CAPITOLO

2

La parabola e le disequazioni di secondo grado

Una sola curva, rivolta in su o in giù: il suo punto più alto o più basso risponde a domande che sembrano lontanissime. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Disegnare la parabola grafico di una funzione quadratica a partire da concavità, vertice, asse e intersezioni con gli assi.
2. Scrivere una funzione quadratica in forma canonica e interpretarla come traslazione di $y = ax^2$.
3. Collegare il segno del discriminante agli zeri della funzione e risolvere graficamente un'equazione.
4. Studiare il segno di un trinomio di secondo grado e risolvere le disequazioni di secondo grado in tutti i casi.
5. Risolvere problemi di massimo e di minimo con il vertice della parabola.
6. Riconoscere variabili, ipotesi e dominio di validità di un modello matematico e confrontare un modello lineare e uno quadratico.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 La funzione quadratica e il suo grafico 2
2.2 Zeri della funzione e soluzioni dell'equazione 8
2.3 Il segno del trinomio e le disequazioni di secondo grado 9
2.4 Massimi e minimi 13
2.5 Modelli matematici 17

Matematica 3 · Parte I · Il secondo grado · versione 1.0
Capitolo 2: La parabola e le disequazioni di secondo grado · pagine 37–60 del volume completo · estratto per lo studio

Una fontana lancia l'acqua in alto e la lascia ricadere lungo un arco; un pallone calciato sale, rallenta, si ferma per un istante e torna giù; il cavo di un ponte sospeso, carico della strada, scende e risale con una curva dolce. Dietro forme così diverse c'è spesso la stessa funzione: $y = ax^2 + bx + c$. In *Matematica 1* hai disegnato il caso più semplice, $y = ax^2$; nel capitolo 1 hai imparato a risolvere le equazioni $ax^2 + bx + c = 0$. Ora mettiamo insieme le due cose.

In questo capitolo impariamo a disegnare il grafico di ogni funzione di secondo grado partendo da pochi punti, a leggere sul grafico le soluzioni di un'equazione e il segno di un trinomio, e quindi a risolvere le *disequazioni* di secondo grado. Il punto più alto o più basso della curva, il vertice, risponderà a domande molto concrete: quale recinto rettangolare ha l'area massima, quale prezzo fa incassare di più, fin dove sale un oggetto lanciato verso l'alto. Concluderemo con una riflessione su che cosa significa descrivere la realtà con un *modello matematico*.

2.1 La funzione quadratica e il suo grafico

2.1.1 Il ruolo del coefficiente a

Ricordiamo che cosa sappiamo da *Matematica 1*. Il grafico di $y = x^2$ è una curva chiamata parabola: ha il punto più basso, il vertice, nell'origine, ed è simmetrica rispetto all'asse y, perché numeri opposti hanno lo stesso quadrato. Moltiplicando x^2 per un numero $a \neq 0$ si ottiene $y = ax^2$: ogni ordinata viene moltiplicata per a, e la forma della curva cambia in due modi, come mostra la Figura 2.1.

- Il **segno** di a decide il verso della curva. Se $a > 0$ le ordinate sono positive o nulle e la parabola «si apre» verso l'alto; se $a < 0$ si apre verso il basso. Si dice che la parabola volge la **concavità** verso l'alto oppure verso il basso.
- Il **valore assoluto** di a decide l'**apertura**: più $|a|$ è grande, più rapidamente crescono le ordinate e più la parabola è stretta; più $|a|$ è vicino a zero, più la parabola è larga e «piatta».

Le parabole $y = ax^2$ e $y = -ax^2$ sono simmetriche l'una dell'altra rispetto all'asse x: un punto $(x; y)$ della prima corrisponde al punto $(x; -y)$ della seconda.

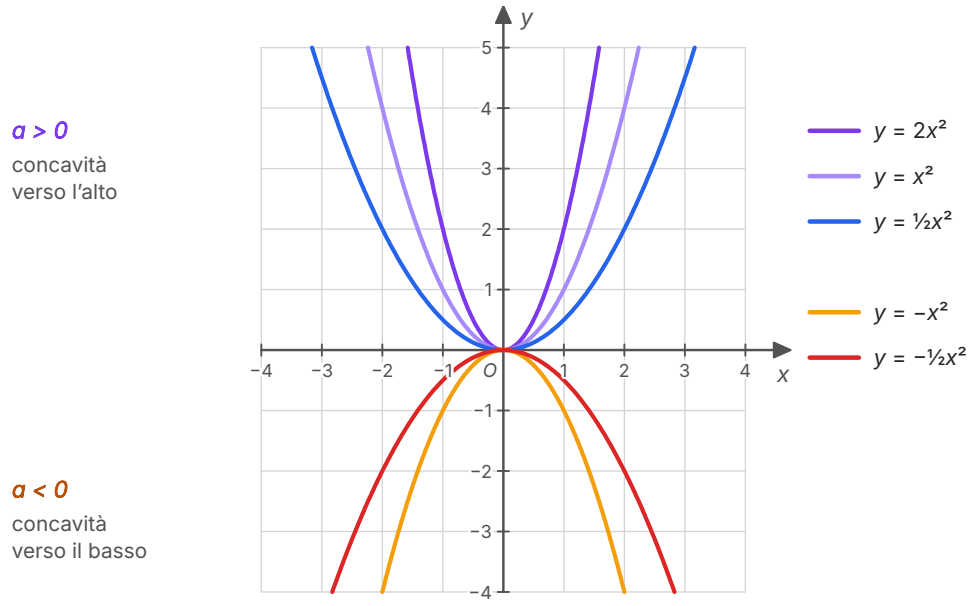

Figura 2.1 Le parabole $y = ax^2$ per $a = 2, 1, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}$, calcolate dalle equazioni. Tutte hanno il vertice nell'origine e l'asse y come asse di simmetria. Il segno di a decide la concavità, il valore assoluto l'apertura: $y = 2x^2$ è la più stretta, $y = \frac{1}{2}x^2$ la più larga tra quelle rivolte verso l'alto.

2.1.2 La funzione quadratica

Si chiama **funzione quadratica** (o funzione di secondo grado) una funzione del tipo

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

Il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$: qualunque numero reale si può elevare al quadrato. Il suo grafico, come vedremo, è sempre una curva dello stesso tipo di $y = ax^2$, con la stessa forma e la stessa apertura, ma con il vertice in un punto diverso dall'origine: è una **parabola** con l'asse parallelo all'asse y. In questo capitolo, per «parabola» intendiamo sempre il grafico di una funzione quadratica; la definizione geometrica della curva, che non dipende dagli assi, è nel box sulle coniche alla fine di questo paragrafo, e sarà il punto di partenza del capitolo 6.

2.1.3 La forma canonica e la traslazione

Prendiamo la funzione $y = x^2 - 4x + 3$. Con il completamento del quadrato del capitolo 1 possiamo riscriverla: $x^2 - 4x$ è l'inizio di $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$, quindi

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 \quad \Longrightarrow \quad y = (x - 2)^2 - 1$$

Questa scrittura dice moltissimo. Il quadrato $(x-2)^2$ non è mai negativo e vale 0 solo per $x=2$: quindi y è sempre maggiore o uguale a -1, e vale -1 solo per $x=2$. Il punto più basso del grafico è $V(2;-1)$. Inoltre, due valori di x alla stessa distanza da 2, come 1 e 3 oppure 0 e 4, danno lo stesso valore di $(x-2)^2$ e quindi la stessa y: il grafico è simmetrico rispetto alla retta verticale $x=2$.

C'è di più. Ogni punto $(x_0; x_0^2)$ della parabola $y=x^2$, spostato di 2 verso destra e di 1 verso il basso, diventa $(x_0+2;\ x_0^2-1)$, e questo punto soddisfa l'equazione $y=(x-2)^2-1$: infatti $((x_0+2)-2)^2-1=x_0^2-1$. Il grafico di $y=(x-2)^2-1$ è quindi il grafico di $y=x^2$ *traslato* con il vettore $(2;-1)$, come nella Figura 2.2. È una traslazione come quelle che hai studiato in *Matematica 2* (cap. 7): la curva «scivola» nel piano senza ruotare né deformarsi.

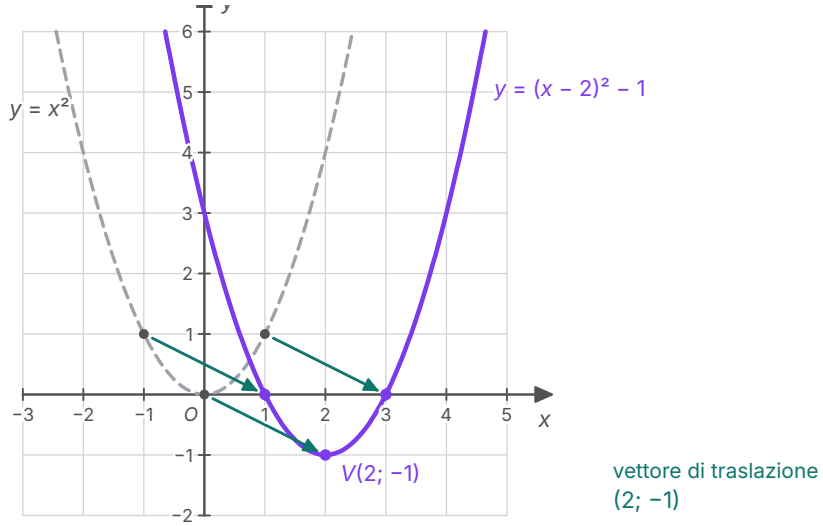

Figura 2.2 La parabola $y=(x-2)^2-1$ (in viola) si ottiene traslando $y=x^2$ (tratteggiata) con il vettore $(2;-1)$: ogni punto si sposta di 2 unità a destra e di 1 in basso. Il vertice passa da $O(0;0)$ a $V(2;-1)$ e l'asse di simmetria da $x=0$ a $x=2$.

In generale, la scrittura $y=a(x-h)^2+k$ si chiama **forma canonica** della funzione quadratica: il suo grafico è la parabola $y=ax^2$ traslata con il vettore $(h;k)$, con vertice $V(h;k)$ e asse $x=h$. Completando il quadrato con coefficienti qualsiasi, come nel capitolo 1, si ottiene la forma canonica di ogni funzione quadratica:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

(Basta sviluppare il secondo membro per verificarlo.) Il numero al numeratore è il discriminante Δ dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Leggendo h e k si trovano le coordinate del vertice.

IN SINTESI

La parabola $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

- volge la concavità verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$;
- ha il **vertice** nel punto $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$; l'ordinata del vertice si può anche calcolare sostituendo $x_V = -\frac{b}{2a}$ nell'equazione;
- ha come **asse di simmetria** la retta $x = -\frac{b}{2a}$;
- interseca l'asse y nel punto $(0; c)$ e l'asse x nei punti di ascissa uguale alle soluzioni reali di $ax^2 + bx + c = 0$.

2.1.4 Disegnare una parabola

Per disegnare una parabola non serve una lunga tabella di valori. Bastano il vertice, l'asse e pochi punti scelti bene; la simmetria raddoppia gratis ogni punto trovato.

ESEMPIO SVOLTO

Disegna la parabola $y = x^2 - 2x - 3$.

Concavità. $a = 1 > 0$: verso l'alto.

Vertice e asse. $x_V = -\frac{-2}{2} = 1$; $y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$. Il vertice è $V(1; -4)$, l'asse è la retta $x = 1$. (Controllo: $\Delta = 4 + 12 = 16$ e $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$. ✓)

Intersezioni con gli assi. Con l'asse y: $x = 0$ dà $y = -3$, il punto $C(0; -3)$. Con l'asse x: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$, i punti $A(-1; 0)$ e $B(3; 0)$. Come previsto, sono simmetrici rispetto all'asse: 1 è la media di -1 e 3.

Punti simmetrici. Il simmetrico di C rispetto alla retta $x = 1$ è $C'(2; -3)$. Un ultimo punto per la forma: per $x = 4$, $y = 16 - 8 - 3 = 5$, e per simmetria anche $(-2; 5)$ appartiene alla parabola.

Si uniscono i punti con una curva regolare, senza spigoli nel vertice: il risultato è nella Figura 2.3.

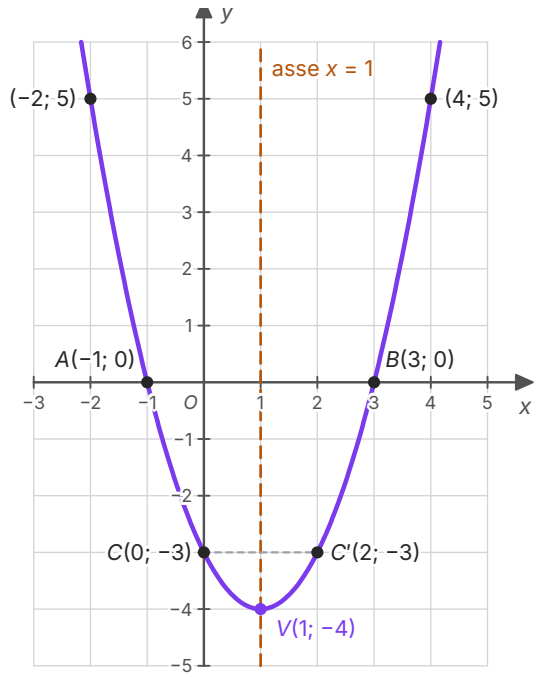

Figura 2.3 La parabola $y = x^2 - 2x - 3$ dell'esempio svolto, calcolata dall'equazione: il vertice $V(1; -4)$, l'asse di simmetria $x = 1$ (tratteggiato), le intersezioni con gli assi A, B, C e il punto C', simmetrico di C rispetto all'asse.

Con $a < 0$ si procede allo stesso modo. Per $y = -2x^2 + 4x + 1$: la concavità è verso il basso, $x_V = -\dfrac{4}{-4} = 1$ e $y_V = -2 + 4 + 1 = 3$, quindi $V(1; 3)$ è il punto più alto; la curva taglia l'asse y in $(0; 1)$ e l'asse x nei punti di ascissa $1 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, cioè circa $-0{,}22$ e $2{,}22$.

APPROFONDIMENTO · LE CONICHE

Il nome *parabola* è molto più antico della funzione quadratica. Già i geometri greci studiavano le curve che si ottengono tagliando un cono con un piano, le **coniche**. Apollonio di Perga, vissuto tra il III e il II secolo a.C., dedicò loro un grande trattato, le *Coniche*; a quest'opera risalgono i nomi parabola, ellisse e iperbole.

Immagina un doppio cono, illimitato, e un piano che non passa per il vertice (Figura 2.4). Se il piano è perpendicolare all'asse del cono la sezione è una *circonferenza*; se è un po' inclinato e taglia una sola falda del cono lungo una curva chiusa, è un'*ellisse*; se è parallelo a una generatrice del cono, la curva non si chiude ed è una *parabola*; se taglia entrambe le falde, si ottiene un'*iperbole*, formata da due rami.

La parabola ha anche una definizione che non usa il cono: è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, il **fuoco**, e da una retta fissa, la **direttrice**. Per la parabola $y = ax^2$ il fuoco è il punto $(0;\ \frac{1}{4a})$ e la direttrice la retta $y = -\frac{1}{4a}$: per esempio $y = \frac{x^2}{4}$ ha il fuoco in (0; 1) e la direttrice $y = -1$. È per questa proprietà che le antenne paraboliche concentrano nel fuoco i segnali che arrivano paralleli all'asse. Anche le altre coniche hanno un'equazione: la più semplice è $x^2 + y^2 = r^2$, la circonferenza di centro O e raggio r. Quest'anno studierai la parabola come luogo geometrico nel capitolo 6 e la circonferenza nel capitolo 7; l'ellisse e l'iperbole sono il contenuto di *Matematica 4*.

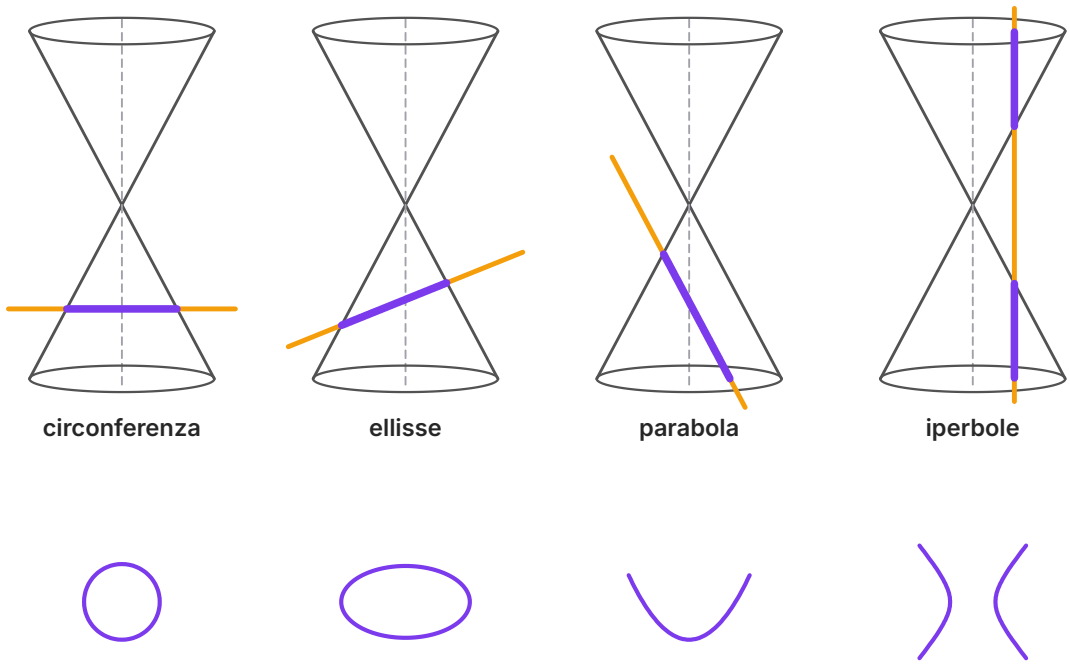

Figura 2.4 Le sezioni di un doppio cono, viste di lato: il piano che taglia il cono (in arancio) è visto «di taglio», come una linea, e la curva di sezione appare come il tratto viola. Sotto, la forma della curva che si ottiene. La circonferenza (piano perpendicolare all'asse) e l'ellisse tagliano una sola falda in una curva chiusa; la parabola nasce da un piano parallelo a una generatrice; l'iperbole da un piano che taglia entrambe le falde. Disegno schematico.

2.2 Zeri della funzione e soluzioni dell'equazione

2.2.1 Tre casi, tre posizioni

Un numero x_0 si chiama **zero** della funzione f se $f(x_0) = 0$. Gli zeri della funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$ sono quindi le soluzioni reali dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, e sul grafico sono le ascisse dei punti in cui la parabola incontra l'asse x. Le tre possibilità del capitolo 1 diventano tre posizioni della parabola rispetto all'asse x:

- $\Delta > 0$: due zeri distinti, x_1 e x_2; la parabola taglia l'asse x in due punti, simmetrici rispetto all'asse della parabola;
- $\Delta = 0$: un solo zero (doppio), $x = -\dfrac{b}{2a}$; il vertice sta sull'asse x e la parabola lo «sfiora» senza attraversarlo: si dice che è *tangente* all'asse x;

- $\Delta < 0$: nessuno zero reale; la parabola sta tutta da una parte dell'asse x: tutta sopra se $a > 0$, tutta sotto se $a < 0$.

Il legame tra il segno di Δ e la posizione della curva si vede subito dall'ordinata del vertice, $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Se $a > 0$, il vertice è il punto più basso: la parabola incontra l'asse x se e solo se il vertice sta sotto l'asse o su di esso, cioè se $y_V \le 0$, e con $a > 0$ questo accade proprio quando $\Delta \ge 0$. Con $a < 0$ il ragionamento è simmetrico.

DA RICORDARE

L'ascissa del vertice è la **media delle soluzioni**: se $\Delta \ge 0$, $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$, perché la somma delle soluzioni è $-\dfrac{b}{a}$ (capitolo 1). Quando le soluzioni sono facili da trovare, il vertice si ottiene senza formule: per $y = (x - 1)(x - 7)$ l'asse è $x = 4$ e il vertice è $V(4; -9)$.

2.2.2 La risoluzione grafica di un'equazione

Il grafico permette anche di *vedere* le soluzioni di un'equazione, e quindi di stimarle. Un'equazione $f(x) = g(x)$ ha per soluzioni le ascisse dei punti comuni ai grafici di $y = f(x)$ e $y = g(x)$. È la stessa idea usata in *Matematica 2* (cap. 6) per i sistemi lineari: due rette, un punto d'incontro. Spesso conviene scrivere l'equazione in modo che uno dei due grafici sia la parabola fissa $y = x^2$ e l'altro una retta, facile da disegnare.

Per esempio, risolviamo graficamente $x^2 - x - 1 = 0$. Scriviamo l'equazione come $x^2 = x + 1$ e disegniamo nello stesso piano la parabola $y = x^2$ e la retta $y = x + 1$. La retta passa per $(0; 1)$ e $(-1; 0)$. Sul grafico, con una quadrettatura fine, i due punti comuni hanno ascisse vicine a $-0{,}6$ e a $1{,}6$.

Con la formula: $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, cioè circa $-0{,}618$ e $1{,}618$. La soluzione positiva è il numero aureo φ incontrato nel capitolo 1. Il metodo grafico ha dato una buona stima: per sua natura è un'*approssimazione*, tanto migliore quanto più preciso è il disegno.

La risoluzione grafica è utile soprattutto per capire *quante* soluzioni ci sono e dove si trovano più o meno; è anche il modo in cui un software di geometria trova le intersezioni. Nel capitolo 6 la useremo per studiare in generale le posizioni di una retta e di una parabola.

2.3 Il segno del trinomio e le disequazioni di secondo grado

2.3.1 Il segno letto sul grafico

Studiare il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ significa stabilire per quali x è positivo, nullo o negativo. Sul grafico di $y = ax^2 + bx + c$ la risposta si legge a colpo d'occhio: il trinomio è positivo dove

la parabola sta *sopra* l'asse x, nullo nei suoi zeri, negativo dove la parabola sta *sotto* l'asse. Combinando i due versi della concavità con i tre casi di Δ si hanno sei situazioni, raccolte nella Figura 2.5.

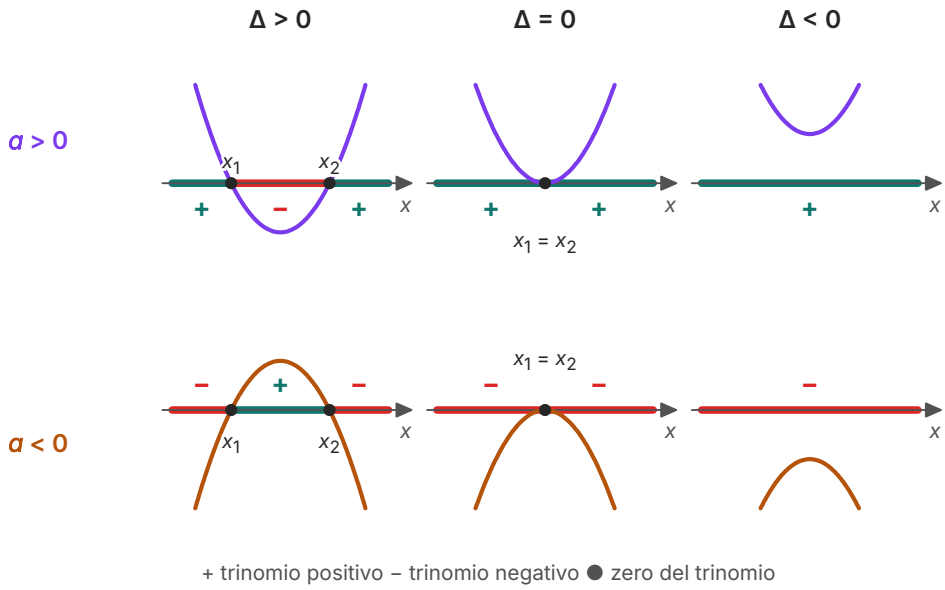

Figura 2.5 I sei casi del segno del trinomio $ax^2 + bx + c$: per righe il segno di a, per colonne il segno di Δ. Il tratto colorato sull'asse x indica dove il trinomio è positivo (+) o negativo (−); i punti neri sono i suoi zeri. Le parabole sono $y = \pm(x^2 - 1)$, $y = \pm x^2$, $y = \pm(x^2 + 1)$.

Si può arrivare alla stessa conclusione anche con l'algebra. Se $\Delta > 0$, il trinomio si scompone come $a(x - x_1)(x - x_2)$ (capitolo 1), con $x_1 < x_2$. Un prodotto di due fattori è positivo se i fattori sono concordi e negativo se sono discordi. Il fattore $x - x_1$ è positivo per $x > x_1$, il fattore $x - x_2$ per $x > x_2$; quindi il prodotto $(x - x_1)(x - x_2)$ è positivo per $x < x_1$ e per $x > x_2$, dove i due fattori sono concordi, e negativo tra x_1 e x_2, dove sono discordi; moltiplicando per a, il trinomio ha il segno di a fuori dall'intervallo delle radici e il segno opposto dentro. Se $\Delta \le 0$, la forma canonica $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ mostra che la parentesi quadra è somma di un quadrato e di un numero non negativo, quindi è ≥ 0, e si annulla solo se $\Delta = 0$ e $x = -\frac{b}{2a}$.

IN SINTESI

Il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$:

- $\Delta > 0$ (radici $x_1 < x_2$): il trinomio ha il **segno di *a*** per i valori *esterni* all'intervallo delle radici ($x < x_1$ oppure $x > x_2$), il **segno opposto** per i valori *interni* ($x_1 < x < x_2$), ed è nullo in x_1 e x_2;
- $\Delta = 0$: ha il segno di a per ogni x tranne $x = -\dfrac{b}{2a}$, dove è nullo;
- $\Delta < 0$: ha il segno di a per ogni x reale.

2.3.2 Risolvere una disequazione di secondo grado

Una **disequazione di secondo grado** è una disequazione che, ridotta a forma normale, si scrive $ax^2 + bx + c > 0$ (oppure con $\geq$, $<$, $\leq$), con $a \neq 0$. Risolverla significa proprio studiare il segno del trinomio e scegliere gli intervalli giusti. Conviene procedere così.

1. Si porta la disequazione in forma normale. Se $a < 0$ conviene moltiplicare per -1, **cambiando il verso** della disuguaglianza, così da avere sempre una parabola rivolta verso l'alto.
2. Si risolve l'**equazione associata** $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Si disegna (anche solo a mente) la parabola e si sceglie: con $a > 0$ e $\Delta > 0$, il trinomio è positivo all'esterno delle radici e negativo all'interno.
4. Si scrive l'insieme delle soluzioni S con gli intervalli, includendo le radici solo se la disuguaglianza è larga ($\geq$ o $\leq$).

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi: a) $x^2 - 5x + 6 > 0$; b) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$; c) $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$.

a) L'equazione associata $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha le soluzioni 2 e 3. Con $a = 1 > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto e sta sopra l'asse x all'esterno delle radici: $x < 2$ oppure $x > 3$, cioè $S =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$.

b) Stesso trinomio, domanda opposta: negativo o nullo tra le radici, estremi compresi. $S = [2; 3]$.

c) Moltiplichiamo per -1 e cambiamo verso: $x^2 - 4x - 5 \leq 0$. Le radici sono -1 e 5; il trinomio è negativo o nullo tra le radici: $S = [-1; 5]$. *Controllo* con un valore interno, $x = 0$: $-0 + 0 + 5 = 5 \geq 0$. ✓ E con uno esterno, $x = 6$: $-36 + 24 + 5 = -7$, che non è ≥ 0. ✓

2.3.3 Quando Δ = 0 o Δ < 0

Se l'equazione associata non ha due soluzioni distinte, la disequazione non è «impossibile» per questo: bisogna guardare il segno di a. La Tabella 2.1 riassume i casi con $a > 0$; con $a < 0$ ci si riconduce a questi cambiando segno e verso.

Tabella 2.1 Le soluzioni delle disequazioni di secondo grado con $a > 0$. Se $\Delta > 0$, $x_1 < x_2$ sono le radici; se $\Delta = 0$, x_1 è la radice doppia.

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$	$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq x_1$	ogni $x \in \mathbb{R}$	nessuna: $\varnothing$	$x = x_1$
$\Delta < 0$	ogni $x \in \mathbb{R}$	ogni $x \in \mathbb{R}$	nessuna: $\varnothing$	nessuna: $\varnothing$

Nella tabella il simbolo $\vee$ si legge «oppure» ($x < x_1$ oppure $x > x_2$), come in logica in *Matematica 1*.

ESEMPIO SVOLTO

Risolvi: a) $x^2 - 6x + 9 > 0$; b) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$; c) $x^2 + x + 1 > 0$; d) $x^2 + x + 1 < 0$.

a), b) Qui $\Delta = 36 - 36 = 0$: infatti $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Un quadrato è positivo tranne quando la base è zero. Quindi a) è vera per ogni $x \neq 3$: $S = \mathbb{R} - \{3\}$ (cioè $S =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$); b) è vera solo dove il quadrato vale zero: $S = \{3\}$.

c), d) Qui $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ e $a = 1 > 0$: la parabola sta tutta sopra l'asse x e il trinomio è sempre positivo. Quindi c) è vera per ogni x: $S = \mathbb{R}$; d) non è mai vera: $S = \varnothing$.

ERRORE FREQUENTE

«$\Delta < 0$, quindi la disequazione è impossibile». Non è così: quando $\Delta < 0$ è l'*equazione* associata a non avere soluzioni reali, mentre il trinomio ha sempre il segno di a. La disequazione $x^2 + x + 1 > 0$ è vera per *ogni* x; è $x^2 + x + 1 < 0$ a non avere soluzioni.

«$x^2 > 4$, quindi $x > \pm 2$». La scrittura non ha senso. Il trinomio $x^2 - 4$ è positivo all'esterno delle radici -2 e 2: le soluzioni sono $x < -2$ oppure $x > 2$. Allo stesso modo $x^2 < 4$ significa $-2 < x < 2$. Ricorda che $\sqrt{x^2} = |x|$ (*Matematica 2*, cap. 2): $x^2 > 4$ equivale a $|x| > 2$.

2.3.4 Disequazioni non in forma normale

Spesso la disequazione non si presenta in forma normale: prima si svolgono i calcoli e si porta tutto al primo membro, con le regole delle disequazioni di primo grado (*Matematica 1*). Per esempio

$$(x - 1)^2 \geq 2x + 6 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 - 2x - 6 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4x - 5 \geq 0$$

Le radici sono -1 e 5, la parabola è rivolta verso l'alto, e il trinomio è positivo o nullo all'esterno: $S =]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$. Un secondo esempio mostra perché non si deve dividere per un'espressione con l'incognita: da $x(x + 3) < 2(x + 3)$ verrebbe la tentazione di dividere per $x + 3$,

ma il suo segno dipende da x, e dividere per un numero negativo cambierebbe il verso. Si sviluppa invece: $x^2 + 3x - 2x - 6 < 0$, cioè $x^2 + x - 6 < 0$, con radici -3 e 2, e quindi $S =]-3; 2[$.

2.4 Massimi e minimi

2.4.1 Il vertice come punto estremo

Il vertice di una parabola non è solo un punto comodo per disegnarla: è il punto in cui la funzione quadratica raggiunge il suo valore più basso o più alto. Se $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto, e l'ordinata del vertice è il **valore minimo** della funzione: nessun valore di y è più piccolo. Se $a < 0$ l'ordinata del vertice è il **valore massimo**. In entrambi i casi il valore è assunto per $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

Lo si vede dalla forma canonica $y = a(x - h)^2 + k$: il termine $(x - h)^2$ è nullo per $x = h$ e positivo altrove; moltiplicato per $a > 0$ si aggiunge a k, moltiplicato per $a < 0$ si sottrae. La funzione $y = x^2 - 8x + 3$, per esempio, ha $a > 0$, vertice in $x = 4$ e valore minimo $16 - 32 + 3 = -13$; non ha un valore massimo, perché per x grande le y crescono senza limite.

Molti problemi reali chiedono «il più grande» o «il più piccolo» possibile: si chiamano problemi di **ottimizzazione**. Quando la grandezza da ottimizzare si esprime con una funzione quadratica di una sola variabile, il vertice dà la risposta. Bisogna però sempre controllare che il vertice cada nell'intervallo dei valori che la variabile può assumere nel problema.

2.4.2 L'area massima

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Con 40 m di rete si vuole recintare un orto rettangolare. Quali dimensioni danno l'area più grande?

Soluzione. Chiamiamo x un lato, in metri. Il semiperimetro è 20 m, quindi l'altro lato è $20 - x$, e deve essere $0 < x < 20$. L'area è

$$A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$$

una funzione quadratica con $a = -1 < 0$: il grafico è una parabola rivolta verso il basso e ha un massimo nel vertice. Le radici di $A(x) = 0$ sono 0 e 20, e il vertice ha per ascissa la loro media, $x = 10$, che cade nell'intervallo ammesso. L'area massima è $A(10) = 10 \cdot 10 = 100$ m^2, e l'orto è un **quadrato** di lato 10 m.

Controllo. Un rettangolo 6 m × 14 m ha lo stesso perimetro ma area 84 m^2, minore di 100 m^2 (Figura 2.6).

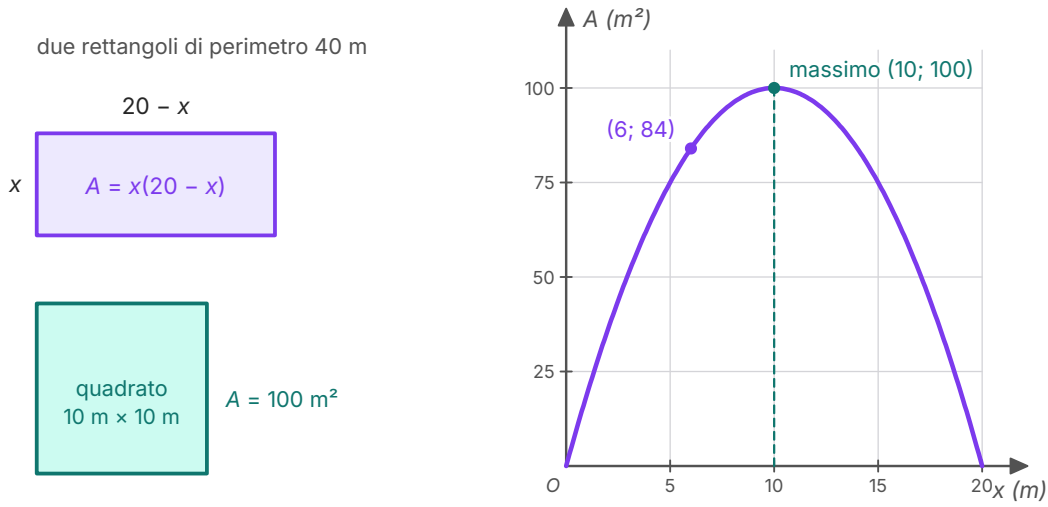

Figura 2.6 A sinistra, un rettangolo di perimetro 40 m con lati x e $20 - x$ (disegnato per $x = 6$) e il quadrato di lato 10 m. A destra, il grafico dell'area $A(x) = x(20 - x)$ per $0 \le x \le 20$, calcolato dall'equazione: il massimo, 100 m², si ha per $x = 10$. Sui due assi del grafico le scale sono diverse.

Il risultato vale in generale: tra tutti i rettangoli con lo stesso perimetro, il quadrato ha l'area massima. È un fatto che si dimostra con lo stesso ragionamento, scrivendo p al posto di 20 (lo farai negli esercizi).

2.4.3 Il ricavo massimo

Anche nell'economia di tutti i giorni si cercano massimi. Un piccolo teatro vende 300 biglietti a sera al prezzo di 12 €. Da un'indagine il gestore stima che ogni euro di aumento farebbe perdere 20 spettatori, e ogni euro di sconto ne farebbe guadagnare 20. Con un prezzo di p euro i biglietti venduti sarebbero $300 - 20(p - 12) = 540 - 20p$, e il *ricavo* (prezzo per quantità, capitolo 1) sarebbe

$$R(p) = p(540 - 20p) = -20p^2 + 540p$$

Ha senso solo per $0 < p < 27$ (oltre i 27 € la stima non prevede più spettatori). La parabola è rivolta verso il basso, gli zeri sono 0 e 27, e il vertice è in $p = \dfrac{27}{2} = 13{,}5$: a 13,50 € si vendono $540 - 270 = 270$ biglietti e il ricavo è $13{,}5 \cdot 270 = 3645$ €, contro i $12 \cdot 300 = 3600$ € attuali. Un aumento di 1,50 € fa perdere 30 spettatori ma fa incassare 45 € in più a sera.

È un primo esempio di *teoria delle decisioni*: si confrontano le scelte possibili attraverso una funzione che misura il risultato. Ma il modello va letto con giudizio: dipende da una stima, quella dei 20 spettatori per euro, che vale solo per piccole variazioni di prezzo; e il massimo del

ricavo non coincide necessariamente con il massimo del *guadagno*, che tiene conto anche dei costi.

2.4.4 Fin dove sale un oggetto lanciato

Un oggetto lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 rallenta per effetto della gravità, si ferma e ricade. In fisica si studia che, trascurando la resistenza dell'aria, la sua quota s sopra il punto di lancio dopo un tempo t è

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{con } g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Si tratta del moto uniformemente accelerato del capitolo 1, con l'accelerazione diretta verso il basso. La quota è una funzione quadratica del tempo, con coefficiente di t^2 negativo: ha un massimo nel vertice.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale di 14 m/s. Qual è l'altezza massima che raggiunge sopra il punto di lancio, e dopo quanto tempo? Quando torna al punto di partenza?

Soluzione. La legge è $s = 14t - 4{,}9t^2$ (in metri, con t in secondi). Il vertice ha ascissa $t = \dfrac{14}{2 \cdot 4{,}9} = \dfrac{14}{9{,}8} = \dfrac{10}{7} \approx 1{,}43$ s, e l'altezza massima è

$$s = 14 \cdot \frac{10}{7} - 4{,}9 \cdot \frac{100}{49} = 20 - 10 = 10 \text{ m}$$

La palla torna alla quota di partenza quando $s = 0$: $t(14 - 4{,}9t) = 0$, cioè $t = 0$ (il lancio) oppure $t = \dfrac{14}{4{,}9} = \dfrac{20}{7} \approx 2{,}86$ s, il doppio del tempo di salita: salita e discesa durano lo stesso tempo, come dice la simmetria della parabola. Il grafico è nella Figura 2.7.

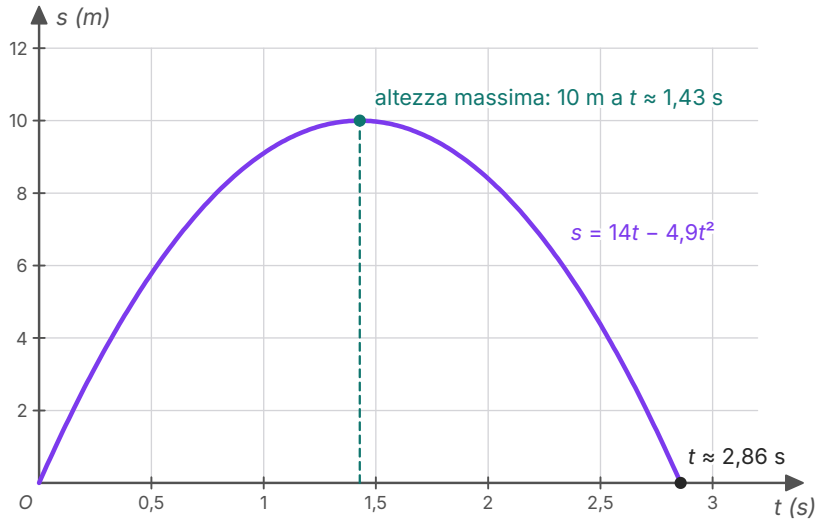

Figura 2.7 La quota s di una palla lanciata verticalmente verso l'alto a 14 m/s, in funzione del tempo: $s = 14t - 4{,}9t^2$, calcolata dall'equazione. Il vertice indica l'altezza massima, 10 m, raggiunta dopo $\frac{10}{7}$ s ≈ 1,43 s; la palla torna al punto di lancio dopo $\frac{20}{7}$ s ≈ 2,86 s. Scale diverse sui due assi.

ERRORE FREQUENTE

Scambiare il grafico per la traiettoria. La palla dell'esempio sale e scende lungo una *retta verticale*: non descrive nessun arco. La parabola della Figura 2.7 è il grafico della quota in funzione del *tempo*, e sull'asse orizzontale ci sono secondi, non metri. Leggere un grafico vuol dire chiedersi sempre quali grandezze ci sono sugli assi.

COLLEGAMENTI

Fisica. La traiettoria di un oggetto lanciato in direzione *obliqua*, invece, è davvero un arco di parabola, se si trascura la resistenza dell'aria: lo dimostrò Galileo Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638). L'idea è combinare un moto uniforme in orizzontale e un moto uniformemente accelerato in verticale; la studi quest'anno anche nel corso di fisica.

Tecnologia. La proprietà del fuoco della parabola (box sulle coniche) è usata nelle antenne paraboliche e, al contrario, nei riflettori: una sorgente di luce posta nel fuoco di uno specchio parabolico produce un fascio di raggi paralleli all'asse.

2.5 Modelli matematici

2.5.1 Che cos'è un modello

In *Matematica 2* (cap. 5) hai descritto alcuni fenomeni con funzioni lineari, e in questo capitolo li abbiamo descritti con funzioni quadratiche. In tutti questi casi si è costruito un **modello matematico**: una descrizione semplificata di una situazione reale attraverso variabili e relazioni matematiche, che permette di fare calcoli e previsioni. Ogni modello ha tre ingredienti, che vanno sempre dichiarati.

- Le **variabili**: quali grandezze si considerano e con quali unità di misura (il prezzo in euro, il tempo in secondi…).
- Le **ipotesi**: quali semplificazioni si accettano (trascuriamo la resistenza dell'aria; supponiamo che gli spettatori diminuiscano di 20 per ogni euro di aumento).
- Il **dominio di validità**: l'intervallo dei valori per cui il modello è stato controllato e ci si può fidare delle sue previsioni.

Un modello non è «vero» o «falso» come un teorema: è più o meno *adeguato* allo scopo. Lo si giudica confrontando le sue previsioni con i dati.

2.5.2 Lineare o quadratico?

Immaginiamo di aver misurato, su una strada asciutta e con la stessa auto, lo *spazio di frenata* d, cioè la distanza percorsa dal momento in cui il conducente preme a fondo il freno fino all'arresto, a diverse velocità v. I dati della Tabella 2.2 sono inventati, ma hanno un ordine di grandezza realistico.

Tabella 2.2 Spazio di frenata d di un'auto a diverse velocità v (dati inventati a scopo didattico) e previsioni dei due modelli discussi nel testo.

v (km/h)	30	50	70	90	110
d misurato (m)	5	14	27	45	67
modello lineare (m)	5	20,5	36	51,5	67
modello $d = \frac{v^2}{180}$ (m)	5	13,9	27,2	45	67,2

Proviamo prima un modello lineare, la retta per il primo e l'ultimo punto, (30; 5) e (110; 67). Il coefficiente angolare è $\frac{67 - 5}{110 - 30} = \frac{62}{80} = 0{,}775$ m per ogni km/h, e la retta è $d = 0{,}775v - 18{,}25$. Agli estremi funziona per costruzione, ma nel mezzo sbaglia di molto: per 70 km/h prevede 36 m contro i 27 misurati. E per $v = 0$ darebbe uno spazio di frenata negativo, −18,25 m, che non ha

senso. I punti della Figura 2.8 non stanno su una retta: si piegano verso l'alto, e lo spazio cresce più che proporzionalmente alla velocità.

Proviamo allora un modello quadratico del tipo più semplice, $d = kv^2$, che vale 0 per $v = 0$. Scegliamo k facendo passare la curva per uno dei punti, per esempio (90; 45): $k = \frac{45}{8100} = \frac{1}{180}$. Il modello $d = \frac{v^2}{180}$ si scosta dai dati di meno di mezzo metro su tutto l'intervallo misurato: è decisamente migliore. Un modello di questo tipo, in cui una grandezza è una funzione quadratica di un'altra, si chiama **modello quadratico**.

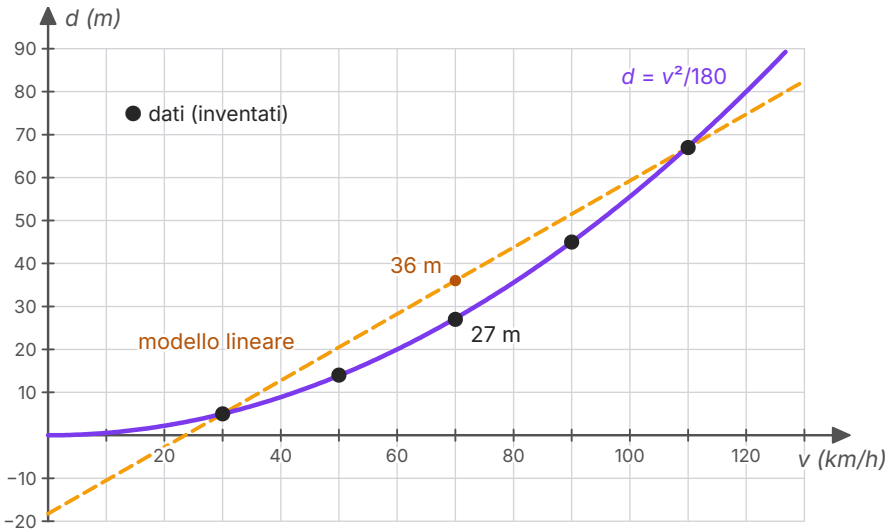

Figura 2.8 I dati (inventati) della Tabella 2.2, con il modello lineare per il primo e l'ultimo punto (tratteggiato) e il modello quadratico $d = \frac{v^2}{180}$ (in viola), calcolati dalle equazioni. A 70 km/h il modello lineare prevede 36 m, il dato è 27 m. Scale diverse sui due assi.

Il modello quadratico ha una conseguenza importante, che vale la pena conoscere da chi guida o andrà in motorino: se la velocità raddoppia, lo spazio di frenata **quadruplica**, perché $k(2v)^2 = 4kv^2$. Da 50 a 100 km/h, lo spazio passa da circa 14 m a circa 56 m. Attenzione però alle estrapolazioni (*Matematica 2*, cap. 5): a 130 km/h il modello prevede circa 94 m, ma la previsione è fuori dall'intervallo dei dati, e su strada bagnata tutti i valori sarebbero diversi.

2.5.3 Modello e legge fisica

In questo esempio il modello quadratico è stato scelto *guardando i dati*: abbiamo provato due funzioni e tenuto quella che si adattava meglio. Ma una forma come $d = kv^2$ si può anche *ricavare* dalla fisica. Se durante la frenata la decelerazione a è costante, le leggi del moto

uniformemente accelerato danno $d = \frac{v^2}{2a}$ (con v in m/s): il modello dei dati e la legge fisica qui sono d'accordo. Con $v = 25$ m/s (cioè 90 km/h) e $d = 45$ m si ottiene $a \approx 6{,}9$ m/s^2, un valore plausibile su asfalto asciutto.

La differenza tra i due approcci è profonda. Una *legge fisica*, come $s = \frac{1}{2}gt^2$ per la caduta libera, nasce da principi generali verificati in moltissime situazioni, e precisa le condizioni in cui vale. Un modello costruito sui dati descrive bene una situazione particolare (questa auto, questa strada) e non pretende di spiegarla: può essere molto utile anche quando non si conosce nessuna legge, come per il prezzo dei biglietti del teatro. In entrambi i casi la matematica offre lo stesso linguaggio: variabili, funzioni, grafici; e la stessa regola di prudenza: ogni previsione vale solo dentro il dominio di validità.

Con il computer

Un software di geometria dinamica è perfetto per esplorare le parabole. Crea tre cursori (slider) a, b, c e scrivi la funzione $y = ax^2 + bx + c$. Muovendo a vedrai cambiare concavità e apertura; quando a vale 0 la curva diventa una retta. Muovendo c la parabola trasla in verticale, e potrai osservare il momento in cui smette di toccare l'asse x: è il momento in cui Δ diventa negativo. Più sorprendente è l'effetto di b, che sposta il vertice lungo una curva (lo scoprirai in un esercizio).

Con un foglio di calcolo, invece, si confrontano modelli e dati. Inserisci i dati della Tabella 2.2 in due colonne; in una terza colonna scrivi la formula del modello, con il coefficiente k in una cella a parte, e in una quarta la differenza tra dato e previsione. Cambiando k e osservando le differenze, cerchi «a occhio» il modello migliore; il grafico a dispersione dei dati con la curva del modello rende il confronto immediato.

SINTESI

- La funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ha per dominio $\mathbb{R}$ e per grafico una parabola con l'asse parallelo all'asse y.
- Se $a > 0$ la concavità è verso l'alto, se $a < 0$ verso il basso; più $|a|$ è grande, più la parabola è stretta.
- Vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$; intersezione con l'asse y in $(0; c)$.
- Forma canonica $y = a(x - h)^2 + k$: il grafico è quello di $y = ax^2$ traslato con il vettore $(h; k)$; si ottiene completando il quadrato.
- Gli zeri della funzione sono le soluzioni reali di $ax^2 + bx + c = 0$: due se $\Delta > 0$, uno (doppio, vertice sull'asse x) se $\Delta = 0$, nessuno se $\Delta < 0$.
- Un'equazione $f(x) = g(x)$ si risolve graficamente cercando le ascisse dei punti comuni ai due grafici; il risultato è un'approssimazione.
- Segno del trinomio: con $\Delta > 0$, segno di a all'esterno delle radici e segno opposto all'interno; con $\Delta = 0$, segno di a tranne nella radice; con $\Delta < 0$, sempre il segno di a.
- Per risolvere una disequazione di secondo grado: forma normale (meglio con $a > 0$), equazione associata, scelta degli intervalli; con $\Delta \leq 0$ la disequazione può essere vera per ogni x, mai vera o vera in un solo punto.
- Il vertice dà il valore minimo ($a > 0$) o massimo ($a < 0$) della funzione: si usa nei problemi di ottimizzazione, controllando che cada tra i valori ammessi.
- Tra i rettangoli di perimetro dato il quadrato ha area massima; un oggetto lanciato verso l'alto a velocità v_0 raggiunge la quota massima all'istante $t = \frac{v_0}{g}$.
- Un modello matematico è definito da variabili, ipotesi e dominio di validità; si sceglie confrontandolo con i dati e non va usato fuori dal suo dominio. Una legge fisica nasce da principi generali; un modello sui dati descrive una situazione particolare.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● La parabola $y = -3x^2 + x - 5$ volge la concavità:

   A. verso l'alto

   B. verso il basso

   C. verso l'alto o verso il basso a seconda di x

   D. verso l'alto, perché il termine noto è negativo

2. ● Il vertice della parabola $y = x^2 - 6x + 5$ è:

   A. (3; −4)

   B. (−3; −4)

   C. (3; 4)

   D. (6; 5)

3. ●● L'asse di simmetria della parabola $y = 2x^2 + 8x - 1$ è la retta:

   A. $x = 2$

   B. $x = -4$

   C. $x = -2$

   D. $y = -2$

4. ●● Il trinomio $x^2 + 2x + 5$:

   A. si annulla per $x = -1$

   B. è positivo solo per $x > -1$

   C. è negativo per qualche valore di x

   D. è positivo per ogni x reale

5. ●● L'insieme delle soluzioni di $x^2 - 9 < 0$ è:

   A. $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

   B. $]-3; 3[$

   C. $]-\infty; 3[$

   D. $\varnothing$

6. ●● La parabola $y = (x + 1)^2 + 2$ si ottiene da $y = x^2$ con la traslazione di vettore:

   A. (1; 2)

   B. (−1; −2)

   C. (2; −1)

   D. (−1; 2)

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Se $\Delta < 0$, la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ non ha soluzioni. b) La parabola $y = ax^2 + bx + c$ interseca sempre l'asse y. c) Se $a < 0$, la funzione $y = ax^2 + bx + c$ ha un valore massimo. d) La disequazione $x^2 > 4$ equivale a $x > \pm 2$.

8. ● Completa. a) La parabola $y = ax^2 + bx + c$ ha il vertice di ascissa _____ e l'asse di equazione _____. b) Se $\Delta = 0$, il vertice della parabola sta _____. c) Se $\Delta > 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha il segno di a per i valori _____ all'intervallo delle radici.

Calcolare

9. ● Per ciascuna parabola indica la concavità, il vertice, l'asse e le intersezioni con gli assi. a) $y = x^2 - 4x$; b) $y = -x^2 + 2x + 8$; c) $y = 2x^2 - 4x + 5$.

10. ● Scrivi in forma canonica completando il quadrato e indica il vertice. a) $y = x^2 + 6x + 4$; b) $y = 2x^2 - 8x + 3$; c) $y = -x^2 + 5x$.

11. ●● Disegna la parabola $y = x^2 - 2x - 8$, indicando vertice, asse, intersezioni con gli assi e il simmetrico del punto sull'asse y.

12. ●● Scrivi l'equazione della parabola che si ottiene da $y = 2x^2$ con la traslazione di vettore $(-1; 3)$, prima in forma canonica e poi nella forma $y = ax^2 + bx + c$.

13. ● Risolvi le disequazioni. a) $x^2 - 7x + 10 > 0$; b) $x^2 - 7x + 10 \leq 0$; c) $x^2 - 16 \geq 0$; d) $3x^2 - 12x < 0$.

14. ●● Risolvi le disequazioni. a) $-x^2 + x + 6 > 0$; b) $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$; c) $-3x^2 + 2x + 1 \leq 0$.

15. ●● Risolvi le disequazioni. a) $x^2 - 10x + 25 > 0$; b) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$; c) $x^2 - 3x + 4 > 0$; d) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

16. ●● Porta in forma normale e risolvi. a) $(x + 2)^2 < 3x + 10$; b) $x(x - 3) \geq 2(x - 3)$; c) $(2x - 1)(x + 1) > x^2 - 1$.

17. ●● Risolvi la disequazione $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 < 0$.

18. ●● Trova il valore massimo o minimo di ciascuna funzione e il valore di x in cui è assunto. a) $y = x^2 - 8x + 3$; b) $y = -3x^2 + 12x - 5$; c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x$.

19. ●● Risolvi graficamente l'equazione $x^2 = 2x + 3$, disegnando nello stesso piano $y = x^2$ e $y = 2x + 3$; poi verifica il risultato con l'algebra.

Dimostrare e argomentare

20. ●● Dimostra che, se $\Delta > 0$, l'ascissa del vertice della parabola $y = ax^2 + bx + c$ è la media delle ascisse dei due punti in cui la parabola taglia l'asse x. Che cosa significa questo fatto per la simmetria della curva?

21. ●● Spiega perché, se a e c sono discordi, la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ non può essere né vera per ogni x né mai vera.

22. ●● Trova l'errore in ciascun ragionamento e correggilo. a) «$x^2 < 4$, quindi $x < \pm 2$, cioè $x < 2$». b) «Per $-x^2 + 4x - 5 > 0$ si ha $\Delta < 0$, quindi la disequazione è vera per ogni x».

23. ●●● Dimostra che, tra tutti i rettangoli di perimetro $2p$, il quadrato ha l'area massima.

24. ●●● Dimostra che, se due punti distinti della parabola $y = ax^2 + bx + c$ hanno la stessa ordinata, sono simmetrici rispetto all'asse $x = -\frac{b}{2a}$. (Suggerimento: se $ax_1^2 + bx_1 = ax_2^2 + bx_2$, raccogli $x_1 - x_2$.)

Problemi

25. ●● Un allevatore ha 60 m di rete per recintare un'area rettangolare addossata a un muro rettilineo: la rete serve solo per tre lati. Quali dimensioni rendono massima l'area? Quanto vale l'area massima?

26. ●● Una pallina è lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale di 9,8 m/s; trascura la resistenza dell'aria e usa $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. a) Scrivi la legge della quota $s(t)$ sopra il punto di lancio. b) Qual è la quota massima, e dopo quanto tempo è raggiunta? c) Per quanto tempo la pallina si trova a più di 3,675 m sopra il punto di lancio?

27. ●● Un'applicazione costa oggi 3 € e viene scaricata 7500 volte al mese. Gli sviluppatori stimano che, per prezzi p (in euro) compresi tra 0 e 8, i download mensili siano $12\,000 - 1500p$. a) Scrivi il ricavo mensile $R(p)$. b) Quale prezzo rende massimo il ricavo? Quanto vale il ricavo massimo? c) Per quali prezzi il ricavo è almeno quello attuale?

28. ●● Usa il modello $d = \dfrac{v^2}{180}$ dello spazio di frenata (v in km/h, d in metri). a) Quanto vale lo spazio di frenata a 60 km/h? b) A quale velocità lo spazio di frenata è di 80 m? c) Per quali velocità lo spazio di frenata è minore di 50 m? d) Perché la risposta b) è meno affidabile della a)?

29. ●● Un'aiuola rettangolare di 8 m × 6 m è circondata da un vialetto di larghezza costante x. Per quali valori di x l'area del vialetto non supera $72\ \text{m}^2$?

30. ●●● Un panificio stima che il guadagno giornaliero, in euro, producendo x kg di pane, sia $G(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 40x - 350$, per $0 \le x \le 60$ (oltre i 60 kg il forno non basta). a) Quale produzione rende massimo il guadagno, e quanto vale il guadagno massimo? b) Per quali produzioni il panificio guadagna (cioè $G(x) > 0$)? c) Perché nella risposta b) non si deve scrivere $10 < x < 70$?

Con il computer

31. ●● In un software di geometria dinamica crea un cursore b e disegna la parabola $y = x^2 + bx$; attiva la traccia del vertice. a) Muovendo b, che curva descrive il vertice? Trovane l'equazione calcolando le coordinate del vertice in funzione di b. b) Per quale valore di b il vertice è più in alto?

32. ●● In un foglio di calcolo inserisci i dati della Tabella 2.2 e costruisci una colonna con il modello $d = kv^2$, con k in una cella a parte, e una colonna con le differenze tra dato e modello. a) Con $k = \dfrac{1}{180}$, qual è la differenza più grande, in valore assoluto? b) Prova $k = 0{,}005$ e $k = 0{,}006$: le differenze migliorano o peggiorano?

Verso la verifica

33. ●● Data la parabola $y = x^2 - 4x + 3$: a) trova vertice, asse e intersezioni con gli assi e disegnala; b) risolvi, leggendo il grafico, la disequazione $x^2 - 4x + 3 \le 0$; c) per quali valori di k la retta $y = k$ non incontra la parabola?

34. ●● Trova l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ della parabola con vertice $V(1; 4)$ che passa per il punto $(3; 0)$. Poi risolvi la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ con i coefficienti trovati.

35. ●●● *Sfida.* Per quali valori del parametro k la disequazione $x^2 + kx + 4 > 0$ è vera per ogni x reale? Che cosa succede per $k = 4$?

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Apollonio e le *Coniche*, e la nascita della geometria analitica con Cartesio e Fermat.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le coniche, il fuoco e la direttrice, e i problemi di massimo e di minimo.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come impostare un problema di ottimizzazione e controllare che la soluzione abbia senso.

Glossario del capitolo

Apertura
Per la parabola $y = ax^2 + bx + c$, quanto la curva è stretta o larga: dipende da $|a|$ (più $|a|$ è grande, più la parabola è stretta).

Asse della parabola
La retta verticale $x = -b/(2a)$, asse di simmetria della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Concavità
Il verso verso cui «si apre» la parabola: verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$.

Coniche
Le curve che si ottengono tagliando un doppio cono con un piano che non passa per il vertice: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole.

Direttrice
La retta fissa che, con il fuoco, definisce la parabola come luogo dei punti equidistanti da entrambi; per $y = ax^2$ è $y = -1/(4a)$.

Disequazione di secondo grado
Disequazione che in forma normale si scrive $ax^2 + bx + c > 0$ ($o \geq, <, \leq$) con $a \neq 0$.

Dominio di validità
L'intervallo dei valori delle variabili in cui un modello è stato controllato e le sue previsioni sono affidabili.

Equazione associata
L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ che si ottiene da una disequazione di secondo grado sostituendo il segno di disuguaglianza con l'uguale.

Forma canonica
La scrittura $y = a(x - h)^2 + k$ di una funzione quadratica, che mostra il vertice $V(h; k)$.

Funzione quadratica
Funzione $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$; ha per dominio $\mathbb{R}$ e per grafico una parabola.

Fuoco
Il punto fisso che, con la direttrice, definisce la parabola; per $y = ax^2$ è il punto $(0; 1/(4a))$.

Modello matematico
Descrizione semplificata di una situazione reale mediante variabili e relazioni matematiche, con ipotesi e dominio di validità dichiarati.

Modello quadratico
Modello in cui una grandezza è una funzione quadratica di un'altra.

Ottimizzazione
Ricerca del valore massimo o minimo di una grandezza al variare delle scelte possibili.

Parabola
In questo libro, il grafico di una funzione quadratica; in generale, il luogo dei punti equidistanti da un fuoco e da una direttrice.

Valore massimo
Il più grande valore assunto da una funzione; per $y = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$ è l'ordinata del vertice.

Valore minimo
Il più piccolo valore assunto da una funzione; per $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ è l'ordinata del vertice.

Vertice
Il punto della parabola sull'asse di simmetria, $V(-b/(2a); -\Delta/(4a))$: il più basso se $a > 0$, il più alto se $a < 0$.

Zero di una funzione
Un numero x_0 tale che $f(x_0) = 0$; sul grafico, l'ascissa di un punto comune con l'asse x.

Soluzioni

1. B. Il coefficiente di x^2 è $a = -3 < 0$.

2. A. $x_V = 3$, $y_V = 9 - 18 + 5 = -4$.

3. C. $x = -\frac{8}{4} = -2$.

4. D. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ e $a = 1 > 0$: il trinomio è sempre positivo (infatti $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$).

5. B. $x^2 - 9$ è negativo tra le radici −3 e 3.

6. D. $y = (x - (-1))^2 + 2$: $h = -1$, $k = 2$.

7. a) Falso: dipende da a; se $a > 0$ è vera per ogni x, se $a < 0$ non ha soluzioni. b) Vero, nel punto $(0; c)$. c) Vero: la concavità è verso il basso e il massimo è l'ordinata del vertice. d) Falso: $x < -2$ oppure $x > 2$.

8. a) $x_V = -\frac{b}{2a}$; $x = -\frac{b}{2a}$. b) sull'asse x (la parabola è tangente all'asse x). c) esterni.

9. a) Verso l'alto; $V(2; -4)$; asse $x = 2$; intersezioni $(0; 0)$ e $(4; 0)$. b) Verso il basso; $V(1; 9)$; asse $x = 1$; con l'asse y $(0; 8)$, con l'asse x $(-2; 0)$ e $(4; 0)$. c) Verso l'alto; $V(1; 3)$; asse $x = 1$; con l'asse y $(0; 5)$; $\Delta = 16 - 40 < 0$: nessuna intersezione con l'asse x.

10. a) $y = (x + 3)^2 - 5$, $V(-3; -5)$. b) $y = 2(x^2 - 4x) + 3 = 2(x - 2)^2 - 5$, $V(2; -5)$. c) $y = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{25}{4}$, $V(\frac{5}{2}; \frac{25}{4})$.

11. Concavità verso l'alto; $V(1; -9)$, asse $x = 1$; con l'asse x: $(x - 4)(x + 2) = 0$, punti $(-2; 0)$ e $(4; 0)$; con l'asse y: $(0; -8)$, il cui simmetrico è $(2; -8)$.

12. $y = 2(x + 1)^2 + 3$, cioè $y = 2x^2 + 4x + 5$; vertice $(-1; 3)$.

13. a) $S =]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[$. b) $S = [2; 5]$. c) $S =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$. d) $3x(x - 4) < 0$: $S =]0; 4[$.

14. a) $x^2 - x - 6 < 0$, radici −2 e 3: $S =]-2; 3[$. b) $\Delta = 9 + 16 = 25$, radici −2 e $\frac{1}{2}$: $S =]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$. c) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$, radici $-\frac{1}{3}$ e 1: $S =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; +\infty[$.

15. a) $(x - 5)^2 > 0$: $S =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$. b) $(2x + 1)^2 \leq 0$: solo $x = -\frac{1}{2}$. c) $\Delta = 9 - 16 < 0$, $a > 0$: $S = \mathbb{R}$. d) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$ con $\Delta/4 = 1 - 3 < 0$: $S = \varnothing$.

16. a) $x^2 + 4x + 4 - 3x - 10 < 0$, $x^2 + x - 6 < 0$: $S =]-3; 2[$. b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$: $S =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$. c) $2x^2 + x - 1 - x^2 + 1 > 0$, $x^2 + x > 0$, $x(x + 1) > 0$: $S =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

17. $\Delta/4 = 3 - 2 = 1$, radici $\sqrt{3} - 1$ e $\sqrt{3} + 1$: $S =]\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1[$ (circa $]0{,}73; 2{,}73[$).

18. a) Minimo −13 per $x = 4$. b) Massimo 7 per $x = 2$ $(-12 + 24 - 5 = 7)$. c) Minimo $-\frac{1}{2}$ per $x = -1$.

19. La retta passa per $(0; 3)$ e $(-1; 1)$; i punti comuni sono $(-1; 1)$ e $(3; 9)$. Verifica: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$: $x = -1$ oppure $x = 3$.

20. La somma delle soluzioni è $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ (capitolo 1), quindi la loro media è $-\frac{b}{2a}$, che è l'ascissa del vertice. I due punti di intersezione con l'asse x hanno la stessa ordinata (zero) e sono equidistanti dall'asse della parabola: sono simmetrici rispetto a esso.

21. Se $ac < 0$, allora $-4ac > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: il trinomio ha due radici distinte, ha il segno di a all'esterno e il segno opposto all'interno. Quindi assume sia valori positivi sia valori negativi, e la disequazione è vera per alcuni x e falsa per altri.

22. a) «$x < \pm 2$» non ha senso. Il trinomio $x^2 - 4$ è negativo tra le radici: $-2 < x < 2$. b) $\Delta/4 = 4 - 5 = -1 < 0$, ma $a = -1 < 0$: il trinomio ha sempre segno negativo, quindi la disequazione non è mai vera, $S = \varnothing$.

23. Se un lato misura x, con $0 < x < p$, l'altro misura $p - x$ e l'area è $A(x) = x(p - x) = -x^2 + px$: una parabola

rivolta verso il basso, con zeri 0 e p. Il massimo è nel vertice, di ascissa $\frac{p}{2}$ (media degli zeri), che appartiene all'intervallo ammesso; per $x = \frac{p}{2}$ anche l'altro lato vale $\frac{p}{2}$: il rettangolo è un quadrato, di area $\frac{p^2}{4}$. c.v.d.

24. Siano $(x_1; y_0)$ e $(x_2; y_0)$ i due punti, con $x_1 \neq x_2$. Allora $ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c$, cioè $a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0$, e raccogliendo $(x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b] = 0$. Poiché $x_1 - x_2 \neq 0$, deve essere $a(x_1 + x_2) + b = 0$, cioè $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$: il punto medio del segmento che li unisce sta sull'asse, e il segmento è orizzontale, quindi perpendicolare all'asse. I due punti sono simmetrici rispetto all'asse. c.v.d.

25. Se x è ciascuno dei due lati perpendicolari al muro, il lato parallelo è $60 - 2x$, con $0 < x < 30$. $A(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$, zeri 0 e 30, vertice in $x = 15$: le dimensioni sono 15 m e 30 m, l'area massima è 450 m².

26. a) $s(t) = 9{,}8t - 4{,}9t^2$. b) Vertice in $t = \frac{9{,}8}{9{,}8} = 1$ s; quota massima $s(1) = 4{,}9$ m. c) $9{,}8t - 4{,}9t^2 > 3{,}675$; dividendo per 4,9: $t^2 - 2t + 0{,}75 < 0$, radici 0,5 e 1,5: tra 0,5 s e 1,5 s dopo il lancio, cioè per 1 s.

27. a) $R(p) = p(12\,000 - 1500p) = -1500p^2 + 12\,000p$, per $0 < p < 8$. b) Zeri 0 e 8, vertice in $p = 4$: a 4 € il ricavo massimo è $4 \cdot 6000 = 24\,000$ €. c) Oggi $R(3) = 3 \cdot 7500 = 22\,500$ €. $-1500p^2 + 12\,000p \geq 22\,500$ equivale a $p^2 - 8p + 15 \leq 0$, radici 3 e 5: per prezzi da 3 € a 5 €.

28. a) $\frac{3600}{180} = 20$ m. b) $v^2 = 14\,400$, $v = 120$ km/h (la soluzione negativa non ha senso). c) $v^2 < 9000$ con $v > 0$: $0 < v < \sqrt{9000}$, cioè fino a circa 94,9 km/h. d) 120 km/h è fuori dall'intervallo dei dati (30–110 km/h): è un'estrapolazione; 60 km/h è dentro (interpolazione).

29. Area del vialetto: $(8 + 2x)(6 + 2x) - 48 = 4x^2 + 28x$. $4x^2 + 28x \leq 72$, $x^2 + 7x - 18 \leq 0$, radici −9 e 2: $-9 \leq x \leq 2$. Con $x > 0$: $0 < x \leq 2$ m.

30. a) Vertice in $x = -\frac{40}{2 \cdot (-½)} = 40$ kg (nell'intervallo ammesso); $G(40) = -800 + 1600 - 350 = 450$ €. b) $G(x) > 0$ equivale a $x^2 - 80x + 700 < 0$, radici 10 e 70: $10 < x < 70$; intersecando con $0 \leq x \leq 60$ si ottiene $10 < x \leq 60$. c) Il modello vale solo fino a 60 kg: oltre quel valore non descrive la realtà (dominio di validità).

31. a) Il vertice di $y = x^2 + bx$ è $(-\frac{b}{2}; -\frac{b^2}{4})$. Ponendo $X = -\frac{b}{2}$ si ha $Y = -\frac{b^2}{4} = -X^2$: il vertice descrive la parabola $y = -x^2$. b) Per $b = 0$: il vertice è in (0; 0), il punto più alto di $y = -x^2$.

32. a) Le differenze sono 0; 0,11; −0,22; 0; −0,22 m: la più grande in valore assoluto è circa 0,22 m (a 70 e a 110 km/h). b) Con $k = 0{,}005$ le previsioni sono 4,5; 12,5; 24,5; 40,5; 60,5 m e la differenza più grande sale a 6,5 m; con $k = 0{,}006$ sono 5,4; 15; 29,4; 48,6; 72,6 m e la più grande è −5,6 m. Entrambe peggiorano: $\frac{1}{180} \approx 0{,}00556$ è migliore.

33. a) $y = (x - 2)^2 - 1$: $V(2; -1)$, asse $x = 2$, intersezioni (1; 0), (3; 0), (0; 3). b) La parabola è sotto l'asse x o su di esso tra 1 e 3: $S = [1; 3]$. c) Il minimo della funzione è −1: la retta $y = k$ non incontra la parabola per $k < -1$.

34. Forma canonica: $y = a(x - 1)^2 + 4$. Passa per (3; 0): $0 = 4a + 4$, $a = -1$. Quindi $y = -(x - 1)^2 + 4 = -x^2 + 2x + 3$. La disequazione $-x^2 + 2x + 3 > 0$ equivale a $x^2 - 2x - 3 < 0$, radici −1 e 3: $S =]-1; 3[$.

35. Con $a = 1 > 0$ il trinomio è positivo per ogni x se e solo se $\Delta < 0$: $k^2 - 16 < 0$, cioè $-4 < k < 4$. Per $k = 4$: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 > 0$ è vera per ogni $x \neq -2$, ma non per $x = -2$: quindi $k = 4$ (come $k = -4$) non va bene.