Verifica di fine parte II · La circonferenza e il cerchio

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice: lascia i risultati in forma esatta, in funzione di π e dei radicali. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione geometrica citando il teorema che usi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 3)* In una circonferenza un angolo al centro misura 110°. Un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco misura:
   - **A.** 220°
   - **B.** 55°
   - **C.** 110°
   - **D.** 125°

2. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza, con $\angle A = 70°$ e $\angle B = 95°$. L'angolo $\angle C$ misura:
   - **A.** 110°
   - **B.** 70°
   - **C.** 85°
   - **D.** 95°

3. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Quale affermazione è vera?
   - **A.** π è irrazionale ma algebrico
   - **B.** √2 è trascendente
   - **C.** $\mathbb{Q}$ è numerabile
   - **D.** un settore circolare di 90° in un cerchio di raggio 2 ha area 2π

4. ●● *(0,5 punti · cap. 4)* In una circonferenza di raggio 3 cm un arco è lungo 2π cm. L'angolo al centro che gli corrisponde misura:
   - **A.** 2/3 rad
   - **B.** 60°
   - **C.** π/3 rad
   - **D.** 120°

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 3)* In una circonferenza di raggio 17 cm una corda misura 30 cm. a) Calcola la distanza della corda dal centro. b) Quanto è lunga una corda che dista 15 cm dal centro?

6. ●● *(1 punto · cap. 3)* Un triangolo equilatero ha il lato di 6 cm. Calcola in forma esatta l'altezza, l'area e il raggio della circonferenza inscritta (ricorda dove si trova l'incentro di un triangolo equilatero).

7. ●● *(1 punto · cap. 3–4)* In un cerchio di raggio 8 cm la corda AB sottende un angolo al centro di 120°. Calcola, in forma esatta, la distanza della corda dal centro, la sua lunghezza, la lunghezza dell'arco minore AB e l'area del segmento circolare minore.

8. ●● *(1 punto · cap. 3)* Da un punto P che dista 10 cm dal centro O di una circonferenza di raggio 6 cm si conducono le tangenti PA e PB. Calcola PA e PB, la distanza del centro dalla corda AB e la lunghezza della corda.

Dimostrare

9. ●● *(1,5 punti · cap. 3)* Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza e le sue diagonali si incontrano in E. Dimostra che i triangoli ABE e DCE sono simili e deduci che $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 4)* In una pista di atletica la corsia interna è una circonferenza di raggio 36,5 m e la corsia vicina è una circonferenza concentrica di raggio maggiore di 1,22 m. a) Dimostra che la differenza tra le lunghezze delle due circonferenze non dipende dal raggio della corsia interna e calcolala. b) Calcola l'area della corona circolare compresa tra le due circonferenze.

Sfida

11. ●●● *(1 punto · cap. 3–4)* Un triangolo equilatero è inscritto in una circonferenza di raggio r e un secondo triangolo equilatero le è circoscritto. a) Calcola le aree dei due triangoli (ricorda dove si trova il centro della circonferenza in un triangolo equilatero) e deduci una stima di π. b) Qual è il rapporto tra le due aree? Giustificalo anche senza calcoli. c) Usando l'esagono regolare inscritto, dimostra che $\pi > 3$.

Soluzioni

1. B. L'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco: 110° : 2 = 55°.

2. A. In un quadrilatero inscritto gli angoli opposti sono supplementari: $\angle C = 180° - \angle A = 110°$ (e $\angle D = 180° - 95° = 85°$).

3. C. $\mathbb{Q}$ è numerabile: le frazioni si possono elencare tutte con l'enumerazione a zig-zag. π è trascendente; il settore di 90° ha area $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 = \pi$; $\sqrt{2}$ è algebrico, soluzione di $x^2 - 2 = 0$.

4. D. In radianti l'angolo è $\alpha = l/r = 2\pi/3$, cioè $(2\pi/3) \cdot (180°/\pi) = 120°$.

5. a) La perpendicolare dal centro dimezza la corda: metà corda 15 cm, distanza $\sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8$ cm. b) Metà corda $\sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ cm, corda 16 cm.

6. Altezza $h = l\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$ cm; area $6 \cdot 3\sqrt{3} : 2 = 9\sqrt{3}$ cm^2. Nel triangolo equilatero l'incentro coincide con il baricentro, che divide l'altezza nel rapporto 2 : 1 dal vertice: il raggio inscritto è $h/3 = \sqrt{3}$ cm.

7. Il triangolo OAB è isoscele con l'angolo al vertice di 120°; l'altezza OH lo divide in due triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°, metà di un triangolo equilatero di lato 8: $OH = 4$ cm e $AH = 4\sqrt{3}$ cm, quindi $AB = 8\sqrt{3}$ cm. In radianti $120° = 2\pi/3$: arco $l = 8 \cdot 2\pi/3 = 16\pi/3$ cm. Settore $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 2\pi/3 = 64\pi/3$ cm^2, triangolo $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$ cm^2; segmento $64\pi/3 - 16\sqrt{3}$ cm^2 (circa 39,3 cm^2).

8. Il raggio OA è perpendicolare alla tangente in A: nel triangolo rettangolo OAP si ha $PA = \sqrt{(100 - 36)} = 8$ cm, e $PB = PA = 8$ cm (segmenti di tangente). La retta OP è l'asse della corda AB e la taglia in H, piede dell'altezza relativa all'ipotenusa OP. Per il primo teorema di Euclide $OA^2 = OH \cdot OP$: $OH = 36/10 = 3{,}6$ cm. Poi $AH = OA \cdot AP / OP = 48/10 = 4{,}8$ cm e $AB = 9{,}6$ cm.

9. Gli angoli alla circonferenza $\angle BAC$ e $\angle BDC$ insistono sullo stesso arco BC, quindi sono congruenti: $\angle BAE \cong \angle CDE$. Gli angoli $\angle AEB$ e $\angle DEC$ sono opposti al vertice. Per il primo criterio i triangoli ABE e DCE sono simili, con $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$, $E \leftrightarrow E$; quindi $AE : DE = BE : CE$ e, per la proprietà fondamentale delle proporzioni, $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

10. a) Con raggi r e $r + 1{,}22$: $2\pi(r + 1{,}22) - 2\pi r = 2{,}44\pi$ m, qualunque sia r (circa 7,66 m). b) $\pi(37{,}72^2 - 36{,}5^2) = \pi \cdot 1{,}22 \cdot 74{,}22 = 90{,}5484\pi$ m^2, circa 284 m^2.

11. a) Nel triangolo equilatero circocentro, incentro e baricentro coincidono, e il baricentro divide l'altezza nel rapporto 2 : 1. Triangolo inscritto: il raggio r è $\frac{2}{3}$ dell'altezza, quindi l'altezza è $3r/2$, il lato $r\sqrt{3}$ e l'area $(3\sqrt{3}/4)r^2$. Triangolo circoscritto: il raggio è $\frac{1}{3}$ dell'altezza, quindi l'altezza è $3r$, il lato $2\sqrt{3}\,r$ e l'area $3\sqrt{3}\,r^2$. Il cerchio contiene il primo ed è contenuto nel secondo: $(3\sqrt{3}/4)r^2 < \pi r^2 < 3\sqrt{3}\,r^2$, cioè $3\sqrt{3}/4 < \pi < 3\sqrt{3}$ (circa $1{,}3 < \pi < 5{,}2$): una stima molto grossolana. b) Il rapporto è 4: i due triangoli sono simili con i lati nel rapporto 2 : 1, e le aree stanno come i quadrati dei lati. c) L'esagono regolare inscritto ha il lato uguale al raggio, quindi perimetro $6r$; la circonferenza è più lunga del perimetro di ogni poligono regolare inscritto: $6r < 2\pi r$, cioè $\pi > 3$.