Verifica di fine parte III · Retta, parabola e circonferenza nel piano cartesiano

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice: lascia i risultati in forma esatta. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione; un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* La distanza del punto $P(1;\,2)$ dalla retta $3x - 4y + 10 = 0$ è:
   - **A.** 5
   - **B.** $\frac{1}{5}$
   - **C.** 1
   - **D.** 3

2. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Il fuoco della parabola $y = \frac{1}{8}x^2$ è il punto:
   - **A.** $(0;\,2)$
   - **B.** $(0;\,\frac{1}{32})$
   - **C.** $(2;\,0)$
   - **D.** $(0;\,8)$

3. ● *(0,5 punti · cap. 7)* La circonferenza $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ ha:
   - **A.** centro $(3;\,-4)$ e raggio 5
   - **B.** centro $(-3;\,4)$ e raggio 25
   - **C.** centro $(6;\,-8)$ e raggio 5
   - **D.** centro $(-3;\,4)$ e raggio 5

4. ● *(0,5 punti · cap. 5)* Il luogo dei punti del piano equidistanti da $A(1;\,2)$ e da $B(3;\,6)$ è la retta:
   - **A.** $2x - y = 0$
   - **B.** $x + 2y - 10 = 0$
   - **C.** $x - 2y + 6 = 0$
   - **D.** $2x + y - 8 = 0$

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 5)* Scrivi le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette r: $3x + 4y - 2 = 0$ e s: $4x + 3y + 1 = 0$, considerate come luogo dei punti equidistanti dalle due rette, e verifica che sono perpendicolari.

6. ●● *(1 punto · cap. 6)* Determina l'equazione della parabola con asse verticale che passa per i punti $A(0; -5)$, $B(1; 0)$ e $C(5; 0)$. Trova il vertice, il fuoco, la direttrice e la retta tangente alla parabola in B.

7. ●● *(1 punto · cap. 7)* Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(2; 3)$ tangente alla retta $3x + 4y + 7 = 0$ e trova il punto di tangenza.

8. ●● *(1 punto · cap. 7)* Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ condotte dal punto $P(3; 1)$ e trova i punti di tangenza.

9. ●● *(1 punto · cap. 5–6)* Dimostra che il luogo dei punti del piano equidistanti dal punto $F(0; 1)$ e dalla retta $y = -1$ è la parabola $y = \frac{1}{4}x^2$. Spiega perché il procedimento individua *tutti e soli* i punti del luogo.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 7)* Tre ripetitori si trovano, in un riferimento con unità il chilometro, nei punti $A(0; 0)$, $B(10; 0)$ e $C(0; 6)$. Un telefono si trova a 5 km da A, a $3\sqrt{5}$ km da B e a 5 km da C. a) Scrivi le equazioni delle tre circonferenze. b) Ricava l'asse radicale delle circonferenze di centri A e B e i loro punti comuni. c) Usa la terza circonferenza per determinare la posizione del telefono.

Sfida

11. ●●● *(1,5 punti · cap. 4, 6, 7)* La parabola $y = 9 - x^2$ e l'asse x delimitano un segmento parabolico. a) Calcolane l'area con il teorema di Archimede. b) Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti $(-3; 0)$, $(3; 0)$ e $(0; 9)$. c) Dimostra che la circonferenza e la parabola hanno in comune soltanto questi tre punti e che nel vertice della parabola sono tangenti (hanno la stessa retta tangente). d) Il segmento parabolico ha area maggiore o minore del semicerchio di diametro uguale alla sua base? Motiva la risposta senza calcolatrice.

Soluzioni

1. C. $d = |3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 10| \,/\, \sqrt{(9 + 16)} = 5/5 = 1$.

2. A. $a = 1/8$: il fuoco è $(0;\, 1/(4a)) = (0;\, 2)$, la direttrice $y = -2$.

3. D. Centro $(-a/2;\, -b/2) = (-3;\, 4)$; $r^2 = 9 + 16 - 0 = 25$, $r = 5$ (la circonferenza passa per l'origine).

4. B. È l'asse di AB: $PA^2 = PB^2$ dà $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 6)^2$, cioè $4x + 8y - 40 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$. Passa per il punto medio (2; 4) ed è perpendicolare ad AB (coefficienti angolari $-1/2$ e 2).

5. Il punto $(x;\, y)$ è equidistante dalle due rette se e solo se $|3x + 4y - 2|/5 = |4x + 3y + 1|/5$, cioè $3x + 4y - 2 = \pm(4x + 3y + 1)$. Con il segno +: $x - y + 3 = 0$; con il segno −: $7x + 7y - 1 = 0$. I coefficienti angolari sono 1 e −1, il cui prodotto è −1: le bisettrici sono perpendicolari.

6. Le soluzioni 1 e 5 di $y = 0$ danno $y = a(x - 1)(x - 5)$; il passaggio per A dà $5a = -5$, $a = -1$: $y = -x^2 + 6x - 5$ (verifica: $y(0) = -5$, $y(1) = y(5) = 0$). $\Delta = 36 - 20 = 16$. Vertice (3; 4); fuoco $(3;\, (1 - \Delta)/(4a)) = (3;\, 15/4)$; direttrice $y = -(1 + \Delta)/(4a) = 17/4$. Tangente in B: $m = -2 \cdot 1 + 6 = 4$, $y = 4x - 4$ (controllo: $-x^2 + 6x - 5 = 4x - 4$ dà $(x - 1)^2 = 0$, $\Delta = 0$).

7. Il raggio è la distanza del centro dalla retta: $r = |6 + 12 + 7|/5 = 5$. Equazione $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, cioè $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Il punto di tangenza è il piede della perpendicolare da C: la retta per C perpendicolare alla tangente è $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2)$; messa a sistema con la tangente dà $T(-1;\, -1)$ (verifica: $3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) + 7 = 0$ e $(-3)^2 + (-4)^2 = 25$).

8. $PO^2 = 10 > 5$: P è esterno, le tangenti sono due. Le rette per P non verticali sono $mx - y + 1 - 3m = 0$; imponendo che la distanza da O sia $\sqrt{5}$: $(1 - 3m)^2 = 5(m^2 + 1)$, cioè $2m^2 - 3m - 2 = 0$, $m = 2$ oppure $m = -1/2$. Tangenti: $y = 2x - 5$ e $x + 2y - 5 = 0$ (la verticale $x = 3$ dista 3 da O: non è tangente). I punti di tangenza sono i piedi delle perpendicolari da O: la retta $y = -x/2$ incontra la prima in $T_1(2;\, -1)$, la retta $y = 2x$ incontra la seconda in $T_2(1;\, 2)$ (controllo: $4 + 1 = 5$ e $1 + 4 = 5$).

9. Il punto $P(x;\, y)$ appartiene al luogo se e solo se PF è uguale alla distanza di P dalla retta, cioè $\sqrt{(x^2 + (y - 1)^2)} = |y + 1|$. I due membri sono non negativi, quindi l'uguaglianza equivale a quella dei quadrati: $x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$, cioè $x^2 = 4y$, $y = x^2/4$. Poiché ogni passaggio è un'equivalenza (anche l'elevamento al quadrato, tra quantità non negative), un punto soddisfa l'equazione finale se e solo se ha la proprietà: l'equazione descrive tutti e soli i punti del luogo.

10. a) $x^2 + y^2 = 25$; $(x - 10)^2 + y^2 = 45$; $x^2 + (y - 6)^2 = 25$. b) Sottraendo la seconda dalla prima: $20x - 100 = -20$, asse radicale $x = 4$; allora $y^2 = 9$: punti comuni (4; 3) e (4; −3). c) (4; 3): $16 + 9 = 25$ ✓; (4; −3): $16 + 81 = 97 \neq 25$. Il telefono è in (4; 3).

11. a) La base è il segmento da (−3; 0) a (3; 0), lungo 6; l'altezza (vertice (0; 9)) è 9. Area $= \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36$. b) Centro sull'asse y (asse della corda): $(0;\, k)$ con $9 + k^2 = (9 - k)^2$, $k = 4$, $r = 5$: $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$. c) Sostituendo $x^2 = 9 - y$: $y^2 - 9y = 0$, $y = 0$ (punti $(\pm 3;\, 0)$) o $y = 9$ (solo $x = 0$). Nel vertice la tangente alla parabola è $y = 9$ ($m = -2 \cdot 0 = 0$); la tangente alla circonferenza in (0; 9) è perpendicolare al raggio verticale, quindi è anch'essa $y = 9$: sono tangenti. d) Il semicerchio di raggio 3 ha area $9\pi/2$, e poiché $\pi < 4$ si ha $9\pi/2 < 18 < 36$: il segmento parabolico è maggiore (più del doppio).