CAPITOLO

1

Funzioni, polinomi e funzioni razionali

Una funzione è una domanda che ha sempre una sola risposta; un polinomio, diviso con pazienza, rivela i suoi zeri. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Determinare dominio, immagine, zeri e segno di una funzione e riconoscerne le proprietà: iniettività, suriettività, monotonia, parità, periodicità.
2. Costruire la funzione inversa di una funzione biiettiva, anche restringendone il dominio, e la composta di due funzioni.
3. Disegnare grafici deducibili da quelli di $y = x^2$, $y = 1/x$ e $y = |x|$.
4. Eseguire la divisione con resto tra polinomi, anche con la regola di Ruffini, e collegarla alla divisione tra numeri interi.
5. Usare il teorema del resto e il teorema di Ruffini per scomporre polinomi e risolvere equazioni di grado superiore in casi semplici.
6. Studiare il segno di prodotti e quozienti, risolvere disequazioni di grado superiore e fratte e descrivere il grafico di una funzione razionale.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 Le funzioni reali di variabile reale 2
1.2 Le proprietà delle funzioni 4
1.3 Funzione inversa e funzione composta 6
1.4 Grafici deducibili 8
1.5 La divisione tra polinomi 10
1.6 Funzioni polinomiali e razionali 16

Matematica 4 · Parte I · Funzioni, ellisse e iperbole · versione 1.0
Capitolo 1: Funzioni, polinomi e funzioni razionali · pagine 21–46 del volume completo · estratto per lo studio

Il prezzo di una corsa in taxi dipende dai chilometri percorsi; l'altezza di un sasso lanciato dipende dal tempo trascorso; il costo di ogni copia di un libro dipende da quante copie se ne stampano. Ogni volta una grandezza è determinata da un'altra: è l'idea di *funzione*, che in *Matematica 1* hai incontrato come relazione tra due insiemi e che negli anni successivi hai usato con le rette, le parabole e le circonferenze.

In questo capitolo le funzioni diventano esse stesse oggetto di studio. Daremo un nome preciso alle loro proprietà: se cresce o decresce, se il grafico ha simmetrie, se si ripete, se si può «tornare indietro» con la funzione inversa. Impareremo a ottenere grafici nuovi da grafici noti. Poi passeremo ai polinomi: la divisione con resto, che somiglia in modo sorprendente a quella tra numeri interi, ci darà uno strumento per scomporre polinomi di terzo e quarto grado, risolvere equazioni e disequazioni di grado superiore e studiare le prime funzioni razionali.

1.1 Le funzioni reali di variabile reale

1.1.1 Che cosa sappiamo già

Dati due insiemi A e B, una **funzione** $f\colon A \to B$ associa a *ogni* elemento x di A *uno e un solo* elemento $y = f(x)$ di B, detto immagine di x. In *Matematica 1* (cap. 5) A era il dominio, B l'insieme di arrivo e l'insieme delle immagini $f(A) \subseteq B$ si chiamava codominio; d'ora in poi lo chiameremo soprattutto **immagine** della funzione e lo indicheremo anche con $\mathrm{Im}\, f$. Le funzioni di questo libro sono quasi tutte **funzioni reali di variabile reale**: il dominio D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e le immagini sono numeri reali.

Il grafico di f è l'insieme dei punti $(x; f(x))$ del piano cartesiano, con $x \in D$. Poiché ogni x ha una sola immagine, una retta verticale incontra il grafico di una funzione al più in un punto: la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ non è il grafico di una funzione. Proiettando il grafico sull'asse x si ottiene il dominio, proiettandolo sull'asse y si ottiene l'immagine. Conosci già i grafici di $y = mx + q$ (rette), $y = \dfrac{k}{x}$ (iperbole), $y = ax^2 + bx + c$ (parabola) e $y = |x|$.

1.1.2 Il dominio

Spesso una funzione è data soltanto con la sua espressione, per esempio $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, senza dire quale sia il dominio. Si intende allora che il dominio è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui l'espressione ha significato: qui $x \neq 2$; per $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ servono insieme $x + 1 \geq 0$ e $x \neq 3$, cioè $D = [-1; 3[\cup]3; +\infty[$. Le condizioni che lo definiscono sono le **condizioni di esistenza** (C.E.). Per

le funzioni che studiamo ora, le operazioni che possono perdere significato sono solo due: la divisione per zero e la radice di indice pari di un numero negativo.

IN SINTESI

Condizioni di esistenza.

- Polinomio: nessuna condizione, $D = \mathbb{R}$.
- Quoziente $\frac{A(x)}{B(x)}$: $B(x) \neq 0$.
- Radice di indice pari $\sqrt{A(x)}$: $A(x) \geq 0$; radice di indice dispari: nessuna condizione in più.
- Se le condizioni sono più d'una, devono valere tutte insieme: si mettono a sistema.

Quando il problema ha un contesto (un tempo, una lunghezza, un numero di oggetti) il dominio può essere più piccolo: la funzione $A(x) = x^2$ che dà l'area di un quadrato di lato x ha senso solo per $x > 0$.

1.1.3 Immagine, zeri e segno

Gli **zeri** di f sono i valori di x del dominio per cui $f(x) = 0$: sul grafico, le ascisse dei punti che stanno sull'asse x. Studiare il segno di f significa trovare dove $f(x) > 0$ (il grafico sta sopra l'asse x) e dove $f(x) < 0$ (sta sotto). Per esempio, $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ ha zeri -1 e 3, è negativa per $-1 < x < 3$ e positiva altrove; se la consideriamo solo per $-2 \leq x \leq 4$, la sua immagine è $[-4; 5]$: dall'ordinata del vertice, $f(1) = -4$, a quella degli estremi, $f(-2) = f(4) = 5$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Determina dominio, zeri e segno di $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

Soluzione. Prima il dominio: $x^2 - 2x = x(x - 2) \neq 0$, quindi $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Solo ora semplifichiamo: per $x \in D$, $f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)} = \frac{x + 2}{x}$. Il numeratore $x^2 - 4$ si annulla per $x = \pm 2$, ma 2 non appartiene al dominio: l'unico zero è $x = -2$. Il quoziente $\frac{x + 2}{x}$ è positivo per $x < -2$ oppure $x > 0$; togliendo il punto escluso: $f(x) > 0$ per $x < -2$, per $0 < x < 2$ e per $x > 2$; $f(x) < 0$ per $-2 < x < 0$.

Controllo. $f(-3) = \frac{5}{15} > 0$, $f(-1) = \frac{-3}{3} = -1 < 0$, $f(1) = \frac{-3}{-1} = 3 > 0$. Il grafico di f è quello di $y = \frac{x + 2}{x}$ privato del punto $(2; 2)$, che si segna con un pallino vuoto: il dominio si determina *prima* di semplificare.

Le funzioni si classificano in base alle operazioni che compaiono nell'espressione. Sono **funzioni razionali intere** (o polinomiali) quelle in cui x non compare al denominatore né sotto radice,

come $y = 2x^3 - x + 5$; **razionali fratte** quelle con x al denominatore, come $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$; *irrazionali* quelle con x sotto radice, come $y = \sqrt{x+2}$. Tutte queste si dicono algebriche. Le funzioni che non lo sono si dicono **trascendenti**: le principali, il seno e il coseno, l'esponenziale e il logaritmo, saranno l'argomento dei capitoli 4, 7 e 8.

1.2 Le proprietà delle funzioni

1.2.1 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Una funzione $f\colon A \to B$ è **iniettiva** se elementi diversi hanno immagini diverse: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. È **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, cioè se $f(A) = B$. È **biiettiva** se è sia iniettiva sia suriettiva: allora ogni y di B è immagine di uno e un solo x di A. La parola è nuova, l'idea no: in *Matematica 3* parlavamo di *corrispondenza biunivoca*, ed è la stessa cosa.

Sul grafico, le immagini uguali a b sono le ascisse dei punti in cui la retta orizzontale $y = b$ incontra la curva. Quindi f è iniettiva se ogni retta orizzontale incontra il grafico al più in un punto, ed è suriettiva su B se ogni retta $y = b$ con $b \in B$ lo incontra almeno in un punto. La funzione $y = x^2$, con dominio $\mathbb{R}$, non è iniettiva (la retta $y = 4$ incontra la parabola in $x = \pm 2$) e, come funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, non è suriettiva (la retta $y = -1$ non la incontra). Ma se il dominio è $[0; +\infty[$ e l'insieme di arrivo è $[0; +\infty[$, la stessa espressione definisce una funzione biiettiva: *le proprietà dipendono dagli insiemi che dichiariamo*, non soltanto dalla formula.

1.2.2 Funzioni crescenti e decrescenti

Sia I un intervallo contenuto nel dominio. La funzione f è **crescente** in I se, per ogni x_1, x_2 di I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; è **decrescente** in I se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Percorso da sinistra a destra, il grafico di una funzione crescente sale, quello di una decrescente scende. Se si ammette anche l'uguaglianza, $f(x_1) \leq f(x_2)$, si dice crescente *in senso lato*; in questo libro «crescente» senza altre indicazioni significa sempre in senso stretto. Una funzione crescente o decrescente in I si dice **monotona** in I. La parabola $y = x^2 - 2x - 3$ è decrescente in $]-\infty; 1]$ e crescente in $[1; +\infty[$: non è monotona in $\mathbb{R}$, ma lo è in ciascuno dei due intervalli.

IN SINTESI

Teorema. Una funzione crescente (o decrescente) in un intervallo è iniettiva in quell'intervallo.

Ipotesi: f crescente in I. **Tesi:** f iniettiva in I.

Dimostrazione. Siano $x_1 \neq x_2$ due elementi di I; chiamiamo x_1 il minore, così che $x_1 < x_2$. Poiché f è crescente, $f(x_1) < f(x_2)$, e in particolare $f(x_1) \neq f(x_2)$: elementi distinti hanno immagini distinte.

Per una funzione decrescente il ragionamento è identico, con $f(x_1) > f(x_2)$. c.v.d.

Il teorema non si inverte: $y = \dfrac{1}{x}$ è iniettiva ma non è monotona nel suo dominio, perché $-1 < 1$ e $f(-1) = -1 < f(1) = 1$, mentre è decrescente in $]-\infty; 0[$ e in $]0; +\infty[$ separatamente. La monotonia si dichiara sempre su un intervallo.

1.2.3 Funzioni pari e funzioni dispari

Supponiamo che il dominio sia simmetrico rispetto a 0, cioè che $x \in D \Rightarrow -x \in D$. La funzione f è **pari** se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$, **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$. Se f è pari, insieme al punto $(a; f(a))$ il grafico contiene $(-a; f(a))$: *il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y*. Se f è dispari, contiene $(-a; -f(a))$: *il grafico è simmetrico rispetto all'origine*. I nomi vengono dalle potenze: $y = x^2$, $y = x^4$ sono pari, $y = x$, $y = x^3$ dispari.

Il controllo è un calcolo. Per $f(x) = x^4 - 3x^2$: $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$, pari. Per $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$: $g(-x) = \dfrac{-x}{x^2 + 1} = -g(x)$, dispari. Per mostrare che una funzione *non* è né pari né dispari basta un controesempio: per $h(x) = x^2 + x$ si ha $h(1) = 2$ e $h(-1) = 0$, che non è né 2 né -2. Riconoscere una simmetria dimezza il lavoro: basta studiare la funzione per $x \geq 0$ e completare il grafico.

1.2.4 Funzioni periodiche

Molti fenomeni si ripetono: il giorno e la notte ogni 24 ore, le stagioni ogni anno, le fasi della Luna, il ciclo di un semaforo. Una funzione f è **periodica** di periodo $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$ per ogni x del dominio (con $x + T$ nel dominio), e T è il *più piccolo* numero positivo con questa proprietà. Il grafico di una funzione periodica si ripete identico a ogni traslazione di vettore $(T; 0)$, e per conoscerlo tutto basta conoscerlo in un intervallo lungo T. Se un semaforo resta verde 40 s, giallo 5 s e rosso 35 s, e diventa verde all'istante $t = 0$, la funzione «colore al tempo t» ha periodo 80 s: al tempo $t = 250$ s il semaforo è nello stesso stato in cui era a $t = 250 - 3 \cdot 80 = 10$ s, cioè verde. Anche $2T$, $3T$, … riportano lo stesso valore, ma il periodo è il minimo. Le funzioni periodiche per eccellenza sono il seno e il coseno, che studieremo nel capitolo 4.

COLLEGAMENTI

Filosofia · Leibniz e la parola «funzione». La parola latina *functio*, dal verbo *fungor*, «adempiere un compito», è attestata come termine matematico negli scritti di Gottfried Wilhelm Leibniz, il filosofo che studierai quest'anno. Il significato è cambiato molto da allora: oggi una funzione non è una formula, ma una qualsiasi legge che associa a ogni elemento del dominio uno e un solo valore. È un concetto di *dipendenza* spogliato di ogni contenuto fisico: «y dipende da x» non dice perché né come, dice solo che, fissato x, y è determinato. Proprio questa astrazione rende le funzioni utili in fisica come in economia, e vale la pena di confrontarla con le idee di causa e di dipendenza che incontri nella storia della filosofia.

1.3 Funzione inversa e funzione composta

1.3.1 La funzione inversa

Se f: $A \to B$ è biiettiva, ogni y di B è immagine di uno e un solo x di A, e possiamo percorrere la funzione al contrario. La **funzione inversa** f^{-1}: $B \to A$ associa a ogni y di B l'unico x di A tale che $f(x) = y$. Valgono $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ per ogni $y \in B$: applicare f e poi f^{-1} riporta al punto di partenza. Se f non è biiettiva, l'inversa non esiste: se non è iniettiva qualche y ha più di un candidato, se non è suriettiva qualche y non ne ha nessuno.

Il secondo difetto si ripara scegliendo come insieme di arrivo l'immagine; il primo *restringendo il dominio* a un intervallo in cui f è monotona, e quindi iniettiva. È così che nasce la radice quadrata: $y = x^2$ non è invertibile su $\mathbb{R}$, ma la sua **restrizione** a $[0; +\infty[$ è biiettiva da $[0; +\infty[$ a $[0; +\infty[$, e la sua inversa è $y = \sqrt{x}$. Questo procedimento è un modello che useremo ancora: restringendo il seno a un intervallo otterremo l'arcoseno (capitolo 4), invertendo l'esponenziale il logaritmo (capitolo 8).

Il punto $(a; b)$ sta sul grafico di f se e solo se $f(a) = b$, cioè se e solo se $f^{-1}(b) = a$, cioè se e solo se $(b; a)$ sta sul grafico di f^{-1}. I punti $(a; b)$ e $(b; a)$ sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$, la bisettrice del primo e del terzo quadrante. Quindi *il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$* (Figura 1.1). Perché la simmetria si veda, i due assi devono avere la stessa unità di misura.

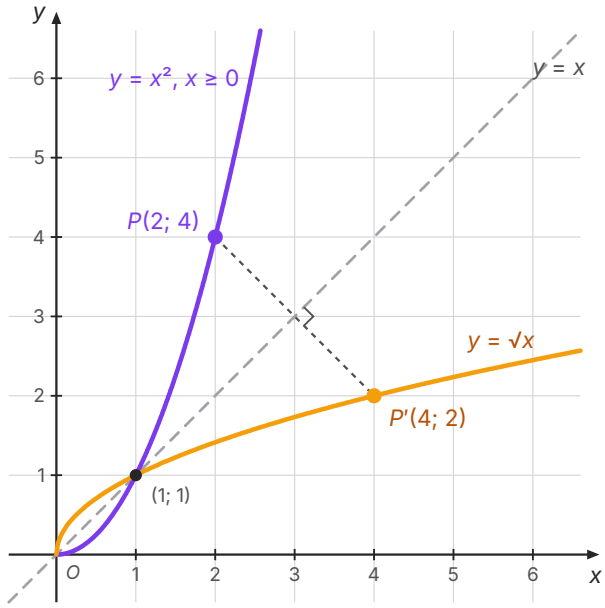


Figura 1.1 La restrizione di $y = x^2$ a $x \geq 0$ (viola) e la sua inversa $y = \sqrt{x}$ (arancione) sono simmetriche rispetto alla retta $y = x$ (tratteggiata); le unità sui due assi sono uguali. Il punto $P(2; 4)$ corrisponde a $P'(4; 2)$: il segmento PP' è perpendicolare alla bisettrice. I due grafici si incontrano in O e in $(1; 1)$.

Per trovare l'espressione dell'inversa si risolve l'equazione $y = f(x)$ rispetto a x; poi, per abitudine, si chiama di nuovo x la variabile indipendente.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. La funzione $f(x) = (x - 1)^2$ non è invertibile su $\mathbb{R}$. Restringila a un intervallo in cui lo sia, trova l'inversa e verificala in un punto.

Soluzione. Il grafico è la parabola $y = x^2$ traslata di 1 verso destra, con il vertice in $(1; 0)$: è crescente per $x \geq 1$. Restringiamo quindi f a $[1; +\infty[$; l'immagine è $[0; +\infty[$. Risolviamo $y = (x - 1)^2$ con $x \geq 1$ e $y \geq 0$: $x - 1 = \sqrt{y}$ (la radice negativa va scartata, perché $x - 1 \geq 0$), cioè $x = 1 + \sqrt{y}$.

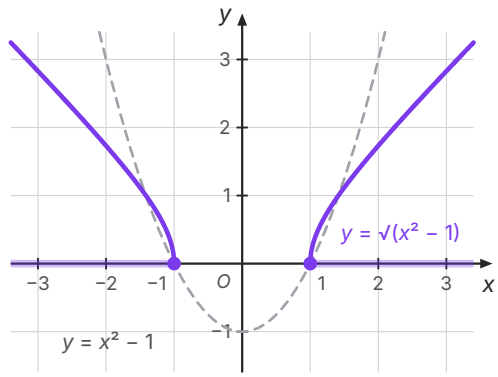
L'inversa è $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$, con dominio $[0; +\infty[$ e immagine $[1; +\infty[$: dominio e immagine si sono scambiati. **Verifica:** $f(3) = 4$ e $f^{-1}(4) = 1 + 2 = 3$. Se avessimo scelto la restrizione a $]-\infty; 1]$, l'inversa sarebbe stata $y = 1 - \sqrt{x}$.

1.3.2 La funzione composta

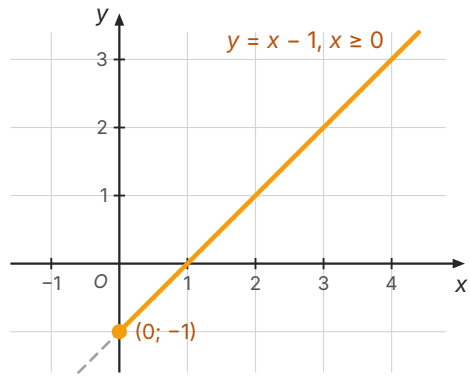
Due funzioni si possono applicare una dopo l'altra. Date f e g, la **funzione composta** $g \circ f$ (si legge «g composto f») è definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Agisce per prima la funzione scritta a destra, f; sul risultato agisce g. Il dominio di $g \circ f$ è formato dagli x del dominio di f tali che $f(x)$ appartenga al dominio di g. Prendiamo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Allora $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, con dominio $x^2 - 1 \geq 0$, cioè $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. Invece $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$, con dominio $x \geq 0$: l'espressione finale avrebbe senso per ogni x, ma il primo passo, $\sqrt{x}$, richiede $x \geq 0$ (Figura 1.2). Le due composte sono diverse: *la composizione non è commutativa*. Con $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x$, per esempio, $(g \circ f)(x) = 2x + 2$ ma $(f \circ g)(x) = 2x + 1$.



$(g \circ f)(x)$: dominio $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$



$(f \circ g)(x)$: dominio $x \geq 0$

Figura 1.2 Le due composte di $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. A sinistra $y = \sqrt{x^2 - 1}$, definita solo dove la parabola tratteggiata $y = x^2 - 1$ non è negativa: il dominio, evidenziato sull'asse x, è $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. A destra $y = x - 1$, ma solo per $x \geq 0$: la parte tratteggiata della retta non fa parte del grafico.

Spesso serve il cammino inverso: riconoscere in una funzione complicata la composta di funzioni semplici. $h(x) = (3x + 2)^5$ è $g \circ f$ con $f(x) = 3x + 2$ e $g(t) = t^5$. E se f e g sono invertibili, per disfare $g \circ f$ bisogna disfare i passi in ordine inverso, come quando ci si toglie prima le scarpe e poi le calze: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.4 Grafici deducibili

In *Matematica 2* (cap. 7) hai visto come le isometrie del piano trasformano un grafico. Riprendiamo quei risultati nel linguaggio delle funzioni e aggiungiamone due: a partire dal grafico di $y = f(x)$ si ottengono, senza nuovi calcoli, i grafici di molte altre funzioni, detti **grafici deducibili**. La Tabella 1.1 li riassume e la Figura 1.3 li applica alle funzioni che conosci.

Tabella 1.1 I grafici deducibili da quello di $y = f(x)$.

Funzione	Trasformazione	Che cosa succede ai punti
$y = f(x - a) + b$	traslazione di vettore $(a; b)$	$(x; y) \to (x + a; y + b)$: verso destra se $a > 0$, verso l'alto se $b > 0$
$y = -f(x)$	simmetria rispetto all'asse x	$(x; y) \to (x; -y)$
$y = f(-x)$	simmetria rispetto all'asse y	$(x; y) \to (-x; y)$
$y = \lvert f(x) \rvert$	si ribalta la parte sotto l'asse x	invariati i punti con $y \geq 0$; $(x; y) \to (x; -y)$ se $y < 0$
$y = k \cdot f(x)$, $k > 0$	dilatazione verticale	$(x; y) \to (x; ky)$; gli zeri restano fermi

La regola che inganna più spesso è la prima. Sostituire x con $x - 2$ sposta il grafico di 2 *verso destra*, non verso sinistra: il valore che f assumeva in x_0 viene assunto da $f(x - 2)$ quando $x - 2 = x_0$, cioè in $x_0 + 2$. Così $y = (x - 2)^2$ ha il vertice in $(2; 0)$, e $y = \dfrac{1}{x - 2} + 1$ è l'iperbole $y = \dfrac{1}{x}$ traslata di vettore $(2; 1)$: il punto escluso $x = 0$ diventa $x = 2$, il valore mai raggiunto $y = 0$ diventa $y = 1$.

Per una funzione pari la simmetria rispetto all'asse y non cambia nulla: $y = f(-x)$ coincide con $y = f(x)$. Per la parabola traslata $y = (x - 2)^2$, invece, $y = (-x - 2)^2 = (x + 2)^2$ ha il vertice in $(-2; 0)$. Quando le trasformazioni sono più d'una conviene costruire l'espressione un passo alla volta. Per esempio $y = 3 - |x + 1|$ si ottiene da $y = |x|$ così: $y = |x + 1|$ (traslazione di 1 verso sinistra), $y = -|x + 1|$ (simmetria rispetto all'asse x), $y = 3 - |x + 1|$ (traslazione di 3 verso l'alto). Il vertice passa da O a $(-1; 0)$ e poi a $(-1; 3)$, che è il punto più alto del grafico: l'immagine è $]-\infty; 3]$, gli zeri sono $x = 2$ e $x = -4$.

COLLEGAMENTI

Fisica · Leggi orarie traslate. Un ciclista A parte all'istante $t = 0$ e procede a 5 m/s: la sua legge oraria è $s_A(t) = 5t$. Un ciclista B parte dallo stesso punto 4 s dopo, a 7 m/s. Per B il tempo «comincia» a $t = 4$: la sua legge è $s_B(t) = 7(t - 4)$, per $t \geq 4$, e il suo grafico è la retta $s = 7t$ traslata di 4 verso destra sull'asse dei tempi. B raggiunge A quando $7(t - 4) = 5t$, cioè a $t = 14$ s, a 70 m dalla partenza. Allo stesso modo, aggiungere una costante s_0 alla legge oraria trasla il grafico verso l'alto: è il moto che inizia da una posizione diversa. In fisica «cambiare l'origine dei tempi» o «cambiare il punto di riferimento» sono esattamente le traslazioni di questo paragrafo.

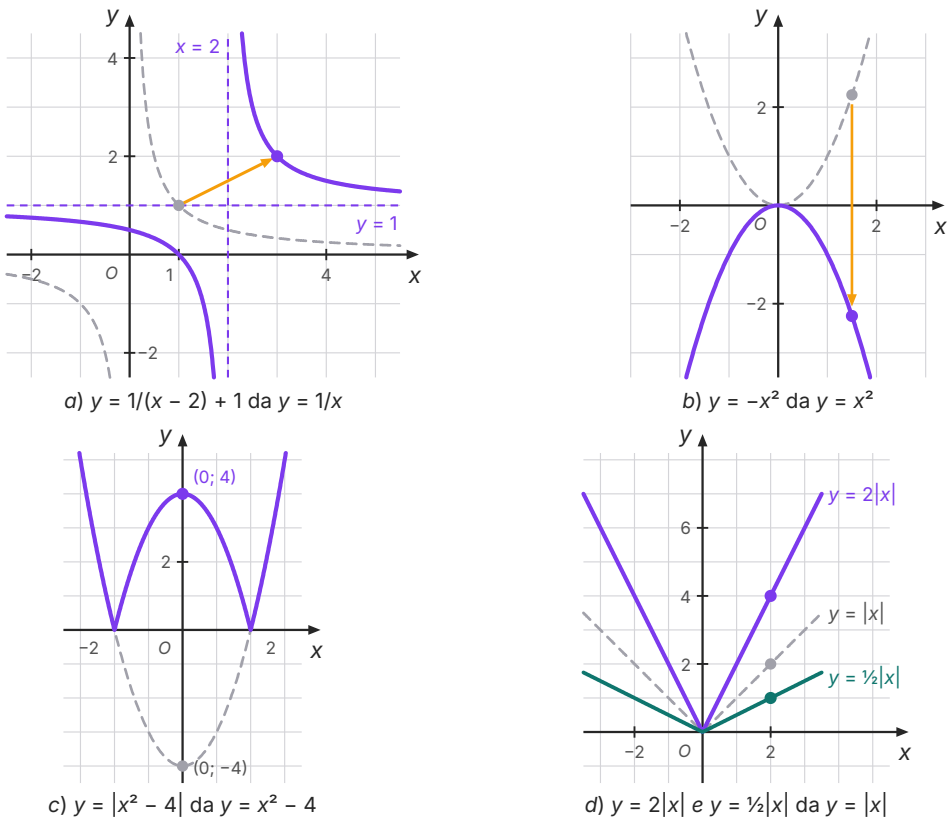


Figura 1.3 Quattro grafici deducibili; in grigio tratteggiato il grafico di partenza. a) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ da $y = \dfrac{1}{x}$: la traslazione di vettore (2; 1) porta (1; 1) in (3; 2) e le rette $x = 0$, $y = 0$ in $x = 2$, $y = 1$. b) $y = -x^2$ da $y = x^2$. c) $y = |x^2 - 4|$ da $y = x^2 - 4$: la parte negativa, tra −2 e 2, si ribalta e il vertice (0; −4) va in (0; 4). d) $y = 2|x|$ e $y = \dfrac{1}{2}|x|$ da $y = |x|$: il punto (2; 2) va in (2; 4) e in (2; 1).

1.5 La divisione tra polinomi

1.5.1 Divisione con resto: interi e polinomi

Dividere 47 per 5 significa trovare il *quoziente* 9 e il *resto* 2 tali che $47 = 5 \cdot 9 + 2$, con il resto più piccolo del divisore: $0 \le 2 < 5$. È la condizione sul resto a rendere unico il risultato: anche $47 = 5 \cdot 8 + 7$ è vero, ma 7 non è un resto accettabile, perché nel 7 «ci sta» ancora un 5. Nel libro VII degli *Elementi* Euclide trova il massimo comun divisore di due numeri togliendo ripetutamente il minore dal maggiore finché ciò che resta è più piccolo: è la stessa idea.

Per i polinomi vale lo stesso schema; la misura di «più piccolo» è il grado. Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x)$ non nullo, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x), \quad \text{con grado di } R \text{ minore del grado di } B \text{ (oppure } R = 0)$$

A è il dividendo, B il divisore, Q il **quoziente**, R il **resto**. Se $R = 0$, A è divisibile per B e $A(x) = B(x)\cdot Q(x)$ è una scomposizione in fattori. La Tabella 1.2 mette a confronto le due divisioni.

Tabella 1.2 La divisione con resto tra numeri interi e tra polinomi.

	Numeri interi	Polinomi
Uguaglianza	$a = b \cdot q + r$	$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x)$
Condizione sul resto	$0 \le r < b$ (con $b > 0$)	grado di $R <$ grado di B
Esempio	$47 = 5 \cdot 9 + 2$	$x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2$
Divisibilità	$r = 0$: b divide a	$R = 0$: $B(x)$ divide $A(x)$
Fattori «primi»	numeri primi	polinomi che non si scompongono ulteriormente
Algoritmo	divisione in colonna, cifra per cifra	divisione in colonna, termine per termine

1.5.2 L'algoritmo in colonna

Il quoziente si costruisce un termine alla volta, come le cifre nella divisione tra numeri. Si ordinano dividendo e divisore secondo le potenze decrescenti di x, scrivendo 0 al posto delle potenze che mancano nel dividendo. Poi si ripetono tre mosse: si divide il termine di grado massimo del dividendo per quello del divisore, ottenendo un termine del quoziente; si moltiplica questo termine per tutto il divisore; si sottrae il prodotto dal dividendo. Ci si ferma quando ciò che resta ha grado minore del divisore: quello è il resto. La Figura 1.4 mostra la divisione di $6x^3 + x^2 - 10x + 5$ per $2x^2 + x - 3$: $6x^3 : 2x^2 = 3x$, poi $-2x^2 : 2x^2 = -1$; il quoziente è $3x - 1$, il resto 2, di grado 0, minore di 2.

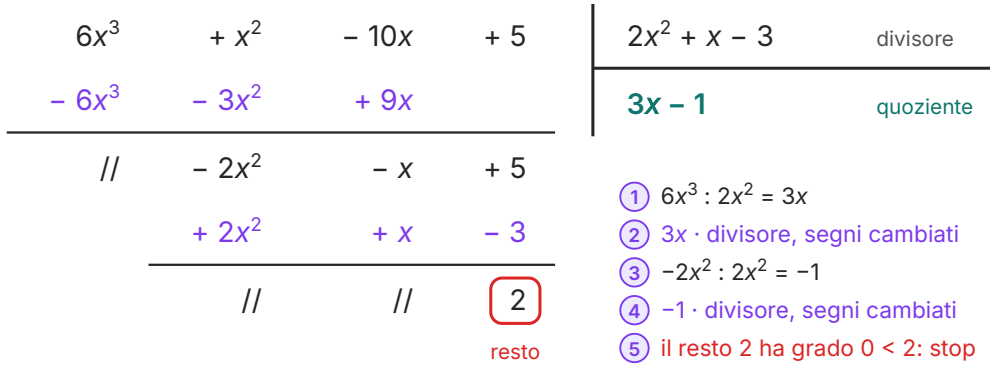


Figura 1.4 Divisione in colonna di $6x^3 + x^2 - 10x + 5$ per $2x^2 + x - 3$. A destra il divisore e, sotto, il quoziente costruito termine per termine; le righe viola sono i prodotti da sottrarre, cambiati di segno. Quoziente $3x - 1$, resto 2.

La verifica è sempre la stessa: $(2x^2 + x - 3)(3x - 1) + 2 = 6x^3 + x^2 - 10x + 3 + 2$, che è il dividendo. Un altro esempio, con una potenza mancante: dividendo $2x^3 - 3x + 4$ (cioè $2x^3 + 0x^2 - 3x + 4$) per $x^2 - 1$ si ottiene il quoziente $2x$ e il resto $-x + 4$, perché $(x^2 - 1)\cdot 2x = 2x^3 - 2x$ e $2x^3 - 3x + 4 - (2x^3 - 2x) = -x + 4$, che ha grado 1, minore di 2.

1.5.3 La regola di Ruffini

Quando il divisore è un binomio di primo grado della forma $x - a$, la divisione si esegue con uno schema molto più rapido, la **regola di Ruffini**, che lavora soltanto sui coefficienti. Nella prima riga si scrivono i coefficienti del dividendo (con gli zeri per le potenze mancanti) e, a sinistra, il numero a. Si abbassa il primo coefficiente; poi, colonna dopo colonna, si moltiplica per a l'ultimo numero ottenuto e lo si somma al coefficiente successivo. L'ultima riga contiene i coefficienti del quoziente, che ha un grado in meno del dividendo, e, dopo la linea verticale, il resto (Figura 1.5).

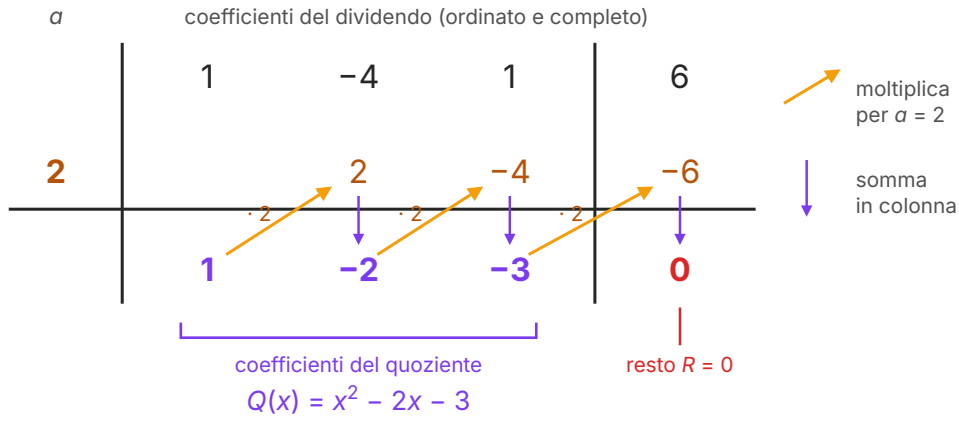


Figura 1.5 La regola di Ruffini per $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2)$. Le frecce oblique indicano «moltiplica per 2», quelle verticali «somma in colonna». Nell'ultima riga si leggono i coefficienti del quoziente, $x^2 - 2x - 3$, e, dopo la linea verticale, il resto 0.

Attenzione al segno di a: per dividere per $x + 2$ si scrive $x - (-2)$, quindi $a = -2$. Dividiamo $2x^3 - 5x + 3$ per $x + 2$ (Tabella 1.3): si ottiene il quoziente $2x^2 - 4x + 3$ e il resto -3.

Tabella 1.3 Lo schema di Ruffini per $(2x^3 - 5x + 3) : (x + 2)$, con $a = -2$. Nella prima riga il coefficiente 0 di x^2; nell'ultima riga i coefficienti del quoziente e, nell'ultima colonna, il resto.

	coefficiente di x^3	di x^2	di x	termine noto
dividendo	2	0	−5	3
$a = -2$		−4	8	−6
risultato	**2**	**−4**	**3**	**−3** (resto)

1.5.4 Il teorema del resto e il teorema di Ruffini

Nell'esempio della Tabella 1.3 il resto è -3; calcoliamo il dividendo in $x = -2$: $2(-2)^3 - 5(-2) + 3 = -16 + 10 + 3 = -3$. Non è un caso.

IN SINTESI

Teorema del resto. Ipotesi: $A(x)$ è un polinomio, a un numero reale. **Tesi:** il resto della divisione di $A(x)$ per $x - a$ è $A(a)$.

Teorema di Ruffini. Ipotesi: $A(x)$ è un polinomio, a un numero reale. **Tesi:** $A(x)$ è divisibile per $x - a$ se e solo se $A(a) = 0$.

Dimostrazione. Il divisore $x - a$ ha grado 1, quindi il resto ha grado 0: è un numero R. L'uguaglianza $A(x) = (x - a)\cdot Q(x) + R$ vale per ogni x, in particolare per $x = a$: $A(a) = (a - a)\cdot Q(a) + R = 0 + R = R$. Questo prova il teorema del resto. Ora il teorema di Ruffini. Se $A(x)$ è divisibile per $x - a$, il resto è 0, e per il teorema del resto $A(a) = 0$. Viceversa, se $A(a) = 0$, il resto, che è $A(a)$, vale 0, e $A(x) = (x - a)\cdot Q(x)$. c.v.d.

Il teorema del resto dà il resto senza fare la divisione: il resto di $(x^{100} - 1) : (x + 1)$ è $(-1)^{100} - 1 = 0$. Il teorema di Ruffini trasforma un problema di algebra, «trovare un fattore», in un problema numerico, «trovare uno zero».

1.5.5 Scomporre e risolvere

Dove cercare gli zeri? Se il polinomio ha coefficienti interi, gli eventuali zeri *interi* sono divisori del termine noto. Infatti, se a intero è uno zero di $x^3 + bx^2 + cx + d$, da $a^3 + ba^2 + ca + d = 0$ segue $d = -a(a^2 + ba + c)$: il termine noto è a moltiplicato per un numero intero. Si provano quindi i divisori, positivi e negativi, del termine noto; trovato uno zero a, si divide per $x - a$ con Ruffini e si continua sul quoziente, che ha un grado in meno.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scomponi $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ e risolvi l'equazione $P(x) = 0$.

Soluzione. I divisori di 6 sono ±1, ±2, ±3, ±6. Proviamo: $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Dunque $P(x)$ è divisibile per $x - 1$; con Ruffini (coefficienti 1, −2, −5, 6 e $a = 1$) la riga finale è 1, −1, −6 | 0, e il quoziente è $x^2 - x - 6$. Il trinomio si scompone come in *Matematica 3*, cap. 1: due numeri di somma −1 e prodotto −6 sono −3 e 2. Quindi

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

Per la legge di annullamento del prodotto, $P(x) = 0$ se e solo se uno dei fattori è nullo: $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$. **Controllo:** $P(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$ e $P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$.

Le equazioni di grado superiore al secondo si risolvono così, quando si riesce a scomporre il polinomio: si porta tutto al primo membro, si scompone in fattori di primo e di secondo grado e si annulla ciascun fattore. Due famiglie si trattano direttamente.

- Le **equazioni binomie** $x^n = k$. Se n è dispari c'è sempre una e una sola soluzione reale, $x = \sqrt[n]{k}$: $2x^3 - 16 = 0$ dà $x^3 = 8$, $x = 2$. Se n è pari, le soluzioni sono $x = \pm\sqrt[n]{k}$ per $k > 0$, $x = 0$ per $k = 0$, nessuna per $k < 0$: $x^4 = 81$ dà $x = \pm 3$, $x^4 = -16$ è impossibile.
- Le **equazioni biquadratiche** $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Con la sostituzione $t = x^2$ diventano di secondo grado. Per $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$: $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t = 1$ oppure $t = 4$, quindi $x = \pm 1$, $x = \pm 2$. Per $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$: $t = 1$ oppure $t = -4$; la seconda non dà soluzioni, perché x^2 non è mai negativo: restano $x = \pm 1$.

Calcolo approssimato: la bisezione

L'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ non ha soluzioni intere: i divisori di 5 danno $f(1) = -6$, $f(-1) = -4$, $f(5) = 110$, $f(-5) = -120$, dove $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Poiché $f(2) = -1 < 0$ e $f(3) = 16 > 0$, il grafico, che è una curva senza salti, attraversa l'asse x tra 2 e 3. Con il metodo di **bisezione** di *Matematica 2* (cap. 9) si calcola f nel punto medio e si tiene la metà dell'intervallo agli estremi della quale f ha segni opposti (Tabella 1.4).

Tabella 1.4 Otto passi di bisezione per $x^3 - 2x - 5 = 0$ nell'intervallo [2; 3]; m è il punto medio. I valori di $f(m)$ sono arrotondati.

passo	a	b	m	$f(m)$	nuovo intervallo
1	2	3	2,5	5,625	[2; 2,5]
2	2	2,5	2,25	1,891	[2; 2,25]
3	2	2,25	2,125	0,346	[2; 2,125]
4	2	2,125	2,0625	−0,351	[2,0625; 2,125]
5	2,0625	2,125	2,09375	−0,009	[2,09375; 2,125]
6	2,09375	2,125	2,109375	0,167	[2,09375; 2,109375]
7	2,09375	2,109375	2,1015625	0,079	[2,09375; 2,1015625]
8	2,09375	2,1015625	2,09765625	0,035	[2,09375; 2,09765625]

Ogni passo dimezza l'intervallo; dopo otto passi la soluzione sta in [2,09375; 2,09765625], e le prime due cifre decimali sono sicure: $x = 2{,}09\ldots$ (il valore è 2,0945...). Con un foglio di calcolo, una riga per passo, si ottengono in pochi secondi tutte le cifre che servono.

APPROFONDIMENTO · ZERI RAZIONALI

Il ragionamento sugli zeri interi si estende alle frazioni. Se il polinomio $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ha coefficienti interi e la frazione ridotta $\frac{p}{q}$ è uno zero, allora p divide il termine noto a_0 e q divide il coefficiente direttivo a_n. Per $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ i candidati sono ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{2}$: si trova che 2, -1 e $\frac{1}{2}$ sono zeri, e infatti $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x + 1)(2x - 1)$. Se nessun candidato funziona, il polinomio non ha zeri razionali, anche se può averne di irrazionali: è il caso di $x^3 - 2x - 5$, che abbiamo approssimato con la bisezione.

APPROFONDIMENTO · DA CARDANO A RUFFINI

Per le equazioni di secondo grado esiste una formula che dà le soluzioni con radicali. Nel Cinquecento gli algebristi italiani trovarono formule analoghe per le equazioni di terzo e di quarto grado; quella per il terzo grado è nota come formula di Cardano–Tartaglia, dai nomi di Gerolamo Cardano e Niccolò Tartaglia. Non la studieremo: è laboriosa e va oltre il nostro programma. Per il quinto grado, a lungo, nessuno riuscì a fare altrettanto. Paolo Ruffini (1765–1822), lo stesso della regola, diede una dimostrazione, incompleta, che l'equazione generale di quinto grado *non* è risolubile per radicali; Niels Henrik Abel completò la dimostrazione nel 1824. È un risultato di impossibilità: non dice che le soluzioni non esistono, dice che non esiste una formula di quel tipo per calcolarle. Per questo, accanto alle formule, servono metodi di approssimazione come la bisezione.

1.6 Funzioni polinomiali e razionali

1.6.1 Zeri e molteplicità

Una volta scomposto, un polinomio si legge come un grafico. Se nella scomposizione il fattore $x - a$ compare m volte, cioè compare $(x-a)^m$, si dice che a è uno zero di **molteplicità** m (semplice se $m = 1$, doppio se $m = 2$...). Il fattore $(x-a)^m$ cambia segno attraversando a se m è dispari, non lo cambia se m è pari, perché una potenza pari non è mai negativa. Sul grafico: in uno zero di molteplicità dispari la curva *attraversa* l'asse x, in uno di molteplicità pari lo *tocca* e torna indietro.

Prendiamo $P(x) = x^3 - 3x + 2$. Il termine noto è 2 e $P(1) = 0$; con Ruffini $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$, e il trinomio è $(x-1)(x+2)$. Quindi $P(x) = (x+2)(x-1)^2$: -2 è uno zero semplice, 1 uno zero doppio. Il fattore $(x-1)^2$ è positivo per $x \neq 1$, quindi il segno di P è quello di $x + 2$: negativo per $x < -2$, positivo per $x > -2$, esclusi gli zeri. Con il valore $P(0) = 2$ e il fatto che per $|x|$ grande prevale il termine x^3, il grafico è tracciato nelle sue linee essenziali (Figura 1.6).

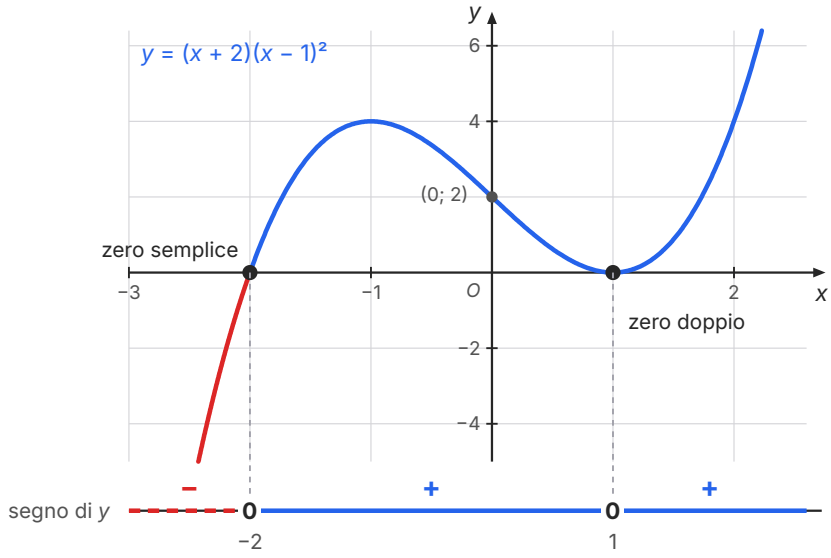


Figura 1.6 Il grafico di $y = x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$, tracciato per punti dall'equazione (unità diverse sui due assi: un'unità sull'asse x è lunga quanto 3,2 unità sull'asse y). In $x = -2$, zero semplice, la curva attraversa l'asse; in $x = 1$, zero doppio, lo tocca senza attraversarlo. Sotto, la striscia del segno: negativo (rosso, tratteggiato) per $x < -2$, positivo (blu) altrove, esclusi gli zeri.

1.6.2 Il segno di un prodotto e di un quoziente

Per risolvere una disequazione come $P(x) > 0$, o per studiare il segno di un quoziente, si usa la regola dei segni: un prodotto o un quoziente di fattori non nulli è positivo se il numero dei fattori negativi è pari, negativo se è dispari. In pratica si costruisce la **tabella dei segni**: si studia il segno di *ogni* fattore su *tutta* la retta reale, si riportano i segni su righe parallele, con gli zeri di ciascun fattore, e si deduce colonna per colonna il segno del risultato. Dalla Figura 1.6, per esempio, $x^3 - 3x + 2 > 0$ per $x > -2$ con $x \neq 1$, e $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ per $x \geq -2$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi la disequazione $\dfrac{(x-1)(x+2)}{3-x} \geq 0$.

Soluzione. C.E.: $3 - x \neq 0$, cioè $x \neq 3$. Studiamo il segno di ogni fattore: $x - 1 > 0$ per $x > 1$; $x + 2 > 0$ per $x > -2$; $3 - x > 0$ per $x < 3$ (attenzione: questo fattore è positivo a *sinistra* del suo zero). La Tabella 1.5 riporta i segni; nell'ultima riga, ∄ indica che il quoziente non esiste.

Tabella 1.5 La tabella dei segni di $\dfrac{(x-1)(x+2)}{3-x}$.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
$x - 1$	−	−	−	0	+	+	+
$x + 2$	−	0	+	+	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	+	+	0	−
quoziente	**+**	**0**	**−**	**0**	**+**	**∄**	**−**

Il quoziente è positivo per $x < -2$ e per $1 < x < 3$, nullo per $x = -2$ e $x = 1$. Poiché la disequazione chiede ≥ 0, gli zeri del numeratore sono compresi; $x = 3$ no, perché lì la frazione non esiste. Le soluzioni sono $x \leq -2$ oppure $1 \leq x < 3$, cioè $]-\infty; -2] \cup [1; 3[$. **Controllo:** per $x = 0$ si ha $\dfrac{-2}{3} < 0$ (escluso, giusto); per $x = 2$, $\dfrac{4}{1} > 0$ (compreso); per $x = 4$, $\dfrac{18}{-1} < 0$ (escluso).

ERRORE FREQUENTE

«$(x+3)^2(x-1) < 0$: i fattori sono due, uno si annulla in -3 e uno in 1, quindi il segno cambia due volte.» No: $(x+3)^2$ ha molteplicità pari e non cambia mai segno; è positivo per $x \neq -3$. Il prodotto è negativo per $x < 1$ con $x \neq -3$. E in una disequazione fratta, anche con $\geq$, gli zeri del denominatore restano *sempre* esclusi: lì la frazione non esiste. Infine non si moltiplicano i due membri per il denominatore per «toglierlo»: il suo segno non è noto, e il verso della disequazione potrebbe cambiare.

1.6.3 Le funzioni razionali fratte

Una *funzione razionale fratta* è un quoziente di polinomi, $y = \dfrac{N(x)}{D(x)}$. Il suo dominio esclude gli zeri del denominatore; i suoi zeri sono gli zeri del numeratore che stanno nel dominio; il suo segno si legge con la tabella dei segni. Resta da capire che cosa succede vicino a un punto escluso e quando $|x|$ diventa grande: per ora lo leggiamo in una tabella di valori (Tabella 1.6). Consi-

deriamo $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$: dominio $x \neq 2$, zero $x = 1$; il denominatore è positivo per $x \neq 2$, quindi f ha il segno di $x - 1$.

Tabella 1.6 Valori di $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$ vicino al punto escluso $x = 2$ e per $|x|$ grande (valori approssimati).

x	1,9	1,99	2,01	2,1	−100	−10	10	100
$f(x)$	90	9900	10 100	110	−0,0097	−0,076	0,14	0,0103

La tabella racconta due comportamenti. Quando x si avvicina a 2, da una parte o dall'altra, il numeratore è vicino a 1 e il denominatore è un quadrato piccolissimo: $f(x)$ diventa grande quanto si vuole, sempre positivo. Il grafico sale lungo la retta $x = 2$ senza mai toccarla. Quando invece $|x|$ è grande, il denominatore, di secondo grado, cresce molto più del numeratore, di primo grado: $f(x)$ si avvicina a 0, positivo a destra e negativo a sinistra, e il grafico si appiattisce sull'asse x (Figura 1.7). Nel quinto anno questo diventerà il concetto di *limite*. Anche $y = \dfrac{k}{x}$, che conosci da *Matematica 1*, si comporta così: valori enormi vicino a $x = 0$, valori quasi nulli per $|x|$ grande; ma lì il segno cambia attraversando il punto escluso, perché il denominatore x ha molteplicità dispari.

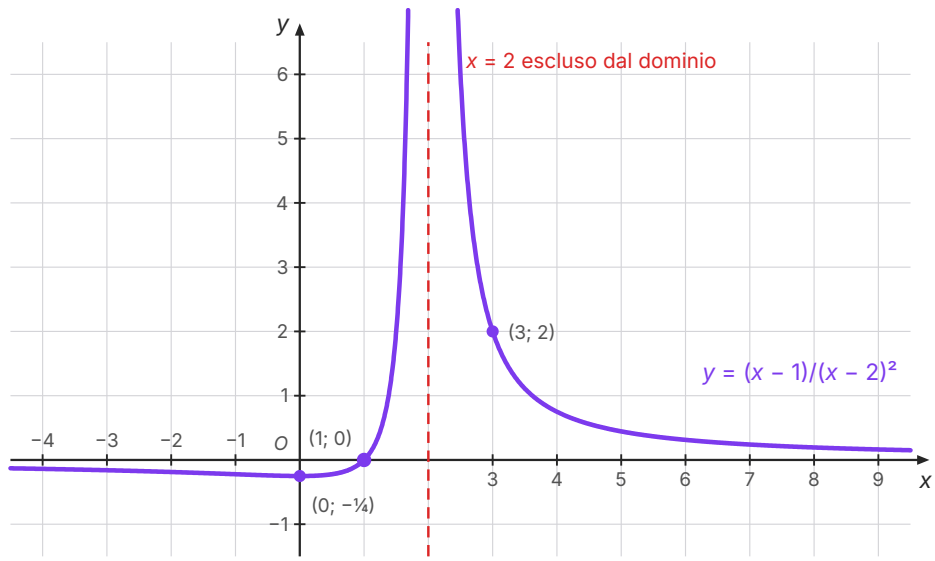


Figura 1.7 Il grafico di $y = \dfrac{x-1}{(x-2)^2}$, calcolato dall'equazione. La retta tratteggiata $x = 2$ corrisponde al punto escluso dal dominio: la curva sale lungo di essa da entrambi i lati, perché il denominatore è un quadrato. Il grafico taglia l'asse x nello zero (1; 0), passa per $(0; -\dfrac{1}{4})$ e (3; 2) e si avvicina all'asse x per $|x|$ grande.

1.6.4 Un modello: il costo medio

Un piccolo editore stampa un libro: l'impianto di stampa costa 2000 €, indipendentemente dal numero di copie, e ogni copia costa 5 € di carta e rilegatura (dati inventati). Il costo totale di x copie è $C(x) = 2000 + 5x$, una funzione lineare. Il *costo medio*, cioè il costo di una copia, è il quoziente

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2000 + 5x}{x} = 5 + \frac{2000}{x}, \quad x > 0$$

È una funzione razionale fratta, e l'ultima forma dice tutto: il suo grafico è quello di $y = \frac{2000}{x}$ traslato di 5 verso l'alto. Il costo medio è decrescente: 25 € per 100 copie, 9 € per 500, 7 € per 1000, 5,20 € per 10 000. Più copie si stampano, più la spesa fissa si «diluisce», ma il costo medio non scende mai sotto i 5 € della singola copia: si avvicina a 5 senza raggiungerlo. È la ragione economica delle grandi tirature, ed è un esempio di modello in cui il dominio (x intero positivo) è fissato dal contesto e non dalla formula.

SINTESI

- Una funzione reale di variabile reale associa a ogni x del dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ uno e un solo numero $f(x)$; l'immagine è $\text{Im}\, f = f(D)$. Data solo l'espressione, il dominio si trova con le C.E.: denominatori diversi da 0, radicandi di indice pari non negativi.
- Zeri: le x del dominio con $f(x) = 0$. Il dominio si determina sempre prima di semplificare.
- $f\colon A \to B$ è iniettiva se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, suriettiva se $f(A) = B$, biiettiva se è entrambe le cose. Una funzione crescente o decrescente in un intervallo è iniettiva in esso.
- f è pari se $f(-x) = f(x)$ (grafico simmetrico rispetto all'asse y), dispari se $f(-x) = -f(x)$ (simmetrico rispetto a O); è periodica di periodo T se $f(x + T) = f(x)$, con T minimo positivo.
- Solo una funzione biiettiva ha inversa f^{-1}; restringendo il dominio a un intervallo di monotonia si ottiene una funzione invertibile. Il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto a $y = x$ (unità uguali sugli assi).
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: agisce prima f. La composizione non è commutativa.
- Grafici deducibili: $y = f(x - a) + b$ trasla di $(a; b)$ (verso destra se $a > 0$); $-f(x)$ e $f(-x)$ sono le simmetrie rispetto agli assi x e y; $|f(x)|$ ribalta la parte negativa; $k \cdot f(x)$ dilata in verticale.
- Divisione con resto: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ con grado di R minore del grado di B, come $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$ tra gli interi.
- Con la regola di Ruffini si divide per $x - a$. Teorema del resto: il resto è $A(a)$. Teorema di Ruffini: $x - a$ divide $A(x)$ se e solo se $A(a) = 0$. Gli zeri interi di un polinomio a coefficienti interi sono divisori del termine noto.
- Equazioni di grado superiore: si scompone e si annulla ogni fattore; binomie $x^n = k$; biquadratiche con $t = x^2$. Quando non si sa scomporre, si approssima con la bisezione.
- In uno zero di molteplicità dispari il grafico attraversa l'asse x, in uno di molteplicità pari lo tocca. Il segno di prodotti e quozienti si legge nella tabella dei segni; gli zeri del denominatore sono sempre esclusi.
- Vicino a un punto escluso una funzione razionale fratta può assumere valori grandi quanto si vuole; il comportamento per $|x|$ grande si legge in una tabella di valori (nel quinto anno: i limiti).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il dominio di $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-5}$ è:

   A. $[3; 5[\cup]5; +\infty[$

   B. $]3; +\infty[$

   C. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

   D. $[3; +\infty[$

2. ● Quale di queste funzioni è dispari?

   A. $y = x^2 + 1$

   B. $y = x^3 - x$

   C. $y = |x|$

   D. $y = x + 1$

3. ●● Il grafico di $y = (x + 3)^2 - 1$ si ottiene da quello di $y = x^2$ con la traslazione di vettore:

   A. $(3; -1)$

   B. $(-3; 1)$

   C. $(-3; -1)$

   D. $(3; 1)$

4. ●● Il resto della divisione di $x^4 - 2x^3 + 5$ per $x + 1$ è:

   A. 2

   B. 4

   C. 0

   D. 8

5. ●● Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$, allora $(g \circ f)(1)$ vale:

   A. 9

   B. 3

   C. 5

   D. 4

6. ●● Poiché $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$, nel punto $x = 1$ il grafico di $y = x^3 - 3x + 2$:

   A. attraversa l'asse x cambiando segno

   B. non incontra l'asse x

   C. tocca l'asse x senza attraversarlo

   D. ha un punto escluso dal dominio

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Una funzione crescente in un intervallo è iniettiva in quell'intervallo. b) La composizione di funzioni è commutativa. c) Il grafico di $y = f(x - 2)$ si ottiene traslando quello di $y = f(x)$ di 2 verso sinistra. d) Se $A(3) = 0$, il polinomio $A(x)$ è divisibile per $x + 3$. e) La funzione $y = x^2$, con dominio $\mathbb{R}$, è invertibile.

8. ● Completa. a) Una funzione $f\colon A \to B$ è biiettiva se è _____ e _____. b) Nella divisione $A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x)$ il grado di R è _____ del grado di B. c) f è periodica di periodo T se _____ per ogni x del dominio, e T è il _____ numero positivo con questa proprietà. d) Il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto alla retta _____.

Calcolare

9. ● Determina il dominio. a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-9}$; b) $g(x) = \sqrt{6-2x}$; c) $h(x) = \dfrac{x+4}{x^2+1}$; d) $k(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

10. ●● Determina dominio, zeri e segno di $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2+3x}$.

11. ●● Trova l'inversa, indicando dominio e immagine. a) $f(x) = 3x - 6$; b) $g(x) = x^3 + 2$; c) $h(x) = \sqrt{x-1}$.

12. ●● Date $f(x) = x - 2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, scrivi $g \circ f$ e $f \circ g$ con i loro domini e calcola $(g \circ f)(11)$ e $(f \circ g)(9)$.

13. ●● A partire da un grafico noto, descrivi le trasformazioni, disegna il grafico e indica immagine e zeri. a) $y = |x - 1| - 2$; b) $y = 4 - x^2$; c) $y = \dfrac{1}{x+1}$; d) $y = |x^2 - 1|$.

14. ● Esegui la divisione in colonna e verifica che $A = B\cdot Q + R$. a) $(2x^3 + 3x^2 - x + 4) : (x^2 + x - 1)$; b) $(x^4 - 1) : (x^2 + 2)$; c) $(6x^4 - x^3 + 2x - 3) : (2x^2 - x + 1)$.

15. ● Esegui con la regola di Ruffini. a) $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$; b) $(2x^4 - x^2 + 3) : (x + 1)$; c) $(x^5 - 32) : (x - 2)$.

16. ●● a) Senza eseguire la divisione, trova il resto di $(x^3 - 4x + 7) : (x + 2)$ e di $(x^{100} - 1) : (x + 1)$. b) Trova k in modo che $x^3 + kx^2 - 4$ sia divisibile per $x - 2$.

17. ●● Scomponi in fattori. a) $x^3 - 7x + 6$; b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$; c) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$; d) $x^4 - 5x^2 + 4$.

18. ●● Risolvi le equazioni. a) $x^3 - 7x + 6 = 0$; b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; c) $2x^3 - 16 = 0$; d) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

19. ●● Risolvi le disequazioni. a) $(x - 2)(x + 1)(x - 4) > 0$; b) $(x + 3)^2(x - 1) \le 0$; c) $\dfrac{x+2}{x-3} \ge 0$; d) $\dfrac{x^2-4}{x-1} < 0$.

20. ●● Per $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$ determina dominio, zeri e segno; poi calcola $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(1{,}01)$, $f(1{,}1)$, $f(100)$, $f(-100)$ e descrivi il comportamento del grafico vicino a $x = 1$ e per $|x|$ grande.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Dimostra che, se la somma dei coefficienti di un polinomio $A(x)$ è 0, allora $A(x)$ è divisibile per $x - 1$. Applica il risultato a $3x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$.

22. ●● Dimostra che, se f e g sono crescenti in $\mathbb{R}$, anche $g \circ f$ è crescente in $\mathbb{R}$.

23. ●● Trova l'errore. «Il dominio di $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ è $\mathbb{R}$, perché $f(x) = x + 1$, e il grafico di f è una retta.»

24. ●●● a) Dimostra che una funzione dispari definita in $x = 0$ passa per l'origine. b) Spiega perché un'equazione binomia $x^n = k$ con n pari e $k > 0$ ha esattamente due soluzioni reali, e con n dispari esattamente una per ogni k.

Problemi

25. ●● Un laboratorio artigiano ha spese fisse di 1200 € al mese e spende 8 € per ogni pezzo prodotto (dati inventati). a) Scrivi il costo totale $C(x)$ e il costo medio $c(x)$ per x pezzi. b) Calcola il costo medio per 100, 300 e 1000 pezzi. c) Quanti pezzi bisogna produrre perché il costo medio sia minore di 12 €? d) A quale valore si avvicina il costo medio quando x diventa molto grande?

26. ●● Da un quadrato di cartone di lato 20 cm si tagliano ai quattro angoli quadratini di lato x e si piegano i bordi, ottenendo una scatola senza coperchio. a) Scrivi il volume $V(x)$ e indica il dominio del problema. b) Verifica che per $x = 2$ il volume è 512 cm^3. c) Trova, con Ruffini, gli altri valori di x che danno lo stesso volume e scarta quelli non accettabili.

27. ●● Un'auto parte da un casello a 25 m/s; 10 s dopo un'altra auto parte dallo stesso casello, nello stesso verso, a 30 m/s. a) Scrivi le due leggi orarie, la seconda come traslazione di $s = 30t$. b) Dopo quanti secondi dalla partenza della prima la seconda la raggiunge, e a quale distanza dal casello?

28. ●● Un semaforo resta verde per 40 s, giallo per 5 s, rosso per 35 s, e poi il ciclo ricomincia; all'istante $t = 0$ diventa verde. a) Qual è il periodo della funzione «colore al tempo t»? b) Di che colore è il semaforo a $t = 1002$ s e a $t = 1010$ s? c) Perché anche 160 s riporta lo stesso colore, ma non è il periodo?

Con il computer

29. ●● In un foglio di calcolo imposta la bisezione per l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$: nelle colonne a, b, $m = \dfrac{a + b}{2}$, $f(m)$ e, nella riga successiva, il nuovo intervallo scelto con una formula SE sul segno di $f(a) \cdot f(m)$. a) Perché si può partire da $[0; 1]$? b) Dopo quanti passi l'intervallo è lungo meno di 0,01? c) Trova la soluzione con due cifre decimali sicure e confrontala con il grafico di $y = x^3 + x - 1$ disegnato con un software di geometria dinamica.

Verso la verifica

30. ●● Sia $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. a) Scomponi $P(x)$. b) Risolvi $P(x) \geq 0$. c) Determina dominio e zeri di $f(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 - 4}$ e semplificala nel suo dominio: che cosa si può dire del suo grafico?

31. ●● Sia $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ con $x \geq 1$. a) Indica dominio e immagine e spiega perché f è invertibile. b) Trova f^{-1} e verifica che $f^{-1}(f(3)) = 3$. c) In quale retta sono simmetrici i due grafici, e quale condizione deve rispettare il disegno?

32. ●●● **Sfida.** Determina a e b in modo che $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ sia divisibile sia per $x - 1$ sia per $x + 2$. Poi scomponi $P(x)$ e risolvi la disequazione $P(x) < 0$.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sul concetto di funzione e sulle equazioni algebriche, con la questione della risolubilità per radicali.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: gli algebristi italiani del Cinquecento e la nascita del concetto di funzione.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come controllare un risultato, per esempio sostituendo le soluzioni trovate.

Glossario del capitolo

Biiettiva (funzione)
Funzione iniettiva e suriettiva: ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di uno e un solo elemento del dominio. È la condizione perché esista l'inversa.

Condizioni di esistenza (C.E.)
Le condizioni sulla variabile perché un'espressione abbia significato: denominatori diversi da 0, radicandi di indice pari non negativi.

Crescente (funzione)
In un intervallo I: per ogni $x_1 < x_2$ di I si ha $f(x_1) < f(x_2)$. «In senso lato» se vale $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Dispari (funzione)
Funzione con dominio simmetrico tale che $f(-x) = -f(x)$: il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Divisione con resto
Dati $A(x)$ e $B(x) \neq 0$, i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, unici, con $A = B \cdot Q + R$ e grado di R minore del grado di B.

Dominio
L'insieme dei valori della variabile su cui la funzione è definita; data solo l'espressione, il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui essa ha significato.

Equazione binomia
Equazione $x^n = k$; per n dispari ha una sola soluzione reale, per n pari due, una o nessuna a seconda che k sia positivo, nullo o negativo.

Equazione biquadratica
Equazione $ax^4 + bx^2 + c = 0$; con $t = x^2$ diventa di secondo grado.

Funzione composta
La funzione $g \circ f$ definita da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: agisce prima f, poi g.

Funzione inversa
Per una funzione biiettiva $f: A \to B$, la funzione $f^{-1}: B \to A$ che associa a ogni y l'unico x con $f(x) = y$.

Grafici deducibili
Grafici ottenuti da quello di $y = f(x)$ con traslazioni, simmetrie, valore assoluto e dilatazioni.

Immagine
L'insieme dei valori f(x) assunti dalla funzione, Im f = f(D); in Matematica 1 detto anche codominio.

Iniettiva (funzione)
Funzione in cui elementi diversi hanno immagini diverse; sul grafico, ogni retta orizzontale lo incontra al più una volta.

Molteplicità di uno zero
Il numero m di volte che il fattore $x - a$ compare nella scomposizione di un polinomio; se m è dispari il grafico attraversa l'asse x, se è pari lo tocca.

Pari (funzione)
Funzione con dominio simmetrico tale che $f(-x) = f(x)$: il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Periodica (funzione)
Funzione per cui esiste $T > 0$ con $f(x + T) = f(x)$ per ogni x; il periodo è il minimo T positivo con questa proprietà.

Regola di Ruffini
Schema che, lavorando sui coefficienti, esegue la divisione di un polinomio per un binomio $x - a$.

Suriettiva (funzione)
Funzione $f: A \to B$ in cui ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

Tabella dei segni
Schema in cui si riportano i segni dei fattori di un prodotto o di un quoziente su tutta la retta reale, per dedurne il segno colonna per colonna.

Teorema del resto
Il resto della divisione di $A(x)$ per $x - a$ è $A(a)$; ne segue il teorema di Ruffini: $x - a$ divide $A(x)$ se e solo se $A(a) = 0$.

Soluzioni

1. A. C.E.: $x - 3 \geq 0$ e $x - 5 \neq 0$.

2. B. $(-x)^3 - (-x) = -(x^3 - x)$. $x^2 + 1$ e $|x|$ sono pari; $x + 1$ non è né pari né dispari.

3. C. x è sostituito da $x + 3 = x - (-3)$: 3 verso sinistra e 1 verso il basso.

4. D. Teorema del resto: $A(-1) = 1 + 2 + 5 = 8$.

5. A. $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 9$; invece $(f \circ g)(1) = f(1) = 3$.

6. C. 1 è uno zero doppio: $(x - 1)^2$ non cambia segno.

7. a) V. b) F: in generale $g \circ f \neq f \circ g$ (per esempio $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$). c) F: verso destra. d) F: è divisibile per $x - 3$. e) F: non è iniettiva ($f(-2) = f(2)$); lo diventa restringendo il dominio a $[0; +\infty[$.

8. a) iniettiva, suriettiva. b) minore. c) $f(x + T) = f(x)$; più piccolo. d) $y = x$.

9. a) $x \neq \pm 3$: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. b) $6 - 2x \geq 0$: $x \leq 3$, $D =]-\infty; 3]$. c) $x^2 + 1$ non si annulla mai: $D = \mathbb{R}$. d) $x \geq -2$ e $x \neq 1$: $D = [-2; 1[\cup]1; +\infty[$.

10. C.E.: $x(x + 3) \neq 0$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$. Nel dominio $f(x) = \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x(x + 3)} = \dfrac{x - 3}{x}$. Zero: solo $x = 3$ (-3 è escluso). $f(x) > 0$ per $x < -3$, $-3 < x < 0$ e $x > 3$; $f(x) < 0$ per $0 < x < 3$. Controllo: $f(-4) = \dfrac{7}{4}$, $f(-1) = 4$, $f(1) = -2$, $f(4) = \dfrac{1}{4}$.

11. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 6}{3}$, da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. b) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$, da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. c) h va da $[1; +\infty[$ a $[0; +\infty[$, è crescente; da $y = \sqrt{x - 1}$ si ha $x = y^2 + 1$: $h^{-1}(x) = x^2 + 1$ con dominio $[0; +\infty[$ e immagine $[1; +\infty[$.

12. $(g \circ f)(x) = \sqrt{x - 2}$, dominio $x \geq 2$; $(f \circ g)(x) = \sqrt{x} - 2$, dominio $x \geq 0$. $(g \circ f)(11) = \sqrt{9} = 3$; $(f \circ g)(9) = 3 - 2 = 1$.

13. a) $y = |x|$ traslato di $(1; -2)$: vertice $(1; -2)$, immagine $[-2; +\infty[$, zeri -1 e 3. b) $y = x^2$, simmetria rispetto all'asse x, traslazione di 4 verso l'alto: vertice $(0; 4)$, immagine $]-\infty; 4]$, zeri ± 2. c) $y = \dfrac{1}{x}$ traslato di 1 verso sinistra: dominio $x \neq -1$, immagine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nessuno zero. d) $y = x^2 - 1$ (traslazione di 1 verso il basso), poi si ribalta la parte tra -1 e 1: immagine $[0; +\infty[$, zeri ± 1, il punto $(0; -1)$ va in $(0; 1)$.

14. a) $Q = 2x + 1$, $R = 5$: $(x^2 + x - 1)(2x + 1) + 5 = 2x^3 + 3x^2 - x - 1 + 5$. b) $Q = x^2 - 2$, $R = 3$: $(x^2 + 2)(x^2 - 2) + 3 = x^4 - 4 + 3$. c) $Q = 3x^2 + x - 1$, $R = -2$: $(2x^2 - x + 1)(3x^2 + x - 1) = 6x^4 - x^3 + 2x - 1$, e $-1 - 2 = -3$.

15. a) Riga finale 1, 4, 3 | 7: $Q = x^2 + 4x + 3$, $R = 7$. b) $a = -1$, coefficienti 2, 0, -1, 0, 3: riga finale 2, -2, 1, -1 | 4; $Q = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$, $R = 4$. c) Coefficienti 1, 0, 0, 0, 0, -32: riga finale 1, 2, 4, 8, 16 | 0; $Q = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$, $R = 0$.

16. a) $(-2)^3 - 4(-2) + 7 = -8 + 8 + 7 = 7$; $(-1)^{100} - 1 = 0$. b) Deve essere $P(2) = 8 + 4k - 4 = 0$: $k = -1$.

17. a) $P(1) = 0$; Ruffini dà $x^2 + x - 6$: $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. b) Raccoglimento parziale $x^2(x + 2) - (x + 2)$, oppure Ruffini con $P(1) = 0$: $(x + 2)(x - 1)(x + 1)$. c) $P(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$; Ruffini dà $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$: $(x - 2)(2x - 1)(x + 1)$. d) $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$, quindi $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

18. a) Dall'esercizio precedente: $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$. b) $t^2 - 10t + 9 = 0$, $t = 1$ o $t = 9$: $x = \pm 1$, $x = \pm 3$. c) $x^3 = 8$: $x = 2$. d) $t^2 + 4t - 5 = 0$, $t = 1$ o $t = -5$ (non accettabile): $x = \pm 1$.

19. a) Zeri -1, 2, 4; segni $-$, $+$, $-$, $+$ da sinistra: $-1 < x < 2$ oppure $x > 4$. b) $(x + 3)^2 \geq 0$ sempre: $x \leq 1$ (compreso $x = -3$, dove il prodotto è 0), cioè $]-\infty; 1]$. c) C.E. $x \neq 3$: $x \leq -2$ oppure $x > 3$. d) C.E. $x \neq 1$; numeratore positivo per $x < -2$ o $x > 2$, denominatore positivo per $x > 1$: $x < -2$ oppure $1 < x < 2$. Controlli: $f(-3) = \dfrac{5}{-4} < 0$, $f(0) = 4 > 0$, $f(1{,}5) = \dfrac{-1{,}75}{0{,}5} < 0$, $f(3) = \dfrac{5}{2} > 0$.

20. Dominio $x \neq 1$; zero $x = -2$; il denominatore è positivo nel dominio, quindi $f(x) > 0$ per $x > -2$ con $x \neq 1$, $f(x) < 0$ per $x < -2$. $f(0{,}9) = 290$, $f(0{,}99) = 29\,900$, $f(1{,}01) = 30\,100$, $f(1{,}1) = 310$, $f(100) \approx 0{,}0104$, $f(-100) \approx -0{,}0096$. Vicino a 1 la funzione assume valori positivi grandi quanto si vuole, da entrambi i lati; per $|x|$ grande si avvicina a 0 (positiva a destra, negativa a sinistra).

21. La somma dei coefficienti è $A(1)$, perché ogni potenza di 1 vale 1. Se $A(1) = 0$, per il teorema di Ruffini $A(x)$ è divisibile per $x - 1$. Per $3x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$: $3 - 5 + 1 + 1 = 0$; Ruffini dà $3x^4 - 5x^3 + x^2 + 1 = (x - 1)(3x^3 - 2x^2 - x - 1)$.

22. Siano $x_1 < x_2$. Poiché f è crescente, $f(x_1) < f(x_2)$; poiché g è crescente, applicandola a questi due numeri si ha $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, cioè $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$. c.v.d.

23. Il dominio va determinato prima di semplificare: C.E. $x \neq 1$. Nel dominio $f(x) = x + 1$, ma il grafico è la retta $y = x + 1$ privata del punto (1; 2), da segnare con un pallino vuoto.

24. a) Se f è dispari, $f(-0) = -f(0)$, cioè $f(0) = -f(0)$, quindi $2f(0) = 0$ e $f(0) = 0$: il grafico passa per O. b) Traccia: per n pari $y = x^n$ è pari, decrescente in $]-\infty; 0]$ e crescente in $[0; +\infty[$ con immagine $[0; +\infty[$; la retta $y = k$ con $k > 0$ la incontra una volta per $x > 0$ (in $\sqrt[n]{k}$) e, per simmetria, una volta per $x < 0$ (in $-\sqrt[n]{k}$). Per n dispari $y = x^n$ è crescente in $\mathbb{R}$, quindi iniettiva, con immagine $\mathbb{R}$: ogni retta $y = k$ la incontra in uno e un solo punto.

25. a) $C(x) = 1200 + 8x$, $c(x) = 8 + \dfrac{1200}{x}$ (x intero positivo). b) 20 €, 12 €, 9,20 €. c) $8 + \dfrac{1200}{x} < 12 \Leftrightarrow \dfrac{1200}{x} < 4 \Leftrightarrow x > 300$: almeno 301 pezzi. d) A 8 €, il costo di ogni pezzo, senza mai raggiungerlo.

26. a) $V(x) = x(20 - 2x)^2$, con $0 < x < 10$. b) $V(2) = 2 \cdot 16^2 = 512$. c) $x(20 - 2x)^2 = 512 \Leftrightarrow 4x(10 - x)^2 = 512 \Leftrightarrow x^3 - 20x^2 + 100x - 128 = 0$. Ruffini con $a = 2$: riga finale $1, -18, 64 \mid 0$, quindi $(x - 2)(x^2 - 18x + 64) = 0$, $x = 9 \pm \sqrt{17}$. Si accetta $x = 9 - \sqrt{17} \approx 4{,}88$ cm; si scarta $9 + \sqrt{17} \approx 13{,}12$, fuori dal dominio.

27. a) $s_1(t) = 25t$; $s_2(t) = 30(t - 10)$ per $t \geq 10$, la retta $s = 30t$ traslata di 10 verso destra. b) $30(t - 10) = 25t \Leftrightarrow 5t = 300 \Leftrightarrow t = 60$ s, a $25 \cdot 60 = 1500$ m dal casello.

28. a) $40 + 5 + 35 = 80$ s. b) $1002 = 12 \cdot 80 + 42$: come a $t = 42$ s, cioè tra 40 s e 45 s: giallo. $1010 = 12 \cdot 80 + 50$: rosso. c) $f(t + 160) = f(t)$ per ogni t, ma 160 non è il *più piccolo* numero positivo con questa proprietà: lo è 80.

29. a) $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. b) La lunghezza è $\dfrac{1}{2^n}$: dopo 7 passi ($\dfrac{1}{128} \approx 0{,}0078$). c) La soluzione è $x \approx 0{,}68$ (più precisamente 0,6823...): dopo 8 passi l'intervallo è [0,6796875; 0,68359375], e l'estremo sinistro comincia ancora per 0,67; dopo 9 è [0,681640625; 0,68359375] ed entrambi gli estremi cominciano per 0,68: le due cifre decimali sono sicure.

30. a) $P(1) = 0$; Ruffini dà $x^2 - 4$: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$. b) Zeri -2, 1, 2; segni $-$, $+$, $-$, $+$: $-2 \leq x \leq 1$ oppure $x \geq 2$. c) C.E. $x \neq \pm 2$; nel dominio $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = x - 1$; zero $x = 1$. Il grafico è la retta $y = x - 1$ privata dei punti $(-2; -3)$ e $(2; 1)$.

31. a) Dominio $[1; +\infty[$, immagine $[2; +\infty[$; f è crescente, quindi iniettiva, e suriettiva sull'immagine: è biiettiva da $[1; +\infty[$ a $[2; +\infty[$. b) Da $y = (x - 1)^2 + 2$ con $x \geq 1$: $x = 1 + \sqrt{y - 2}$, quindi $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$, $x \geq 2$. $f(3) = 6$ e $f^{-1}(6) = 1 + 2 = 3$. c) Nella retta $y = x$; le unità di misura sui due assi devono essere uguali.

32. $P(1) = 1 + a + b - 6 = 0$ e $P(-2) = -8 + 4a - 2b - 6 = 0$, cioè $a + b = 5$ e $2a - b = 7$: $a = 4$, $b = 1$.
$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$; Ruffini con $a = 1$ dà $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, quindi $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$. Zeri -3, -2, 1, segni $-$, $+$, $-$, $+$: $P(x) < 0$ per $x < -3$ oppure $-2 < x < 1$.