CAPITOLO

5

La retta e i luoghi geometrici

«Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che, in seguito, per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune linee rette.»
— René Descartes, La Géométrie (1637), libro I (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Dimostrare la formula della distanza di un punto da una retta e calcolare l'area di un triangolo dati i vertici.
2. Trovare l'equazione di un luogo geometrico, anche descritto da un parametro, controllando «tutti e soli».
3. Scrivere le equazioni dell'asse di un segmento e delle bisettrici degli angoli di due rette.
4. Dimostrare lo stesso teorema con il metodo sintetico e con il metodo analitico, confrontandoli.
5. Risolvere problemi su triangoli, simmetrie e percorsi minimi nel piano cartesiano.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Distanze e aree nel piano cartesiano 2
5.2 I luoghi geometrici nel piano cartesiano 9
5.3 Sintetico e analitico: due modi di dimostrare 13
5.4 Problemi nel piano: triangoli, simmetrie, percorsi minimi 15

Matematica 3 · Parte III · Retta, parabola e circonferenza nel piano cartesiano · versione 1.0
Capitolo 5: La retta e i luoghi geometrici · pagine 121–144 del volume completo · estratto per lo studio

Un navigatore satellitare deve decidere se un'auto è ancora sulla strada o se ne è allontanata, e di quanto; un programma di disegno deve trovare il punto in cui due linee si incrociano; un ingegnere vuole collocare un ripetitore alla stessa distanza da tre paesi. Sono domande geometriche, ma il computer le affronta con le coordinate: le trasforma in equazioni e le risolve. Lo scorso anno, in *Matematica 2*, hai imparato a scrivere l'equazione di una retta, a riconoscere rette parallele e perpendicolari e a calcolare distanze e punti medi. In questo capitolo quegli strumenti diventano un metodo.

Prima completiamo il quadro sulla retta: **dimostriamo** la formula della distanza di un punto da una retta, che nel volume dello scorso anno era stata solo enunciata, e ricaviamo una formula per l'area di un triangolo di cui si conoscono i vertici. Il cuore del capitolo è il concetto di **luogo geometrico** tradotto in coordinate: è la chiave con cui, nei due capitoli successivi, scopriremo le equazioni della parabola e della circonferenza (e, il prossimo anno, quelle dell'ellisse e dell'iperbole). Infine confrontiamo due modi di fare geometria, quello **sintetico** di Euclide e quello **analitico** di Cartesio, dimostrando lo stesso teorema in entrambi.

5.1 Distanze e aree nel piano cartesiano

5.1.1 Che cosa sappiamo già

La Tabella 5.1 riassume i risultati sul piano cartesiano e sulla retta studiati in *Matematica 2* (capitolo 5). Non li dimostriamo di nuovo: li useremo come strumenti. Due dettagli torneranno spesso. Una retta in **forma implicita** r: $ax + by + c = 0$ ha coefficiente angolare $m = -a/b$ se $b \neq 0$, mentre è verticale se $b = 0$. Perciò due rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele quando $ab' - a'b = 0$ e perpendicolari quando $aa' + bb' = 0$: queste condizioni valgono anche per le rette verticali e orizzontali, per le quali il coefficiente angolare non esiste o è nullo. Le ultime due righe della tabella danno un nome a due famiglie di rette che useremo spesso: l'insieme di tutte le rette che passano per un punto A si chiama **fascio proprio** di centro A (sono le rette $y - y_A = m(x - x_A)$ al variare di m, più la retta verticale $x = x_A$, che non ha coefficiente angolare); l'insieme delle rette parallele a una direzione data si chiama **fascio improprio**.

Tabella 5.1 Punti e rette nel piano cartesiano: il richiamo da *Matematica 2*. $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ sono punti; $r: ax + by + c = 0$ e $r': a'x + b'y + c' = 0$ sono rette.

Grandezza o condizione	Formula
Distanza tra due punti	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Punto medio di AB	$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
Baricentro del triangolo ABC	$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$
Forma esplicita e implicita	$y = mx + q, \quad ax + by + c = 0$
Coefficiente angolare da due punti	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $(x_A \neq x_B)$
Retta per un punto con coefficiente angolare m	$y - y_A = m(x - x_A)$
Retta per due punti	$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$ (denominatori non nulli)
Rette parallele	$m = m'$, cioè $ab' - a'b = 0$
Rette perpendicolari	$m \cdot m' = -1$, cioè $aa' + bb' = 0$
Fascio proprio di centro A	$y - y_A = m(x - x_A)$ e $x = x_A$
Fascio improprio	$y = mx + k$ (m fisso), oppure $x = k$

5.1.2 La distanza di un punto da una retta

Ricordiamo che la distanza di un punto P da una retta r è la lunghezza del segmento PH, dove H è il piede della perpendicolare condotta da P a r: è la minima tra le distanze di P dai punti della retta. Per dimostrare la formula che la calcola ci serve un'osservazione semplice ma utilissima sui coefficienti della forma implicita.

Siano $Q_1(x_1; y_1)$ e $Q_2(x_2; y_2)$ due punti distinti di $r: ax + by + c = 0$. Sottraendo membro a membro le uguaglianze $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$ otteniamo

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

Il primo membro ha la forma della condizione di perpendicolarità della Tabella 5.1: come in fisica, chiamiamo **vettore** di componenti $(a; b)$ lo spostamento di a in orizzontale e di b in verticale. Lo spostamento da Q_1 a Q_2, di componenti $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, ha la direzione della retta; l'uguaglianza dice che lo spostamento $(a; b)$ gli è perpendicolare. Se infatti nessuna delle componenti è nulla, i due spostamenti hanno pendenze b/a e $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, e l'uguaglianza equivale a dire che il loro prodotto è -1; i casi con una componente nulla (rette orizzontali e verticali) si controllano a vista. Il vettore $n(a; b)$ è dunque perpendicolare alla retta: lo chiamiamo **vettore**

normale alla retta r: $ax + by + c = 0$. Per esempio la retta $3x + 4y - 7 = 0$ ha vettore normale $n(3; 4)$: ogni retta perpendicolare a essa ha la direzione di n.

IN SINTESI

Teorema (distanza di un punto da una retta). Ipotesi: $P_0(x_0; y_0)$ è un punto e r: $ax + by + c = 0$ è una retta, con a e b non entrambi nulli. **Tesi:** la distanza di P_0 da r è

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La retta va scritta in forma implicita. Il numeratore è nullo se e solo se P_0 sta su r.

Dimostrazione. La perpendicolare a r condotta da P_0 ha la direzione del vettore normale $n(a; b)$, quindi i suoi punti si ottengono spostandosi da P_0 di un multiplo di n: sono i punti $(x_0 + ta; y_0 + tb)$, con t numero reale. Il piede H della perpendicolare è il punto di questa forma che sta su r; sostituendo nell'equazione della retta

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

Il denominatore $a^2 + b^2$ non è nullo perché a e b non sono entrambi nulli. Il vettore P_0H è $tn = (ta; tb)$, quindi la sua lunghezza è

$$P_0H = \sqrt{t^2a^2 + t^2b^2} = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

c.v.d.

La dimostrazione dà più della distanza: dà anche le coordinate del piede H. Proviamo con il punto $P(4; 5)$ e la retta r: $3x + 4y - 7 = 0$ (Figura 5.1). La formula dà subito $d = |12 + 20 - 7| : 5 = 25 : 5 = 5$. Seguendo la dimostrazione, i punti della perpendicolare sono $(4 + 3t; 5 + 4t)$; sostituendo nella retta si ha $12 + 9t + 20 + 16t - 7 = 0$, cioè $25 + 25t = 0$ e $t = -1$: il piede è $H(1; 1)$, e infatti $3 + 4 - 7 = 0$. Come controllo, $PH = \sqrt{9 + 16} = 5$.

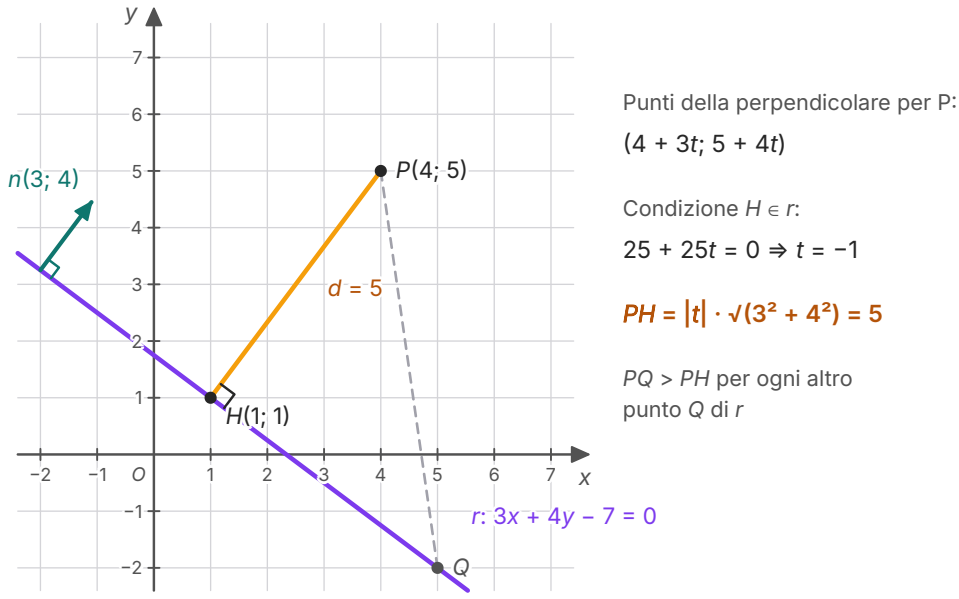


Figura 5.1 La distanza di $P(4; 5)$ dalla retta r: $3x + 4y - 7 = 0$. Il vettore normale $n(3; 4)$ è perpendicolare a r; la perpendicolare da P ha la sua direzione e incontra r nel piede $H(1; 1)$. Il segmento PQ che congiunge P con un altro punto di r è più lungo di PH.

Due conseguenze immediate. La **distanza tra due rette parallele** si calcola come distanza di un punto qualsiasi dell'una dall'altra; se le rette sono scritte con gli stessi coefficienti di x e di y, $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$, si ottiene $d = |c - c'| : \sqrt{a^2 + b^2}$. Inoltre il segno di $ax_0 + by_0 + c$ dice **da che parte** della retta sta il punto: i punti per cui l'espressione è positiva stanno in uno dei due semipiani, quelli per cui è negativa nell'altro, come hai visto nella programmazione lineare (*Matematica 2*, cap. 6).

5.1.3 L'area di un triangolo dati i vertici

Con la distanza punto-retta possiamo calcolare l'area di un triangolo come semiprodotto di base e altezza senza disegnarlo. Facciamolo una volta per tutte con le lettere. Dati $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, poniamo

$$u_1 = x_B - x_A, \quad u_2 = y_B - y_A, \quad v_1 = x_C - x_A, \quad v_2 = y_C - y_A$$

cioè $u(u_1; u_2)$ è il vettore AB e $v(v_1; v_2)$ è il vettore AC. La retta AB ha direzione u, quindi vettore normale $(u_2; -u_1)$, ed equazione $u_2(x - x_A) - u_1(y - y_A) = 0$ (passa per A e per B: verificalo). L'altezza relativa ad AB è la distanza di C da questa retta:

$$h = \frac{|u_2 v_1 - u_1 v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \qquad AB = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Area} = \frac{1}{2}\,|u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

IN SINTESI

Area di un triangolo dati i vertici. Se AB ha componenti $(u_1; u_2)$ e AC ha componenti $(v_1; v_2)$, l'area del triangolo ABC è la metà del valore assoluto di un determinante:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

Sviluppando i prodotti si ottiene la forma equivalente del Formulario:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

Il determinante è nullo se e solo se A, B, C sono **allineati**.

Il risultato ha un significato geometrico semplice: $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$ è l'area del parallelogramma costruito su AB e AC; il triangolo ne è la metà (Figura 5.2). Senza il valore assoluto il determinante ha un segno: è positivo quando, andando da A a B e poi a C, si gira in senso antiorario, negativo nel senso orario.

Esempio. Per $A(1; -1)$, $B(6; 2)$, $C(2; 4)$ si ha $u(5; 3)$, $v(1; 5)$ e $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 25 - 3 = 22$: l'area è 11. Controlliamo con base e altezza: la retta AB è $3x - 5y - 8 = 0$, $AB = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ e la distanza di C da AB è $|6 - 20 - 8| : \sqrt{34} = 22 : \sqrt{34}$, quindi l'area è $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot 22 : \sqrt{34} = 11$. Per un poligono qualsiasi basta dividerlo in triangoli con le diagonali da un vertice e sommare le aree.

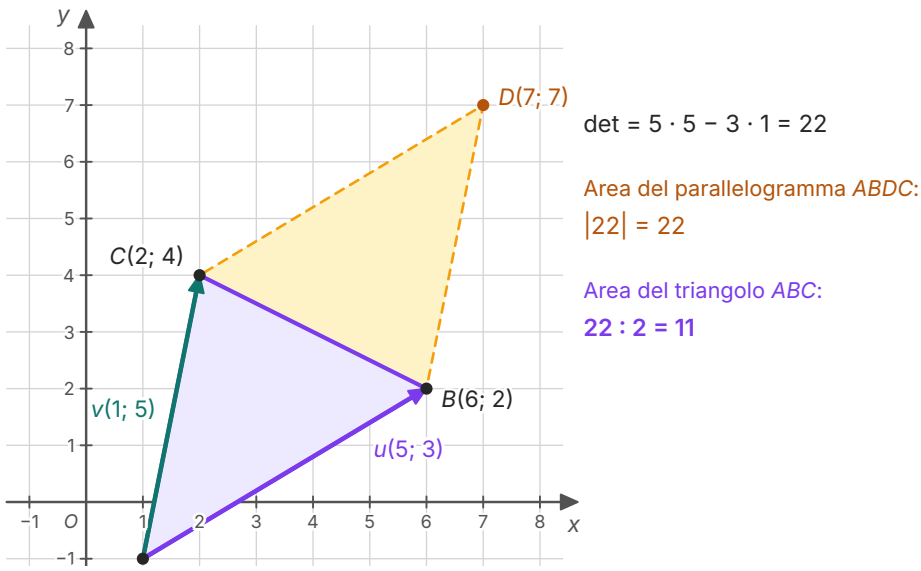


Figura 5.2 Il triangolo $A(1; -1)$, $B(6; 2)$, $C(2; 4)$ è metà del parallelogramma $ABDC$ costruito sui vettori $u = AB$ e $v = AC$, con $D(7; 7)$. L'area del parallelogramma è il valore assoluto del determinante $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 22$.

APPROFONDIMENTO · I FASCI DI RETTE GENERATI DA DUE RETTE

In questo capitolo ci bastano le rette per un punto. Esiste però un modo più generale di scrivere un fascio, utile quando un problema consegna due rette, oppure un'equazione in cui un parametro compare in più punti, e chiede di scegliere tra infinite rette quella con una certa proprietà.

Siano r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ due rette **incidenti** nel punto C. Per ogni coppia di numeri λ, μ non entrambi nulli consideriamo l'equazione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

È una retta. L'equazione è di primo grado: i coefficienti di x e di y sono $\lambda a + \mu a'$ e $\lambda b + \mu b'$, e se fossero entrambi nulli i vettori normali $(a; b)$ e $(a'; b')$ sarebbero proporzionali, cioè r e s sarebbero parallele. **Passa per C.** Nel punto C le due parentesi sono nulle, quindi l'equazione è soddisfatta qualunque siano λ e μ. **Le dà tutte.** Sia t una retta qualsiasi per C e $Q(x_Q; y_Q)$ un suo punto diverso da C. Scegliamo $\lambda = a'x_Q + b'y_Q + c'$ e $\mu = -(ax_Q + by_Q + c)$: non sono entrambi nulli, perché Q non sta su entrambe le rette, e con questa scelta l'equazione è soddisfatta anche da Q. È quindi la retta per C e Q, cioè t.

L'insieme di queste rette si chiama **fascio generato da due rette**, e r e s sono le sue **rette generatrici**. Di solito si divide per λ e si usa un solo parametro $k = \mu/\lambda$:

Fascio generato da due rette. Se r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ sono incidenti nel punto C, l'equazione

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

rappresenta tutte le rette per C tranne s, la **retta esclusa**: s corrisponde a $\lambda = 0$, che nella forma con un solo parametro non si può scegliere (si dice, in modo intuitivo, che si ottiene «per k che tende all'infinito»). La retta r si ottiene per $k = 0$. Il centro C si trova risolvendo il sistema delle due generatrici.

Spesso il fascio arriva «mescolato», come un'unica equazione in cui il parametro compare in più punti. Per riconoscerlo si **raccoglie il parametro**. Per esempio

$$(2 + k)x + (k - 1)y + 1 - 4k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$$

Le generatrici sono r: $2x - y + 1 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$; sommando le due equazioni si ha $3x - 3 = 0$, quindi $x = 1$, $y = 3$: il fascio è proprio, con centro $C(1; 3)$, e la retta esclusa è s (Figura 5.3).

Ogni condizione imposta a una retta del fascio diventa un'equazione nel parametro k. Se la condizione è «passare per un punto», l'equazione è di primo grado; se è «avere una certa distanza da un punto», compare un valore assoluto e, elevando al quadrato, un'equazione di secondo grado, che può avere due soluzioni, una o nessuna.

Problema. Nel fascio $(2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$ trova la retta: a) che passa per $P(3; 0)$; b) parallela alla retta $y = -2x + 5$; c) parallela all'asse y; d) che ha distanza 1 dall'origine.

Soluzione. Scriviamo il fascio nella forma $(2+k)x + (k-1)y + 1 - 4k = 0$.

a) Sostituiamo $x = 3$, $y = 0$: $7 + k(-1) = 0$, $k = 7$. La retta è $9x + 6y - 27 = 0$, cioè $3x + 2y - 9 = 0$. Controllo: passa per $C(1;3)$ perché $3 + 6 - 9 = 0$.

b) Per $k \neq 1$ il coefficiente angolare è $-(2+k)/(k-1)$. Imponiamo che valga -2: $2 + k = 2k - 2$, $k = 4$. La retta è $6x + 3y - 15 = 0$, cioè $2x + y - 5 = 0$.

c) Una retta è parallela all'asse y se manca il termine in y: $k - 1 = 0$, $k = 1$, e si ottiene $3x - 3 = 0$, cioè $x = 1$.

d) La distanza di $O(0;0)$ dalla retta del fascio è $|1 - 4k| : \sqrt{(2+k)^2 + (k-1)^2}$. Uguagliandola a 1 ed elevando al quadrato (i due membri sono non negativi, quindi l'equazione ottenuta è equivalente):

$$(1-4k)^2 = (2+k)^2 + (k-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 14k^2 - 10k - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7k^2 - 5k - 2 = 0$$

Le soluzioni sono $k = 1$ e $k = -2/7$. Per $k = 1$ ritroviamo $x = 1$; per $k = -2/7$, moltiplicando per 7, $12x - 9y + 15 = 0$, cioè $4x - 3y + 5 = 0$, che dista $|5| : \sqrt{16 + 9} = 1$ dall'origine. Resta da controllare la retta esclusa $x + y - 4 = 0$: dista $4 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ dall'origine, quindi non è una soluzione. Le rette cercate sono due.

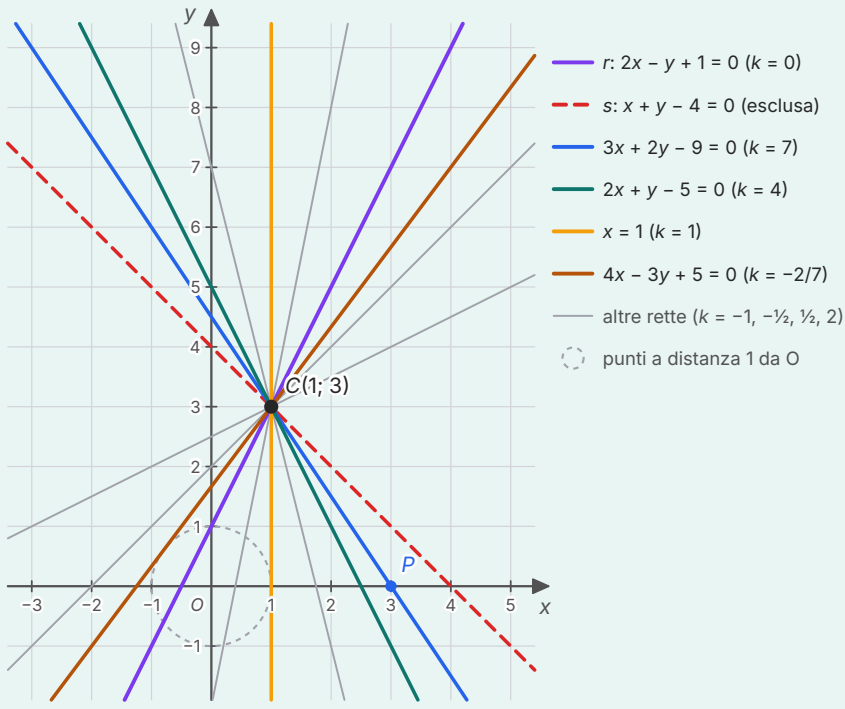


Figura 5.3 Il fascio $(2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$, di centro $C(1; 3)$. Sono evidenziate la generatrice r ($k = 0$), la retta esclusa s e le quattro rette dell'esempio svolto. Le rette $x = 1$ e $4x - 3y + 5 = 0$ hanno distanza 1 da O: toccano la circonferenza tratteggiata di centro O e raggio 1.

Attenzione alla retta esclusa. Cerchiamo nel fascio $(2x - y + 1) + k(x + y - 4) = 0$ la retta parallela a $y = -x$. Imponendo $-(2 + k)/(k - 1) = -1$ si ottiene $2 + k = k - 1$, cioè $2 = -1$: nessun valore di k. Concludere «la retta non esiste» è sbagliato: la retta cercata è proprio la generatrice esclusa $x + y - 4 = 0$, che ha coefficiente angolare -1 e passa per C. Quando l'equazione in k non ha soluzioni, o ne ha meno del previsto, controlla **sempre** la retta esclusa a parte.

5.2 I luoghi geometrici nel piano cartesiano

In *Matematica 1* hai incontrato i **luoghi geometrici**: un luogo è l'insieme di **tutti e soli** i punti del piano che godono di una proprietà, detta **proprietà caratteristica** del luogo. L'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi; la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti dell'angolo equidistanti dai lati; la circonferenza è il luogo dei punti che hanno distanza fissata da un centro. «Tutti e soli» significa due cose: ogni punto con la proprietà appartiene al luogo, e ogni punto del luogo ha la proprietà.

Nel piano cartesiano un luogo si descrive con un'equazione in x e y: l'equazione del luogo è soddisfatta da tutte e sole le coppie di coordinate dei suoi punti. Per trovarla si procede sempre

in quattro passi.

1. Si indica con $P(x; y)$ il **punto generico**: un punto qualsiasi del piano, di cui non sappiamo ancora nulla.
2. Si traduce la proprietà caratteristica in un'uguaglianza tra espressioni in x e y, usando distanze, punti medi, coefficienti angolari.
3. Si semplifica fino a un'equazione riconoscibile (una retta, una coppia di rette, una circonferenza...).
4. Si controlla «tutti e soli»: se ogni passaggio è un'equivalenza l'equazione descrive esattamente il luogo; se qualche passaggio non lo è (un'elevazione al quadrato, una divisione per un'espressione che può annullarsi, un parametro con valori limitati) si individuano i punti da togliere o da aggiungere.

5.2.1 L'asse di un segmento e le parallele a distanza data

Troviamo l'asse del segmento di estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; -3)$. Il punto $P(x; y)$ appartiene all'asse se e solo se $PA = PB$, cioè, poiché le distanze sono non negative, se e solo se $PA^2 = PB^2$:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 8y - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 5 = 0$$

I termini x^2 e y^2 si cancellano sempre, ed è questo il motivo per cui l'asse è una retta. Ripetendo il calcolo con le lettere si trova $2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y + x_A{}^2 + y_A{}^2 - x_B{}^2 - y_B{}^2 = 0$: il vettore normale è proporzionale ad AB, quindi l'asse è perpendicolare ad AB, e si verifica subito che passa per il punto medio. Nel nostro esempio il vettore normale $(3; -2)$ è proporzionale ad $AB(6; -4)$, e il punto medio $M(1; -1)$ soddisfa l'equazione: $3 + 2 - 5 = 0$.

Allo stesso modo, il luogo dei punti che hanno distanza 2 dalla retta $3x - 4y + 1 = 0$ è descritto da $|3x - 4y + 1| : 5 = 2$, cioè $3x - 4y + 1 = \pm 10$: è formato da **due** rette parallele, $3x - 4y - 9 = 0$ e $3x - 4y + 11 = 0$, una per ciascun semipiano. Il luogo dei punti a distanza ρ da un punto $C(x_0; y_0)$ è invece descritto da $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$: è la circonferenza, che studieremo nel capitolo 7.

5.2.2 Le bisettrici degli angoli formati da due rette

Due rette incidenti r: $ax + by + c = 0$ e s: $a'x + b'y + c' = 0$ formano quattro angoli, a coppie opposti al vertice. Il luogo dei punti equidistanti da r e da s è

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Due numeri hanno lo stesso valore assoluto se e solo se sono uguali oppure opposti, quindi l'equazione equivale a due equazioni di primo grado, con il segno + e con il segno −. Il luogo è formato da due rette, le **bisettrici di due rette incidenti**: ciascuna biseca due angoli opposti al vertice, e le due bisettrici sono perpendicolari tra loro (lo dimostrerai negli esercizi).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Trova le bisettrici degli angoli formati dalle rette r: $3x - 4y + 5 = 0$ e s: $y - 2 = 0$, e stabilisci quale biseca l'angolo acuto.

Soluzione. Le rette si incontrano in $C(1; 2)$: con $y = 2$ si ha $3x - 3 = 0$. I denominatori sono $\sqrt{9 + 16} = 5$ e $\sqrt{0 + 1} = 1$, quindi il luogo è $|3x - 4y + 5| = 5|y - 2|$:

$$3x - 4y + 5 = 5(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad b_1\colon x - 3y + 5 = 0$$

$$3x - 4y + 5 = -5(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad b_2\colon 3x + y - 5 = 0$$

Entrambe passano per C, e sono perpendicolari: $1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0$. La retta r ha coefficiente angolare $3/4$ e forma con s, che è orizzontale, un angolo acuto di circa 36,9°; la bisettrice di quest'angolo deve salire più lentamente di r: è b_1, con coefficiente angolare $1/3$. Controllo su un punto di b_1, $Q(7; 4)$: $d(Q, r) = |21 - 16 + 5| : 5 = 2$ e $d(Q, s) = |4 - 2| = 2$ (Figura 5.4).

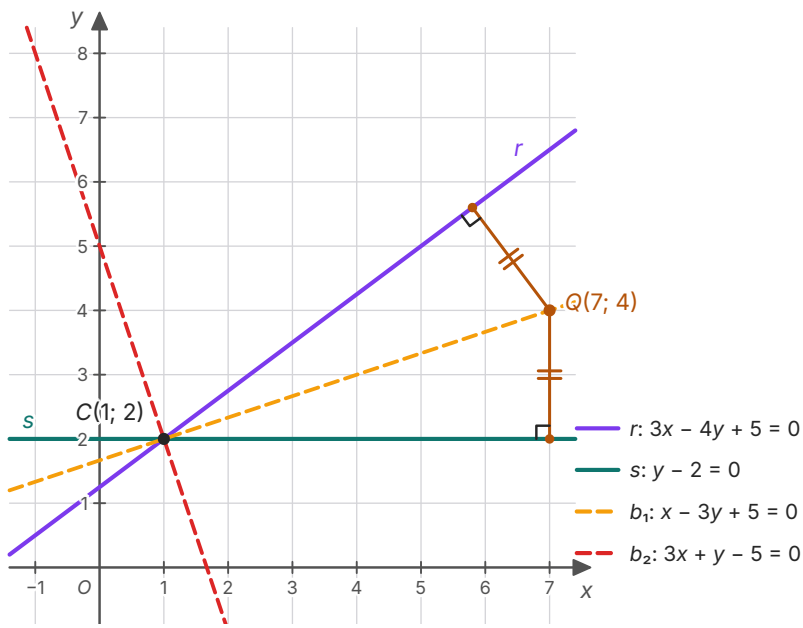


Figura 5.4 Le bisettrici b_1 e b_2 degli angoli formati da r: $3x - 4y + 5 = 0$ e s: $y = 2$, incidenti in $C(1; 2)$. Il punto $Q(7; 4)$ di b_1 ha distanza 2 da entrambe le rette.

5.2.3 Luoghi descritti da un parametro

A volte il luogo è la traccia di un punto che si muove: le sue coordinate dipendono da un **parametro** t, che può essere un tempo, una posizione, un angolo. Si dice allora che il luogo è dato in **forma parametrica**. Per trovarne l'equazione cartesiana si esegue l'**eliminazione del parame-**

tro: si ricava t da una delle due coordinate e lo si sostituisce nell'altra. Se $P(2t - 1;\ 3t + 2)$, da $x = 2t - 1$ si ha $t = (x + 1)/2$, e quindi $y = 3(x + 1)/2 + 2$, cioè $3x - 2y + 7 = 0$: il punto si muove su una retta.

Esempio. Il punto A percorre la retta $y = 2x$ e $B(4;\ 0)$ è fisso: che cosa descrive il punto medio M di AB? Con $A(t;\ 2t)$ si ha $M((t + 4)/2;\ t)$. Da $y = t$ segue $x = (y + 4)/2$, cioè $2x - y - 4 = 0$: una retta parallela a quella percorsa da A, e passante per $(2;\ 0)$, punto medio tra O e B. Tutti i punti della retta si ottengono, perché t può assumere qualunque valore reale.

La scala che scivola. Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro e scivola: il piede A si allontana sul pavimento, la cima B scende lungo il muro. Prendiamo il pavimento come asse x e il muro come asse y, con $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Per il teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = 16$. Il punto medio della scala è $M(a/2;\ b/2)$: con $x = a/2$, $y = b/2$ si ha $a = 2x$, $b = 2y$ e quindi $4x^2 + 4y^2 = 16$, cioè

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

Il punto medio della scala resta sempre a 2 m dall'angolo tra muro e pavimento e descrive un quarto di circonferenza (Figura 5.5). Il controllo «tutti e soli» funziona: ogni punto $(x;\ y)$ dell'arco, con $x, y \geq 0$, è il punto medio della scala con $a = 2x$ e $b = 2y$, perché $a^2 + b^2 = 4(x^2 + y^2) = 16$.

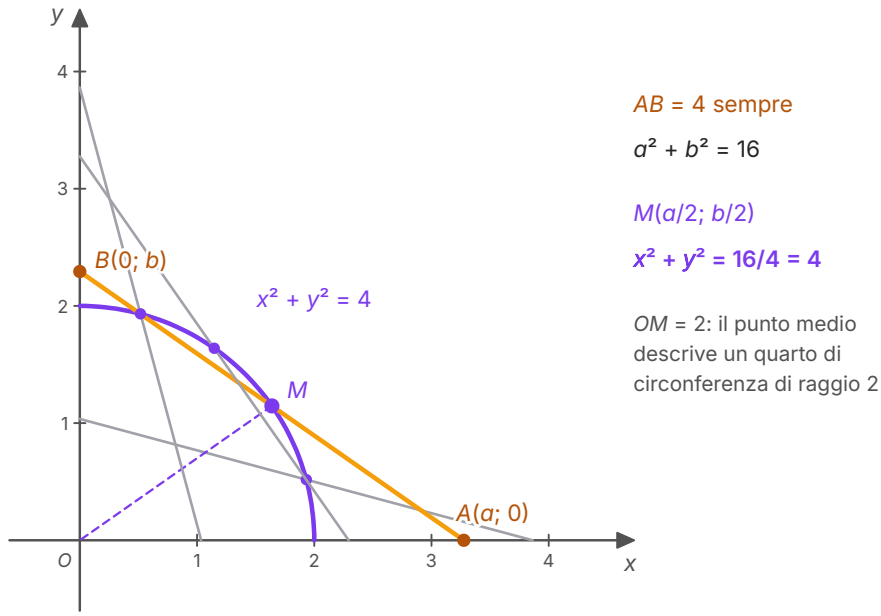


Figura 5.5 Una scala AB lunga 4 scivola con gli estremi sugli assi: sono disegnate quattro posizioni. Il punto medio M descrive l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ nel primo quadrante, perché OM, mediana relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AOB, è metà di AB.

ERRORE FREQUENTE

Il parametro non sempre percorre tutto $\mathbb{R}$. Se $P(t^2; 2t^2 + 1)$, eliminando t^2 si ottiene $y = 2x + 1$; ma $x = t^2$ non può essere negativo, quindi il luogo è solo la **semiretta** di equazione $y = 2x + 1$ con $x \geq 0$. Allo stesso modo, nella scala servono $x \geq 0$ e $y \geq 0$: l'equazione $x^2 + y^2 = 4$ da sola descriverebbe la circonferenza intera. L'equazione ottenuta eliminando il parametro contiene il luogo, ma può contenere anche punti in più: il controllo «tutti e soli» serve a toglierli.

5.3 Sintetico e analitico: due modi di dimostrare

Nei due anni precedenti, e nel capitolo 3 di questo volume, hai dimostrato i teoremi di geometria nel modo di Euclide: a partire da postulati e teoremi precedenti, ragionando sulle figure, con congruenze, parallele, similitudini. È il **metodo sintetico**. Con le coordinate si può procedere in un altro modo: si traduce l'ipotesi in equazioni, si calcola, si interpreta il risultato. È il **metodo analitico**, su cui si fonda la **geometria analitica**. Le *Indicazioni nazionali* chiedono di conoscere la «specificità dei due approcci»: confrontiamoli sullo stesso teorema.

IN SINTESI

Teorema (teorema delle mediane). Ipotesi: ABC è un triangolo; L, M, N sono i punti medi dei lati BC, CA, AB. **Tesi:** le tre mediane AL, BM, CN passano per uno stesso punto G, il baricentro, che divide ciascuna di esse in due parti, delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra: $AG = 2GL$, $BG = 2GM$, $CG = 2GN$.

Dimostrazione sintetica (è quella del capitolo 3, che riprendiamo per confrontarla). Siano G il punto in cui si incontrano le mediane BM e CN, e P, Q i punti medi di GB e di GC. Nel triangolo ABC il segmento NM che congiunge i punti medi di due lati è parallelo a BC e ne è la metà (teorema dei punti medi, Matematica 1); per lo stesso motivo, nel triangolo GBC, anche PQ è parallelo a BC e ne è la metà. Quindi NM e PQ sono paralleli e congruenti, e il quadrilatero $NMQP$ è un parallelogramma. Le diagonali di un parallelogramma si dividono a metà, quindi $GM = GP$ e $GN = GQ$. Ma $GP = PB$ e $GQ = QC$, dunque $BG = 2GM$ e $CG = 2GN$. Ripetendo il ragionamento con le mediane AL e BM si trova che AL taglia BM nel punto che la divide nel rapporto $2 : 1$ a partire da B, cioè ancora in G: le tre mediane passano per G. c.v.d.

Dimostrazione analitica. Fissiamo un riferimento cartesiano qualsiasi, con $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Il punto medio di BC è $L((x_B + x_C)/2; (y_B + y_C)/2)$. Il punto G_A della mediana AL tale che $AG_A = 2G_AL$ si ottiene partendo da A e percorrendo i due terzi del vettore AL:

$$\text{ascissa di } G_A\text{: } x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A\right) = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

e allo stesso modo la sua ordinata è $(y_A + y_B + y_C)/3$. Il risultato è **simmetrico** nelle tre lettere A, B, C: ripetendo il calcolo sulla mediana BM o sulla mediana CN si ottiene lo stesso punto. Quindi le tre mediane passano per il punto G di coordinate uguali alle medie delle coordinate dei vertici, che lo divide nel rapporto 2 : 1. c.v.d. Per il triangolo $A(-3; -1)$, $B(5; -2)$, $C(1; 6)$ si trova $G(1; 1)$ (Figura 5.6).

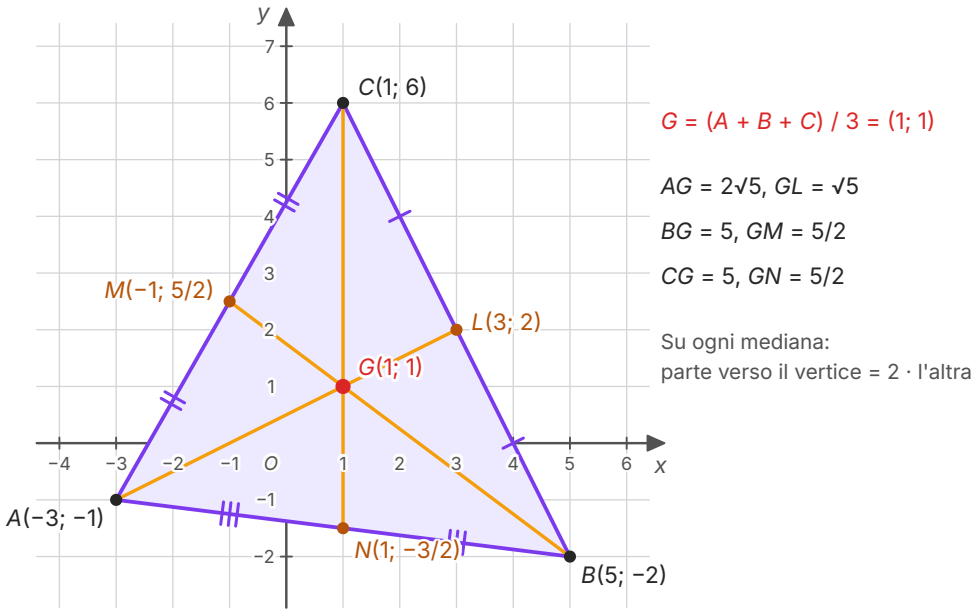


Figura 5.6 Le mediane del triangolo $A(-3; -1)$, $B(5; -2)$, $C(1; 6)$ si incontrano nel baricentro $G(1; 1)$. I trattini segnano i punti medi dei lati. Le distanze calcolate confermano il rapporto 2 : 1 su ciascuna mediana.

Che cosa mostra ciascun metodo. La dimostrazione sintetica è breve ma richiede un'idea, il parallelogramma $NMQP$, che non è affatto ovvia; in compenso spiega *perché* il teorema è vero, legandolo al teorema di Talete, e non dipende da alcun sistema di riferimento. La dimostrazione analitica non richiede idee: è un calcolo che si poteva prevedere fin dall'inizio, e in più fornisce le coordinate del baricentro. Il suo limite è che il significato geometrico rischia di perdersi nei conti, e che con figure più complicate i calcoli possono diventare lunghissimi. Un buon consiglio: nel metodo analitico **scegli il riferimento** in modo da semplificare i conti, per esempio con un vertice nell'origine e un lato sull'asse x; non si perde generalità, perché distanze, rapporti e allineamenti non dipendono dalla posizione degli assi.

APPROFONDIMENTO · CARTESIO, FERMAT E I LUOGHI

In *Matematica 2* hai visto che la geometria analitica nasce nel Seicento con René Descartes (Cartesio) e Pierre de Fermat. *La Géométrie* di Cartesio, uscita nel 1637 come appendice del *Discorso sul metodo*, si apre così: «Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che, in seguito, per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune linee rette» (traduzione della redazione). La prova di forza dell'opera è un problema sui luoghi che, come racconta Pappo di Alessandria, né Euclide né Apollonio avevano saputo risolvere completamente: trovare il luogo dei punti le cui distanze da tre o quattro rette date soddisfano una certa relazione. Cartesio lo affronta introducendo due lunghezze incognite e scrivendo un'equazione tra di esse.

Nel secondo libro distingue i luoghi in base alla linea che li descrive: se la linea è «retta o circolare, la si chiama un **luogo piano**; ma se è una parabola, o un'iperbole, o un'ellisse, la si chiama un luogo solido» (traduzione della redazione), e in ogni caso il luogo è descritto da un'equazione con due quantità incognite. Fermat aveva raggiunto idee simili in un breve trattato in latino sui luoghi piani e solidi, che circolò manoscritto negli stessi anni e fu stampato solo nel 1679, dopo la sua morte. I luoghi piani sono l'argomento di questo capitolo e del capitolo 7; tra i luoghi solidi, le coniche, quest'anno studieremo la parabola (capitolo 6), e il prossimo anno l'ellisse e l'iperbole.

5.4 Problemi nel piano: triangoli, simmetrie, percorsi minimi

Con distanze, rette per un punto e luoghi siamo in grado di risolvere in coordinate i problemi classici della geometria del triangolo, e un problema antico che lega la geometria alla fisica della luce.

5.4.1 I punti notevoli di un triangolo

Nel capitolo 3 hai dimostrato che in ogni triangolo gli assi dei lati, le altezze e le mediane passano, a tre a tre, per uno stesso punto: sono i punti notevoli del triangolo. In coordinate ciascuno si trova come intersezione di due rette: il **circocentro** come intersezione di due assi dei lati (è equidistante dai tre vertici, perché ogni asse è il luogo dei punti equidistanti da due vertici); l'**ortocentro** come intersezione di due altezze; il **baricentro** con la formula della media delle coordinate. La terza retta, asse o altezza, serve come controllo.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dato il triangolo $A(-2;\,0)$, $B(6;\,0)$, $C(0;\,4)$, trova l'area, il circocentro O', l'ortocentro H e il baricentro G.

Area. AB ha componenti $(8;\,0)$ e AC ha componenti $(2;\,4)$: l'area è $|8 \cdot 4 - 0 \cdot 2| : 2 = 16$. Qui si poteva anche notare che AB sta sull'asse x, con base 8 e altezza 4.

Circocentro. L'asse di AB è la retta verticale per il punto medio $(2;\,0)$: $x = 2$. L'asse di AC passa per il punto medio $(-1;\,2)$ ed è perpendicolare ad AC, che ha coefficiente angolare 2: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. Per $x = 2$ si ha $y = 2 - 3/2 = 1/2$: $O'(2;\,1/2)$. Controllo: $O'A^2 = 16 + 1/4 = 65/4$ e $O'C^2 = 4 + 49/4 = 65/4$.

Ortocentro. L'altezza relativa ad AB è la perpendicolare all'asse x per C, cioè l'asse y: $x = 0$. Il lato BC ha coefficiente angolare $(4 - 0) : (0 - 6) = -2/3$, quindi l'altezza da A ha coefficiente angolare $3/2$: $y = 3/2 \cdot (x + 2)$. Per $x = 0$ si ottiene $H(0;\,3)$. Controllo con la terza altezza: la retta BH ha coefficiente angolare $(3 - 0) : (0 - 6) = -1/2$ e il lato AC ha coefficiente angolare 2; il prodotto è -1, quindi BH è perpendicolare ad AC: è l'altezza relativa ad AC.

Baricentro. $G((-2 + 6 + 0)/3;\,(0 + 0 + 4)/3) = G(4/3;\,4/3)$.

Un'osservazione. I tre punti $H(0;\,3)$, $G(4/3;\,4/3)$, $O'(2;\,1/2)$ sono allineati: le rette HG e GO' hanno lo stesso coefficiente angolare, $(4/3 - 3) : (4/3 - 0) = -5/4$ e $(1/2 - 4/3) : (2 - 4/3) = -5/4$. Inoltre lo spostamento da H a G, di componenti $(4/3;\,-5/3)$, è il doppio di quello da G a O', di componenti $(2/3;\,-5/6)$: quindi $HG = 2GO'$. Non è una coincidenza: vale in ogni triangolo, e lo dimostrerai nell'ultimo esercizio del capitolo.

5.4.2 Il simmetrico di un punto rispetto a una retta

Il **simmetrico di un punto rispetto a una retta** r è il punto P' tale che r sia l'asse del segmento PP': PP' è perpendicolare a r e il suo punto medio è il piede H della perpendicolare da P. Quindi $P' = 2H - P$ (coordinata per coordinata). Nell'esempio della distanza, il simmetrico di $P(4;\,5)$ rispetto a r: $3x + 4y - 7 = 0$ ha coordinate $(2 \cdot 1 - 4;\; 2 \cdot 1 - 5) = (-2;\,-3)$. Controllo: $3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) - 7 = -25$, quindi anche P' dista $25 : 5 = 5$ da r, ma dall'altra parte, perché l'espressione ha segno opposto a quello che ha in P.

Ricordando la dimostrazione della formula della distanza si ottiene anche una formula diretta: se $t = -(ax_0 + by_0 + c)/(a^2 + b^2)$, il piede è $H(x_0 + ta;\, y_0 + tb)$ e il simmetrico è $P'(x_0 + 2ta;\, y_0 + 2tb)$. La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$, che conosci da Matematica 2 (cap. 7), scambia le coordinate: $(x;\,y) \mapsto (y;\,x)$. Con la formula appena trovata si verifica che quella rispetto alla retta $y = -x$ è $(x;\,y) \mapsto (-y;\,-x)$.

5.4.3 Il percorso minimo

Un problema antico: due punti A e B stanno dalla stessa parte di una retta r; qual è il punto Q di r per cui il percorso $AQ + QB$ è il più breve possibile? È il **problema di Erone**, dal nome del ma-

tematico Erone di Alessandria, vissuto probabilmente nel I secolo d.C., che lo usò per spiegare la riflessione della luce sugli specchi. La soluzione è un'idea sintetica, che le coordinate rendono un calcolo.

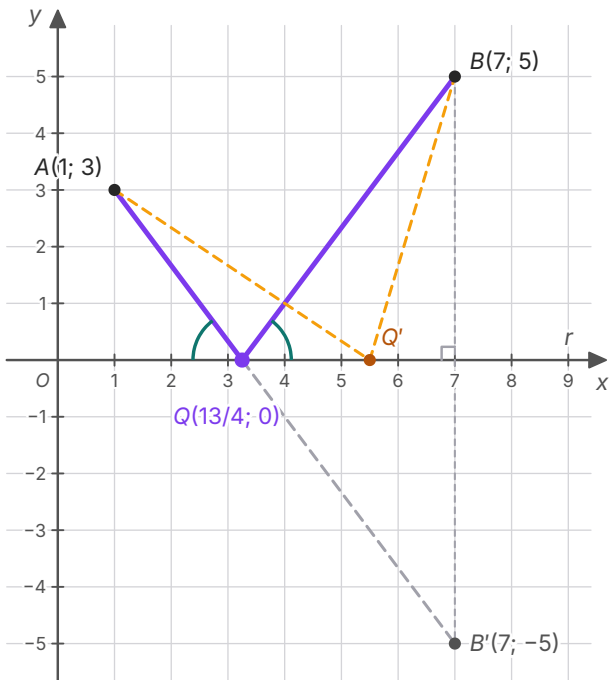
Sia B' il simmetrico di B rispetto a r. Per ogni punto Q di r si ha $QB = QB'$, perché r è l'asse di BB'. Quindi $AQ + QB = AQ + QB'$, e per la disuguaglianza triangolare $AQ + QB' \geq AB'$, con l'uguaglianza solo quando Q sta sul segmento AB'. Il percorso minimo passa per il punto in cui il segmento AB' attraversa r, e la sua lunghezza è AB'. In quel punto i segmenti AQ e QB formano angoli uguali con la retta.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Due cascine sono nei punti $A(1; 3)$ e $B(7; 5)$ di un riferimento in cui l'unità vale 100 m; un canale rettilineo corre lungo l'asse x. Si vuole costruire sulla riva una pompa Q e collegarla con due tubi rettilinei alle cascine, usando meno tubo possibile. Dove va la pompa? Quanto tubo serve?

Soluzione. Il simmetrico di B rispetto all'asse x è $B'(7; -5)$. La retta AB' ha coefficiente angolare $(-5 - 3) : (7 - 1) = -4/3$ ed equazione $y - 3 = -4/3 \cdot (x - 1)$. Ponendo $y = 0$: $x - 1 = 9/4$, $x = 13/4$. La pompa va in $Q(13/4; 0)$, cioè a 325 m dall'origine lungo il canale.

La lunghezza minima è $AB' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ unità, cioè 1000 m. Per confronto, con la pompa in $Q'(11/2; 0)$ servirebbero circa $5{,}41 + 5{,}22 = 10{,}63$ unità, cioè 63 m di tubo in più (Figura 5.7).



$AQ + QB = AQ + QB' = AB'$

$AB' = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$

Un altro percorso, per $Q'(11/2;\ 0)$:

$AQ' + Q'B \approx 5{,}41 + 5{,}22 \approx 10{,}63$

Angoli uguali in Q con la retta r

Figura 5.7 Il percorso minimo da $A(1;\ 3)$ a $B(7;\ 5)$ toccando la retta r (l'asse x) passa per $Q(13/4;\ 0)$, dove il segmento AB' incontra r; B' è il simmetrico di B. I due tratti formano angoli uguali con r. Il percorso tratteggiato per Q' è più lungo.

COLLEGAMENTI

Ottica: la legge della riflessione. Un raggio di luce che si riflette su uno specchio piano forma con la normale allo specchio un angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza. È esattamente la proprietà del percorso minimo: tra tutti i cammini che vanno da A a B toccando lo specchio, la luce segue quello più breve, cioè, nello stesso mezzo, quello che richiede il tempo minimo. Nel Seicento Fermat estese questa idea a un principio generale, il **principio del tempo minimo**, da cui si ricava anche la legge della rifrazione. La stessa geometria guida il giocatore di biliardo che vuole colpire una palla di sponda: mira al simmetrico della palla rispetto alla sponda, come nel problema del biliardo di Matematica 2 (cap. 7). Erone ne parla nella *Catottrica* che gli è attribuita (dal greco κάτοπτρον, «specchio»): è uno dei primi esempi in cui una legge della natura viene spiegata con un principio di minimo.

SINTESI

- La retta $ax + by + c = 0$ ha **vettore normale** $n(a; b)$: è perpendicolare alla retta. Due rette sono parallele se $ab' - a'b = 0$, perpendicolari se $aa' + bb' = 0$.
- La distanza di $P_0(x_0; y_0)$ da $ax + by + c = 0$ è $|ax_0 + by_0 + c| : \sqrt{a^2 + b^2}$; si dimostra cercando il piede della perpendicolare tra i punti $(x_0 + ta; y_0 + tb)$.
- L'area del triangolo ABC è $\frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$, dove $(u_1; u_2)$ e $(v_1; v_2)$ sono le componenti di AB e AC; il determinante è nullo se e solo se i punti sono allineati.
- Le rette per un punto A formano il fascio proprio di centro A: $y - y_A = m(x - x_A)$, più la retta verticale $x = x_A$.
- Un luogo geometrico è l'insieme di tutti e soli i punti con una proprietà. Metodo: punto generico, traduzione della proprietà, semplificazione, controllo «tutti e soli».
- L'asse di un segmento è una retta perpendicolare al segmento; i punti a distanza d da una retta formano due rette parallele; le bisettrici degli angoli di due rette incidenti sono due rette perpendicolari, che si ottengono uguagliando le distanze con il segno + e con il segno −.
- Un luogo dato in forma parametrica si studia eliminando il parametro; i valori ammessi per il parametro possono ridurre il luogo a un segmento, una semiretta, un arco.
- Il metodo sintetico ragiona sulle figure ed è indipendente dal riferimento; il metodo analitico traduce tutto in calcoli, prevedibili ma talvolta lunghi. Il teorema delle mediane si dimostra in entrambi i modi.
- Circocentro: intersezione degli assi; ortocentro: intersezione delle altezze; baricentro: media delle coordinate dei vertici. Il simmetrico di P rispetto a r è $2H - P$, con H piede della perpendicolare.
- Percorso minimo da A a B toccando una retta: si riflette B in B' e si congiunge A con B'; nel punto di contatto gli angoli con la retta sono uguali, come nella riflessione della luce.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La distanza del punto $P(1; -2)$ dalla retta $4x + 3y + 7 = 0$ è:

   A. 5

   B. 1

   C. 9/5

   D. 3/5

2. ● Il luogo dei punti equidistanti da $O(0;0)$ e da $A(4;2)$ è la retta:

   A. $x + 2y - 5 = 0$

   B. $2x - y - 3 = 0$

   C. $x - 2y = 0$

   D. $2x + y - 5 = 0$

3. ●● L'area del triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(4;1)$, $B(1;3)$ è:

   A. 11

   B. 13/2

   C. 11/2

   D. 7/2

4. ●● Le bisettrici degli angoli formati dalle rette $3x - 4y = 0$ e $4x - 3y = 0$ sono:

   A. solo $y = x$

   B. $y = x$ e $y = -x$

   C. $x = 0$ e $y = 0$

   D. $y = -x$ e $7x + y = 0$

5. ●● Al variare di t in $\mathbb{R}$, il punto $P(2t; t-1)$ descrive:

   A. la retta $2x - y - 1 = 0$

   B. la retta $x + 2y + 2 = 0$

   C. la retta $x - 2y - 2 = 0$

   D. una semiretta

6. ●● Il baricentro di un triangolo:

   A. divide ogni mediana in due parti uguali

   B. è equidistante dai tre vertici

   C. è il punto d'incontro delle altezze

   D. divide ogni mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.

   a) Le rette che passano per $A(1;2)$ sono tutte e sole le rette $y - 2 = m(x-1)$, con $m \in \mathbb{R}$.

   b) Il luogo dei punti che hanno distanza 3 da una retta data è una retta.

   c) Se il determinante $(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)$ è nullo, i punti A, B, C sono allineati.

   d) Le due bisettrici degli angoli formati da due rette incidenti sono parallele.

   e) Per trovare l'equazione di un luogo basta trovare un'equazione soddisfatta da tutti i suoi punti.

8. ● Completa.
   a) Il vettore $(a; b)$ è _____ alla retta $ax + by + c = 0$.
   b) Il simmetrico di P rispetto a r è il punto P' tale che r sia _____ del segmento PP'.
   c) Le coordinate del baricentro di un triangolo sono le _____ delle coordinate dei vertici.
   d) Nel problema del percorso minimo che tocca una retta, uno dei due punti si sostituisce con il suo _____ rispetto alla retta.

Calcolare

9. ● Calcola la distanza: a) di $P(-1; 3)$ dalla retta $5x - 12y + 2 = 0$; b) di $P(2; -1)$ dalla retta $y = 2x + 1$; c) tra le rette parallele $3x + 4y - 2 = 0$ e $6x + 8y + 11 = 0$.

10. ● a) Calcola l'area del triangolo di vertici $A(-3; 1)$, $B(2; -2)$, $C(4; 3)$. b) Stabilisci con il determinante se i punti $P(-1; 5)$, $Q(2; -1)$, $R(4; -5)$ sono allineati.

11. ●● Calcola l'area del quadrilatero di vertici $A(0; 0)$, $B(6; -1)$, $C(7; 4)$, $D(1; 5)$, dividendolo con la diagonale AC.

12. ●● *(approfondimento)* Nel fascio $(x + 2y - 5) + k(3x - y + 6) = 0$: a) trova il centro; b) trova la retta che passa per l'origine; c) trova la retta parallela all'asse x; d) trova la retta perpendicolare a $y = x$.

13. ●● a) Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-3; 2)$ e $B(1; -4)$ come luogo geometrico, e verifica che passa per il punto medio. b) Trova il luogo dei punti che hanno distanza 2 dalla retta $5x + 12y - 1 = 0$.

14. ●● Trova le bisettrici degli angoli formati dalle rette r: $x + 2y - 4 = 0$ e s: $2x + y - 5 = 0$. Quale delle due biseca l'angolo acuto?

15. ●● Trova l'equazione cartesiana del luogo descritto dal punto: a) $P(3 - t; 2t + 1)$, con $t \in \mathbb{R}$; b) lo stesso punto, con $0 \leq t \leq 2$; c) $R(1 + t^2; 3 - t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$.

16. ●● Trova il simmetrico del punto $P(-1; 6)$ rispetto alla retta $x - 2y + 3 = 0$, e il piede della perpendicolare.

17. ●● Nel triangolo $A(-1; -1)$, $B(5; 1)$, $C(1; 5)$ trova l'area, il circocentro, l'ortocentro e il baricentro. Che cosa noti?

18. ●● Trova le rette parallele a $4x - 3y = 0$ che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area 6.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra la formula della distanza punto-retta con le aree, nel caso in cui a, b, c siano diversi da zero. (Suggerimento: la retta incontra gli assi in $A(-c/a; 0)$ e $B(0; -c/b)$; calcola l'area del triangolo P_0AB con il determinante e poi come semiprodotto di AB per la distanza cercata.)

20. ●● Dimostra in due modi, sintetico e analitico, che le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente a metà. Per il metodo analitico usa i vertici $A(0;0)$, $B(p;0)$, $D(q;s)$, $C(p+q;s)$ e spiega perché questa scelta non fa perdere generalità.

21. ●● Dimostra che le due bisettrici degli angoli formati da due rette incidenti sono perpendicolari. (Suggerimento: scrivi le rette in modo che $a^2+b^2=a'^2+b'^2=1$ e verifica per le due bisettrici la condizione di perpendicolarità $aa'+bb'=0$.)

22. ●● Spiega perché, usando l'equazione dell'asse di un segmento AB ricavata come luogo, l'asse è sempre una retta (e non un'altra curva) ed è perpendicolare ad AB.

23. ●●● Un segmento di lunghezza 2ℓ si muove con un estremo sull'asse x e l'altro sull'asse y. Dimostra che il luogo dei suoi punti medi è la circonferenza $x^2+y^2=\ell^2$, verificando «tutti e soli» (gli estremi possono stare anche sui semiassi negativi).

24. ●●● Dimostra con il metodo analitico che in un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici. Scegli un riferimento comodo e giustifica la scelta; poi ritrova il risultato con un argomento sintetico.

Problemi

25. ●● Due fattorie sono in $A(2;5)$ e $B(10;1)$ (unità: 1 km) e un canale corre lungo l'asse x. Dove conviene mettere sul canale una stazione di pompaggio da collegare alle due fattorie con tubi rettilinei di lunghezza totale minima? Quanto è lunga la tubazione?

26. ●● Un raggio di luce parte da $A(0;4)$, si riflette su uno specchio piano che giace sulla retta $y=x$ e raggiunge il punto $B(5;7)$. Trova il punto in cui il raggio colpisce lo specchio e la lunghezza del cammino.

27. ●● Tre paesi sono nei punti $A(0;0)$, $B(8;0)$, $C(2;6)$ (unità: 1 km). Dove va collocato un ripetitore equidistante dai tre paesi? A quale distanza da ciascuno si trova (al decimo di km)?

28. ●● Un robot si muove in linea retta e al tempo t (in secondi) è nel punto $P(1+2t;\,3+t)$ (in metri). Trova l'equazione cartesiana della traiettoria. Un ostacolo si trova in $Q(6;2)$: a quale distanza minima passa il robot dall'ostacolo, e in quale istante?

29. ●● Un terreno triangolare ha, in una mappa con unità 1 m, i vertici $A(0;0)$, $B(40;10)$, $C(15;35)$. Calcolane l'area. Trova poi l'equazione della recinzione rettilinea che parte da A e divide il terreno in due parti di uguale area, giustificando la scelta.

Verso la verifica

30. ●● Dati $A(-2;1)$ e $B(4;3)$, trova i punti P della retta $y=x+1$ tali che il triangolo ABP abbia area 10.

31. ●●● Sfida. Dimostra che in ogni triangolo il circocentro O', il baricentro G e l'ortocentro H sono allineati e che $HG = 2GO'$ (la retta che li contiene si chiama retta di Eulero). Usa il riferimento con $A(-a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; c)$, con $a, b, c > 0$, e spiega perché ogni triangolo con gli angoli in A e in B acuti si può disporre così.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Cartesio e Fermat e sulla nascita della geometria analitica.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: il metodo per trovare un luogo è un esempio della strategia «trascura una delle condizioni e guarda che cosa varia».
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: problemi di minimo e riflessione, a partire dal problema di Erone.

Glossario del capitolo

Bisettrici di due rette incidenti
Le due rette, perpendicolari tra loro, formate dai punti equidistanti da due rette incidenti; ciascuna biseca due angoli opposti al vertice.

Eliminazione del parametro
Procedimento che ricava il parametro da una coordinata e lo sostituisce nell'altra, per ottenere l'equazione cartesiana del luogo.

Fascio proprio
Insieme di tutte le rette che passano per un punto, il centro del fascio: $y - y_0 = m(x - x_0)$ al variare di m, più la retta verticale $x = x_0$.

Forma parametrica
Descrizione di un luogo con le coordinate dei suoi punti espresse in funzione di un parametro, per esempio $P(2t - 1; 3t + 2)$.

Geometria analitica
Studio delle figure geometriche mediante le coordinate e le equazioni, nato nel Seicento con Cartesio e Fermat.

Luogo piano
Nella terminologia di Cartesio, un luogo descritto da una retta o da una circonferenza; i luoghi descritti da una parabola, un'ellisse o un'iperbole sono luoghi solidi.

Metodo analitico
Metodo che traduce ipotesi e tesi in equazioni tra le coordinate e le dimostra con il calcolo algebrico.

Metodo sintetico
Metodo della geometria che ragiona direttamente sulle figure, a partire da postulati e teoremi, senza coordinate.

Problema di Erone
Trovare su una retta il punto che rende minimo il percorso tra due punti dati dalla stessa parte della retta; si risolve con il simmetrico di uno dei due punti.

Proprietà caratteristica
La proprietà che hanno tutti e soli i punti di un luogo geometrico.

Punto generico
Punto $P(x; y)$ qualsiasi del piano, usato per tradurre in equazione la proprietà caratteristica di un luogo.

Simmetrico di un punto rispetto a una retta
Punto P' tale che la retta sia l'asse del segmento PP'; se H è il piede della perpendicolare da P, $P' = 2H - P$.

Teorema delle mediane
Le tre mediane di un triangolo passano per il baricentro, che divide ciascuna in due parti, delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Vettore normale
Vettore perpendicolare a una retta; per la retta $ax + by + c = 0$ è $n(a; b)$.

Soluzioni

1. B. $|4 - 6 + 7| : 5 = 1$.

2. D. $x^2 + y^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow 8x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$.

3. C. $|4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| : 2 = 11/2$.

4. B. $3x - 4y = \pm(4x - 3y)$: con + si ha $x + y = 0$, con − si ha $7x - 7y = 0$, cioè $y = x$.

5. C. $t = x/2$, $y = x/2 - 1$, cioè $x - 2y - 2 = 0$; t varia in tutto $\mathbb{R}$, quindi è l'intera retta.

6. D. È il teorema delle mediane; l'equidistanza dai vertici è del circocentro, l'incontro delle altezze è l'ortocentro.

7. a) F: manca la retta verticale $x = 1$, che passa per A ma non ha coefficiente angolare. b) F: sono due rette parallele alla retta data, una per parte. c) V. d) F: sono perpendicolari. e) F: l'equazione deve essere soddisfatta da tutti e **soli** i punti del luogo.

8. a) perpendicolare (normale); b) l'asse; c) medie aritmetiche; d) simmetrico.

9. a) $|-5 - 36 + 2| : 13 = 39 : 13 = 3$. b) $2x - y + 1 = 0$: $|4 + 1 + 1| : \sqrt{5} = 6/\sqrt{5} = 6\sqrt{5}/5 \approx 2{,}68$. c) La seconda retta è $3x + 4y + 11/2 = 0$: $d = |11/2 + 2| : 5 = 3/2$.

10. a) $AB(5; -3)$, $AC(7; 2)$: $|10 + 21| : 2 = 31/2$. b) $PQ(3; -6)$, $PR(5; -10)$: $3 \cdot (-10) - (-6) \cdot 5 = 0$: sono allineati.

11. Triangolo ABC: $AB(6; -1)$, $AC(7; 4)$, $|24 + 7| : 2 = 31/2$. Triangolo ACD: $AC(7; 4)$, $AD(1; 5)$, $|35 - 4| : 2 = 31/2$. Area 31.

12. a) $x + 2y = 5$ e $3x - y = -6$: $C(-1; 3)$. b) $-5 + 6k = 0$, $k = 5/6$: $21x + 7y = 0$, cioè $y = -3x$. c) Coefficiente di x nullo: $1 + 3k = 0$, $k = -1/3$: $y = 3$. d) Coefficiente angolare $-(1 + 3k)/(2 - k) = -1$: $k = 1/4$, $x + y - 2 = 0$.

13. a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2 \Leftrightarrow 8x - 12y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$; il punto medio $(-1; -1)$ la soddisfa: $-2 + 3 - 1 = 0$. b) $|5x + 12y - 1| = 26$: $5x + 12y - 27 = 0$ e $5x + 12y + 25 = 0$.

14. I denominatori sono entrambi $\sqrt{5}$: $x + 2y - 4 = \pm(2x + y - 5)$, cioè $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 3 = 0$, incidenti in $(2; 1)$. Le rette r e s hanno inclinazioni di circa 153,4° e 116,6° sull'asse x: l'angolo acuto tra di esse (circa 36,9°) ha bisettrice inclinata di 135°, cioè con coefficiente angolare -1: è $x + y - 3 = 0$.

15. a) $t = 3 - x$, $y = 7 - 2x$: la retta $2x + y - 7 = 0$. b) Il segmento di quella retta con estremi $(3; 1)$ ($t = 0$) e $(1; 5)$ ($t = 2$). c) $t^2 = x - 1$, $y = 3 - (x - 1)$: la semiretta $x + y - 4 = 0$ con $x \geq 1$.

16. $t = -(-1 - 12 + 3)/5 = 2$; piede $H(-1 + 2; 6 - 4) = H(1; 2)$; simmetrico $P' = 2H - P = (3; -2)$. Controllo: $1 - 4 + 3 = 0$.

17. Area: $AB(6; 2)$, $AC(2; 6)$, $|36 - 4| : 2 = 16$. Assi di AB e AC: $3x + y - 6 = 0$ e $x + 3y - 6 = 0$, circocentro $O'(3/2; 3/2)$ (raggio $\sqrt{(25/2)}$). Altezze da A e da B: $y = x$ e $x + 3y - 8 = 0$, ortocentro $H(2; 2)$. Baricentro $G(5/3; 5/3)$. I tre punti stanno sulla retta $y = x$: il triangolo è isoscele ($AB = AC = \sqrt{40}$) e $y = x$ è il suo asse di simmetria.

18. $4x - 3y + c = 0$ incontra gli assi in $(-c/4; 0)$ e $(0; c/3)$; area $c^2/24 = 6$, $c = \pm 12$: $4x - 3y + 12 = 0$ e $4x - 3y - 12 = 0$.

19. Traccia. AP_0 ha componenti $(x_0 + c/a; y_0)$ e AB ha componenti $(c/a; -c/b)$; il determinante vale $-(c/b)(x_0 + c/a) - (c/a)y_0 = -c(ax_0 + by_0 + c)/(ab)$, quindi l'area è $|c| \cdot \underline{|ax_0 + by_0 + c|} : (2|ab|)$. Inoltre $AB = |c| \cdot \underline{\sqrt{a^2 + b^2}} : |ab|$. Da $Area = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d$ segue $d = |ax_0 + by_0 + c| : \underline{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

20. Analitico: il punto medio di AC e quello di BD sono entrambi $((p + q)/2; s/2)$, quindi coincidono. Si può mettere A nell'origine e AB sull'asse x con un'isometria, che non cambia lunghezze né punti medi; $C = B + D - A$ perché $ABCD$ è un parallelogramma. Sintetico: detto O il punto d'incontro delle diagonali, i triangoli AOB e COD sono congruenti per il se-

condo criterio ($AB = CD$, angoli alterni interni uguali), quindi $AO = OC$ e $BO = OD$.

21. Con $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1$ le bisettrici sono $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$ e $(a + a')x + (b + b')y + c + c' = 0$. La condizione di perpendicolarità dà $(a - a')(a + a') + (b - b')(b + b') = a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 = 1 - 1 = 0$: le bisettrici sono perpendicolari (i coefficienti di x e y di ciascuna bisettrice non sono entrambi nulli perché le rette non sono parallele).

22. Nell'equazione $PA^2 = PB^2$ i termini $x^2 + y^2$ compaiono in entrambi i membri e si cancellano: resta un'equazione di primo grado, cioè una retta (i coefficienti di x e y non sono entrambi nulli perché $A \neq B$). Il suo vettore normale è $2(x_B - x_A; y_B - y_A)$, parallelo ad AB: quindi l'asse è perpendicolare ad AB.

23. Con $A(a; 0)$, $B(0; b)$ si ha $a^2 + b^2 = 4\ell^2$ e $M(a/2; b/2)$, quindi $x^2 + y^2 = \ell^2$. Viceversa, ogni punto $(x; y)$ con $x^2 + y^2 = \ell^2$ è il punto medio del segmento con estremi $(2x; 0)$ e $(0; 2y)$, di lunghezza $2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\ell$. Il luogo è l'intera circonferenza.

24. Con il vertice dell'angolo retto in $C(0; 0)$ e i cateti sugli assi, $A(a; 0)$, $B(0; b)$: il punto medio dell'ipotenusa è $M(a/2; b/2)$ e $MA = MB = MC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Il riferimento si può sempre scegliere così, perché le isometrie conservano le distanze. Sintetico: M è il centro del rettangolo che ha CA e CB come lati, e le diagonali di un rettangolo sono congruenti e si dividono a metà.

25. $B'(10; -1)$; retta AB': $y - 5 = -3/4 \cdot (x - 2)$; con $y = 0$: $x = 26/3$. Stazione in $(26/3; 0)$, a circa 8,67 km dall'origine; tubazione $AB' = \sqrt{64 + 36} = 10$ km.

26. A e B stanno dalla stessa parte di $y = x$. Simmetrico di B: $B'(7; 5)$. Retta AB': $y = 4 + x/7$; con $y = x$: $x = 14/3$. Punto $(14/3; 14/3)$; cammino $AB' = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$.

27. Circocentro: asse di AB: $x = 4$; asse di AC: $y - 3 = -1/3 \cdot (x - 1)$; si ottiene $(4; 2)$. Distanza $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ km da ciascun paese.

28. $t = (x - 1)/2$, $y = 3 + (x - 1)/2$: $x - 2y + 5 = 0$. Distanza minima $|6 - 4 + 5| : \sqrt{5} = 7\sqrt{5}/5 \approx 3{,}13$ m, nel piede $H(23/5; 24/5)$, raggiunto per $t = (23/5 - 1)/2 = 9/5 = 1{,}8$ s.

29. $|40 \cdot 35 - 10 \cdot 15| : 2 = 625$ m^2. Una mediana divide un triangolo in due triangoli con basi uguali e la stessa altezza, quindi di uguale area: la recinzione va da A al punto medio di BC, $(55/2; 45/2)$, ed è la retta $y = 9x/11$, cioè $9x - 11y = 0$.

30. $P(t; t + 1)$: $AB(6; 2)$, $AP(t + 2; t)$, area $\frac{1}{2}|6t - 2(t + 2)| = |2t - 2| = 10$: $t = 6$ o $t = -4$. $P(6; 7)$ oppure $P(-4; -3)$.

31. Asse di AB: $x = (b - a)/2$; imponendo $O'A = O'C$ si trova $O'((b - a)/2; (c^2 - ab)/(2c))$. L'altezza da C è $x = 0$, quella da A è perpendicolare a BC: $y = (b/c)(x + a)$, quindi $H(0; ab/c)$. $G((b - a)/3; c/3)$. Si verifica che $G = (H + 2O')/3$: ascissa $(0 + b - a)/3$, ordinata $(ab/c + (c^2 - ab)/c)/3 = c/3$. Quindi G sta sul segmento HO' e $HG = 2GO'$. Ogni triangolo ha almeno due angoli acuti: messo il lato tra questi due vertici sull'asse x e il piede dell'altezza nell'origine, il piede cade all'interno del lato e il terzo vertice sull'asse y; un'isometria non cambia allineamenti e rapporti.