Matematica 2 · Parte IV · Le trasformazioni geometriche · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte IV · pagine 189–190 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte IV · Le trasformazioni geometriche

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi e giustifica le affermazioni citando la proprietà o il teorema che usi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 7)* La composizione di due simmetrie assiali i cui assi si incontrano in un punto O formando un angolo di 35° è:
   - **A.** una traslazione
   - **B.** una rotazione di centro O e angolo 35°
   - **C.** una rotazione di centro O e angolo 70°
   - **D.** la simmetria centrale di centro O

2. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Il simmetrico del punto $P(3; -2)$ rispetto alla bisettrice $y = x$ è:
   - **A.** $(-2; 3)$
   - **B.** $(2; -3)$
   - **C.** $(-3; 2)$
   - **D.** $(3; 2)$

3. ● *(0,5 punti · cap. 7)* Quale di queste trasformazioni è un'isometria inversa, cioè inverte il verso di percorrenza delle figure?
   - **A.** la traslazione di vettore $\mathbf{v}(2; 1)$
   - **B.** la simmetria rispetto all'asse x
   - **C.** la rotazione di 90° attorno all'origine
   - **D.** la simmetria centrale di centro O

4. ●● *(0,5 punti · cap. 7)* Il grafico di $y = |x - 2| + 1$ si ottiene traslando il grafico di $y = |x|$ del vettore:
   - **A.** $(2; 1)$
   - **B.** $(-2; 1)$
   - **C.** $(2; -1)$
   - **D.** $(1; 2)$

Calcolare

5. ●● *(1 punto · cap. 7)* Il triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(3; 0)$, $C(1; 2)$ viene trasformato con l'omotetia di centro l'origine e rapporto -3. Trova i vertici dell'immagine e confronta i perimetri e le aree dei due triangoli.

6. ●● *(1 punto · cap. 7)* Siano t la traslazione di vettore $\mathbf{v}(-3; 2)$ e s la simmetria rispetto all'asse x. Scrivi le equazioni di $s \circ t$ e di $t \circ s$ e calcola l'immagine di $P(1; 4)$ nelle due composizioni. La composizione è commutativa?

7. ●● *(1 punto · cap. 7)* Data la retta r: $x + 2y - 4 = 0$, scrivi l'equazione della sua immagine: a) nella simmetria rispetto all'asse x; b) nella simmetria centrale di centro $M(1; 1)$; c) nella rotazione di $+90°$ attorno all'origine. Quale delle tre rette è parallela a r, e quale è perpendicolare a r?

8. ●● *(1 punto · cap. 7)* Il quadrato di vertici $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(3; 3)$, $D(1; 3)$ viene ruotato di $+90°$ attorno all'origine. a) Trova i vertici dell'immagine. b) Trova il centro della simmetria centrale che porta A in C e verifica che porta B in D.

Dimostrare

9. ●● *(1,5 punti · cap. 7)* Sia $ABCD$ un parallelogramma e sia O il punto d'incontro delle sue diagonali. a) Dimostra che O è centro di simmetria del parallelogramma. b) Una retta passante per O incontra il lato AB in P e il lato CD in Q. Dimostra che O è il punto medio di PQ.

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 7)* Nel piano cartesiano (unità: cm) il logo di una squadra è il triangolo di vertici $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(1; 4)$. Per stamparlo su un manifesto lo si ingrandisce con l'omotetia di centro l'origine e rapporto $k > 0$, e l'immagine deve stare tutta nel rettangolo di vertici $(0; 0)$, $(15; 0)$, $(15; 10)$, $(0; 10)$. a) Trova le immagini A', B', C' in funzione di k e il valore massimo di k. b) Per quel valore calcola il perimetro e l'area del logo ingrandito. c) Verifica con i coefficienti angolari che $B'C'$ è parallelo a BC.

Sfida

11. ●●● *(1 punto · cap. 7)* Nel piano cartesiano siano s_1 la simmetria rispetto all'asse y e s_2 la simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$. a) Scrivi le equazioni di $s_2 \circ s_1$ e di $s_1 \circ s_2$. b) Riconosci le due trasformazioni. c) Controlla il risultato con il teorema sulla composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti.

Soluzioni

1. C. Due simmetrie con assi incidenti danno una rotazione attorno al punto d'intersezione, di angolo doppio dell'angolo tra gli assi: $2 \cdot 35° = 70°$.

2. A. La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ scambia le coordinate: $(x; y) \mapsto (y; x)$.

3. B. Le simmetrie assiali sono isometrie inverse; traslazioni, rotazioni e simmetrie centrali (che sono rotazioni di 180°) sono dirette.

4. A. Traslando il grafico di $y = f(x)$ del vettore $\mathbf{v}(a; b)$ si ottiene $y = f(x - a) + b$: qui $a = 2$, $b = 1$. Il vertice passa da $(0; 0)$ a $(2; 1)$.

5. Equazioni $x' = -3x$, $y' = -3y$: $A'(-3; 0)$, $B'(-9; 0)$, $C'(-3; -6)$. Il triangolo ABC è rettangolo in A con cateti 2 e 2: perimetro $4 + 2\sqrt{2}$, area 2. L'immagine ha cateti 6 e 6: perimetro $12 + 6\sqrt{2}$ (moltiplicato per $|k| = 3$), area 18 (moltiplicata per $k^2 = 9$).

6. t: $x' = x - 3$, $y' = y + 2$; s: $x' = x$, $y' = -y$. $s \circ t$ (prima t): $x' = x - 3$, $y' = -y - 2$; $P \mapsto (-2; 6) \mapsto (-2; -6)$. $t \circ s$ (prima s): $x' = x - 3$, $y' = -y + 2$; $P \mapsto (1; -4) \mapsto (-2; -2)$. Le immagini sono diverse: la composizione non è commutativa.

7. Si sostituiscono a x e y le loro espressioni in funzione delle coordinate dell'immagine. a) $x \to x$, $y \to -y$: $x - 2y - 4 = 0$. b) $x \to 2 - x$, $y \to 2 - y$: $(2 - x) + 2(2 - y) - 4 = 0$, cioè $x + 2y - 2 = 0$. c) La rotazione porta $(x; y)$ in $(-y; x)$, quindi $x \to y$, $y \to -x$: $y - 2x - 4 = 0$, cioè $y = 2x + 4$. La retta b) è parallela a r (stessi coefficienti di x e y; la simmetria centrale trasforma ogni retta in una parallela); la retta c) è perpendicolare a r: $m = -\frac{1}{2}$ e $m' = 2$, con $m \cdot m' = -1$, come ci si aspetta da una rotazione di 90°. Controllo: $(4; 0)$ sta su r; le sue immagini $(4; 0)$, $(-2; 2)$ e $(0; 4)$ stanno sulle rette trovate.

8. a) La rotazione di +90° attorno a O porta $(x; y)$ in $(-y; x)$: $A'(-1; 1)$, $B'(-1; 3)$, $C'(-3; 3)$, $D'(-3; 1)$. b) Il centro è il punto medio di AC, $M(2; 2)$; la simmetria ha equazioni $x' = 4 - x$, $y' = 4 - y$ e porta $B(3; 1)$ in $(1; 3)$, cioè in D.

9. a) Le diagonali di un parallelogramma si dimezzano (*Matematica 1*): O è il punto medio di AC e di BD. Quindi la simmetria centrale di centro O porta A in C, B in D, C in A e D in B. Un'isometria trasforma un segmento nel segmento che ha per estremi le immagini degli estremi, perciò il lato AB va in CD, BC in DA, e viceversa: il parallelogramma è unito, cioè O è centro di simmetria. b) Sia P' l'immagine di P. Poiché P sta su AB, per a) P' sta su CD; per definizione P' sta anche sulla retta OP. Questa retta e la retta CD sono distinte (O non sta su CD) e hanno in comune il solo punto Q: dunque $P' = Q$, e O è il punto medio di PQ. c.v.d.

10. a) L'omotetia ha equazioni $x' = kx$, $y' = ky$: $A'(k; k)$, $B'(3k; k)$, $C'(k; 4k)$. Con $k > 0$ le coordinate sono positive; servono $3k \le 15$ e $4k \le 10$, cioè $k \le 5$ e $k \le \frac{5}{2}$: il massimo è $k = \frac{5}{2}$, con $A'(2{,}5; 2{,}5)$, $B'(7{,}5; 2{,}5)$, $C'(2{,}5; 10)$. b) Il triangolo ABC è rettangolo in A con cateti 2 e 3 cm: ipotenusa $\sqrt{13}$ cm, perimetro $5 + \sqrt{13}$ cm, area 3 cm^2. L'omotetia moltiplica le lunghezze per $\frac{5}{2}$ e le aree per $\frac{25}{4}$: perimetro $\frac{5}{2}(5 + \sqrt{13}) = \frac{25 + 5\sqrt{13}}{2} \approx 21{,}5$ cm, area $3 \cdot \frac{25}{4} = \frac{75}{4} = 18{,}75$ cm^2 (controllo: cateti 5 e 7,5, area $5 \cdot 7{,}5 : 2 = 18{,}75$). c) $m_{BC} = \frac{4 - 1}{1 - 3} = -\frac{3}{2}$, $m_{B'C'} = \frac{10 - 2{,}5}{2{,}5 - 7{,}5} = -\frac{3}{2}$: i coefficienti angolari sono uguali, le rette sono parallele, come in ogni omotetia.

11. a) s_1: $(x; y) \mapsto (-x; y)$; s_2: $(x; y) \mapsto (y; x)$. Quindi $s_2 \circ s_1$: $(x; y) \mapsto (y; -x)$ e $s_1 \circ s_2$: $(x; y) \mapsto (-y; x)$. b) La prima è la rotazione di −90° attorno all'origine, la seconda quella di +90°: le due composizioni sono diverse. c) Gli assi si incontrano in O; l'angolo orientato dall'as-

se y (90°) alla bisettrice (45°) è −45°, quindi $s_2 \circ s_1$ è la rotazione di $2 \cdot (-45°) = -90°$, come trovato in b). Per esempio $(3; 1) \mapsto (-3; 1) \mapsto (1; -3)$.