CAPITOLO

2

L'ellisse

Due picchetti e un filo bastano a disegnarla sulla terra; per trovarla nel cielo ci volle Keplero.

OBIETTIVI

1. Definire l'ellisse come luogo geometrico e ricavarne l'equazione canonica, con i fuochi sull'asse x o sull'asse y.
2. Leggere da un'equazione semiassi, vertici, fuochi ed eccentricità, e collegare l'eccentricità alla forma della curva e alle orbite dei pianeti.
3. Determinare l'equazione di un'ellisse da due condizioni e controllarla per sostituzione.
4. Stabilire la posizione di una retta rispetto a un'ellisse e scrivere le tangenti, in un punto della curva e da un punto esterno.
5. Ottenere l'ellisse da una circonferenza con una dilatazione, calcolarne l'area e riconoscere un'ellisse traslata.
6. Enunciare la proprietà focale e riconoscerne gli usi.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 L'ellisse come luogo geometrico 2
2.2 L'eccentricità e le orbite dei pianeti 6
2.3 Determinare l'equazione di un'ellisse 9
2.4 Retta ed ellisse 10
2.5 L'ellisse come circonferenza schiacciata 13
2.6 La proprietà focale 16

Matematica 4 · Parte I · Funzioni, ellisse e iperbole · versione 1.0
Capitolo 2: L'ellisse · pagine 47–70 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda di sbieco un piatto rotondo appoggiato sul tavolo: il bordo non sembra più una circonferenza, ma una curva chiusa e allungata. La stessa forma ha la superficie dell'acqua in un bicchiere inclinato, l'ombra di un pallone su un pavimento illuminato di lato e, soprattutto, il cammino della Terra intorno al Sole. È l'**ellisse**, la sezione conica che studi come luogo geometrico dopo la parabola e la circonferenza di *Matematica 3* (cap. 6 e 7); la circonferenza, anzi, lo vedremo subito, ne è un caso particolare.

Il percorso è quello che conosci dal terzo anno. Partiremo da una definizione geometrica, una proprietà delle distanze da due punti fissi, e da essa ricaveremo un'equazione; poi metteremo l'equazione al lavoro per trovare fuochi, vertici, eccentricità, rette tangenti e area. Strada facendo scopriremo che ogni ellisse è una circonferenza «schiacciata» in una direzione, con le dilatazioni del capitolo 1, e che ha una proprietà di riflessione che la fa usare in architettura e in medicina.

2.1 L'ellisse come luogo geometrico

2.1.1 La definizione e la costruzione del giardiniere

Fissiamo nel piano due punti F_1 e F_2 e una lunghezza, che chiameremo $2a$, maggiore della loro distanza.

Definizione. Si chiama **ellisse** di fuochi F_1 e F_2 il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali la somma delle distanze da F_1 e da F_2 è costante e uguale a $2a$:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad \text{con } 2a > F_1F_2.$$

I due punti fissi sono i **fuochi** dell'ellisse; la loro distanza $F_1F_2 = 2c$ è la **distanza focale** e c è la **semidistanza focale**. I segmenti PF_1 e PF_2 si chiamano **raggi focali** del punto P.

La condizione $a > c$ non è un dettaglio. In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due, quindi per un punto P fuori dalla retta dei fuochi è $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$. Se fosse $2a = 2c$, la condizione sarebbe soddisfatta solo dai punti del segmento F_1F_2; se fosse $2a < 2c$, da nessun punto. Se invece i due fuochi coincidono ($c = 0$), la condizione diventa $2PF = 2a$, cioè $PF = a$: il luogo è la circonferenza di centro F e raggio a. La circonferenza è dunque un'ellisse particolare, con i due fuochi riuniti nel centro.

La definizione si traduce in un modo pratico di disegnare l'ellisse, che i giardinieri usano davvero per tracciare le aiuole e che per questo si chiama **costruzione del giardiniere** (Figura 2.1). Si piantano due picchetti nei fuochi, vi si legano gli estremi di un filo inestensibile lungo $2a$ e si fa girare un bastoncino tenendo il filo sempre teso. In ogni posizione i due tratti di filo sono i raggi focali del bastoncino e la loro somma è la lunghezza del filo: la punta traccia un'ellisse. Con lo stesso filo, avvicinando i picchetti la curva si arrotonda; allontanandoli si allunga.

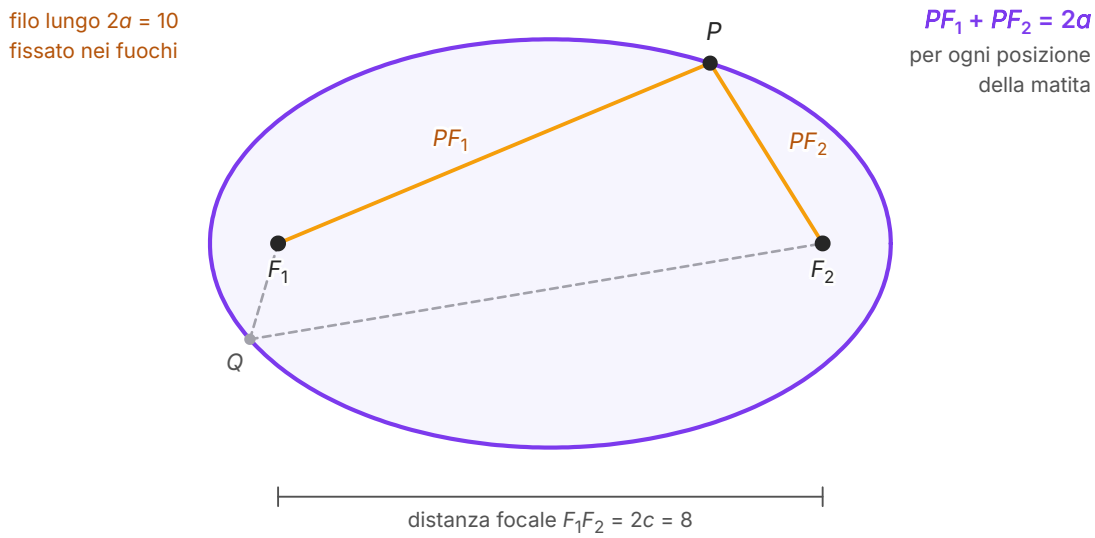


Figura 2.1 La costruzione del giardiniere, con $a = 5$ e $c = 4$ (unità arbitrarie). Il filo, lungo $2a = 10$, è fissato nei fuochi F_1 e F_2: in qualunque posizione la matita lo tenga teso, in P come in Q, la somma dei due tratti resta $2a$.

2.1.2 L'equazione canonica

Per tradurre la definizione in un'equazione scegliamo il riferimento più comodo: l'asse x sulla retta dei fuochi e l'origine nel loro punto medio, così che $F_1(-c;\,0)$ e $F_2(c;\,0)$. Per la formula della distanza tra due punti, $P(x;\,y)$ appartiene all'ellisse se e solo se

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Per eliminare i radicali dobbiamo elevare al quadrato, e due volte. È un passaggio da maneggiare con cura. Se due numeri sono uguali, sono uguali anche i loro quadrati; il viceversa però non vale: da $A^2 = B^2$ segue soltanto che $A = B$ oppure $A = -B$, come mostra $3^2 = (-3)^2$. Elevando al quadrato si possono dunque *aggiungere* soluzioni, e alla fine dovremo controllare di non averne aggiunte. Il passaggio è invece reversibile se A e B sono entrambi non negativi: in questo caso da $A^2 = B^2$ segue $A = B$.

Primo quadrato. Isoliamo un radicale, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, ed eleviamo al quadrato i due membri:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Sviluppando i quadrati, i termini x^2, c^2 e y^2 compaiono in entrambi i membri e si cancellano; resta $4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ e, dividendo per 4 e riordinando,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Secondo quadrato. Ora $a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$. I termini $-2a^2cx$ si cancellano e, raccogliendo,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Poiché $a > c$, il numero $a^2 - c^2$ è positivo e possiamo chiamarlo b^2, con $b > 0$. L'equazione diventa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e, dividendo per a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } b^2 = a^2 - c^2.$$

Il cammino inverso. Sia ora $P(x; y)$ un punto qualsiasi che soddisfa quest'ultima equazione. L'addendo $\frac{x^2}{a^2}$ non può superare 1, quindi $|x| \le a$ e $cx \le ca < a^2$: il numero $a^2 - cx$ è positivo. Ripercorrendo i calcoli all'indietro si ritrova $a^2[(x - c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$, un'uguaglianza tra i quadrati di due numeri non negativi, che quindi sono uguali: $a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Dividendo per a e ripetendo il calcolo con l'altro fuoco si ottengono le distanze di P dai fuochi:

$$PF_2 = a - \frac{c}{a}x \qquad PF_1 = a + \frac{c}{a}x$$

La loro somma è $2a$: ogni punto dell'equazione appartiene all'ellisse, e il controllo è concluso. Le due formule dei raggi focali sono utili anche da sole. Dicono, per esempio, che il punto dell'ellisse più vicino a F_2 è quello di ascissa massima, $x = a$, a distanza $a - c$, e il più lontano quello di ascissa $-a$, a distanza $a + c$.

IN SINTESI

Teorema (equazione canonica dell'ellisse).

Ipotesi: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, $a > c \ge 0$, $b^2 = a^2 - c^2$.

Tesi: il punto $P(x; y)$ soddisfa $PF_1 + PF_2 = 2a$ se e solo se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

È l'**equazione canonica** dell'ellisse. Tra i tre parametri vale la relazione $a^2 = b^2 + c^2$.

2.1.3 Vertici, assi e simmetrie

Leggiamo l'equazione canonica. Per $y = 0$ si trova $x = \pm a$, per $x = 0$ si trova $y = \pm b$: l'ellisse taglia gli assi cartesiani nei quattro **vertici** $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ (Figura 2.2). Il segmento A_1A_2, lungo $2a$, è l'**asse maggiore** e contiene i fuochi; il segmento B_1B_2, lungo $2b$, è l'**asse minore**. I numeri a e b sono i **semiassi** e, se $c > 0$, da $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ segue $b < a$.

La relazione $a^2 = b^2 + c^2$ ha un significato geometrico semplice. Il vertice B_2 sta sull'asse del segmento F_1F_2, quindi è equidistante dai fuochi; poiché la somma delle due distanze è $2a$, ciascuna misura a. Il triangolo OF_2B_2 è rettangolo in O, ha cateti c e b e ipotenusa a: è il teorema di

Pitagora. Ne viene un modo rapido di trovare i fuochi con il compasso, se si conoscono gli assi: puntando in B_2 con apertura a si taglia l'asse maggiore proprio nei fuochi.

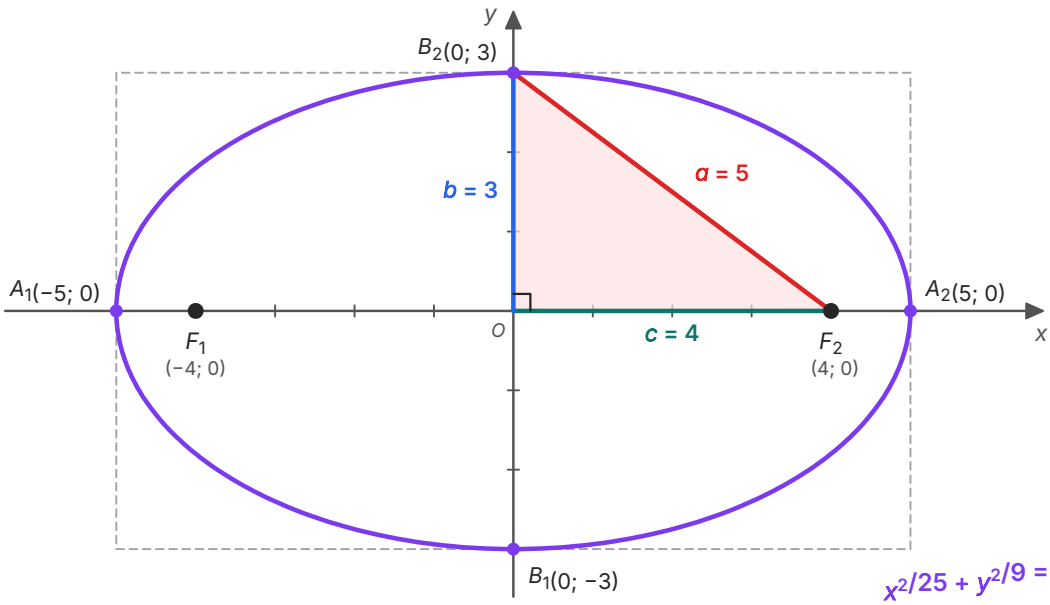


Figura 2.2 L'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, calcolata dall'equazione: semiassi $a = 5$ e $b = 3$, fuochi $F_{1,2}(\pm 4; 0)$. Il triangolo rettangolo OF_2B_2 ha cateti $c = 4$ e $b = 3$ e ipotenusa $B_2F_2 = a = 5$. Il rettangolo tratteggiato, di lati $2a$ e $2b$, contiene tutta la curva.

Nell'equazione x e y compaiono solo al quadrato. Se $(x; y)$ la soddisfa, la soddisfano anche $(-x; y)$, $(x; -y)$ e $(-x; -y)$: l'ellisse è **simmetrica rispetto ai due assi e all'origine**, che si chiama **centro** dell'ellisse. I due addendi $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{b^2}$, poi, non sono negativi e hanno somma 1, quindi nessuno dei due supera 1: $|x| \le a$ e $|y| \le b$. L'ellisse è una curva **limitata**, chiusa nel rettangolo di lati $2a$ e $2b$ con i lati per i vertici: a differenza della parabola, non si allontana mai all'infinito. Non è il grafico di una funzione, perché a ogni x compresa tra $-a$ e a (estremi esclusi) corrispondono due valori di y; risolvendo rispetto a y si ottengono le due funzioni $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, i cui grafici sono la metà superiore e quella inferiore della curva.

Per esempio, studiamo l'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Per prima cosa la portiamo in forma canonica, dividendo per 36: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Leggiamo $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$, cioè $a = 3$ e $b = 2$: vertici $(\pm 3; 0)$ e $(0; \pm 2)$. Infine $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5} \approx 2{,}24$, e i fuochi sono $(\pm\sqrt{5}; 0)$. Il punto $P(\sqrt{5}; 4/3)$ sta sull'ellisse, perché $4 \cdot 5 + 9 \cdot 16/9 = 20 + 16 = 36$; le formule dei raggi focali danno $PF_1 = 3 + (\sqrt{5}/3) \cdot \sqrt{5} = 14/3$ e $PF_2 = 3 - 5/3 = 4/3$, di somma $6 = 2a$. Infatti P ha la stessa ascissa di F_2, e PF_2 è proprio la sua ordinata.

2.1.4 Fuochi sull'asse y

Se i fuochi stanno sull'asse y, in $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$, lo stesso calcolo con i ruoli di x e y scambiati porta ancora a un'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ma ora il semiasse maggiore è b, sull'asse y: la definizione è $PF_1 + PF_2 = 2b$ e vale $c^2 = b^2 - a^2$, con $b > a$. Per esempio $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ha $a = 3$, $b = 5$, $c = \sqrt{25 - 9} = 4$ e fuochi $(0; \pm 4)$.

La regola pratica è una sola: **i fuochi stanno sull'asse della variabile che ha il denominatore maggiore**, e c^2 è la differenza tra il denominatore maggiore e quello minore. Se i denominatori sono uguali, $c = 0$ e l'ellisse è una circonferenza.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Leggere i semiassi dai coefficienti, e sbagliare la relazione tra *a*, *b* e *c*.** In $4x^2 + 9y^2 = 36$ il semiasse orizzontale non è 4, il coefficiente di x^2, né 2 «perché $4 = 2^2$»: è 3, perché nella forma canonica, con il secondo membro uguale a 1, sotto x^2 c'è 9. I semiassi si leggono solo dopo aver portato l'equazione in questa forma. E nell'ellisse c^2 è una **differenza**, $c^2 = a^2 - b^2$ (oppure $b^2 - a^2$ se i fuochi stanno sull'asse y), mai una somma: $c^2 = a^2 + b^2$ è la relazione dell'iperbole, che vedremo nel capitolo 3. Un controllo rapido: i fuochi stanno *dentro* l'ellisse, quindi c deve risultare minore del semiasse maggiore.

2.2 L'eccentricità e le orbite dei pianeti

2.2.1 Quanto è schiacciata un'ellisse

Due ellissi con lo stesso semiasse maggiore possono avere forme molto diverse: dipende da quanto i fuochi sono lontani dal centro rispetto alle dimensioni della curva. Questa misura si chiama **eccentricità** ed è il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore:

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{(fuochi sull'asse } x\text{)} \qquad e = \frac{c}{b} \quad \text{(fuochi sull'asse } y\text{)}$$

Poiché c non è negativo ed è minore del semiasse maggiore, l'eccentricità di un'ellisse è sempre compresa tra 0 e 1: $0 \le e < 1$. È un numero puro, senza unità di misura, che non cambia se la figura viene ingrandita o rimpicciolita: due ellissi con la stessa eccentricità sono simili. Dalla relazione $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2$ (fuochi sull'asse x) si ricava

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

che lega l'eccentricità alla forma. Se $e = 0$, i fuochi coincidono con il centro, $b = a$ e l'ellisse è una circonferenza. Al crescere di e il rapporto $\frac{b}{a}$ diminuisce: per $e = 0{,}6$ vale 0,8, per $e = 0{,}8$ vale 0,6, per $e = 0{,}95$ circa 0,31. Quando e si avvicina a 1, l'ellisse si schiaccia sempre più sull'asse maggiore (Figura 2.3). Nel capitolo 3 l'eccentricità riceverà un secondo significato, che la collega anche alla parabola ($e = 1$) e all'iperbole ($e > 1$).

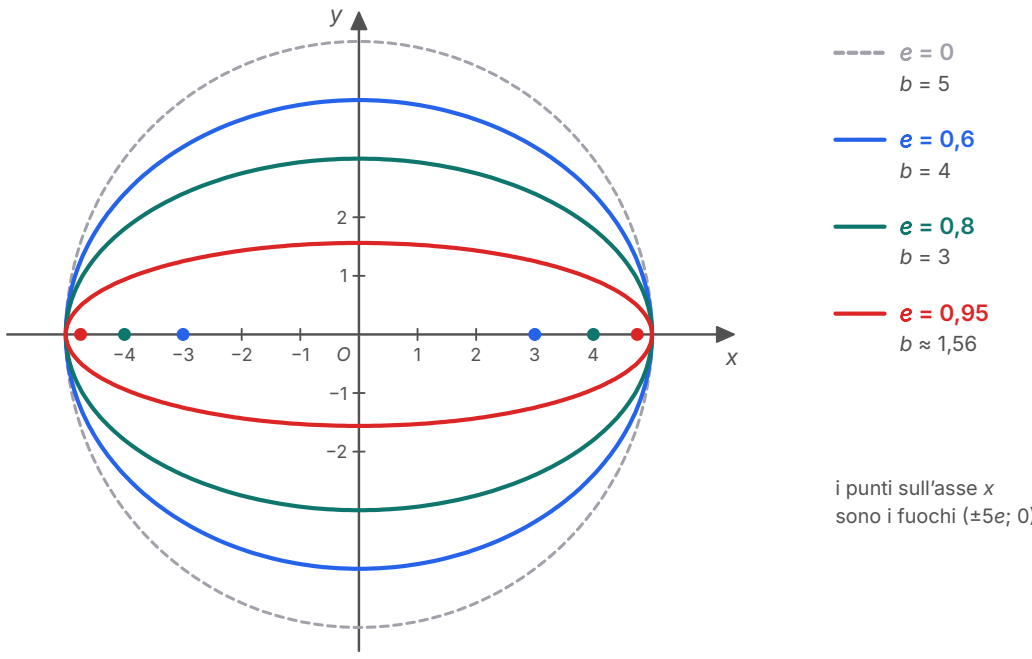


Figura 2.3 Quattro ellissi con lo stesso semiasse maggiore $a = 5$ ed eccentricità crescente, calcolate dalle equazioni $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $b = 5\sqrt{1 - e^2}$. Per $e = 0$ si ha la circonferenza (tratteggiata); i punti sull'asse x sono i fuochi $(\pm 5e;\, 0)$ di ciascuna curva.

2.2.2 La prima legge di Keplero

L'ellisse è entrata nella fisica con Giovanni Keplero. Nell'*Astronomia nova*, pubblicata nel 1609, Keplero mostrò, analizzando le osservazioni di Marte raccolte da Tycho Brahe, che le orbite dei pianeti non sono circonferenze, ma ellissi. È la **prima legge di Keplero**: *ogni pianeta descrive un'orbita ellittica, di cui il Sole occupa uno dei fuochi*. Il punto dell'orbita più vicino al Sole si chiama **perielio**, quello più lontano **afelio**: sono i due vertici dell'asse maggiore (Figura 2.4).

Le formule dei raggi focali danno subito le due distanze. Se il Sole è nel fuoco F_1 e il perielio è il vertice più vicino, la distanza del pianeta dal Sole varia tra $a - c = a(1 - e)$ al perielio e $a + c = a(1 + e)$ all'afelio. Viceversa, conoscendo le due distanze estreme si trovano il semiasse maggiore, che ne è la media, e la semidistanza focale, che ne è la semidifferenza.

ESEMPIO SVOLTO

L'orbita della Terra. L'eccentricità dell'orbita terrestre è circa 0,017. Di quanto il Sole è spostato rispetto al centro dell'orbita? Quanto differiscono le distanze al perielio e all'afelio? Quanto è «schiacciata» l'orbita?

Il Sole e il centro. $c = ae \approx 0{,}017a$: il Sole dista dal centro dell'orbita l'1,7% del semiasse maggiore.

Perielio e afelio. Il loro rapporto è $\dfrac{a(1+e)}{a(1-e)} = \dfrac{1{,}017}{0{,}983} \approx 1{,}035$: all'afelio la Terra è più lontana dal Sole che al perielio di circa il 3,5%. Il risultato non dipende da a: per un confronto relativo basta l'eccentricità.

Lo schiacciamento. $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - 0{,}017^2} = \sqrt{0{,}999711} \approx 0{,}999855$: il semiasse minore è più corto del maggiore di circa lo 0,0145%.

Interpretazione. Disegnata in scala con $a = 10$ cm, l'orbita avrebbe i due semiassi diversi di circa 0,014 mm, molto meno dello spessore della linea, mentre il Sole sarebbe spostato dal centro di 1,7 mm, una distanza ben visibile. L'orbita della Terra è «eccentrica» non perché sia schiacciata, ma perché il Sole non sta nel centro.

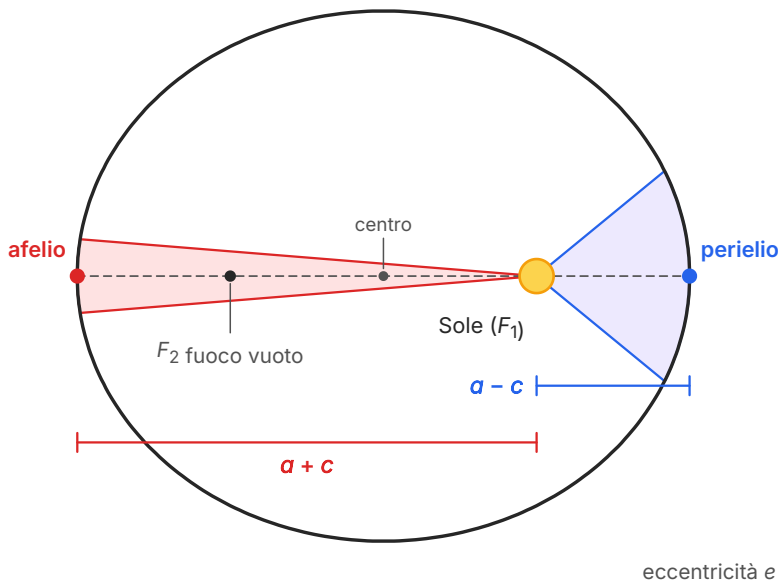


Figura 2.4 Un'orbita ellittica con il Sole nel fuoco F_1, disegnata con eccentricità 0,5, molto maggiore di quelle dei pianeti, perché la forma si veda. Al perielio il pianeta dista $a - c$ dal Sole, all'afelio $a + c$. I due settori colorati sono spazzati dal raggio Sole–pianeta in tempi uguali, un quindicesimo del periodo, e hanno la stessa area: è la seconda legge di Keplero, che studierai in fisica.

COLLEGAMENTI

Filosofia e storia della scienza: la fine del cerchio perfetto. Per circa duemila anni, nella tradizione che risale a Platone e ad Aristotele, i moti celesti erano stati pensati come composizioni di moti circolari uniformi: il cerchio, figura perfetta, sembrava la sola adatta al cielo. Anche Tolomeo e Copernico costruirono i loro sistemi con circonferenze. Keplero ruppe questa tradizione per fedeltà ai dati: le previsioni del moto circolare differivano dalle osservazioni di Tycho di pochi primi d'arco, una quantità minuscola che egli giudicò comunque inaccettabile, perché le osservazioni di Tycho erano più precise. Nemmeno Galileo accettò le ellissi di Keplero. Quando in filosofia studierai la rivoluzione scientifica, ricorda questo episodio: un'idea di perfezione abbandonata davanti a una discrepanza di misura.

2.3 Determinare l'equazione di un'ellisse

Un'ellisse con il centro nell'origine e gli assi sugli assi cartesiani ha equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: dipende da due parametri, a^2 e b^2. Per determinarla servono quindi **due condizioni** indipendenti. Le più comuni sono:

- i due semiassi, oppure un semiasse e la semidistanza focale (si usa $a^2 = b^2 + c^2$, mettendo a sinistra il semiasse *maggiore*);
- un vertice e un fuoco (il fuoco dice su quale asse sta l'asse maggiore e dà c);
- un punto e l'eccentricità, che dà la relazione $b^2 = a^2(1 - e^2)$ se i fuochi stanno sull'asse x;
- due punti, che danno due equazioni nelle incognite a^2 e b^2.

Per esempio, l'ellisse con un fuoco in $(3; 0)$ e un vertice in $(0; 4)$ ha i fuochi sull'asse x, quindi $c = 3$; il vertice sull'asse y è un estremo dell'asse minore, quindi $b = 4$, e $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$. L'equazione è $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Se invece il vertice è $(0; 5)$ e il fuoco $(0; 3)$, l'asse maggiore è sull'asse y: $b = 5$, $c = 3$, $a^2 = b^2 - c^2 = 16$, e l'ellisse è $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Quando le condizioni sono passaggi per due punti conviene un piccolo cambio di incognite. In $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ le incognite stanno al denominatore, ma ponendo $u = \frac{1}{a^2}$ e $v = \frac{1}{b^2}$ l'equazione diventa $ux^2 + vy^2 = 1$, che è di **primo grado** in u e v: ogni punto dà un'equazione lineare, e due punti un sistema lineare. Per l'ellisse che passa per $P(3; 12/5)$ e $Q(4; 9/5)$ si ottiene $9u + (144/25)v = 1$ e $16u + (81/25)v = 1$, cioè, moltiplicando per 25, $225u + 144v = 25$ e $400u + 81v = 25$. Moltiplicando la prima per 9 e la seconda per 16 e sottraendo si trova $4375u = 175$, cioè $u = 1/25$; sostituendo nella prima, $v = 1/9$. È l'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ della Figura 2.2; il controllo con Q dà $16/25 + 81/225 = 16/25 + 9/25 = 1$ ✓. Ricorda che u e v devono ri-

sultare entrambi positivi: se uno dei due fosse negativo o nullo, nessuna ellisse con il centro in O e gli assi sugli assi cartesiani passerebbe per i due punti.

ESEMPIO SVOLTO

Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e con eccentricità $\frac{1}{2}$ che passa per $P(1;\ \frac{3}{2})$.

Eccentricità. $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}a^2$. L'equazione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{3a^2} = 1$.

Passaggio per P. $\frac{1}{a^2} + \frac{4 \cdot (3/2)^2}{3a^2} = 1$, cioè $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = 1$, da cui $a^2 = 4$ e $b^2 = 3$.

Risultato. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Controllo. $c^2 = 4 - 3 = 1$, $c = 1$, $e = \frac{1}{2}$ ✓; $\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓. Con la definizione si ha un'ulteriore verifica: P ha la stessa ascissa del fuoco $F_2(1;\ 0)$, quindi $PF_2 = \frac{3}{2}$, mentre $PF_1 = \sqrt{2^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}$; la somma è $4 = 2a$ ✓.

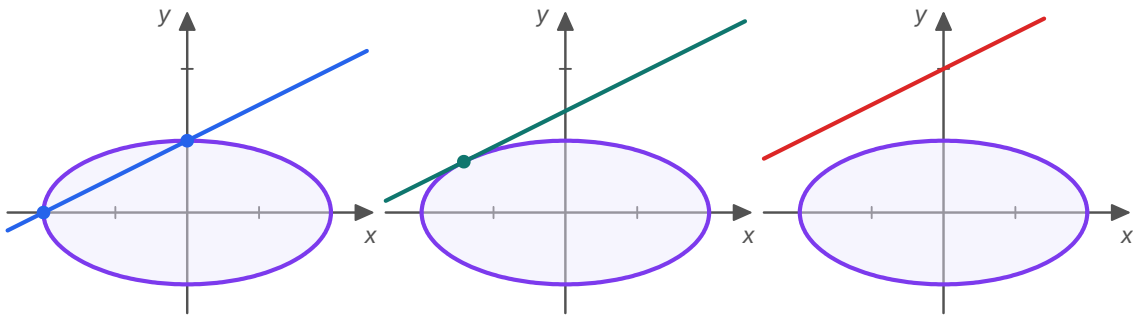
In ogni caso, un'equazione trovata è solo una candidata finché non l'hai **controllata per sostituzione**: i punti assegnati devono soddisfarla, i fuochi devono stare dove dice il testo, l'eccentricità deve essere quella richiesta. È un minuto di calcolo che scopre quasi tutti gli errori.

2.4 Retta ed ellisse

2.4.1 Le posizioni reciproche

Una retta e un'ellisse possono avere due punti in comune (retta **secante**), uno solo (retta **tangente**) o nessuno (retta **esterna**). Come per la parabola e la circonferenza, i punti comuni sono le soluzioni del sistema formato dalle due equazioni: sostituendo nell'equazione dell'ellisse la y ricavata dall'equazione della retta (o la x, se la retta è verticale) si ottiene l'**equazione risolvente**, di secondo grado, e il segno del suo discriminante decide la posizione:

- $\Delta > 0$: due soluzioni distinte, la retta è secante;
- $\Delta = 0$: due soluzioni coincidenti, la retta è tangente;
- $\Delta < 0$: nessuna soluzione reale, la retta è esterna.



Δ > 0: secante
2 punti comuni
$y = x/2 + 1$

Δ = 0: tangente
1 punto comune
$y = x/2 + \sqrt{2}$

Δ < 0: esterna
nessun punto comune
$y = x/2 + 2$

Figura 2.5 Tre rette parallele $y = \frac{1}{2}x + q$ e l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, calcolate dalle equazioni: per $q = 1$ la retta è secante, per $q = \sqrt{2}$ tangente nel punto $(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, per $q = 2$ esterna. Il segno di $\frac{\Delta}{4} = 8 - 4q^2$ decide la posizione.

Per l'ellisse non ci sono le eccezioni della parabola, dove una retta parallela all'asse incontra la curva in un solo punto senza esserle tangente. L'equazione risolvente è sempre di secondo grado, perché il coefficiente di x^2 è la somma di due numeri positivi, e una retta che ha un solo punto in comune con l'ellisse è sempre tangente.

Per esempio, la retta $y = x/2 + 1$ e l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ danno $x^2 + 4(x/2 + 1)^2 = 4$, cioè $2x^2 + 4x = 0$: le soluzioni $x = 0$ e $x = -2$ corrispondono ai punti $(0; 1)$ e $(-2; 0)$, due vertici. La retta è secante, e il segmento che stacca sull'ellisse è una **corda**. Più in generale, le rette $y = x/2 + q$, tutte parallele, danno l'equazione risolvente $2x^2 + 4qx + 4q^2 - 4 = 0$, con $\Delta/4 = 4q^2 - 2(4q^2 - 4) = 8 - 4q^2$. Le rette sono secanti per $-\sqrt{2} < q < \sqrt{2}$, tangenti per $q = \pm\sqrt{2}$, esterne per $q < -\sqrt{2}$ o $q > \sqrt{2}$ (Figura 2.5).

2.4.2 La tangente in un punto dell'ellisse

Per la tangente in un punto $P_0(x_0; y_0)$ dell'ellisse si può usare il discriminante, imponendo $\Delta = 0$ alle rette per P_0. C'è però una strada più rapida, la **formula di sdoppiamento**, che hai già usato per la parabola e per la circonferenza (*Matematica 3*, cap. 6 e 7): nell'equazione canonica si «sdoppiano» i quadrati, scrivendo x_0x al posto di x^2 e y_0y al posto di y^2.

IN SINTESI

Teorema (tangente all'ellisse in un suo punto).

Ipotesi: $P_0(x_0; y_0)$ appartiene all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tesi: la retta tangente all'ellisse in P_0 ha equazione

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Dimostrazione. La retta passa per P_0, perché sostituendo $(x_0; y_0)$ si ritrova l'equazione dell'ellisse, che P_0 soddisfa; ed è davvero una retta, perché x_0 e y_0 non sono entrambi nulli. Resta da vedere che non ha altri punti in comune con l'ellisse. Se $(x; y)$ sta sia sull'ellisse sia sulla retta, valgono tre uguaglianze: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Sommando le prime due e sottraendo il doppio della terza si ottiene

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 + 1 - 2 = 0$$

Una somma di due quadrati divisi per numeri positivi è nulla solo se lo sono entrambi i quadrati: $x = x_0$ e $y = y_0$. La retta ha in comune con l'ellisse il solo punto P_0, quindi è tangente. c.v.d.

Per esempio, cerchiamo la tangente all'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ nel punto $P_0(3; 12/5)$, che le appartiene: $9/25 + 144/225 = 9/25 + 16/25 = 1$. Lo sdoppiamento dà $3x/25 + 12y/45 = 1$, cioè, moltiplicando per 75, $9x + 20y = 75$. Verifichiamo con il discriminante: sostituendo $y = (75 - 9x)/20$ in $9x^2 + 25y^2 = 225$ e semplificando si ottiene $x^2 - 6x + 9 = 0$, cioè $(x - 3)^2 = 0$. Il discriminante è nullo e la soluzione doppia $x = 3$ è proprio l'ascissa di P_0.

2.4.3 Le tangenti da un punto esterno

Da un punto esterno all'ellisse si conducono due tangenti. Per trovarle si scrive il fascio di rette per il punto, $y - y_P = m(x - x_P)$, lo si mette a sistema con l'ellisse e si impone che il discriminante dell'equazione risolvente sia nullo: si ottiene un'equazione in m, le cui soluzioni sono i coefficienti angolari delle tangenti. La retta verticale $x = x_P$ non fa parte del fascio scritto in questa forma, e va sempre esaminata a parte.

ESEMPIO SVOLTO

Trova le tangenti all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ condotte dal punto $P(0; 3)$ e i punti di contatto.

Il punto è esterno: $0 + 4 \cdot 9 = 36 > 4$. La retta verticale per P è l'asse y, che è secante: le tangenti stanno nel fascio $y = mx + 3$.

Equazione risolvente. $x^2 + 4(mx + 3)^2 = 4$, cioè $(1 + 4m^2)x^2 + 24mx + 32 = 0$.

Condizione di tangenza. $\frac{\Delta}{4} = 144m^2 - 32(1 + 4m^2) = 16m^2 - 32$. Da $16m^2 - 32 = 0$ si ha $m^2 = 2$, $m = \pm\sqrt{2}$: le tangenti sono $y = \sqrt{2}x + 3$ e $y = -\sqrt{2}x + 3$.

Punti di contatto. Con $\Delta = 0$ la soluzione doppia è $x = -\frac{24m}{2(1 + 4m^2)} = -\frac{12m}{9} = -\frac{4m}{3}$. Per $m = \sqrt{2}$: $T_1(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$; per $m = -\sqrt{2}$: $T_2(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$.

Verifica. $(\frac{4\sqrt{2}}{3})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{32}{9} + \frac{4}{9} = 4$ ✓. Con lo sdoppiamento in T_2: $\frac{4\sqrt{2}}{3}x + \frac{4}{3}y = 4$, cioè $y = 3 - \sqrt{2}x$ ✓. La figura è simmetrica rispetto all'asse y, come l'ellisse e il punto P.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare la tangente verticale, o sdoppiare in un punto che non sta sulla curva. Dal punto $P(2; 1)$ all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ il fascio $y - 1 = m(x - 2)$ porta alla condizione $16m = 0$, di primo grado: una sola soluzione, $m = 0$, cioè la tangente $y = 1$ nel vertice $(0; 1)$. Ma da un punto esterno le tangenti sono due: l'altra è la retta verticale $x = 2$, tangente nel vertice $(2; 0)$, che il fascio non contiene. Quando l'equazione in m risulta di primo grado, è il segnale che manca la verticale. Attenzione anche allo sdoppiamento: vale solo se $(x_0; y_0)$ *appartiene* all'ellisse. Applicato a $P(0; 3)$ dell'esempio svolto darebbe $12y = 4$, cioè $y = \frac{1}{3}$, che non è una tangente: è la retta che passa per i due punti di contatto.

2.5 L'ellisse come circonferenza schiacciata

2.5.1 Una circonferenza dilatata

Nel capitolo 1 hai visto che il grafico di $y = k \cdot f(x)$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ con una **dilatazione verticale**: ogni ordinata viene moltiplicata per k e le ascisse restano le stesse. Applichiamo questa trasformazione, $x' = x$ e $y' = \frac{b}{a}y$, alla circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$. Ricaviamo $x = x'$ e $y = \frac{a}{b}y'$ e sostituiamo:

$$x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2 = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

L'immagine della circonferenza è l'ellisse di semiassi a e b (Figura 2.6). Ogni ellisse si ottiene dunque da una circonferenza «schiacciandola» (se $b < a$) o «stirandola» (se $b > a$) in una direzione. È anche ciò che accade, in buona approssimazione, quando guardiamo di sbieco un piatto rotondo: l'inclinazione accorcia di uno stesso fattore tutte le distanze in una direzione. La dilatazione suggerisce anche come descrivere l'ellisse punto per punto, a partire dall'angolo che individua il punto corrispondente sulla circonferenza: lo vedremo nel capitolo 4, con le funzioni seno e coseno.

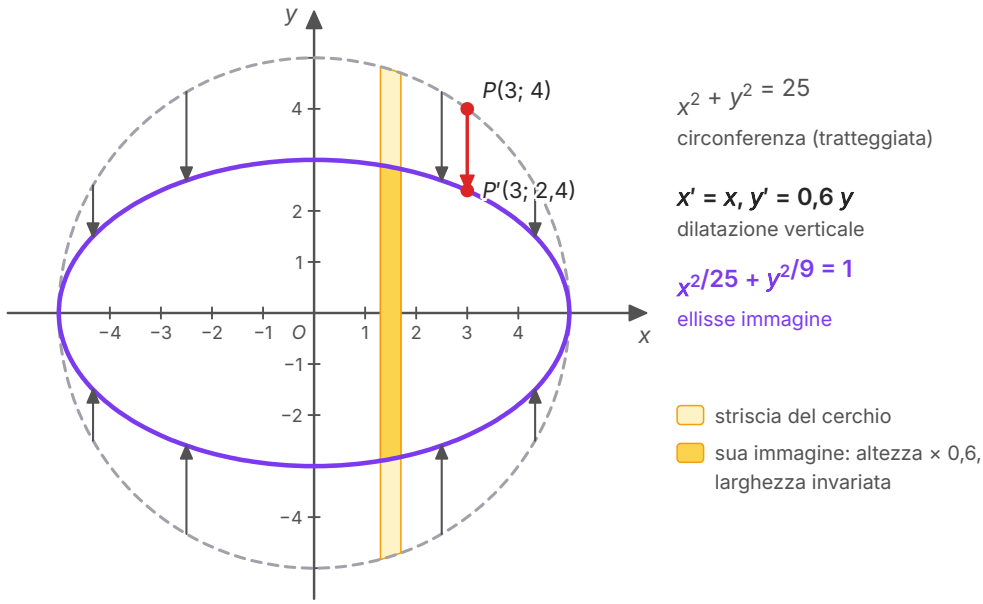


Figura 2.6 La dilatazione verticale $x' = x$, $y' = \frac{3}{5}y$ trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ (tratteggiata) nell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: ogni punto si sposta verticalmente verso l'asse x, per esempio $P(3; 4)$ va in $P'(3; 2{,}4)$. La striscia verticale del cerchio conserva la larghezza e ha l'altezza moltiplicata per $\frac{3}{5}$. Curve e frecce sono calcolate dalle equazioni.

2.5.2 L'area dell'ellisse

La dilatazione dà, quasi senza calcoli, l'**area dell'ellisse**. Pensiamo il cerchio di raggio a diviso in sottilissime strisce verticali, come quella colorata della Figura 2.6. La dilatazione lascia invariata la larghezza di ogni striscia e ne moltiplica l'altezza per $\frac{b}{a}$; ogni striscia, che è quasi un

rettangolo, ha quindi l'area moltiplicata per $\frac{b}{a}$, e così l'area totale. Poiché il cerchio ha area πa^2 (*Matematica 3*, cap. 4), l'ellisse ha area

$$A = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

Per $a = b = r$ ritroviamo πr^2. L'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ha area $15\pi \approx 47{,}1$, esattamente i $\frac{3}{5}$ del cerchio di raggio 5. Il ragionamento per strisce è un'idea, non ancora una dimostrazione completa: confronta due figure «sezione per sezione», come farà nel Seicento Bonaventura Cavalieri con il suo metodo degli indivisibili, e diventerà rigoroso con il calcolo integrale del quinto anno. Il risultato, però, è antico: lo conosceva già Archimede, che nell'opera *Sui conoidi e sferoidi* dà l'area dell'ellisse.

2.5.3 L'ellisse traslata

Se trasliamo l'ellisse canonica con il vettore $(x_0; y_0)$, sostituendo $x - x_0$ a x e $y - y_0$ a y come nel capitolo 1 (e in *Matematica 2*, cap. 7), otteniamo l'**ellisse traslata**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

con centro $C(x_0; y_0)$ e assi di simmetria le rette $x = x_0$ e $y = y_0$. Semiassi, semidistanza focale ed eccentricità non cambiano; vertici e fuochi si ottengono traslando quelli dell'ellisse canonica. Sviluppando i quadrati, l'equazione prende una forma con x^2 e y^2 e anche termini di primo grado, senza il termine in xy, e con i coefficienti di x^2 e y^2 dello stesso segno. Per riconoscerla si fa il cammino inverso: si raccolgono i termini in x e quelli in y e si **completano i quadrati**, come hai fatto per la circonferenza (*Matematica 3*, cap. 7).

ESEMPIO SVOLTO

Riconosci la curva $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ e determinane centro, semiassi, vertici e fuochi.

Raccogliamo per variabile: $(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 2y) = -9$.

Completiamo i quadrati dentro le parentesi, aggiungendo 9 nella prima e 1 nella seconda. Al primo membro abbiamo aggiunto 9 e $4 \cdot 1 = 4$, e la stessa quantità va aggiunta al secondo: $(x-3)^2 + 4(y+1)^2 = -9 + 9 + 4 = 4$.

Forma canonica. Dividendo per 4: $\dfrac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$. È un'ellisse di centro $C(3; -1)$, con semiasse orizzontale $a = 2$ e verticale $b = 1$.

Vertici e fuochi. Vertici $(3 \pm 2; -1)$, cioè $(1; -1)$ e $(5; -1)$, e $(3; -1 \pm 1)$, cioè $(3; 0)$ e $(3; -2)$. Poi $c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$, fuochi $(3 \pm \sqrt{3}; -1)$, eccentricità $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$.

Controllo. Il vertice $(5; -1)$ soddisfa l'equazione data: $25 + 4 - 30 - 8 + 9 = 0$ ✓; anche $(3; 0)$: $9 - 18 + 9 = 0$ ✓. L'errore tipico è aggiungere al secondo membro 1 invece di $4 \cdot 1$: il coefficiente fuori dalla parentesi moltiplica anche il numero che si aggiunge dentro.

2.6 La proprietà focale

La parabola concentra nel fuoco i raggi paralleli al suo asse (*Matematica 3*, cap. 6). L'ellisse ha una proprietà analoga, che riguarda i suoi due fuochi.

IN SINTESI

Teorema (proprietà focale dell'ellisse).

Ipotesi: P è un punto dell'ellisse di fuochi F_1 e F_2, t è la retta tangente in P.

Tesi: t forma angoli uguali con i raggi focali PF_1 e PF_2. Equivalentemente, la **normale** in P, la perpendicolare a t, è la bisettrice dell'angolo F_1PF_2.

In termini fisici: per la legge della riflessione, il raggio riflesso forma con lo specchio lo stesso angolo del raggio incidente. Un raggio di luce, o un'onda sonora, che parte da un fuoco e incontra una parete ellittica riflettente viene quindi rinviato **nell'altro fuoco**, qualunque sia la direzione in cui è partito (Figura 2.7). E poiché tutti i percorsi $F_1 \to P \to F_2$ hanno la stessa lunghezza $2a$, i segnali partiti insieme da un fuoco arrivano insieme all'altro.

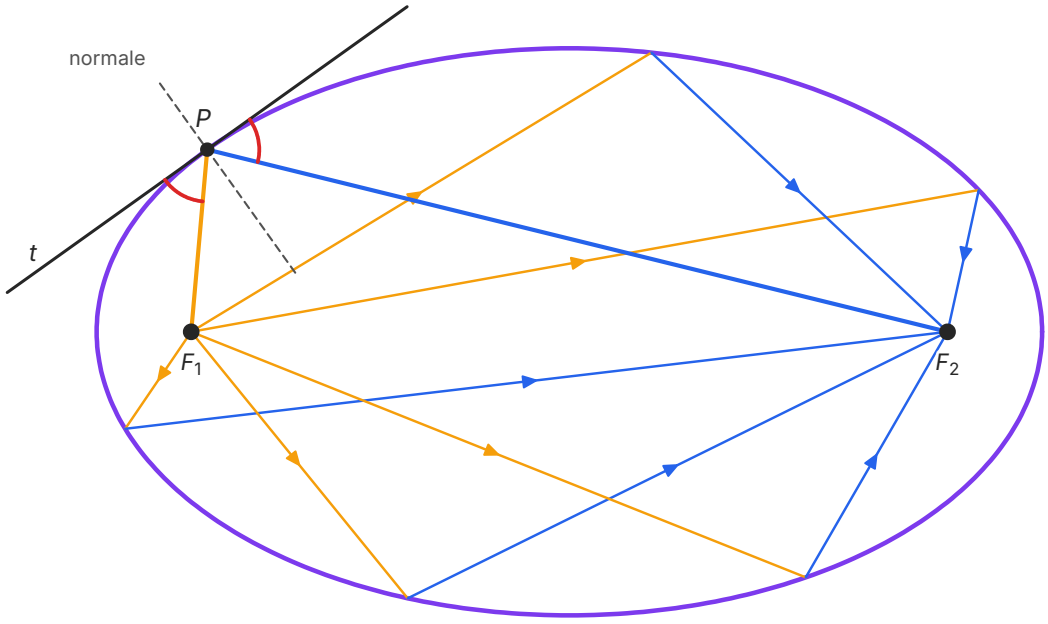


Figura 2.7 La proprietà focale nell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: i raggi che partono da F_1 (in arancio) si riflettono sull'ellisse e passano tutti per F_2 (in blu). Nel punto P sono disegnate la tangente t e la normale: i due angoli segnati in rosso, tra la tangente e i raggi focali, sono uguali (circa 49,4°). Punti e tangente sono calcolati dall'equazione.

COLLEGAMENTI

Medicina e architettura. Nella *litotrissia extracorporea*, una tecnica usata per frantumare i calcoli renali senza intervento chirurgico, alcune apparecchiature generano un'onda d'urto nel fuoco di un riflettore a forma di ellissoide (la superficie che si ottiene facendo ruotare un'ellisse attorno al suo asse maggiore). Il paziente viene posizionato in modo che il calcolo si trovi nell'altro fuoco: lì l'energia riflessa si concentra, mentre i tessuti attraversati ricevono un'onda molto meno intensa. In architettura, sotto alcune volte di forma ellittica si osserva l'effetto delle *gallerie dei sussurri*: chi parla a bassa voce in un fuoco viene sentito chiaramente nell'altro, anche a molti metri di distanza, mentre chi sta in mezzo quasi non sente nulla.

APPROFONDIMENTO · PERCHÉ LA PROPRIETÀ FOCALE È VERA

La dimostrazione usa soltanto il filo del giardiniere e il problema di Erone sul percorso minimo (*Matematica 3*, cap. 5).

I punti esterni. Un punto Q esterno all'ellisse non si raggiunge con il filo teso: servirebbe un filo più lungo. Infatti il segmento QF_1 taglia l'ellisse in un punto R, perché F_1 è interno; allora $QF_1 + QF_2 = QR + RF_1 + QF_2$ e, per la disuguaglianza triangolare nel triangolo QRF_2, $QR + QF_2 > RF_2$. Quindi $QF_1 + QF_2 > RF_1 + RF_2 = 2a$.

La tangente. La tangente t ha in comune con l'ellisse il solo punto P, e l'ellisse sta tutta da una parte di t: ogni altro punto Q di t è esterno, e per esso $QF_1 + QF_2 > 2a = PF_1 + PF_2$. Fra tutti i punti di t, dunque, P è quello che rende minima la somma delle distanze dai due fuochi, che stanno dalla stessa parte di t. È proprio il problema di Erone: il punto di minimo è quello in cui i segmenti verso i due punti formano angoli uguali con la retta. Quindi t forma angoli uguali con PF_1 e PF_2. c.v.d.

SINTESI

- L'**ellisse** di fuochi F_1, F_2 è il luogo dei punti P per cui $PF_1 + PF_2 = 2a$, con $2a > F_1F_2 = 2c$; si disegna con la costruzione del giardiniere. Per $c = 0$ è una circonferenza.
- Con i fuochi in $(\pm c; 0)$ l'equazione canonica è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $b^2 = a^2 - c^2$; vertici $(\pm a; 0)$ e $(0; \pm b)$. Per ricavarla si eleva due volte al quadrato e si controlla il cammino inverso.
- Se $b > a$ i fuochi sono sull'asse y, in $(0; \pm c)$, con $c^2 = b^2 - a^2$: i fuochi stanno sull'asse del denominatore maggiore.
- L'ellisse è simmetrica rispetto ai due assi e al centro ed è limitata: $|x| \le a$, $|y| \le b$. I raggi focali di $P(x; y)$ sono $a + \frac{c}{a}x$ e $a - \frac{c}{a}x$.
- L'eccentricità $e = \frac{c}{a}$ (o $\frac{c}{b}$) è compresa tra 0 (circonferenza) e 1 escluso; $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$.
- Prima legge di Keplero (1609): i pianeti percorrono ellissi di cui il Sole occupa un fuoco; al perielio e all'afelio distano dal Sole $a(1 - e)$ e $a(1 + e)$.
- L'equazione canonica dipende da due parametri: servono due condizioni. Con due punti conviene porre $u = \frac{1}{a^2}$, $v = \frac{1}{b^2}$. Ogni risultato si controlla per sostituzione.
- La posizione di una retta rispetto a un'ellisse si legge dal discriminante dell'equazione risolvente; un solo punto comune significa sempre tangenza.
- La tangente in P_0 dell'ellisse è $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$; dalle tangenti da un punto esterno non va dimenticata la retta verticale.
- L'ellisse è l'immagine della circonferenza di raggio a nella dilatazione $y' = \frac{b}{a}y$; la sua area è πab.
- Un'ellisse traslata, di centro $(x_0; y_0)$, si riconosce completando i quadrati.
- Proprietà focale: la tangente forma angoli uguali con i raggi focali, quindi ciò che parte da un fuoco si riflette nell'altro.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● L'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ha i fuochi in:

   A. $(\pm 3; 0)$
   B. $(0; \pm 3)$
   C. $(0; \pm\sqrt{41})$
   D. $(\pm 4; 0)$

2. ● L'eccentricità dell'ellisse $9x^2 + 25y^2 = 225$ è:

   A. $\frac{3}{5}$

   B. $\frac{5}{4}$

   C. $\frac{4}{5}$

   D. $\frac{16}{25}$

3. ● In un'ellisse la somma delle distanze di ogni punto dai fuochi è 10 e la distanza focale è 6. Il semiasse minore misura:

   A. 4

   B. 8

   C. $\sqrt{34}$

   D. 3

4. ● Quale equazione rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y?

   A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

   B. $4x^2 + y^2 = 4$

   C. $x^2 + y^2 = 9$

   D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

5. ● L'area dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ è:

   A. 36π

   B. 13π

   C. 6

   D. 6π

6. ●● La retta $y = 2$, rispetto all'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, è:

   A. tangente nel vertice (0; 2)

   B. secante in due punti

   C. esterna

   D. tangente nel punto (2; 0)

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) In un'ellisse con i fuochi sull'asse x vale $c^2 = a^2 + b^2$.
   b) La circonferenza è un'ellisse di eccentricità 0.
   c) Due ellissi con la stessa eccentricità sono simili.
   d) Una retta che ha un solo punto in comune con un'ellisse è tangente.
   e) L'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è il grafico di una funzione.

8. ● Completa. L'ellisse è il luogo dei punti del piano per cui è costante la _____ delle distanze da due punti fissi, detti _____ . Nell'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$ i fuochi hanno coordinate _____ , con $c^2 =$ _____ ; l'eccentricità è $e =$ _____ ed è compresa tra _____ .

Calcolare

9. ● Trova semiassi, vertici, fuochi ed eccentricità delle ellissi: a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$; c) $16x^2 + 25y^2 = 400$.

10. ● Scrivi l'equazione canonica dell'ellisse: a) con semiassi 6 (sull'asse x) e 2; b) con un fuoco in (5; 0) e un vertice in (13; 0); c) con un vertice in (3; 0) e un fuoco in (0; 4).

11. ●● Scrivi l'equazione dell'ellisse: a) con i fuochi sull'asse x, semiasse maggiore 10 ed eccentricità $\frac{3}{5}$; b) con i fuochi sull'asse y, eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e semiasse minore 2.

12. ●● Trova l'ellisse con il centro nell'origine e gli assi sugli assi cartesiani che passa per $A(4; 1)$ e $B(2; 2)$. Poi calcola i fuochi.

13. ●● Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x ed eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$ che passa per $P(2; 1)$. Controlla il risultato.

14. ● Stabilisci la posizione delle rette rispetto all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 8$ e trova gli eventuali punti comuni: a) $y = \frac{1}{2}x$; b) $x + 2y = 4$; c) $y = x + 4$.

15. ●● Verifica che $P_0(4; 1)$ appartiene all'ellisse $x^2 + 4y^2 = 20$ e scrivi la tangente in P_0 con la formula di sdoppiamento; controlla poi che il discriminante dell'equazione risolvente sia nullo.

16. ●● Trova le tangenti all'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 36$ condotte dal punto $P(0; 4)$ e i punti di contatto.

17. ● a) Calcola l'area dell'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. b) In quale ellisse la dilatazione $x' = x$, $y' = \frac{1}{2}y$ trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 16$? Quanto vale la sua area? c) Un'ellisse con i fuochi sull'asse x ha area 20π e semiasse maggiore 5: scrivine l'equazione.

18. ●● Riconosci la curva $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$: trova centro, semiassi, vertici e fuochi.

19. ●● a) Scrivi in forma sviluppata l'equazione dell'ellisse di centro $(-1; 2)$ con semiasse orizzontale 3 e semiasse verticale 1. b) Spiega perché l'equazione $x^2 + 4y^2 + 2x + 5 = 0$ non rappresenta alcun punto del piano.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Sia $P(x; y)$ un punto dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $b^2 = a^2 - c^2$ e fuoco $F_2(c; 0)$. Sostituendo $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, dimostra che $PF_2{}^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2$ e deduci che $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

21. ●● Trova l'errore. Per l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ Sara scrive: «$a = 3$, $b = 5$, $c^2 = 9 + 25 = 34$, fuochi $(\pm\sqrt{34}; 0)$». Spiega che cosa sbaglia e correggi.

22. ●● Spiega perché. Cercando le tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ condotte da $P(3; 2)$ con il fascio $y - 2 = m(x - 3)$, la condizione di tangenza dà una sola soluzione, $m = 0$. Il punto è esterno? Dov'è la seconda tangente? Disegna la situazione.

23. ●● Usando solo la definizione di ellisse (senza coordinate), dimostra che l'ellisse di fuochi F_1 e F_2 è simmetrica rispetto all'asse del segmento F_1F_2. *Suggerimento:* se P' è il simmetrico di P rispetto a quell'asse, confronta $P'F_1$ con PF_2.

Problemi

24. ●● Un giardiniere vuole un'aiuola ellittica lunga 8 m e larga 6 m. A che distanza dal centro deve piantare i due picchetti, e quanto deve essere lungo il filo, legato con gli estremi ai picchetti? Quanti metri quadrati di prato occuperà l'aiuola?

25. ●● *Dati inventati.* Un pianeta immaginario ruota attorno alla sua stella su un'orbita ellittica; al perielio dista dalla stella 120 milioni di km, all'afelio 180 milioni di km. Calcola il semiasse maggiore, la semidistanza focale, l'eccentricità e il semiasse minore (con due cifre decimali), e scrivi l'equazione dell'orbita in un riferimento con l'origine nel centro e l'asse x sull'asse maggiore (unità: milioni di km).

26. ●● *Dati inventati.* La pianta di una sala ha la forma di un'ellisse lunga 20 m e larga 12 m. Dove devono stare due persone perché si sentano come in una galleria dei sussurri? Quanto è lungo il cammino di un suono che parte da una di loro e arriva all'altra dopo essersi riflesso sulla parete? Assumendo che il suono viaggi a 340 m/s, confronta il tempo di quel cammino con quello del suono diretto.

27. ●●● *Dati inventati.* L'arco di un ponte ha la forma di una semiellisse con luce (larghezza alla base) di 30 m e altezza massima di 9 m. a) Quanto è alto l'arco a 10 m dal centro? b) A quale distanza dal centro l'arco è alto 6 m? Dai i risultati in forma esatta e approssimata.

Verso la verifica

28. ●● Data l'ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$: a) trova fuochi ed eccentricità; b) verifica che $P(3; \frac{16}{5})$ le appartiene e scrivi la tangente in P; c) calcola l'area del triangolo che questa tangente forma con gli assi cartesiani.

29. ●● Un'ellisse con i fuochi sull'asse x ha un vertice in $(0; 2)$ e passa per $(3; 1)$. a) Scrivine l'equazione e calcola l'eccentricità. b) Per quali valori di k la retta $y = x + k$ è tangente all'ellisse? Trova i punti di contatto.

30. ●●● Sfida. Trova l'equazione del luogo dei punti P del piano tali che $PA + PB = 10$, con $A(1; 1)$ e $B(7; 1)$. Che curva è? Determinane centro, semiassi e vertici, e scrivi l'equazione in forma sviluppata.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Apollonio di Perga e su Keplero, per vedere come l'ellisse passò dalla geometria greca all'astronomia.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sulle coniche e sulla geometria analitica, con le proprietà focali viste da più punti di vista.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il consiglio di «controllare il risultato», che in questo capitolo è la sostituzione nell'equazione trovata.

Glossario del capitolo

Afelio
Punto dell'orbita di un pianeta più lontano dal Sole: il vertice dell'asse maggiore opposto al fuoco occupato dal Sole, a distanza a + c.

Asse maggiore
Segmento A_1A_2 che congiunge i due vertici dell'ellisse sulla retta dei fuochi; è lungo 2a (o 2b se i fuochi stanno sull'asse y).

Asse minore
Segmento che congiunge i due vertici dell'ellisse sull'asse del segmento F_1F_2; è il più corto dei due assi.

Centro
Punto medio dei fuochi; è centro di simmetria dell'ellisse.

Corda
Segmento che ha per estremi due punti dell'ellisse: è la parte di una retta secante interna alla curva.

Costruzione del giardiniere
Modo di disegnare un'ellisse con un filo inestensibile lungo 2a fissato nei fuochi e tenuto teso da una punta che si muove.

Dilatazione verticale
Trasformazione $x' = x$, $y' = ky$ che moltiplica le ordinate per k; con $k = b/a$ trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ nell'ellisse di semiassi a e b.

Distanza focale
Distanza 2c tra i due fuochi dell'ellisse.

Eccentricità dell'ellisse
Rapporto $e = c/a$ (o c/b se i fuochi stanno sull'asse y) tra semidistanza focale e semiasse maggiore; per un'ellisse $0 \le e < 1$.

Ellisse
Luogo dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi, i fuochi, è costante e maggiore della loro distanza.

Ellisse traslata
Ellisse con il centro in $C(x_0; y_0)$ e gli assi paralleli agli assi cartesiani: $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$.

Equazione canonica
Equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ dell'ellisse con il centro nell'origine e gli assi sugli assi cartesiani.

Equazione risolvente
Equazione in una sola incognita che si ottiene sostituendo l'equazione di una retta in quella dell'ellisse; il segno del suo discriminante dà la posizione della retta.

Formula di sdoppiamento
Regola per scrivere la tangente all'ellisse in un suo punto $(x_0; y_0)$: $x_0x/a^2 + y_0y/b^2 = 1$.

Fuochi
I due punti fissi F_1, F_2 della definizione dell'ellisse; stanno sull'asse maggiore, a distanza c dal centro.

Perielio
Punto dell'orbita di un pianeta più vicino al Sole, a distanza a − c dal Sole.

Prima legge di Keplero
Ogni pianeta descrive un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi (Keplero, 1609).

Proprietà focale
La tangente all'ellisse in un punto forma angoli uguali con i due raggi focali: ciò che parte da un fuoco si riflette nell'altro.

Raggi focali
I segmenti che congiungono un punto dell'ellisse con i due fuochi; la loro somma è 2a.

Semiassi
Le metà a e b dei due assi dell'ellisse, che compaiono ai denominatori dell'equazione canonica.

Soluzioni

1. B. Il denominatore maggiore è quello di y^2: fuochi sull'asse y, $c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = 3$.

2. C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$: $c = \sqrt{25 - 9} = 4$, $e = \frac{4}{5}$.

3. A. $2a = 10$, $2c = 6$: $a = 5$, $c = 3$, $b = \sqrt{25 - 9} = 4$.

4. B. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$: $a = 1 < b = 2$, fuochi sull'asse y. A ha i fuochi sull'asse x, C è una circonferenza ($c = 0$), D non è un'ellisse (c'è il segno meno).

5. D. $A = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$.

6. A. $\frac{x^2}{9} + 1 = 1$ dà $x^2 = 0$, soluzione doppia $x = 0$: la retta tocca l'ellisse nel vertice (0; 2).

7. a) Falso: $c^2 = a^2 - b^2$. b) Vero: $e = 0$ significa $c = 0$, $b = a$. c) Vero: $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ dipende solo da e, quindi le due ellissi hanno la stessa forma. d) Vero: l'equazione risolvente è sempre di secondo grado e un solo punto comune significa $\Delta = 0$. e) Falso: a ogni x con $|x| < a$ corrispondono due valori di y.

8. somma; fuochi; $(\pm c; 0)$; $a^2 - b^2$; $\frac{c}{a}$; 0 e 1 (in generale $0 \le e < 1$; qui, con $a > b$, è $c > 0$ e quindi $0 < e < 1$).

9. a) $a = 10$, $b = 6$, vertici $(\pm 10; 0)$, $(0; \pm 6)$; $c = \sqrt{100 - 36} = 8$, fuochi $(\pm 8; 0)$, $e = \frac{4}{5}$. b) $a = 2$, $b = \sqrt{13}$, vertici $(\pm 2; 0)$, $(0; \pm\sqrt{13})$; fuochi sull'asse y: $c = \sqrt{13 - 4} = 3$, fuochi $(0; \pm 3)$, $e = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \approx 0{,}83$. c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$: $a = 5$, $b = 4$, vertici $(\pm 5; 0)$, $(0; \pm 4)$; $c = 3$, fuochi $(\pm 3; 0)$, $e = \frac{3}{5}$.

10. a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$. b) $c = 5$, $a = 13$, $b^2 = 169 - 25 = 144$: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. c) Il fuoco è sull'asse y, quindi l'asse maggiore è verticale: $c = 4$, $a = 3$ (vertice sull'asse minore), $b^2 = a^2 + c^2 = 9 + 16 = 25$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. Controllo: $c^2 = 25 - 9 = 16$ ✓.

11. a) $c = ae = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$, $b^2 = 100 - 36 = 64$: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. b) $c = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ e $b^2 - c^2 = a^2 = 4$: $b^2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 4$, $b^2 = 16$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Controllo: $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $e = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓.

12. Con $u = \frac{1}{a^2}$, $v = \frac{1}{b^2}$: $16u + v = 1$ e $4u + 4v = 1$. Dalla prima $v = 1 - 16u$; nella seconda $4u + 4 - 64u = 1$, $u = \frac{1}{20}$, $v = \frac{1}{5}$. Ellisse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$; $c = \sqrt{20 - 5} = \sqrt{15}$, fuochi $(\pm\sqrt{15}; 0)$. Controllo con B: $\frac{4}{20} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ ✓.

13. $b^2 = a^2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$; il passaggio per P dà $\frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} = 1$, $a^2 = 8$, $b^2 = 2$: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Controllo: $\frac{4}{8} + \frac{1}{2} = 1$ ✓; $c^2 = 6$, $e = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓.

14. a) $x^2 + x^2 = 8$, $x = \pm 2$: secante nei punti (2; 1) e (−2; −1). b) $x = 4 - 2y$: $(4 - 2y)^2 + 4y^2 = 8$, cioè $8y^2 - 16y + 8 = 0$, $(y - 1)^2 = 0$: tangente nel punto (2; 1). c) $x^2 + 4(x + 4)^2 = 8$, cioè $5x^2 + 32x + 56 = 0$: $\frac{\Delta}{4} = 256 - 280 = -24 < 0$, esterna.

15. $16 + 4 = 20$ ✓. Sdoppiamento: $4x + 4y = 20$, cioè $x + y = 5$. Sostituendo $y = 5 - x$: $x^2 + 4(5 - x)^2 = 20$, cioè $5x^2 - 40x + 80 = 0$, $5(x - 4)^2 = 0$: $\Delta = 0$ e soluzione doppia $x = 4$ ✓.

16. Il punto è esterno ($9 \cdot 16 = 144 > 36$); la verticale $x = 0$ è secante. Fascio $y = mx + 4$: $(4 + 9m^2)x^2 + 72mx + 108 = 0$, $\frac{\Delta}{4} = 1296m^2 - 108(4 + 9m^2) = 324m^2 - 432 = 0$,

$m^2 = \frac{4}{3}$, $m = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Tangenti $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 4$. Contatto: $x = -\frac{36m}{4+9m^2} = -\frac{9m}{4}$; per $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$: $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 1)$, per $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$: $(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 1)$. Controllo: $4 \cdot \frac{27}{4} + 9 = 36$✓.

17. a) $\pi \cdot 4 \cdot 3 = 12\pi \approx 37{,}7$. b) Da $x = x'$, $y = 2y'$: $x'^2 + 4y'^2 = 16$, cioè $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; area $\pi \cdot 4 \cdot 2 = 8\pi \approx 25{,}1$, metà del cerchio ($16\pi$). c) $\pi \cdot 5 \cdot b = 20\pi$, $b = 4$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

18. $9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) = 11$; $9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 11 + 9 + 16 = 36$; $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. Centro $(1; -2)$, semiasse orizzontale 2, verticale 3 (asse maggiore verticale). Vertici $(-1; -2)$, $(3; -2)$, $(1; 1)$, $(1; -5)$; $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, fuochi $(1; -2 \pm \sqrt{5})$. Controllo: $(1; 1)$ dà $9 + 4 - 18 + 16 - 11 = 0$ ✓.

19. a) $\frac{(x+1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$, cioè $(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 9$: $x^2 + 9y^2 + 2x - 36y + 28 = 0$. b) Completando il quadrato: $(x+1)^2 + 4y^2 = -4$. Il primo membro è una somma di quadrati, mai negativa, e non può valere -4.

20. Traccia: $PF_2{}^2 = (x-c)^2 + y^2$ $= x^2 - 2cx + c^2 + (a^2 - c^2)(1 - \frac{x^2}{a^2})$ $= x^2 - 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$ $= (a - \frac{c}{a}x)^2$. Poiché $|x| \le a$ e $c < a$, $a - \frac{c}{a}x \ge a - c > 0$; due numeri positivi con lo stesso quadrato sono uguali, quindi $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

21. Il denominatore maggiore è quello di y^2, quindi i fuochi stanno sull'asse y e c^2 è una differenza: $c^2 = 25 - 9 = 16$, $c = 4$, fuochi $(0; \pm 4)$. Sara ha usato la relazione dell'iperbole e ha messo i fuochi sull'asse sbagliato; il suo $c = \sqrt{34} \approx 5{,}8$ supera anche il semiasse maggiore 5, segno sicuro di errore.

22. $P(3; 2)$ è esterno: $\frac{9}{9} + \frac{4}{4} = 2 > 1$; è il vertice del rettangolo $2a \times 2b$. Con il fascio, l'equazione risolvente è $(4 + 9m^2)x^2 + 18m(2 - 3m)x + 9(2 - 3m)^2 - 36 = 0$ e la condizione $\Delta = 0$ si riduce a $1728m = 0$, di primo grado: $m = 0$, la tangente $y = 2$ nel vertice $(0; 2)$. La seconda tangente è la verticale $x = 3$, tangente nel vertice $(3; 0)$, che il fascio $y - 2 = m(x - 3)$ non contiene.

23. Traccia: la simmetria rispetto all'asse s di F_1F_2 scambia F_1 con F_2 e conserva le distanze (è un'isometria). Se P' è il simmetrico di P, allora $P'F_1 = PF_2$ e $P'F_2 = PF_1$, quindi $P'F_1 + P'F_2 = PF_2 + PF_1 = 2a$: anche P' sta sull'ellisse. c.v.d.

24. $2a = 8$, $2b = 6$: $a = 4$ m, $b = 3$ m, $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \approx 2{,}65$ m. I picchetti vanno sull'asse maggiore a circa 2,65 m dal centro; il filo, tra i due picchetti e la punta, è lungo $2a = 8$ m. Area $\pi \cdot 4 \cdot 3 = 12\pi \approx 37{,}7$ m^2.

25. $a = \frac{120 + 180}{2} = 150$, $c = \frac{180 - 120}{2} = 30$, $e = \frac{30}{150} = 0{,}2$, $b = \sqrt{150^2 - 30^2} = \sqrt{21600} = 60\sqrt{6} \approx 146{,}97$ (milioni di km). Orbita: $\frac{x^2}{22500} + \frac{y^2}{21600} = 1$, con la stella in un fuoco, $(30; 0)$ oppure $(-30; 0)$.

26. $a = 10$, $b = 6$, $c = \sqrt{100 - 36} = 8$: le due persone stanno nei fuochi, sull'asse maggiore a 8 m dal centro, cioè a 2 m dalle pareti di fondo. Ogni cammino riflesso è lungo $2a = 20$ m e dura $\frac{20}{340} \approx 0{,}059$ s; il suono diretto percorre $2c = 16$ m in $\frac{16}{340} \approx 0{,}047$ s, circa un centesimo di secondo prima.

27. In un riferimento con l'origine al centro della base: $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$, $y \ge 0$. a) $y = 9\sqrt{1 - \frac{100}{225}} = 9 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}71$ m. b) $\frac{x^2}{225} = 1 - \frac{36}{81} = \frac{5}{9}$, $x = 15 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18$ m dal centro, da una parte o dall'altra.

28. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$: $c = 3$, fuochi $(\pm 3; 0)$, $e = \frac{3}{5}$. b) $16 \cdot 9 + 25 \cdot \frac{256}{25} = 144 + 256 = 400$ ✓. Tangente: $\frac{3x}{25} + \frac{16}{5} \cdot \frac{y}{16} = 1$, cioè $\frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1$, $3x + 5y = 25$ (controllo: sostituendo si ottiene $(x - 3)^2 = 0$ ✓). c) Intersezioni con gli assi $(\frac{25}{3}; 0)$ e $(0; 5)$: area $\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot 5 = \frac{125}{6} \approx 20{,}8$.

29. a) $b = 2$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$; per $(3; 1)$: $\frac{9}{a^2} = \frac{3}{4}$, $a^2 = 12$: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$. $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $e = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82$. b) $x^2 + 3(x + k)^2 = 12$, cioè $4x^2 + 6kx + 3k^2 - 12 = 0$; $\frac{\Delta}{4} = 9k^2 - 4(3k^2 - 12) = 48 - 3k^2 = 0$, $k = \pm 4$. Per $k = 4$: $x = -\frac{6k}{8} = -3$, contatto $(-3; 1)$; per $k = -4$: $(3; -1)$. Controllo: $\frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 1$ ✓.

30. È un'ellisse di fuochi A e B ($2a = 10 > AB = 6$): centro nel punto medio $(4; 1)$, $a = 5$, $c = 3$, $b = 4$, asse maggiore orizzontale. Equazione $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$; vertici $(-1; 1)$, $(9; 1)$, $(4; 5)$, $(4; -3)$. Forma sviluppata: $16x^2 + 25y^2 - 128x - 50y - 119 = 0$. Controllo: $(4; 5)$ dista 5 da A e 5 da B, somma 10 ✓.