Matematica 2 · Parte III · Il piano cartesiano e i sistemi lineari · versione 1.0
Verifica: Verifica di fine parte III · pagine 161–162 del volume completo · estratto per lo studio

Verifica di fine parte III · Il piano cartesiano e i sistemi lineari

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 5)* La distanza tra i punti A(−1; 2) e B(3; −1) è:
   - **A.** $\sqrt{7}$
   - **B.** 5
   - **C.** 7
   - **D.** 25

2. ● *(0,5 punti · cap. 5)* Una retta perpendicolare a $y = 2x - 3$ ha coefficiente angolare:
   - **A.** 2
   - **B.** −2
   - **C.** $\frac{1}{2}$
   - **D.** $-\frac{1}{2}$

3. ● *(0,5 punti · cap. 6)* Il sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$ è:
   - **A.** indeterminato
   - **B.** impossibile
   - **C.** determinato, con la sola soluzione (0; −3)
   - **D.** determinato, con la sola soluzione (3; 3)

4. ●● *(0,5 punti · cap. 6)* Quale punto appartiene alla regione $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$?
   - **A.** (5; 0)
   - **B.** (−1; 2)
   - **C.** (2; 1)
   - **D.** (3; 3)

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 5)* Dati A(−2; 1) e B(4; 3), calcola il punto medio M del segmento AB, la lunghezza di AB e l'equazione della retta AB in forma implicita.

6. ●● *(1 punto · cap. 5)* Scrivi l'equazione della retta passante per P(1; −2) e perpendicolare alla retta r: $x + 2y - 3 = 0$, e calcola la distanza di P da r.

7. ● *(1 punto · cap. 6)* Risolvi con la regola di Cramer: $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$

8. ●● *(1 punto · cap. 6)* Riduci a forma normale e risolvi: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y-1}{3} = 1 \\ 2(x + y) - 3 = x + 1 \end{cases}$

9. ●● *(1 punto · cap. 6)* Senza risolverli, stabilisci se i sistemi sono determinati, impossibili o indeterminati; poi risolvi quello determinato. a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Problemi

10. ●● *(1 punto · cap. 6)* Per uno spettacolo sono stati venduti 250 biglietti, interi a 18 € e ridotti a 12 €, con un incasso di 3900 €. Quanti biglietti interi e quanti ridotti sono stati venduti?

11. ●● *(1 punto · cap. 5–6)* Un abbonamento telefonico A costa 10 € al mese più 0,05 € al minuto; l'abbonamento B costa solo 0,15 € al minuto. Scrivi il costo mensile C in funzione dei minuti t per i due abbonamenti, trova per quanti minuti i costi sono uguali e stabilisci quale conviene a chi telefona 150 minuti al mese.

Sfida

12. ●●● *(1 punto · cap. 5–6)* Le rette r: $y = x + 1$, s: $x + y = 7$ e t: $y = 1$ individuano un triangolo. Trova le coordinate dei vertici, dimostra che il triangolo è rettangolo e isoscele e calcolane l'area.

Soluzioni

1. B. $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

2. D. Deve essere $2 \cdot m' = -1$, quindi $m' = -\frac{1}{2}$.

3. A. $\frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} = \frac{3}{9}$: la seconda equazione è la prima moltiplicata per 3. (0; −3) è una delle infinite soluzioni; (3; 3) soddisfa entrambe le equazioni, quindi è anch'essa una soluzione, ma non l'unica.

4. C. $2 \geq 0$, $1 \geq 0$, $2 + 1 = 3 \leq 4$. (5; 0) e (3; 3) violano $x + y \leq 4$; (−1; 2) viola $x \geq 0$.

5. $M(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+3}{2}) = M(1; 2)$.
$AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. $m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
$y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2)$, cioè $x - 3y + 5 = 0$ (controllo con B: $4 - 9 + 5 = 0$ ✓).

6. r ha $m = -\frac{1}{2}$, quindi la perpendicolare ha $m' = 2$: $y + 2 = 2(x - 1)$, cioè $y = 2x - 4$. Distanza: $\frac{|1 + 2 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

7. $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26$;
$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 48 = -52$;
$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 10 = 26$. $x = 2$, $y = -1$. Verifica: $6 - 4 = 2$ ✓; $10 + 2 = 12$ ✓.

8. Prima (per 6): $3x - 2y + 2 = 6$, $3x - 2y = 4$. Seconda: $x + 2y = 4$. Sommando: $4x = 8$, $x = 2$, $y = 1$. Soluzione (2; 1).

9. a) $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{1}{5}$: impossibile (rette parallele distinte). b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$: indeterminato (la seconda equazione è la prima moltiplicata per 3). c) $D = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3 \neq 0$: determinato. Sommando le equazioni: $3x = 6$, $x = 2$, $y = 1$. Soluzione (2; 1); verifica: $2 - 1 = 1$ ✓, $4 + 1 = 5$ ✓.

10. $x + y = 250$, $18x + 12y = 3900$. Sostituendo $y = 250 - x$: $6x + 3000 = 3900$, $x = 150$, $y = 100$: 150 interi e 100 ridotti. Controllo: $2700 + 1200 = 3900$ ✓.

11. A: $C = 10 + 0{,}05t$; B: $C = 0{,}15t$. Uguagliando: $0{,}10t = 10$, $t = 100$ min, costo 15 €. Per 150 min: A costa 10 + 7,50 = 17,50 €, B costa 22,50 €: conviene A (oltre i 100 minuti la retta di A sta sotto quella di B).

12. $r \cap s$: $x + x + 1 = 7$, $x = 3$: (3; 4). $r \cap t$: (0; 1). $s \cap t$: (6; 1). r ha $m = 1$, s ha $m = -1$: $1 \cdot (-1) = -1$, quindi $r \perp s$ e l'angolo in (3; 4) è retto. I cateti misurano entrambi $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$: il triangolo è isoscele. Area: base 6 (sulla retta $y = 1$) per altezza 3, diviso 2: 9 (oppure $\frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 9$).