Matematica 3 · Parte I · Il secondo grado · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte I · pagine 61–62 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte I · Il secondo grado

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi e controlla le soluzioni: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 1)* L'equazione $2x^2 - 5x + 3 = 0$:
   - **A.** ha due soluzioni coincidenti
   - **B.** ha le soluzioni 1 e $\frac{3}{2}$
   - **C.** ha le soluzioni -1 e $-\frac{3}{2}$
   - **D.** non ha soluzioni reali

2. ● *(0,5 punti · cap. 2)* Il vertice della parabola $y = x^2 - 4x + 1$ è:
   - **A.** $(-2;\ 13)$
   - **B.** $(4;\ 1)$
   - **C.** $(2;\ -3)$
   - **D.** $(2;\ 3)$

3. ●● *(0,5 punti · cap. 2)* La disequazione $x^2 - 2x + 5 > 0$ è:
   - **A.** impossibile
   - **B.** verificata solo per $x > 1$
   - **C.** verificata per ogni $x \neq 1$
   - **D.** verificata per ogni x reale

4. ● *(0,5 punti · cap. 1)* La somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ valgono:
   - **A.** 5 e 6
   - **B.** -5 e 6
   - **C.** 6 e 5
   - **D.** 5 e -6

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 1)* Risolvi l'equazione $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$.

6. ●● *(1 punto · cap. 1)* Senza risolvere l'equazione $3x^2 - 7x - 6 = 0$, trova la somma e il prodotto delle sue soluzioni. Poi scomponi il trinomio $3x^2 - 7x - 6$ e semplifica la frazione $\dfrac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 9}$.

7. ●● *(1 punto · cap. 2)* Della parabola $y = -x^2 + 4x + 5$ trova il vertice, l'asse di simmetria e le intersezioni con gli assi; disegnala e risolvi la disequazione $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$.

8. ●● *(1 punto · cap. 2)* Risolvi le disequazioni: a) $x^2 - 4x + 4 > 0$; b) $3x - x^2 \geq 0$; c) $x^2 + 2x + 3 < 0$.

9. ● *(1 punto · cap. 1)* Risolvi l'equazione $(x + 2)^2 - 3x = 2(x + 5)$ e controlla le soluzioni con la somma e il prodotto.

Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 2)* Con 40 m di rete si vuole recintare un'area rettangolare appoggiata a un muro, che fa da quarto lato. Indicata con x la misura dei due lati perpendicolari al muro, esprimi l'area in funzione di x e trova le dimensioni che rendono l'area massima.

11. ●● *(1 punto · cap. 1)* Un rettangolo ha il perimetro di 46 cm e la diagonale di 17 cm. Quanto misurano i lati? Quanto vale l'area?

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 1–2)* Un artigiano stima che, vendendo un oggetto al prezzo di p euro, ne venderà $q = 200 - 4p$ pezzi al mese (con $0 \leq p \leq 50$). a) Scrivi il ricavo mensile $R(p)$ e trova il prezzo che lo rende massimo. b) Per quali prezzi il ricavo supera 1600 euro?

Soluzioni

1. B. $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x = \frac{5 \pm 1}{4}$: $x = \frac{3}{2}$ e $x = 1$.

2. C. $x = -\frac{b}{2a} = 2$; $y = 4 - 8 + 1 = -3$.

3. D. $\frac{\Delta}{4} = 1 - 5 = -4 < 0$ e $a = 1 > 0$: il trinomio è sempre positivo.

4. A. $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$: $s = -b/a = 5$ e $p = c/a = 6$ (le soluzioni sono 2 e 3).

5. C.E. $x \neq \pm 1$. Denominatore comune $x^2 - 1$: $x(x + 1) - 2(x - 1) = 4$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2$ oppure $x = -1$. Il valore -1 è escluso dalle C.E.: l'unica soluzione è $x = 2$. Controllo: $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ✓.

6. Somma $\frac{7}{3}$, prodotto -2 ($\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$). Soluzioni $x = \frac{7 \pm 11}{6}$: 3 e $-\frac{2}{3}$; $3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2)$. Frazione: $\frac{(x - 3)(3x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{3x + 2}{x + 3}$, con $x \neq \pm 3$.

7. Vertice $x = 2$, $y = -4 + 8 + 5 = 9$: $V(2; 9)$; asse $x = 2$; concavità verso il basso ($a < 0$). Asse y: (0; 5). Asse x: $x^2 - 4x - 5 = 0$, $(-1; 0)$ e $(5; 0)$. La parabola sta sopra l'asse x o lo tocca per $-1 \leq x \leq 5$.

8. a) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, positivo per ogni $x \neq 2$: $x \neq 2$. b) Equivale a $x^2 - 3x \leq 0$; le radici sono 0 e 3 e il trinomio (con $a > 0$) è negativo o nullo tra le radici: $0 \leq x \leq 3$. c) $\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 = -2 < 0$ e $a > 0$: il trinomio è sempre positivo, la disequazione è impossibile.

9. Sviluppando: $x^2 + 4x + 4 - 3x = 2x + 10$, cioè $x^2 - x - 6 = 0$; $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x = (1 \pm 5)/2$: $x = 3$ oppure $x = -2$. Controllo: somma $1 = -b/a$, prodotto $-6 = c/a$. ✓

10. Lato parallelo al muro $40 - 2x$, con $0 < x < 20$. Area $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$: è una parabola con concavità verso il basso, massimo nel vertice $x = \frac{40}{4} = 10$. Dimensioni 10 m e 20 m, area massima 200 m^2.

11. Se un lato è x, l'altro è $23 - x$, con $0 < x < 23$. Per il teorema di Pitagora $x^2 + (23 - x)^2 = 289$, cioè $x^2 - 23x + 120 = 0$; $\Delta = 529 - 480 = 49$, $x = (23 \pm 7)/2$: 15 oppure 8. I lati misurano 8 cm e 15 cm (verifica: $64 + 225 = 289$); l'area è 120 cm^2.

12. a) $R = p(200 - 4p) = -4p^2 + 200p$: parabola con concavità verso il basso, massimo nel vertice $p = 200/8 = 25$ euro, con $R = 25 \cdot 100 = 2500$ euro. b) $-4p^2 + 200p > 1600$ equivale a $p^2 - 50p + 400 < 0$; le radici sono 10 e 40, e il trinomio è negativo tra le radici: $10 < p < 40$ euro, tutti nell'intervallo ammesso.