CAPITOLO

7

La circonferenza nel piano cartesiano

Il compasso disegna, l'equazione ricorda: ogni punto della circonferenza porta scritta nelle sue coordinate la propria distanza dal centro.

OBIETTIVI

1. Ricavare l'equazione della circonferenza dalla sua definizione come luogo e passare dalla forma con centro e raggio alla forma generale, e viceversa.
2. Riconoscere quando un'equazione di secondo grado rappresenta una circonferenza, un punto o nessun punto.
3. Determinare l'equazione di una circonferenza da tre condizioni: centro, raggio, punti di passaggio, tangenza.
4. Studiare la posizione di una retta e di una circonferenza con la distanza e con il discriminante, scrivere le tangenti e calcolare la lunghezza di una corda.
5. Studiare la posizione reciproca di due circonferenze e trovarne i punti comuni con l'asse radicale.
6. Riconoscere le semicirconferenze come grafici di funzioni e usare le circonferenze per risolvere problemi su triangoli e localizzazione, confrontando il metodo sintetico e quello analitico.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 L'equazione della circonferenza 2
7.2 Come si determina l'equazione 6
7.3 Retta e circonferenza 8
7.4 Due circonferenze 11
7.5 Problemi con la circonferenza 14

Matematica 3 · Parte III · Retta, parabola e circonferenza nel piano cartesiano · versione 1.0
Capitolo 7: La circonferenza nel piano cartesiano · pagine 169–190 del volume completo · estratto per lo studio

Un compasso puntato sul foglio traccia una curva perfetta con un'idea semplicissima: tutti i punti stanno alla stessa distanza dalla punta. Nel capitolo 3 la circonferenza è stata studiata con gli strumenti di Euclide: corde, angoli, tangenti, poligoni inscritti. In questo capitolo la mettiamo nel piano cartesiano. La definizione diventa un'equazione di secondo grado in x e y, e le domande geometriche (questa retta tocca la circonferenza? dove si incontrano due circonferenze?) diventano sistemi da risolvere. Vedremo anche che molte domande si possono affrontare in due modi, con un ragionamento geometrico sulle distanze oppure con un calcolo algebrico, e impareremo a scegliere il più conveniente.

7.1 L'equazione della circonferenza

7.1.1 Che cosa sappiamo già

Ricordiamo dal capitolo 3 le proprietà sintetiche che useremo continuamente. La circonferenza di centro C e raggio r è l'insieme dei punti del piano che hanno distanza r da C.

- L'asse di una corda passa per il centro; in particolare, il centro di una circonferenza per tre punti non allineati è il punto d'incontro degli assi dei lati del triangolo che essi formano (il circocentro).
- Una retta è secante, tangente o esterna a seconda che la sua distanza dal centro sia minore, uguale o maggiore del raggio; la tangente in un punto è perpendicolare al raggio che passa per quel punto.
- Da un punto esterno si conducono due tangenti, e i due segmenti di tangente sono congruenti.
- Due circonferenze possono essere esterne, tangenti esternamente, secanti, tangenti internamente o una interna all'altra, secondo la distanza tra i centri.

Dal capitolo 5 ci servono la distanza tra due punti, la distanza di un punto da una retta e il metodo dei luoghi geometrici: per trovare l'equazione di un luogo si prende un punto generico $P(x; y)$, si traduce in equazione la proprietà che lo caratterizza e si controlla che l'equazione sia soddisfatta da *tutti e soli* i punti del luogo.

7.1.2 Dalla definizione all'equazione

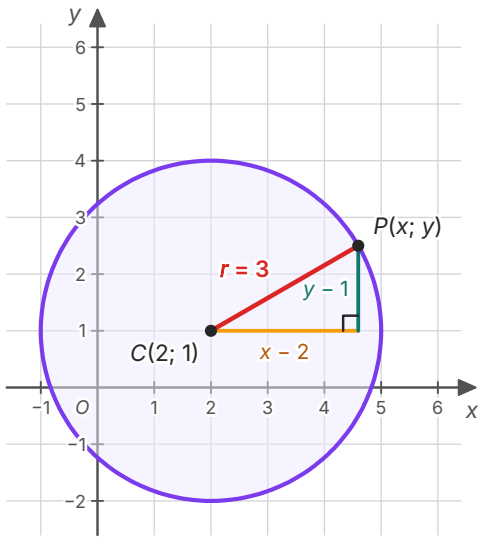
Fissiamo il centro $C(x_0; y_0)$ e il raggio $r > 0$. Un punto $P(x; y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se $PC = r$. Con la formula della distanza:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

I due membri sono positivi o nulli, quindi possiamo elevare al quadrato senza aggiungere né perdere soluzioni (è un'equivalenza: due numeri positivi o nulli sono uguali se e solo se sono uguali i loro quadrati). Otteniamo l'**equazione della circonferenza** di centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Ogni punto della circonferenza ha coordinate che soddisfano l'equazione e, viceversa, ogni coppia di soluzioni individua un punto a distanza r dal centro: l'equazione descrive tutti e soli i punti del luogo. In Figura 7.1 il centro è $C(2; 1)$ e il raggio è 3: il punto P è il vertice di un triangolo rettangolo con i cateti lunghi $|x - 2|$ e $|y - 1|$ e l'ipotenusa lunga 3, e l'equazione non è altro che il teorema di Pitagora scritto per quel triangolo.



$PC = r$

$\sqrt{[(x - 2)^2 + (y - 1)^2]} = 3$

elevando al quadrato:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

sviluppando i quadrati:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

Figura 7.1 La circonferenza di centro $C(2; 1)$ e raggio 3. Per ogni suo punto $P(x; y)$ il triangolo rettangolo con ipotenusa CP ha cateti $|x - 2|$ e $|y - 1|$: il teorema di Pitagora dà l'equazione.

Il caso più semplice è quello con il centro nell'origine: $x^2 + y^2 = r^2$. Per esempio $x^2 + y^2 = 25$ è la circonferenza di centro O e raggio 5, che passa per i punti a coordinate intere $(\pm 5; 0)$, $(0; \pm 5)$, $(\pm 3; \pm 4)$ e $(\pm 4; \pm 3)$: dodici punti in tutto, perché $3^2 + 4^2 = 5^2$.

7.1.3 La forma generale

Sviluppiamo i quadrati nell'equazione di Figura 7.1: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 9$, cioè $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. In generale, sviluppando $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2 = 0$$

e, ponendo $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2$, l'**equazione generale della circonferenza**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Le sue caratteristiche si riconoscono a colpo d'occhio: è di secondo grado, i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali (qui entrambi 1) e manca il termine in xy. Un'equazione come $x^2 + 2y^2 = 4$ o come $x^2 + y^2 + xy = 1$ non rappresenta quindi una circonferenza. Se i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali ma diversi da 1, per esempio $3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$, si divide tutto per quel coefficiente prima di fare qualsiasi altra cosa.

Il percorso inverso, dall'equazione generale al centro e al raggio, si fa ricavando x_0, y_0 e r^2 dalle tre uguaglianze precedenti:

$$x_0 = -\frac{a}{2},\ y_0 = -\frac{b}{2},\ r^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

L'ultima formula nasconde una sorpresa: un'equazione della forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ non rappresenta sempre una circonferenza. Lo si vede completando i quadrati: l'equazione equivale a $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$ con $k = a^2/4 + b^2/4 - c$. Il primo membro è una somma di quadrati, quindi è positivo o nullo. Se $k > 0$ le soluzioni formano la circonferenza di raggio $\sqrt{k}$; se $k = 0$ l'unica soluzione è $x = x_0$, $y = y_0$: l'equazione rappresenta un solo punto, il centro (si parla di **circonferenza degenere**, di raggio nullo); se $k < 0$ non ci sono soluzioni reali e l'equazione non rappresenta alcun punto del piano. La disuguaglianza $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$ si chiama **condizione di realtà** della circonferenza.

IN SINTESI

Equazione della circonferenza. La circonferenza di centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r ha equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Forma generale. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza se e solo se $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$; in questo caso il centro è $C(-a/2; -b/2)$ e il raggio è $r = \sqrt{a^2/4 + b^2/4 - c}$. Se il radicando è nullo l'equazione rappresenta il solo punto $C(-a/2; -b/2)$; se è negativo, nessun punto.

Coefficienti di x^2 e y^2 uguali (se non valgono 1, prima si divide), nessun termine in xy.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Stabilisci se le equazioni rappresentano una circonferenza e, in caso affermativo, trova centro e raggio: a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$; b) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 4y + 10 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x + 6 = 0$.

Soluzione. a) Qui $a = -4$, $b = 6$, $c = -12$. Centro $C(2; -3)$; $r^2 = 4 + 9 + 12 = 25$, quindi $r = 5$. Controllo completando i quadrati: $(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 12 = 0$, cioè $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. ✓

b) Prima si divide per 2: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$. Centro $(-2; 1)$; $r^2 = 4 + 1 - 5 = 0$. L'equazione rappresenta solo il punto $(-2; 1)$: infatti equivale a $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$, che vale solo se entrambi i quadrati sono nulli.

c) $a = -2$, $b = 0$, $c = 6$: $r^2 = 1 + 0 - 6 = -5 < 0$. Nessun punto del piano soddisfa l'equazione, che equivale a $(x-1)^2 + y^2 = -5$.

ERRORE FREQUENTE

Due sviste tipiche nel leggere il centro. La prima: scrivere il centro come $(a; b)$ invece di $C(-a/2; -b/2)$. Per $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ il centro è $(3; -1)$, non $(-6; 2)$. La seconda: usare le formule senza aver diviso per il coefficiente di x^2. Con $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$ si otterrebbe il centro $(4; -6)$, che è sbagliato: dividendo per 2 si ha $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, centro $(2; -3)$ e $r^2 = 4 + 9 + 3 = 16$, $r = 4$.

7.1.4 Casi particolari

Quando uno dei coefficienti a, b, c è nullo, la circonferenza ha una posizione particolare rispetto agli assi (Tabella 7.1). Per esempio $c = 0$ significa che $O(0; 0)$ soddisfa l'equazione: la circonferenza passa per l'origine.

Tabella 7.1 Coefficienti nulli nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e posizione della circonferenza.

Condizione	Equazione	Significato
$a = 0$	$x^2 + y^2 + by + c = 0$	centro sull'asse y
$b = 0$	$x^2 + y^2 + ax + c = 0$	centro sull'asse x
$c = 0$	$x^2 + y^2 + ax + by = 0$	passa per l'origine
$a = b = 0$	$x^2 + y^2 + c = 0$, $c < 0$	centro nell'origine, $r = \sqrt{-c}$

7.1.5 Le semicirconferenze

La circonferenza non è il grafico di una funzione: a ogni x compreso strettamente tra $-r$ e r corrispondono due punti, uno sopra e uno sotto l'asse x. Se però ricaviamo y da $x^2 + y^2 = r^2$ trovia-

mo $y^2 = r^2 - x^2$, cioè $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ oppure $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$: ciascuna delle due equazioni definisce una funzione, e il suo grafico è una semicirconferenza.

- $\boldsymbol{y = \sqrt{r^2 - x^2}}$: dominio $[-r; r]$, immagine $[0; r]$; il grafico è la semicirconferenza superiore ($y \geq 0$), estremi compresi.
- $\boldsymbol{y = -\sqrt{r^2 - x^2}}$: stesso dominio, immagine $[-r; 0]$; il grafico è la semicirconferenza inferiore.

Più in generale, $y = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$ rappresenta la semicirconferenza di centro $(x_0; y_0)$ e raggio r che sta sopra la retta $y = y_0$; con il segno meno davanti alla radice, quella che sta sotto. In entrambi i casi il dominio è $[x_0 - r; x_0 + r]$. Le semicirconferenze descrivono archi, volte e gallerie: ne vedrai un esempio negli esercizi.

7.2 Come si determina l'equazione

L'equazione generale contiene tre coefficienti, a, b e c: per individuare una circonferenza servono quindi, di regola, **tre condizioni** indipendenti, che si traducono in tre equazioni. A volte le condizioni riguardano direttamente il centro (due numeri) e il raggio (un numero), e conviene allora la forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$; altre volte riguardano punti per cui la circonferenza deve passare, e conviene la forma generale.

7.2.1 Centro e raggio, centro e un punto, diametro

Centro e raggio. Con $C(-1; 4)$ e $r = 3$: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$, cioè $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$.

Centro e un punto. Il raggio è la distanza tra il centro e il punto. Con $C(1; -2)$ e $A(4; 2)$: $r^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, quindi $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Estremi di un diametro. Il centro è il punto medio del diametro e il raggio è metà della sua lunghezza. Con $A(-3; 2)$ e $B(5; -4)$: centro $M(1; -1)$, $AB = \sqrt{64 + 36} = 10$, $r = 5$; l'equazione è $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$. Un controllo rapido: anche A e B devono soddisfarla, e infatti per A si ha $9 + 4 + 6 + 4 - 23 = 0$.

Centro e una retta tangente. Il raggio è la distanza del centro dalla retta. La circonferenza di centro $C(2; -1)$ tangente alla retta $3x + 4y + 8 = 0$ ha raggio $r = |6 - 4 + 8| / 5 = 2$ e quindi equazione $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Allo stesso modo, una circonferenza di centro $C(x_0; y_0)$ è tangente all'asse x se $r = |y_0|$ e all'asse y se $r = |x_0|$.

7.2.2 La circonferenza per tre punti

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza: è un teorema di geometria sintetica, e il suo centro è il circocentro del triangolo. In coordinate lo si può verificare in due modi, che vediamo nello stesso esempio.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per $A(5;3)$, $B(-2;2)$ e $C(6;-4)$.

Primo metodo (analitico): il sistema. Sostituiamo le coordinate dei tre punti in $x^2+y^2+ax+by+c=0$:

$$\begin{aligned} 5a+3b+c&=-34\\ -2a+2b+c&=-8\\ 6a-4b+c&=-52 \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima: $7a+b=-26$; sottraendo la seconda dalla terza: $8a-6b=-44$, cioè $4a-3b=-22$. Dalla prima $b=-26-7a$; sostituendo, $4a+78+21a=-22$, quindi $a=-4$, $b=2$ e infine $c=-8+2a-2b=-20$. L'equazione è $x^2+y^2-4x+2y-20=0$, con centro $(2;-1)$ e raggio $\sqrt{4+1+20}=5$.

Secondo metodo (sintetico, tradotto in coordinate): gli assi. Il centro è equidistante da A e B, quindi sta sull'asse di AB; è equidistante da A e C, quindi sta sull'asse di AC. L'asse di AC passa per il punto medio $(11/2;-1/2)$ ed è perpendicolare ad AC, che ha coefficiente angolare -7: $y+1/2=(1/7)(x-11/2)$, cioè $x-7y-9=0$. L'asse di AB (punto medio $(3/2;5/2)$, $m_{AB}=1/7$, quindi perpendicolare con $m=-7$) è $7x+y-13=0$. Risolvendo il sistema dei due assi si trova $(2;-1)$; il raggio è la distanza di $(2;-1)$ da A, $\sqrt{9+16}=5$. Stesso risultato. ✓

Verifica. B: $4+4+8+4-20=0$ ✓; C: $36+16-24-8-20=0$ ✓.

Il primo metodo è meccanico e funziona sempre; il secondo richiede più idee ma spiega *perché* la circonferenza esiste ed è unica. Se i tre punti sono allineati gli assi sono paralleli e non si incontrano, e il sistema risulta impossibile: per tre punti allineati non passa nessuna circonferenza.

7.2.3 Centro su una retta e due punti

Se il centro deve stare su una retta data e la circonferenza deve passare per due punti A e B, il centro è l'intersezione tra quella retta e l'asse di AB. **Esempio.** Centro sulla retta $x-y-1=0$, passaggio per $A(5;2)$ e $B(1;4)$. L'asse di AB passa per $(3;3)$ ed è perpendicolare ad AB ($m_{AB}=-1/2$), quindi ha $m=2$: $y=2x-3$. Mettendolo a sistema con $y=x-1$ si trova il centro $(2;1)$; $r^2=3^2+1^2=10$ e l'equazione è $x^2+y^2-4x-2y-5=0$. Anche qui si poteva procedere con un sistema in a, b, c: la condizione sul centro diventa $-a/2+b/2-1=0$.

7.3 Retta e circonferenza

7.3.1 Tre posizioni, due metodi

Una retta e una circonferenza possono avere due punti in comune (retta secante), uno solo (retta tangente) o nessuno (retta esterna). Per stabilire in quale caso ci troviamo abbiamo a disposizione due strade.

Il metodo geometrico usa la proprietà sintetica ricordata all'inizio: si calcola la distanza d del centro dalla retta e la si confronta con il raggio (Figura 7.2). Se $d < r$ la retta è secante, se $d = r$ è tangente, se $d > r$ è esterna.

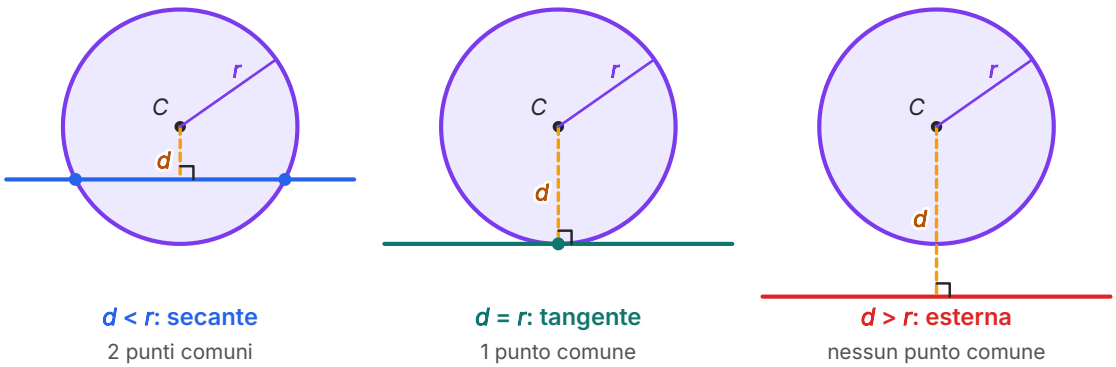


Figura 7.2 Le tre posizioni di una retta rispetto a una circonferenza, decise dal confronto tra la distanza d del centro dalla retta e il raggio r. Il segmento tratteggiato è perpendicolare alla retta.

Il metodo algebrico cerca direttamente i punti comuni risolvendo il sistema tra l'equazione della retta e quella della circonferenza. Ricavando una incognita dall'equazione della retta e sostituendo, si arriva a un'*equazione risolvente* di secondo grado: due soluzioni reali distinte ($\Delta > 0$) danno due punti comuni, due soluzioni coincidenti ($\Delta = 0$) un solo punto, nessuna soluzione reale ($\Delta < 0$) nessun punto. È lo stesso metodo che il capitolo 6 ha usato per retta e parabola.

IN SINTESI

Retta e circonferenza. Siano d la distanza del centro dalla retta, r il raggio e Δ il discriminante dell'equazione risolvente del sistema retta–circonferenza.

- retta **secante**: $d < r \Leftrightarrow \Delta > 0$ (due punti comuni);
- retta **tangente**: $d = r \Leftrightarrow \Delta = 0$ (un punto comune);
- retta **esterna**: $d > r \Leftrightarrow \Delta < 0$ (nessun punto comune).

Quale dei due metodi conviene? Se basta sapere *quale* sia la posizione, il metodo geometrico è più rapido: una sola formula, nessun sistema. Se servono anche i punti d'intersezione, il sistema va risolto comunque, e il discriminante arriva gratis. C'è poi una differenza più profonda. Il metodo geometrico funziona perché la circonferenza ha una proprietà speciale, la simmetria rispetto al centro, che rende ogni direzione equivalente; il metodo algebrico non usa nessuna proprietà speciale e si applicherà senza cambiamenti all'ellisse e all'iperbole, che studierai il prossimo anno, dove una «distanza dal centro» che decida la posizione non c'è. È un primo esempio di ciò che le *Indicazioni* chiamano la specificità dei due approcci, sintetico e analitico.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Studia la posizione della retta s: $x + y - 7 = 0$ rispetto alla circonferenza γ: $x^2 + y^2 = 25$ con entrambi i metodi; se è secante, trova i punti comuni e la lunghezza della corda.

Metodo geometrico. Centro $O(0; 0)$, $r = 5$. $d = |0 + 0 - 7| / \sqrt{2} = \dfrac{7}{\sqrt{2}} \approx 4{,}95$. Poiché $d < 5$, la retta è secante (di poco).

Metodo algebrico. Da $y = 7 - x$: $x^2 + (7 - x)^2 = 25$, cioè $2x^2 - 14x + 24 = 0$, $x^2 - 7x + 12 = 0$. $\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$: secante. Le soluzioni $x = 3$ e $x = 4$ danno i punti $A(3; 4)$ e $B(4; 3)$.

Corda. $AB = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Come controllo, la corda si può calcolare anche dalla distanza: $AB = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{25 - 49/2} = 2\sqrt{1/2} = \sqrt{2}$. ✓

7.3.2 La lunghezza di una corda

L'ultimo controllo dell'esempio è un metodo vero e proprio. Se una retta secante ha distanza d dal centro, la perpendicolare condotta dal centro alla retta cade nel punto medio H della corda (l'asse di una corda passa per il centro). Il triangolo OHA è rettangolo in H, con ipotenusa $OA = r$ e cateto $OH = d$. Per il teorema di Pitagora $AH = \sqrt{r^2 - d^2}$, e la **lunghezza della corda** è

$$AB = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

Non servono i punti d'intersezione: basta la distanza. Per esempio, la retta $4x - 3y - 15 = 0$ ha distanza $15/5 = 3$ dal centro di $x^2 + y^2 = 25$ e stacca su di essa una corda lunga $2\sqrt{25 - 9} = 8$.

7.3.3 La tangente in un punto della circonferenza

Se il punto T sta sulla circonferenza, per T passa una sola tangente, ed è la perpendicolare in T al raggio CT. **Esempio.** Tangente a $x^2 + y^2 = 25$ in $T(3; 4)$. Il raggio OT ha coefficiente angolare $4/3$, la tangente ha quindi coefficiente angolare $-3/4$: $y - 4 = -(3/4)(x - 3)$, cioè $3x + 4y - 25 = 0$. Controllo: la distanza di O da questa retta è $25/5 = 5 = r$. ✓

Lo stesso risultato si ottiene con la formula di sdoppiamento, che il capitolo 6 ha introdotto per la parabola: nell'equazione della circonferenza si sostituiscono x^2 con x_0x, y^2 con y_0y, x con $(x + x_0)/2$ e y con $(y + y_0)/2$, dove $(x_0; y_0)$ è il punto di tangenza. Per $x^2 + y^2 = 25$ e $T(3; 4)$ si ottiene

subito $3x + 4y = 25$. La formula vale solo se il punto *sta* sulla circonferenza: per un punto esterno dà un'altra retta, che non è tangente.

7.3.4 Le tangenti da un punto esterno

Da un punto P esterno alla circonferenza si conducono due tangenti; da un punto della circonferenza una sola; da un punto interno nessuna. Per trovarle si considera il fascio di rette per P e si impone la tangenza, con la distanza ($d = r$) oppure con il discriminante ($\Delta = 0$). Entrambe le condizioni danno un'equazione di secondo grado in m: due soluzioni, due tangenti.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova le tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ condotte dal punto $P(2; 4)$ e i punti di tangenza.

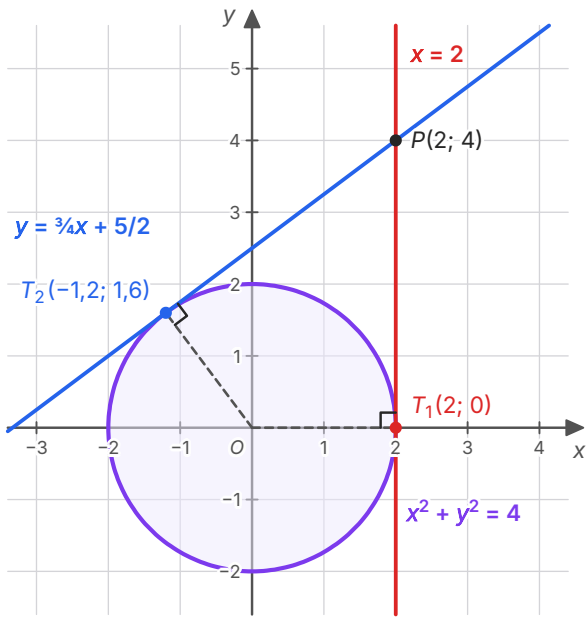
Soluzione. P è esterno: $PO = \sqrt{20} > 2$. Le rette per P non verticali sono $y - 4 = m(x - 2)$, cioè $mx - y + 4 - 2m = 0$.

Con la distanza. $|4 - 2m| / \sqrt{m^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow (4 - 2m)^2 = 4(m^2 + 1) \Leftrightarrow 16 - 16m + 4m^2 = 4m^2 + 4 \Leftrightarrow m = 3/4$. (Elevare al quadrato è lecito: entrambi i membri sono positivi o nulli.)

Con il discriminante. Sostituendo $y = mx + 4 - 2m$ nell'equazione della circonferenza: $(1 + m^2)x^2 + 2m(4 - 2m)x + (4 - 2m)^2 - 4 = 0$. Il quarto del discriminante è $m^2(4 - 2m)^2 - (1 + m^2)[(4 - 2m)^2 - 4] = 4(1 + m^2) - (4 - 2m)^2 = 16m - 12$, che si annulla per $m = 3/4$.

Una sola soluzione, ma da un punto esterno le tangenti sono due. Quella mancante è la retta verticale per P, $x = 2$, che non appartiene al fascio $y - 4 = m(x - 2)$: la sua distanza da O è 2, quindi è tangente. Le tangenti sono $x = 2$ e $y = (3/4)x + 5/2$, cioè $3x - 4y + 10 = 0$.

Punti di tangenza. $x = 2$ tocca la circonferenza in $T_1(2; 0)$. Per l'altra, il punto di tangenza è il piede della perpendicolare da O: la retta $y = -(4/3)x$ incontra $3x - 4y + 10 = 0$ in $T_2(-6/5; 8/5)$. Controllo: $36/25 + 64/25 = 4$ ✓ (Figura 7.3).



fascio per P:

$y - 4 = m(x - 2)$

condizione $d(O, \text{retta}) = 2$:

$m = \frac{3}{4}$

la retta verticale per P non fa parte del fascio $y - 4 = m(x - 2)$:

va controllata a parte

Figura 7.3 Le due tangenti condotte da $P(2; 4)$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$. I raggi OT_1 e OT_2 (tratteggiati) sono perpendicolari alle tangenti; $PT_1 = PT_2 = 4$.

ERRORE FREQUENTE

Il fascio $y - y_P = m(x - x_P)$ contiene tutte le rette per P **tranne la verticale** $x = x_P$. Se la condizione di tangenza dà una sola soluzione in m (l'equazione in m si è abbassata di grado, come nell'esempio) mentre il punto è esterno, la tangente mancante è la verticale: va controllata a parte, calcolandone la distanza dal centro. In generale, prima di concludere conviene sempre confrontare il numero di tangenti trovate con la posizione di P (esterno: due; sulla circonferenza: una; interno: nessuna).

7.4 Due circonferenze

7.4.1 Posizioni reciproche

Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze di centri C_1, C_2 e raggi $r_1 \geq r_2$, e sia $d = C_1C_2$ la distanza tra i centri. Come per retta e circonferenza, la posizione reciproca si legge confrontando una distanza con dei raggi, questa volta con la loro somma e la loro differenza (Tabella 7.2). Due circonferenze con lo stesso centro ($d = 0$) si dicono **circonferenze concentriche**; due circonferenze con un solo punto comune sono **circonferenze tangenti**, esternamente o internamente; due circonferenze con due punti comuni sono **circonferenze secanti**.

Tabella 7.2 Posizioni reciproche di due circonferenze di raggi $r_1 \geq r_2$ con centri a distanza d.

Condizione	Posizione	Punti comuni
$d > r_1 + r_2$	esterne	0
$d = r_1 + r_2$	tangenti esternamente	1
$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	secanti	2
$d = r_1 - r_2 > 0$	tangenti internamente	1
$0 < d < r_1 - r_2$	una interna all'altra	0
$d = 0$, $r_1 \neq r_2$	concentriche	0

La condizione per le secanti è la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo C_1C_2A, dove A è un punto comune: i lati sono d, r_1 e r_2, e ciascuno deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Nei casi di tangenza il triangolo «si schiaccia» e il punto di contatto sta sulla retta dei centri.

7.4.2 Punti comuni e asse radicale

Per trovare i punti comuni si risolve il sistema delle due equazioni. A prima vista è un sistema di quarto grado, ma la forma delle equazioni lo rende facile. Scritte entrambe in forma generale, con coefficiente 1 per x^2 e y^2:

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Sottraendo membro a membro i termini di secondo grado si cancellano e resta l'equazione di primo grado

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato da una delle due circonferenze e da questa equazione. Se le circonferenze non sono concentriche, cioè se $a_1 \neq a_2$ oppure $b_1 \neq b_2$, l'equazione rappresenta una retta, detta **asse radicale** delle due circonferenze. Quando le circonferenze sono secanti è la retta che passa per i loro due punti comuni; quando sono tangenti è la tangente comune nel punto di contatto. Il problema «circonferenza–circonferenza» si riduce così al problema «retta–circonferenza» del paragrafo precedente.

L'asse radicale è sempre perpendicolare alla **retta dei centri** C_1C_2. Infatti i centri sono $C_1(-a_1/2; -b_1/2)$ e $C_2(-a_2/2; -b_2/2)$, e il vettore C_1C_2 ha componenti $((a_1 - a_2)/2; (b_1 - b_2)/2)$, proporzionali ai coefficienti di x e di y nell'equazione dell'asse radicale: il vettore $(a; b)$ è perpendicolare alla retta $ax + by + c = 0$ (è il vettore normale del capitolo 5). Per le circonferenze secanti è un

fatto già noto in geometria sintetica: la corda comune ha come asse la retta dei centri, perché ciascun centro è equidistante dagli estremi della corda.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Date γ_1: $x^2 + y^2 - 25 = 0$ e γ_2: $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 35 = 0$, stabilisci la loro posizione reciproca e trova gli eventuali punti comuni.

Centri e raggi. γ_1: $C_1(0; 0)$, $r_1 = 5$. γ_2: $C_2(6; 3)$, $r_2{}^2 = 36 + 9 - 35 = 10$, $r_2 = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Posizione. $d = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$. Si ha $r_1 - r_2 \approx 1{,}84 < 6{,}71 < 8{,}16 \approx r_1 + r_2$: le circonferenze sono secanti.

Asse radicale. Sottraendo la seconda equazione dalla prima: $12x + 6y - 60 = 0$, cioè $2x + y - 10 = 0$. La retta dei centri, $y = x/2$, ha coefficiente angolare $1/2$, l'asse radicale -2: sono perpendicolari, come previsto.

Punti comuni. Da $y = 10 - 2x$ in γ_1: $x^2 + (10 - 2x)^2 = 25$, $5x^2 - 40x + 75 = 0$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x = 3$ oppure $x = 5$. I punti sono $A(3; 4)$ e $B(5; 0)$ (Figura 7.4). Verifica in γ_2: per A, $9 + 16 - 36 - 24 + 35 = 0$ ✓; per B, $25 - 60 + 35 = 0$ ✓.

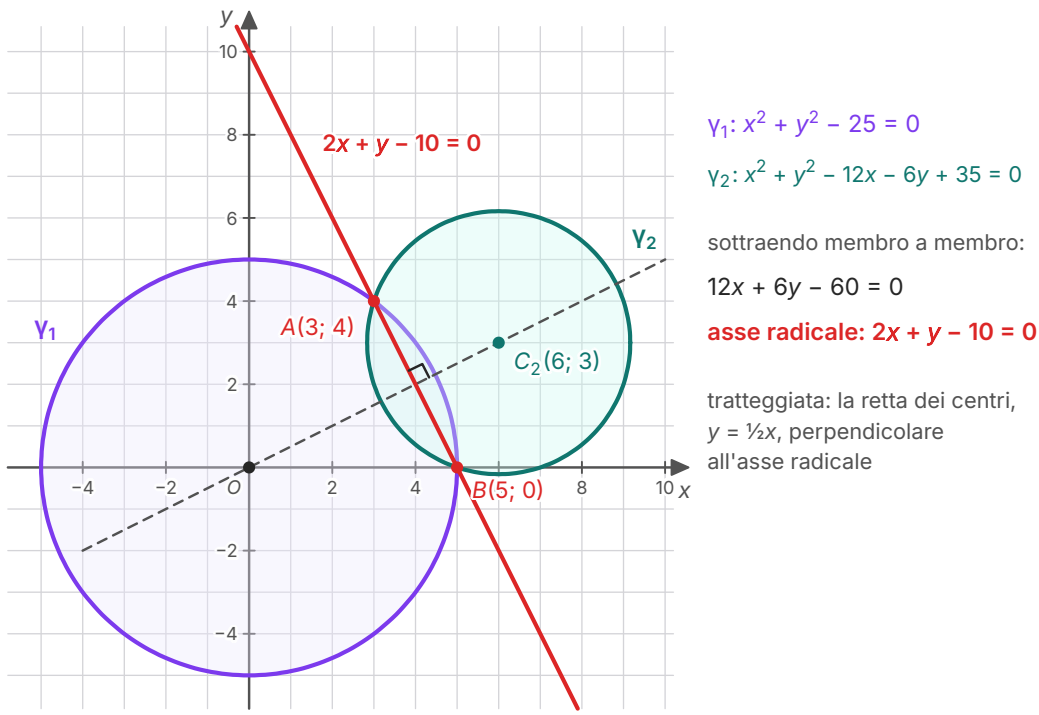


Figura 7.4 Le circonferenze secanti γ_1 e γ_2 dell'esempio svolto. L'asse radicale, in rosso, passa per i punti comuni A e B ed è perpendicolare alla retta dei centri, tratteggiata, nel punto medio (4; 2) della corda comune.

Se le circonferenze sono concentriche la sottrazione cancella anche i termini di primo grado e resta $c_1 - c_2 = 0$: un'uguaglianza falsa (le circonferenze sono distinte, quindi $c_1 \neq c_2$), segno che non ci sono punti comuni e che l'asse radicale non esiste. Due circonferenze concentriche di raggi diversi delimitano una corona circolare.

7.5 Problemi con la circonferenza

7.5.1 Circonferenze e triangoli

Le circonferenze legate a un triangolo, studiate nel capitolo 3 con riga e compasso, si possono ora scrivere con un'equazione. Prendiamo il triangolo rettangolo di vertici $O(0;\,0)$, $A(6;\,0)$, $B(0;\,8)$, con l'ipotenusa AB lunga 10.

Circonferenza circoscritta. Il circocentro è l'intersezione degli assi dei lati. In un triangolo rettangolo, però, si fa prima: l'angolo retto è inscritto in una semicirconferenza, quindi l'ipotenusa è un diametro e il circocentro è il suo punto medio $M(3;\,4)$. Il raggio è 5 e la circonferenza circoscritta è $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, che passa per l'origine ($c = 0$) come deve.

Circonferenza inscritta. L'incentro è equidistante dai tre lati. Due lati stanno sugli assi, quindi l'incentro ha coordinate $(r;\,r)$, dove r è il raggio cercato. La retta AB ha equazione $4x + 3y - 24 = 0$ e la distanza dell'incentro da essa deve essere ancora r:

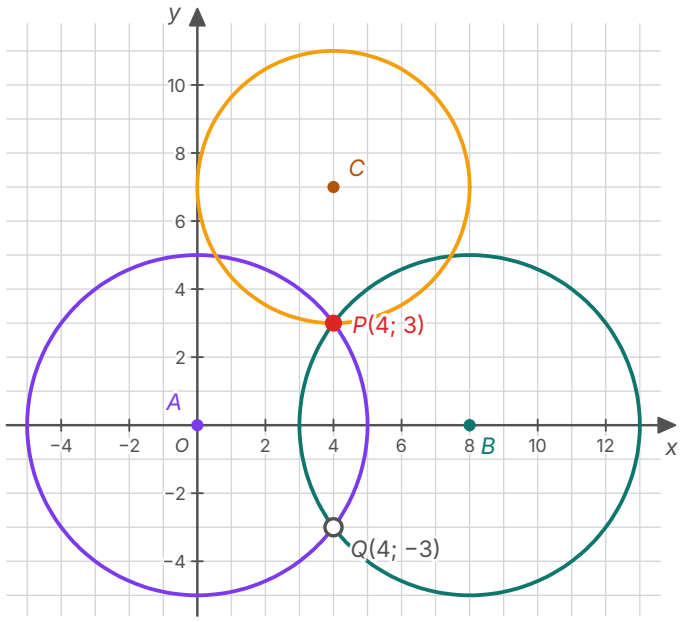
$$\frac{|4r + 3r - 24|}{5} = r \Leftrightarrow |7r - 24| = 5r$$

L'incentro sta dentro il triangolo, dalla stessa parte di O rispetto ad AB, quindi $7r - 24 < 0$ e l'equazione diventa $24 - 7r = 5r$, cioè $r = 2$. La circonferenza inscritta è $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. L'altra possibilità, $7r - 24 = 5r$, dà $r = 12$: è la circonferenza di centro $(12;\,12)$, tangente alle tre rette dei lati ma *fuori* dal triangolo. Il risultato $r = 2$ concorda con la formula del raggio inscritto in un triangolo rettangolo, $r = (a + b - c)/2 = (6 + 8 - 10)/2 = 2$.

7.5.2 Trilaterazione

Come si determina la posizione di un telefono conoscendo le sue distanze da alcune antenne? Ogni distanza individua una circonferenza, e il telefono si trova sulla loro intersezione: è il principio della **trilaterazione**. Vediamolo in un caso piano con numeri inventati, in un sistema di riferimento con unità di misura il chilometro (Figura 7.5).

Tre ripetitori si trovano in $A(0;\,0)$, $B(8;\,0)$ e $C(4;\,7)$. Il segnale indica che il telefono dista 5 km da A, 5 km da B e 4 km da C. Le prime due circonferenze sono $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$. Il loro asse radicale si trova sottraendo: $16x - 64 = 0$, cioè $x = 4$; da $16 + y^2 = 25$ si ricava $y = \pm 3$. Due candidati, $P(4;\,3)$ e $Q(4;\,-3)$: le distanze da due soli ripetitori non bastano. Il terzo decide: $PC = |7 - 3| = 4$, mentre $QC = 10$. Il telefono è in $P(4;\,3)$.



ripetitore	distanza
$A(0; 0)$	5 km
$B(8; 0)$	5 km
$C(4; 7)$	4 km

le circonferenze di A e B si incontrano in P e in Q; quella di C passa solo per P

Figura 7.5 Trilaterazione nel piano (dati inventati, unità: 1 km). Le circonferenze centrate in A e B lasciano due posizioni possibili, P e Q; la terza circonferenza, centrata in C, passa solo per P.

COLLEGAMENTI

Fisica: il moto circolare uniforme. Un punto che percorre con velocità di modulo costante una circonferenza di raggio r e centro O (il moto circolare uniforme, che studi quest'anno in fisica) ha in ogni istante coordinate che soddisfano $x^2 + y^2 = r^2$: la traiettoria è la circonferenza, qualunque sia la velocità. La velocità del punto è sempre tangente alla traiettoria, quindi perpendicolare al raggio, mentre l'accelerazione centripeta è diretta lungo il raggio verso il centro: le due proprietà della tangente studiate in questo capitolo hanno un significato fisico preciso. Scrivere le coordinate del punto in funzione del tempo richiede invece le funzioni circolari, che incontrerai in *Matematica 4*.

Tecnologia: la localizzazione satellitare. I sistemi di navigazione satellitare usano la stessa idea della trilaterazione, ma nello spazio: i luoghi dei punti a distanza data da un satellite sono sfere, non circonferenze, e il ricevitore deve anche correggere l'errore del proprio orologio, perché le distanze si ricavano dai tempi di viaggio dei segnali. Per questo servono i segnali di almeno quattro satelliti.

APPROFONDIMENTO · LA CIRCONFERENZA DI APOLLONIO

Dati due punti A e B e un numero $k > 0$, $k \neq 1$, il luogo dei punti P tali che $PA = k \cdot PB$ è una circonferenza. Proviamolo con $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ e $k = 2$. Elevando al quadrato $PA = 2PB$ (lecito, perché le distanze sono positive o nulle): $x^2 + y^2 = 4[(x - 6)^2 + y^2]$, cioè $3x^2 + 3y^2 - 48x + 144 = 0$ e, dividendo per 3, $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$: la circonferenza di centro $(8; 0)$ e raggio 4. I suoi punti sull'asse x, $(4; 0)$ e $(12; 0)$, dividono il segmento AB internamente ed esternamente nel rapporto $2 : 1$. Per $k = 1$ il luogo sarebbe invece l'asse del segmento AB, una retta.

La tradizione lega questa proprietà al nome di Apollonio di Perga (III–II secolo a.C.), il geometra greco autore delle *Coniche*, il trattato da cui vengono i nomi parabola, ellisse e iperbole (capitolo 2); per questo il luogo si chiama **circonferenza di Apollonio**. È un bell'esempio di come il metodo delle coordinate trasformi in pochi passaggi di calcolo un teorema che, con gli strumenti della geometria sintetica, richiede una dimostrazione molto più ingegnosa.

Con il computer

Un software di geometria dinamica permette di vedere le tangenti «muoversi». Si scrive nella barra di inserimento l'equazione $x^2 + y^2 = 4$, si crea un punto libero P e si usa lo strumento che traccia le tangenti da un punto a una conica. Trascinando P si osserva che le tangenti sono due quando P è esterno, si sovrappongono in una sola quando P arriva sulla circonferenza e scompaiono quando entra nel cerchio. Facendo mostrare al programma l'equazione delle tangenti e portando P in $(2; 4)$ si ritrovano le due rette di Figura 7.3, una delle quali verticale; spostando P lungo la retta $y = 4$ si vede il coefficiente angolare di una tangente crescere senza limite mentre la retta si avvicina alla posizione verticale.

SINTESI

- La circonferenza di centro $C(x_0; y_0)$ e raggio r ha equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$: è la formula della distanza, elevata al quadrato.
- La forma generale è $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$: coefficienti di x^2 e y^2 uguali, nessun termine in xy. Centro $(-a/2; -b/2)$, $r^2 = a^2/4 + b^2/4 - c$, che deve essere positivo (condizione di realtà).
- Per determinare una circonferenza servono tre condizioni: centro e raggio, tre punti, centro su una retta e due punti, centro e tangente...
- Per tre punti non allineati passa una sola circonferenza; il suo centro è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo.
- La posizione di una retta rispetto a una circonferenza si decide con la distanza dal centro ($d < r$, $d = r$, $d > r$) oppure con il discriminante della risolvente ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$).
- Una corda a distanza d dal centro è lunga $2\sqrt{r^2 - d^2}$; la tangente in un punto è perpendicolare al raggio.
- Le tangenti da un punto esterno si trovano nel fascio di rette per il punto, imponendo $d = r$ o $\Delta = 0$; la retta verticale va controllata a parte.
- Due circonferenze si confrontano con la distanza tra i centri e con la somma e la differenza dei raggi; sottraendo le loro equazioni si ottiene l'asse radicale, perpendicolare alla retta dei centri, che per due circonferenze secanti passa per i punti comuni.
- Le funzioni $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ hanno per grafico le due semicirconferenze di centro O e raggio r, con dominio $[-r; r]$.
- Il metodo sintetico (distanze, assi, proprietà della tangente) e quello analitico (sistemi e discriminante) arrivano agli stessi risultati; il primo sfrutta le simmetrie della circonferenza, il secondo vale per tutte le coniche.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ ha:
   - **A.** centro $(-3; 1)$ e raggio 4
   - **B.** centro $(3; -1)$ e raggio 4
   - **C.** centro $(3; -1)$ e raggio 16
   - **D.** centro $(-6; 2)$ e raggio $\sqrt{6}$

2. ● Quale equazione rappresenta una circonferenza?

   A. $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$

   B. $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$

   C. $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$

   D. $3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$

3. ● La retta $3x + 4y + 10 = 0$ rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ è:

   A. esterna

   B. secante

   C. tangente

   D. secante e passante per il centro

4. ● Due circonferenze di raggi 3 e 5 hanno i centri a distanza 8. Sono:

   A. tangenti esternamente

   B. secanti

   C. tangenti internamente

   D. una interna all'altra

5. ●● L'equazione $y = -\sqrt{9 - x^2}$ rappresenta:

   A. la circonferenza di centro O e raggio 3

   B. la semicirconferenza superiore di centro O e raggio 3

   C. la semicirconferenza inferiore di centro O e raggio 9

   D. la semicirconferenza inferiore di centro O e raggio 3

6. ●● La circonferenza di centro $(2; -3)$ tangente all'asse x ha raggio:

   A. 2

   B. 3

   C. $\sqrt{13}$

   D. 13

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ è l'equazione di una circonferenza.

   b) Ogni circonferenza che passa per l'origine ha, in forma generale, $c = 0$.

   c) La tangente a una circonferenza in un suo punto è perpendicolare al raggio che passa per quel punto.

   d) Due circonferenze distinte hanno sempre un asse radicale.

   e) Se la distanza del centro da una retta è minore del raggio, la retta ha due punti in comune con la circonferenza.

8. ● Completa. La circonferenza è il luogo dei punti del piano che hanno _____ da un punto fisso, detto _____. Nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ il centro ha coordinate _____ e il raggio è _____, che esiste se _____. Una retta è tangente alla circonferenza se la sua distanza dal centro è _____ al raggio.

Calcolare

9. ● Scrivi in forma generale l'equazione della circonferenza: a) di centro O e raggio $\sqrt{7}$; b) di centro $(-2; 5)$ e raggio 3; c) di centro $(1/2; 0)$ e raggio $1/2$; d) di diametro AB, con $A(-1; 2)$ e $B(5; 10)$.

10. ● Trova centro e raggio, oppure stabilisci che l'equazione non rappresenta una circonferenza: a) $x^2 + y^2 - 10x = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$; c) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 11 = 0$; d) $x^2 + y^2 + 6x + 10 = 0$.

11. ●● Per quali valori di k l'equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ rappresenta una circonferenza? Per quale valore il raggio è 3? Per quale la circonferenza passa per l'origine?

12. ●● Scrivi l'equazione della circonferenza passante per $A(0; 1)$, $B(2; 5)$ e $C(4; -1)$, risolvendo il sistema; controlla il centro con gli assi di due lati.

13. ●● Trova l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta $x + y + 3 = 0$ e passa per $A(3; 1)$ e $B(-1; 3)$.

14. ●● Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(1; -2)$ tangente alla retta $3x - 4y + 4 = 0$ e trova il punto di tangenza.

15. ● Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, stabilisci la posizione delle rette con il metodo della distanza e con il discriminante, e trova gli eventuali punti comuni: a) $x + 2y - 10 = 0$; b) $y = x + 5$; c) $y = x$.

16. ●● Calcola la lunghezza della corda che la retta $4x - 3y - 15 = 0$ stacca sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ in due modi: con la formula $2\sqrt{r^2 - d^2}$ e trovando i punti d'intersezione.

17. ●● Scrivi l'equazione della tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ nel suo punto $A(6; 2)$, prima con la perpendicolare al raggio e poi con la formula di sdoppiamento.

18. ●● Trova le tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 10$ condotte dal punto $P(4; 2)$ e i punti di tangenza.

19. ●● Stabilisci la posizione reciproca delle circonferenze e trova gli eventuali punti comuni: a) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che, sviluppando $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, si ottiene sempre un'equazione in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali e manca il termine in xy. Viceversa, completando i quadrati, spiega perché $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza solo se $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$.

21. ●● Trova l'errore. Per trovare centro e raggio di $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$ Luca scrive: «centro $(4; -6)$, raggio $\sqrt{16 + 36 + 6} = \sqrt{58}$». Spiega dove sbaglia e correggi.

22. ●● Dimostra che l'asse radicale di due circonferenze non concentriche è perpendicolare alla retta dei centri, usando le equazioni in forma generale.

23. ●● Spiega perché. Cercando le tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 9$ uscenti da $P(3; 5)$ con il fascio $y - 5 = m(x - 3)$ e la condizione $\Delta = 0$, si trova una sola retta. Quale tangente manca, e perché il metodo non l'ha trovata? Trova entrambe le tangenti.

24. ●●● Dimostra che il luogo dei punti P tali che $PA^2 + PB^2 = 50$, con $A(-3; 0)$ e $B(3; 0)$, è una circonferenza con il centro nel punto medio di AB. Qual è il raggio? Per quali valori di k il luogo $PA^2 + PB^2 = k$ è una circonferenza?

Problemi

25. ●● Un triangolo ha vertici $A(-2; 0)$, $B(6; 0)$ e $C(4; 4)$. Trova il circocentro come intersezione di due assi e scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta.

26. ●● Il triangolo rettangolo di vertici $O(0; 0)$, $A(12; 0)$, $B(0; 5)$ ha la circonferenza inscritta con centro $(r; r)$. Imponendo che la distanza del centro dall'ipotenusa sia r, trova r e l'equazione della circonferenza. Scrivi anche l'equazione della circonferenza circoscritta.

27. ●● Un telefono dista 10 km dall'antenna $A(0; 0)$ e 8 km dall'antenna $B(6; 0)$ (coordinate in km, dati inventati). a) Trova le due posizioni possibili. b) Una terza antenna in $C(0; 8)$ misura una distanza di 6 km: dove si trova il telefono?

28. ●● Il punto P di una giostra percorre una circonferenza di centro O e raggio 4 m; un osservatore sta in $Q(10; 0)$ (unità: metri). a) Qual è la distanza minima e quale la massima tra P e Q? b) In quali punti si trova P quando dista esattamente 10 m da Q?

29. ●● Un tunnel ha la sezione a forma di semicirconferenza di raggio 5 m, con il diametro sul piano stradale. a) Scegli un sistema di riferimento e scrivi la funzione che descrive la volta. b) Un camion largo 3 m e alto 4 m, che viaggia al centro della carreggiata, passa? c) Qual è la larghezza massima di un carico alto 4,5 m che può passare al centro?

Con il computer

30. ● Con un software di geometria dinamica disegna la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ e un punto libero P, e traccia le tangenti da P con l'apposito strumento. a) Muovi P: quante tangenti vedi quando P è esterno, sulla circonferenza, interno? b) Porta P in $(2; 4)$ e leggi le equazioni delle tangenti: confrontale con l'esempio svolto. c) Fai calcolare al programma PT_1 e PT_2: che cosa osservi muovendo P?

Verso la verifica

31. ●● Data la circonferenza γ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$: a) trova centro e raggio; b) verifica che passa per l'origine e scrivi la tangente in O; c) calcola la lunghezza della corda staccata dalla retta $y = x$.

32. ●●● Sfida. Trova le circonferenze tangenti a entrambi gli assi cartesiani che passano per il punto $A(2; 1)$. Quante sono? Perché il loro centro sta sulla bisettrice del primo quadrante?

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Apollonio di Perga e sulla nascita della geometria analitica con Cartesio e Fermat.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sulla geometria analitica e sulle costruzioni geometriche, per confrontare il metodo delle coordinate con quello di riga e compasso.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come scegliere il sistema di riferimento per semplificare i calcoli, utile nei problemi su triangoli e circonferenze.

Glossario del capitolo

Asse radicale
Retta che si ottiene sottraendo membro a membro le equazioni in forma generale di due circonferenze non concentriche; è perpendicolare alla retta dei centri e, se le circonferenze sono secanti, passa per i loro punti comuni.

Circonferenza degenere
Ciò che rappresenta l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ quando $a^2/4 + b^2/4 - c = 0$: un solo punto, il centro, pensato come circonferenza di raggio nullo.

Circonferenza di Apollonio
Luogo dei punti P tali che $PA = k \cdot PB$, con A e B punti dati e $k > 0$, $k \neq 1$; è una circonferenza.

Circonferenze concentriche
Circonferenze che hanno lo stesso centro; se sono distinte non hanno punti comuni.

Circonferenze secanti
Due circonferenze con due punti in comune; la distanza d tra i centri soddisfa $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

Circonferenze tangenti
Due circonferenze con un solo punto in comune, che sta sulla retta dei centri: esternamente se $d = r_1 + r_2$, internamente se $d = r_1 - r_2 > 0$.

Condizione di realtà
La disuguaglianza $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$, necessaria e sufficiente perché $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenti una circonferenza.

Equazione della circonferenza
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$: l'equazione soddisfatta da tutti e soli i punti a distanza r dal centro $C(x_0; y_0)$.

Equazione generale della circonferenza
La forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$; il centro è $(-a/2; -b/2)$ e $r^2 = a^2/4 + b^2/4 - c$.

Lunghezza della corda
Una retta a distanza $d < r$ dal centro stacca sulla circonferenza una corda lunga $2\sqrt{(r^2 - d^2)}$.

Retta dei centri
La retta che passa per i centri di due circonferenze non concentriche.

Trilaterazione
Determinazione della posizione di un punto a partire dalle sue distanze da punti noti, come intersezione delle circonferenze (o, nello spazio, delle sfere) che esse individuano.

Soluzioni

1. B. Centro (6/2; −2/2) = (3; −1); $r^2 = 9 + 1 + 6 = 16$, $r = 4$.

2. D. Dividendo per 3: $x^2 + y^2 - 2x = 0$, centro (1; 0), $r = 1$. A ha coefficienti di x^2 e y^2 diversi, B il termine in xy, C ha $r^2 = 4 - 5 = -1 < 0$.

3. C. $d = |10|/5 = 2 = r$.

4. A. $d = 8 = 3 + 5 = r_1 + r_2$.

5. D. Elevando al quadrato con la condizione $y \le 0$: $x^2 + y^2 = 9$, $y \le 0$; raggio 3, non 9.

6. B. Il raggio è la distanza del centro dall'asse x, cioè $|-3| = 3$.

7. a) Falso: $r^2 = 1 + 4 - 5 = 0$, l'equazione rappresenta il solo punto (1; −2). b) Vero: (0; 0) soddisfa l'equazione solo se $c = 0$. c) Vero. d) Falso: due circonferenze concentriche distinte non hanno asse radicale (la sottrazione dà $c_1 - c_2 = 0$, impossibile). e) Vero.

8. ...distanza assegnata (uguale al raggio) da un punto fisso, detto centro. Centro $(-a/2; -b/2)$; raggio $\sqrt{a^2/4 + b^2/4 - c}$, che esiste se $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$ (se è nullo la circonferenza degenera in un punto). Tangente: distanza uguale al raggio.

9. a) $x^2 + y^2 - 7 = 0$. b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$. c) $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$: $x^2 + y^2 - x = 0$. d) Centro (2; 6), $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$, $r = 5$: $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 15 = 0$.

10. a) (5; 0), $r = 5$ (passa per O). b) (−2; 1), $r^2 = 4 + 1 + 20 = 25$, $r = 5$. c) Dividendo per 4: $x^2 + y^2 - x + 2y - 11/4 = 0$; centro (1/2; −1), $r^2 = 1/4 + 1 + 11/4 = 4$, $r = 2$. d) $r^2 = 9 - 10 = -1 < 0$: nessun punto.

11. Centro (2; −1), $r^2 = 4 + 1 - k = 5 - k > 0$: $k < 5$. $5 - k = 9$: $k = -4$. Passaggio per O: $k = 0$ (raggio $\sqrt{5}$).

12. Sistema: $b + c = -1$, $2a + 5b + c = -29$, $4a - b + c = -17$. Sottraendo la prima: $2a + 4b = -28$ e $4a - 2b = -16$, da cui $a = -6$, $b = -4$, $c = 3$. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$, centro (3; 2), $r = \sqrt{10}$. Assi: di AC (punto medio (2; 0), $m_{AC} = -1/2$): $y = 2x - 4$; di AB (punto medio (1; 3), $m_{AB} = 2$): $y = -x/2 + 7/2$. Intersezione (3; 2). ✓

13. Asse di AB: punto medio (1; 2), $m_{AB} = -1/2$, quindi $y - 2 = 2(x - 1)$, cioè $y = 2x$. Con $x + y + 3 = 0$: $3x = -3$, centro (−1; −2). $r^2 = 4^2 + 3^2 = 25$: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$. Controllo con B: $1 + 9 - 2 + 12 - 20 = 0$. ✓

14. $r = |3 + 8 + 4|/5 = 3$: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Perpendicolare per C: $y + 2 = -(4/3)(x - 1)$, cioè $4x + 3y + 2 = 0$; con la tangente dà $T(-4/5; 2/5)$. Controllo: $CT^2 = (9/5)^2 + (12/5)^2 = 9$. ✓

15. Centro (1; 2), $r = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. a) $d = |1 + 4 - 10|/\sqrt{5} = \sqrt{5}$: tangente; con $x = 10 - 2y$: $5y^2 - 40y + 80 = 0$, $(y - 4)^2 = 0$, $\Delta = 0$: punto (2; 4). b) $d = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 > \sqrt{5}$: esterna; $2x^2 + 4x + 5 = 0$, $\Delta/4 = 4 - 10 < 0$. c) $d = 1/\sqrt{2} < \sqrt{5}$: secante; $2x^2 - 6x = 0$, punti (0; 0) e (3; 3).

16. $d = 15/5 = 3$, corda $2\sqrt{25 - 9} = 8$. Punti: da $y = (4x - 15)/3$, $25x^2 - 120x = 0$, $x = 0$ o $x = 24/5$: (0; −5) e (24/5; 7/5); distanza $\sqrt{(24/5)^2 + (32/5)^2} = 40/5 = 8$. ✓

17. Verifica: $36 + 4 - 36 + 8 - 12 = 0$ ✓. Centro (3; −2); il raggio CA ha $m = 4/3$, la tangente $m = -3/4$: $3x + 4y - 26 = 0$. Sdoppiamento: $6x + 2y - 3(x + 6) + 2(y + 2) - 12 = 0$, cioè $3x + 4y - 26 = 0$. ✓

18. $PO^2 = 20 > 10$: P è esterno. Fascio $y - 2 = m(x - 4)$; $|2 - 4m|/\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{10}$ dà $3m^2 - 8m - 3 = 0$, $m = 3$ o $m = -1/3$. Tangenti $y = 3x - 10$ e $x + 3y - 10 = 0$ (due soluzioni: nessuna verticale da cercare). Punti di tangenza (3; −1) e (1; 3).

19. a) Centri (0; 0) e (3; 0), raggi 2 e 1, $d = 3 = 2 + 1$: tangenti esternamente. Sottraendo: $6x - 12 = 0$, $x = 2$, punto (2; 0). b) Centri (0; 0) e (3; 3), raggi 2 e $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, $d = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$, compreso tra 1,16 e 5,16: secanti. Asse radicale $x + y - 2 = 0$; con $x^2 + y^2 = 4$: $x^2 - 2x = 0$, punti (0; 2) e (2; 0).

20. Sviluppando:
$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + {x_0}^2 + {y_0}^2 - r^2 = 0$: x^2 e y^2 hanno coefficiente 1, il prodotto xy non compare perché ogni quadrato contiene una sola variabile. Viceversa $x^2 + ax = (x + a/2)^2 - a^2/4$ e analogamente per y: l'equazione equivale a
$(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 = a^2/4 + b^2/4 - c$. Il primo membro è una somma di quadrati, non negativa: se il secondo membro è positivo si ha la circonferenza di centro $(-a/2; -b/2)$ e raggio uguale alla sua radice, se è nullo un solo punto, se è negativo nessun punto.

21. Le formule valgono solo con coefficiente 1 per x^2 e y^2: bisogna prima dividere per 2.
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$: centro $(2; -3)$,
$r^2 = 4 + 9 + 3 = 16$, $r = 4$.

22. Sottraendo si ha $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$, che ha come vettore perpendicolare $(a_1 - a_2; b_1 - b_2)$. Il vettore C_1C_2 ha componenti
$(-a_2/2 + a_1/2; -b_2/2 + b_1/2)$, cioè metà del precedente: è parallelo alla normale dell'asse radicale, quindi la retta dei centri è perpendicolare all'asse radicale. c.v.d.

23. $PO^2 = 34 > 9$: P è esterno, le tangenti sono due. Manca la verticale $x = 3$ (distanza 3 da O), che non appartiene al fascio $y - 5 = m(x - 3)$. L'altra: $|5 - 3m|/\sqrt{m^2 + 1} = 3$ dà $25 - 30m + 9m^2 = 9m^2 + 9$, $m = 8/15$: $y - 5 = (8/15)(x - 3)$, cioè $8x - 15y + 51 = 0$; la condizione $\Delta = 0$ dà la stessa equazione di primo grado in m.

24. $(x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 50$: $2x^2 + 2y^2 + 18 = 50$, $x^2 + y^2 = 16$: circonferenza di centro O (punto medio di AB) e raggio 4. Ogni passaggio è un'equivalenza, quindi il luogo è tutta e sola la circonferenza. In generale $x^2 + y^2 = (k - 18)/2$: circonferenza per $k > 18$, il solo punto O per $k = 18$, vuoto per $k < 18$.

25. Asse di AB: $x = 2$. Asse di BC: punto medio $(5; 2)$, $m_{BC} = -2$, quindi $y - 2 = (1/2)(x - 5)$, cioè $x - 2y - 1 = 0$. Circocentro $(2; 1/2)$; $r^2 = 16 + 1/4 = 65/4$. Equazione $x^2 + y^2 - 4x - y - 12 = 0$; controllo con C:
$16 + 16 - 16 - 4 - 12 = 0$. ✓

26. Ipotenusa $5x + 12y - 60 = 0$. $|17r - 60|/13 = r$; l'incentro è dalla parte di O, quindi $60 - 17r = 13r$, $r = 2$. Inscritta: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. Controllo:
$(12 + 5 - 13)/2 = 2$ ✓. Circoscritta: centro nel punto medio dell'ipotenusa $(6; 5/2)$, raggio $13/2$:
$x^2 + y^2 - 12x - 5y = 0$.

27. a) $x^2 + y^2 = 100$ e $x^2 + y^2 - 12x - 28 = 0$; sottraendo, $12x - 72 = 0$, $x = 6$, $y = \pm 8$: $(6; 8)$ o $(6; -8)$. b) La distanza di $(6; 8)$ da C è 6, quella di $(6; -8)$ è $\sqrt{36 + 256} \approx 17{,}1$ km. Il telefono è in $(6; 8)$.

28. a) I punti più vicino e più lontano stanno sulla retta OQ: minima $10 - 4 = 6$ m in $(4; 0)$, massima $10 + 4 = 14$ m in $(-4; 0)$. b) $x^2 + y^2 = 16$ e $(x - 10)^2 + y^2 = 100$: sottraendo, $20x - 16 = 0$, $x = 4/5$; $y^2 = 16 - 16/25 = 384/25$, $y = \pm 8\sqrt{6}/5 \approx \pm 3{,}92$. I punti sono $(0{,}8; \pm 3{,}92)$ circa.

29. a) Origine al centro della base, asse x sul piano stradale: $y = \sqrt{25 - x^2}$, $-5 \le x \le 5$. b) Ai bordi del camion, $x = \pm 1{,}5$: $y = \sqrt{25 - 2{,}25} = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}77$ m > 4 m: passa. c) $\sqrt{25 - x^2} \ge 4{,}5 \Leftrightarrow x^2 \le 4{,}75$, $|x| \le \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$: larghezza massima circa 4,36 m.

30. a) Due, una, nessuna. b) $x = 2$ e $3x - 4y + 10 = 0$, come nell'esempio. c) I due segmenti di tangente restano sempre uguali; per $P(2; 4)$ misurano 4, e in generale $PT = \sqrt{PO^2 - r^2}$ (teorema di Pitagora nel triangolo OTP, rettangolo in T).

31. a) $C(2; 1)$, $r = \sqrt{5}$. b) $c = 0$: passa per O. Il raggio OC ha $m = 1/2$, la tangente $m = -2$: $y = -2x$ (sdoppiamento: $-2x - y = 0$). c) $2x^2 - 6x = 0$: punti $(0; 0)$, $(3; 3)$, corda $3\sqrt{2}$; oppure $d = 1/\sqrt{2}$, $2\sqrt{5 - 1/2} = 3\sqrt{2}$. ✓

32. Il centro di una circonferenza tangente ai due assi dista r da entrambi: è $(\pm r; \pm r)$, sulla bisettrice di un quadrante, e la circonferenza sta tutta in quel quadrante. Poiché A è nel primo quadrante, il centro è $(r; r)$, sulla bisettrice $y = x$. $(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2$: $r^2 - 6r + 5 = 0$, $r = 1$ o $r = 5$. Due circonferenze:
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$.