Verifica di fine parte II · Geometria del piano

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi e giustifica ogni affermazione geometrica citando il teorema che usi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Un parallelogramma e un triangolo hanno basi congruenti e altezze congruenti. Allora:
   - **A.** il parallelogramma è equivalente al triangolo
   - **B.** il triangolo è equivalente alla metà del parallelogramma
   - **C.** il triangolo ha estensione doppia di quella del parallelogramma
   - **D.** non si può dire nulla senza conoscere gli angoli

2. ● *(0,5 punti · cap. 3)* Un triangolo ha i lati di 7 cm, 24 cm e 25 cm. Il triangolo è:
   - **A.** acutangolo
   - **B.** ottusangolo
   - **C.** rettangolo
   - **D.** impossibile da costruire

3. ●● *(0,5 punti · cap. 4)* Due triangoli sono simili e i lati del più piccolo sono i 2/3 dei lati corrispondenti del più grande. Il triangolo più grande ha area 36 cm². L'area del più piccolo è:
   - **A.** 24 cm²
   - **B.** 12 cm²
   - **C.** 18 cm²
   - **D.** 16 cm²

4. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Un fascio di rette parallele taglia due trasversali. Sulla prima stacca i segmenti $AB = 4$ cm e $BC = 6$ cm; sulla seconda il segmento corrispondente ad AB misura 6 cm. Il segmento corrispondente a BC misura:
   - **A.** 4 cm
   - **B.** 9 cm
   - **C.** 6 cm
   - **D.** 8 cm

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 3)* Un rombo ha le diagonali di 24 cm e 10 cm. Calcola l'area, il lato e l'altezza del rombo.

6. ●● *(1 punto · cap. 3)* In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 20 cm e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa 7,2 cm. Calcola i due cateti, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area.

7. ●● *(1 punto · cap. 3–4)* Un triangolo equilatero ha il lato di 6 cm. a) Calcola in forma esatta l'altezza e l'area. b) Quanto misura il lato di un triangolo equilatero che ha area quadrupla? Giustifica la risposta con la similitudine.

8. ●● *(1 punto · cap. 4)* Nel triangolo ABC si ha $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 10$ cm. La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in D. a) Calcola BD e DC. b) La parallela ad AB condotta per D incontra AC in E: calcola CE e DE.

Dimostrare

9. ●● *(1,5 punti · cap. 4)* Nel triangolo acutangolo ABC siano AH l'altezza relativa a BC e BK l'altezza relativa ad AC. Dimostra che i triangoli AHC e BKC sono simili e deduci che $AC \cdot BK = BC \cdot AH$. Che cosa rappresentano i due prodotti?

Problemi

10. ●● *(1,5 punti · cap. 4)* Un lampione alto 6 m illumina una ragazza alta 1,5 m, che si trova a 6 m dalla base del lampione. a) Quanto è lunga l'ombra della ragazza? b) Quanto dista la lampada dall'estremità dell'ombra? E la testa della ragazza?

Sfida

11. ●●● *(1 punto · cap. 3–4)* Nel quadrato $ABCD$ di lato 6 cm, M è il punto medio di AB; il segmento DM incontra la diagonale AC in P. a) Dimostra che i triangoli APM e CPD sono simili e trova il rapporto di similitudine. b) Calcola AP in forma esatta. c) Calcola l'area del triangolo APM.

Soluzioni

1. B. È il teorema 2 dell'equivalenza: un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma con base e altezza congruenti alle sue.

2. C. Il lato maggiore è 25: $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$; per l'inverso del teorema di Pitagora il triangolo è rettangolo.

3. D. Il rapporto di similitudine dal grande al piccolo è $k = 2/3$; le aree stanno nel rapporto $k^2 = 4/9$: $36 \cdot 4/9 = 16$ cm^2.

4. B. Per il teorema di Talete i segmenti corrispondenti sono proporzionali: $4 : 6 = 6 : x$, quindi $x = 36 : 4 = 9$ cm.

5. Area: $24 \cdot 10 : 2 = 120$ cm^2. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e si dimezzano: il lato è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 12 cm e 5 cm, $\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ cm. Il rombo è un parallelogramma, quindi $120 = 13 \cdot h$ e $h = \frac{120}{13}$ cm $\approx$ 9,23 cm.

6. $c^2 = a \cdot p = 20 \cdot 7{,}2 = 144$, $c = 12$ cm. Altra proiezione $q = 20 - 7{,}2 = 12{,}8$ cm, $b^2 = 20 \cdot 12{,}8 = 256$, $b = 16$ cm. $h^2 = p \cdot q = 7{,}2 \cdot 12{,}8 = 92{,}16$, $h = 9{,}6$ cm (oppure $h = bc/a = 12 \cdot 16 : 20 = 9{,}6$). Area $12 \cdot 16 : 2 = 96$ cm^2 (controllo: $20 \cdot 9{,}6 : 2 = 96$).

7. a) Altezza $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm; area $6 \cdot 3\sqrt{3} : 2 = 9\sqrt{3}$ cm^2. b) Due triangoli equilateri sono sempre simili (angoli tutti di 60°); le aree stanno nel rapporto $k^2 = 4$, quindi $k = 2$ e il lato misura 12 cm.

8. a) Teorema della bisettrice: $BD : DC = AB : AC = 8 : 12$; $BD = 10 \cdot 8 : 20 = 4$ cm, $DC = 6$ cm. b) $DE \parallel AB$, quindi $CDE \sim CBA$ con $k = CD : CB = 6 : 10 = 3/5$: $CE = 3/5 \cdot 12 = 7{,}2$ cm, $DE = 3/5 \cdot 8 = 4{,}8$ cm.

9. I triangoli AHC e BKC sono rettangoli (in H e in K) e hanno l'angolo acuto $\angle C$ in comune: per il primo criterio sono simili, con $A \leftrightarrow B$, $H \leftrightarrow K$, $C \leftrightarrow C$. Le ipotenuse AC e BC si corrispondono, e così i cateti AH e BK opposti all'angolo C: $AC : BC = AH : BK$. Per la proprietà fondamentale $AC \cdot BK = BC \cdot AH$. Entrambi i prodotti sono base per altezza, cioè il doppio dell'area del triangolo ABC.

10. a) La ragazza e il lampione sono verticali; il raggio che passa per la testa della ragazza arriva all'estremità dell'ombra: i due triangoli rettangoli hanno un angolo acuto in comune e sono simili. Detta s l'ombra, $s : (s + 6) = 1{,}5 : 6$, $6s = 1{,}5s + 9$, $s = 2$ m. b) La lampada dista dall'estremità dell'ombra $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ m; la testa della ragazza $\sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m (ed è $10 \cdot 1/4$, perché il rapporto di similitudine è $1{,}5 : 6 = 1/4$).

11. a) $AM \parallel DC$: $\angle PAM \cong \angle PCD$ e $\angle PMA \cong \angle PDC$ (alterni interni); per il primo criterio $APM \sim CPD$, con rapporto $AM : CD = 3 : 6 = 1/2$. b) $AP : PC = 1 : 2$, quindi $AP = AC/3 = 6\sqrt{2}/3 = 2\sqrt{2}$ cm. c) Anche $MP : PD = 1 : 2$, quindi $MP = DM/3$. Il triangolo AMD ha area $3 \cdot 6 : 2 = 9$ cm^2; i triangoli APM e AMD hanno la stessa altezza (la distanza di A dalla retta DM) e basi MP e $MD = 3 \cdot MP$: l'area di APM è $9 : 3 = 3$ cm^2.