ e $y = 1$ si scambiano nella simmetria.

20. Per una retta per il centro la risolvente è $(9 - 4m^2)x^2 = 36$. Con $m = 3$: $-27x^2 = 36$, impossibile; la retta è più ripida degli asintoti $(3 > \frac{3}{2})$. Con $m = 1 < \frac{3}{2}$: $5x^2 = 36$, $x = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$: due punti, uno per ramo.

21. L'errore sta nella relazione fra i parametri: per l'iperbole $c^2 = a^2 + b^2$, quindi $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$ e l'iperbole è $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

22. Se $a = b$, allora $c^2 = 2a^2$ ed $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$. Viceversa, se $e = \sqrt{2}$, da $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ segue $\frac{b^2}{a^2} = 1$, cioè $b = a$ (lo stesso vale con i fuochi sull'asse y, scambiando i ruoli).

23. Retta $y - y_0 = m(x - x_0)$; in $xy = k$: $mx^2 + (y_0 - mx_0)x - k = 0$ (per $m \neq 0$; la retta orizzontale e quella verticale per P incontrano la curva una sola volta e non sono tangenti). $\Delta = (y_0 - mx_0)^2 + 4mk$ e, con $k = x_0y_0$, $\Delta = (y_0 + mx_0)^2$, nullo per $m = -\frac{y_0}{x_0}$. La tangente $y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$ taglia l'asse x in $(2x_0; 0)$ e l'asse y in $(0; 2y_0)$: l'area del triangolo è $\frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2y_0 = 2x_0y_0 = 2k$ (con $x_0, y_0 > 0$; nel terzo quadrante si usano i valori assoluti), e il punto medio del segmento è $(x_0; y_0) = P$.

24. a) $pV = 12$, $p = \frac{12}{V}$. b) 3 atm; 8 atm; $V = 1{,}5$ L. c) $p = V = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$: è il vertice del ramo, sulla bisettrice del primo quadrante.

25. a) $C(x) = \frac{8x + 1200}{x} = 8 + \frac{1200}{x}$, asintoto $y = 8$. b) $\frac{1200}{x} = 2$, $x = 600$ pezzi. c) $\frac{1200}{x} < 1$ per $x > 1200$ pezzi.

26. a) La nave è $0{,}3 \cdot 200 = 60$ km più vicina a B: è sul ramo destro (vicino a B) dell'iperbole con $2a = 60$, $c = 50$, $b^2 = 2500 - 900 = 1600$: $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1600} = 1$, con $x > 0$. b) Per $y = 40$: $\frac{x^2}{900} = 2$, $x = 30\sqrt{2} \approx 42{,}4$; la nave è in $(42{,}4; 40)$ circa.

27. $c - a = 1$ (il vertice più vicino al fuoco F_2) e $c = 1{,}5a$, quindi $0{,}5a = 1$: $a = 2$ UA, $c = 3$ UA, $b^2 = 9 - 4 = 5$. L'orbita è il ramo destro di $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, con il Sole in $(3; 0)$.

28. a) $b = \frac{3}{4}a$; $\frac{64}{a^2} - \frac{27 \cdot 16}{9a^2} = \frac{16}{a^2} = 1$: $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, cioè $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. b) $c = 5$, fuochi $(\pm 5; 0)$, $e = \frac{5}{4}$. c) Controllo: $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$; tangente $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$, cioè $5x - 4y = 16$. d) Retta parallela all'asintoto $y = \frac{3}{4}x$: sostituendo in $9x^2 - 16y^2 = 144$ si ottiene $48x - 64 = 144$, $x = \frac{13}{3}$, $y = \frac{5}{4}$. Un solo punto, ma l'equazione è di primo grado: la retta attraversa la curva e non è tangente.

29. Asintoto verticale $x = -d = 2$: $d = -2$; orizzontale $y = a = -1$. $f(x) = \frac{-x + 3}{x - 2}$, con $ad - bc = 2 - 3 = -1 \neq 0$: è

un'iperbole di centro $(2; -1)$; $f(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$, punti $(3; 0)$ e $(0; -\frac{3}{2})$. $f(x) > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$, cioè $]2; +\infty[$.

30. $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1|$; elevando al quadrato: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4$, cioè $3x^2 - y^2 = 12$ e $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. È un'iperbole con $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$, $e = 2$, asintoti $y = \pm\sqrt{3}x$. Il fuoco $(c; 0) = (4; 0)$ è F e la direttrice relativa è $x = \frac{a}{e} = 1$, coerente con la definizione unitaria.