CAPITOLO

7

Le trasformazioni geometriche

Una figura si sposta, gira, si specchia, si ingrandisce: la geometria cerca ciò che, in tutti questi movimenti, resta uguale. (testo della redazione)

OBIETTIVI

1. Riconoscere una trasformazione geometrica del piano, i suoi punti uniti, la sua inversa e la composizione di due trasformazioni.
2. Definire traslazioni, rotazioni, simmetrie centrali e assiali, dimostrare le proprietà invarianti delle isometrie e distinguere isometrie dirette e inverse.
3. Comporre due isometrie e riconoscere il risultato, in particolare per due simmetrie assiali con assi paralleli o incidenti.
4. Individuare assi e centri di simmetria di una figura.
5. Scrivere le equazioni delle isometrie principali nel piano cartesiano e usarle per trasformare il grafico di una funzione.
6. Usare omotetie e similitudini e i loro invarianti, collegandole alla similitudine tra figure.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Le trasformazioni del piano 2
7.2 Le isometrie 3
7.3 Comporre le isometrie 8
7.4 Le isometrie nel piano cartesiano 13
7.5 Omotetie e similitudini 16

Matematica 2 · Parte IV · Le trasformazioni geometriche · versione 1.0
Capitolo 7: Le trasformazioni geometriche · pagine 165–188 del volume completo · estratto per lo studio

Un ascensore che sale, la lancetta di un orologio che gira, una montagna riflessa nell'acqua di un lago, una foto ingrandita con due dita sullo schermo del telefono: ogni volta una figura viene portata in un'altra posizione, oppure in un'altra scala. In questo capitolo diamo a queste operazioni un nome preciso, **trasformazioni geometriche**, e le trattiamo come oggetti matematici: le componiamo una dopo l'altra, le invertiamo, ne scriviamo le equazioni nel piano cartesiano.

Il punto di vista è nuovo, ma molti contenuti li conosci già. In *Matematica 1* due figure erano congruenti se si potevano sovrapporre con un movimento rigido: qui quel movimento diventa un'**isometria**, una trasformazione che conserva le distanze. Nel capitolo 4 hai studiato le figure simili: qui le ritroverai come immagini l'una dell'altra in una **similitudine**. La domanda che guida tutto il capitolo è sempre la stessa: quando una figura si trasforma, che cosa cambia e che cosa resta **invariante**?

7.1 Le trasformazioni del piano

7.1.1 Che cos'è una trasformazione

Indichiamo con π il piano. Una **trasformazione geometrica** del piano è una corrispondenza biunivoca del piano in sé: una funzione f che associa a ogni punto P un punto $P' = f(P)$, detto immagine di P, in modo che ogni punto del piano sia immagine di uno e un solo punto. Come le funzioni di *Matematica 1* che hanno un'inversa, una corrispondenza biunivoca si può sempre «percorrere all'indietro»: da ogni immagine si torna a uno e un solo punto. L'immagine di una figura F è la figura $F' = f(F)$ formata dalle immagini di tutti i suoi punti.

«Spostare ogni punto di 3 cm verso destra» è una trasformazione: ogni punto ha la sua immagine, e ogni punto è l'immagine di un solo punto, quello che sta 3 cm più a sinistra. Non è invece una trasformazione la *proiezione ortogonale* su una retta r, che associa a ogni punto il piede della perpendicolare condotta a r: tutti i punti di una stessa perpendicolare hanno la stessa immagine, e i punti fuori da r non sono immagine di nessun punto. La proiezione non è biunivoca.

7.1.2 Punti uniti, identità e trasformazione inversa

Un punto P si dice **punto unito** (o punto fisso) della trasformazione f se $f(P) = P$. Una figura F si dice *unita* se $f(F) = F$, anche se i suoi punti si scambiano tra loro: vedremo che, nella simmetria rispetto all'asse di un segmento AB, gli estremi si scambiano ($A \mapsto B$, $B \mapsto A$) ma il segmento, nel suo insieme, va in sé stesso. La trasformazione che lascia fermo ogni punto del piano si chiama **trasformazione identica**, o identità, e si indica con i.

Poiché una trasformazione è biunivoca, si può sempre «tornare indietro». La **trasformazione inversa** di f è la trasformazione f^{-1} che a ogni punto P' associa l'unico punto P tale che $f(P) = P'$. L'inversa di «3 cm verso destra» è «3 cm verso sinistra». Alcune trasformazioni coincidono con la propria inversa: applicate due volte riportano ogni punto al suo posto. Si dicono involutorie.

7.1.3 Composizione e proprietà invarianti

Due trasformazioni si possono applicare una dopo l'altra. Come per le funzioni di *Matematica 1*, la **composizione** $g \circ f$ (si legge «g composto f») è la trasformazione che a P associa $g(f(P))$: **si applica prima f, quella scritta a destra, e poi g**. La composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione, e $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$. In generale però l'ordine conta: $g \circ f$ e $f \circ g$ possono essere trasformazioni diverse, e ne vedremo presto un esempio.

Una **proprietà invariante** per una trasformazione è una proprietà delle figure che si conserva: se una figura F la possiede, anche $f(F)$ la possiede. Sono esempi di proprietà che una trasformazione può conservare o no la lunghezza dei segmenti, l'allineamento di tre punti, il parallelismo di due rette, l'ampiezza degli angoli, il rapporto tra due lunghezze, l'area, il verso in cui si percorre il contorno di una figura. Trasformazioni diverse conservano proprietà diverse, ed è proprio in base a ciò che conservano che le classificheremo.

7.2 Le isometrie

7.2.1 Definizione e proprietà invarianti

Una **isometria** (dal greco: «stessa misura») è una trasformazione che conserva le distanze: per ogni coppia di punti A, B, con immagini A', B', si ha $A'B' \cong AB$. È la versione precisa del movimento rigido di *Matematica 1*: **due figure sono congruenti se e solo se esiste un'isometria che trasforma l'una nell'altra**. Da questa sola richiesta discendono molte altre proprietà.

IN SINTESI

Teorema. Ogni isometria trasforma punti allineati in punti allineati, rette parallele in rette parallele, angoli in angoli congruenti.

Ipotesi: f è un'isometria. **Tesi:** a) se C appartiene al segmento AB, C' appartiene al segmento $A'B'$; b) se $r \parallel s$, allora $f(r) \parallel f(s)$; c) $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$.

Dimostrazione. a) Se C sta sul segmento AB, allora $AC + CB = AB$. Poiché f conserva le distanze, $A'C' + C'B' = A'B'$. Se C' non stesse sul segmento $A'B'$, i punti A', C', B' formerebbero un triangolo, oppure C' cadrebbe sulla retta $A'B'$ fuori dal segmento: nel primo caso, per la disuguaglianza triangolare, $A'C' + C'B' > A'B'$; nel secondo uno dei due segmenti $A'C'$, $C'B'$ sarebbe già più lungo

di $A'B'$. In entrambi i casi l'uguaglianza sarebbe falsa. Con un ragionamento analogo per i punti esterni al segmento si vede che l'immagine di una retta è una retta.

b) Due rette parallele e distinte non hanno punti comuni. Se $f(r)$ e $f(s)$ avessero un punto comune Q', esso sarebbe l'immagine di un punto di r e di un punto di s; ma f è biunivoca, quindi i due punti coinciderebbero, e r, s avrebbero un punto comune. c) I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno i lati ordinatamente congruenti ($A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$, $A'C' \cong AC$), quindi sono congruenti per il terzo criterio, e gli angoli corrispondenti sono congruenti. c.v.d.

Ne seguono tutte le altre proprietà che ci aspettiamo da un movimento rigido: un'isometria trasforma un segmento in un segmento congruente e il suo punto medio nel punto medio dell'immagine, rette perpendicolari in rette perpendicolari, un poligono in un poligono congruente (e quindi equivalente: l'area è invariante), una circonferenza in una circonferenza con lo stesso raggio. Studiamo ora le quattro isometrie fondamentali.

7.2.2 La traslazione

Un segmento AB di cui si stabilisce che A è il primo estremo e B il secondo si dice *segmento orientato*; si disegna con una freccia da A a B. Ha un *modulo* (la lunghezza), una *direzione* (quella della retta AB) e un *verso* (da A a B). Tutti i segmenti orientati con lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso rappresentano uno stesso vettore, che indichiamo con una lettera in grassetto, $\mathbf{v}$. Negli anni successivi i vettori diventeranno oggetti di calcolo; qui ci servono solo per descrivere uno spostamento.

La **traslazione** di vettore $\mathbf{v}$, che indichiamo con $t_{\mathbf{v}}$, è la trasformazione che a ogni punto P associa il punto P' tale che il segmento orientato PP' rappresenti il vettore $\mathbf{v}$: tutti i punti si spostano della stessa lunghezza, nella stessa direzione e nello stesso verso (Figura 7.1).

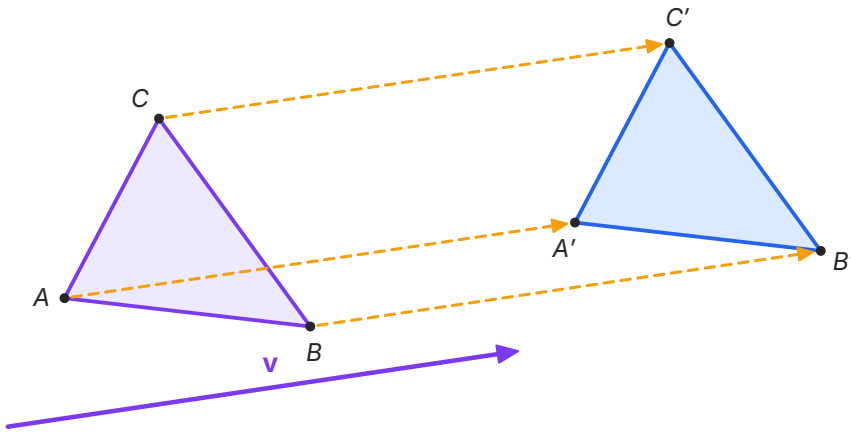


Figura 7.1 La traslazione di vettore **v**. I segmenti orientati AA', BB', CC' sono paralleli, congruenti e con lo stesso verso: rappresentano tutti il vettore **v**, disegnato in basso. Il triangolo $A'B'C'$ è congruente ad ABC e ha i lati paralleli ai suoi.

Se P' e Q' sono le immagini di P e Q, i segmenti PP' e QQ' sono paralleli e congruenti, quindi $PP'Q'Q$ è un parallelogramma (o, se i quattro punti sono allineati, una sua versione «schiacciata») e $P'Q' \cong PQ$: la traslazione è un'isometria. Inoltre ogni retta ha per immagine una retta parallela; le rette parallele al vettore sono unite. Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ non ci sono punti uniti; la traslazione di vettore nullo è l'identità. L'inversa di $t_{\mathbf{v}}$ è la traslazione di vettore opposto, $t_{-\mathbf{v}}$.

7.2.3 La rotazione

Un **angolo orientato** è un angolo di cui si stabilisce quale lato è il primo e quale il secondo: lo si percorre dal primo al secondo lato. Per convenzione la sua ampiezza è **positiva** se il verso è **antiorario**, negativa se è orario. La **rotazione** di centro O e angolo orientato α, che indichiamo con $R(O; \alpha)$, lascia fermo O e associa a ogni altro punto P il punto P' tale che $OP' \cong OP$ e l'angolo orientato $\angle POP'$ sia α (Figura 7.2). Ogni punto si muove su una circonferenza di centro O, percorrendone un arco di ampiezza α.

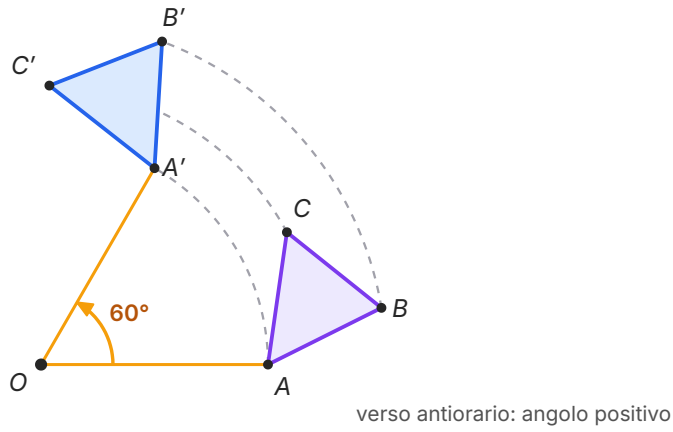


Figura 7.2 La rotazione di centro O e angolo +60°. Ogni vertice del triangolo si muove su un arco di circonferenza di centro O (tratteggiato) in verso antiorario, e l'angolo AOA' misura 60°, come gli angoli BOB' e COC'.

Anche la rotazione è un'isometria. Se P' e Q' sono le immagini di P e Q, i triangoli POQ e $P'OQ'$ hanno $OP' \cong OP$, $OQ' \cong OQ$ e $\angle P'OQ' \cong \angle POQ$, perché entrambi i lati dell'angolo sono ruotati di α: sono congruenti per il primo criterio, e $P'Q' \cong PQ$. Se α non è un multiplo di 360° l'unico punto unito è il centro, e le circonferenze di centro O sono figure unite. L'inversa di $R(O; \alpha)$ è $R(O; -\alpha)$, e una rotazione di 360° è l'identità.

7.2.4 La simmetria centrale

La **simmetria centrale** di centro O, che indichiamo con S_O, lascia fermo O e associa a ogni altro punto P il punto P' tale che O sia il punto medio del segmento PP' (Figura 7.3, a destra). Il punto P' sta sulla retta OP, dalla parte opposta di P, alla stessa distanza da O: è proprio il punto che si ottiene ruotando P di 180° attorno a O. Dunque $S_O = R(O; 180°)$, e tutte le proprietà della rotazione valgono anche per la simmetria centrale. In più, applicata due volte, riporta ogni punto al suo posto: $S_O \circ S_O = i$, cioè la simmetria centrale è involutoria. Ogni retta ha per immagine una retta parallela, e le rette passanti per O sono unite.

7.2.5 La simmetria assiale

La **simmetria assiale** di asse r, che indichiamo con s_r, lascia fermi i punti di r e associa a ogni altro punto P il punto P' tale che r sia l'asse del segmento PP': P' sta sulla perpendicolare a r condotta da P, dalla parte opposta, alla stessa distanza da r (Figura 7.3, a sinistra). È ciò che fa uno specchio piano, e infatti la simmetria assiale si chiama anche *riflessione*.

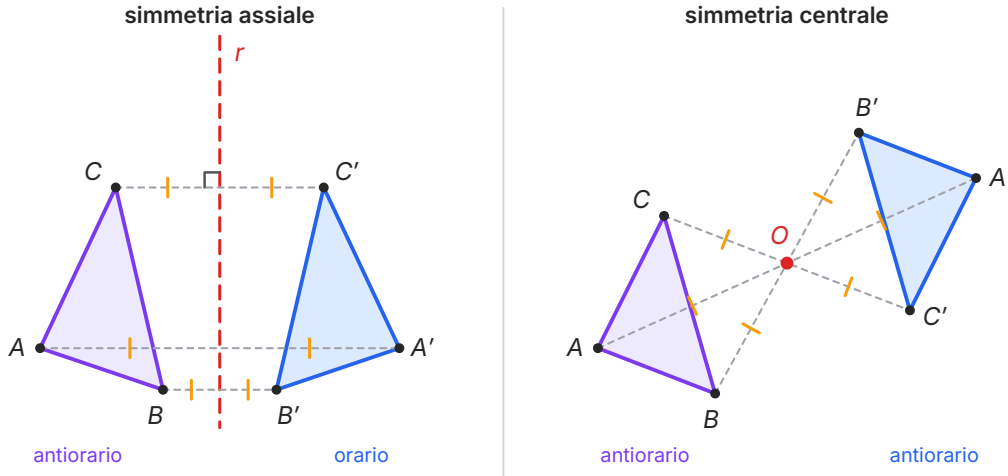


Figura 7.3 A sinistra, la simmetria assiale di asse r: ogni segmento che unisce un punto alla sua immagine è perpendicolare a r e da essa è diviso a metà. A destra, la simmetria centrale di centro O: O è il punto medio di AA', BB', CC'. Sotto ogni triangolo è indicato il verso in cui si percorre il contorno $A \to B \to C$.

I punti uniti di s_r sono tutti e soli i punti dell'asse; sono figure unite l'asse stesso e ogni retta perpendicolare all'asse. Anche la simmetria assiale è involutoria, $s_r \circ s_r = i$, ed è un'isometria (la dimostrazione, con i triangoli congruenti, è proposta negli esercizi). Un esempio di figura unita i cui punti si scambiano è un segmento AB nella simmetria rispetto al suo asse: A e B si scambiano, il punto medio resta fermo.

7.2.6 Isometrie dirette e inverse

Guarda di nuovo la Figura 7.3. Nel pannello di destra il contorno $A \to B \to C$ del triangolo e quello $A' \to B' \to C'$ dell'immagine si percorrono nello stesso verso, antiorario; nel pannello di sinistra il verso si inverte. Un'isometria che conserva il verso di percorrenza di ogni figura si dice **isometria diretta**; un'isometria che lo inverte si dice **isometria inversa**. Traslazioni, rotazioni e simmetrie centrali sono dirette; le simmetrie assiali sono inverse. Una figura e la sua immagine in un'isometria diretta si possono sovrapporre facendole scivolare nel piano; per sovrapporre una figura alla sua immagine speculare bisogna invece «sollevarla» e capovolgerla, uscendo dal piano.

Il verso si comporta come il segno nel prodotto di numeri: componendo due isometrie dirette, o due inverse, si ottiene un'isometria diretta; componendo una diretta e una inversa si ottiene un'isometria inversa. Nello spazio accade qualcosa di simile: la mano destra e la sinistra sono l'una l'immagine speculare dell'altra, e nessun movimento le sovrappone. In chimica una molecola che non si può sovrapporre alla propria immagine speculare si dice *chirale* (dal greco «mano»): le due forme speculari possono avere proprietà biologiche diverse, e gli amminoacidi

delle proteine degli esseri viventi sono quasi tutti di una sola delle due forme. La Tabella 7.1 riassume le quattro isometrie.

Tabella 7.1 Le quattro isometrie fondamentali.

Isometria	È determinata da	Punti uniti	Inversa	Tipo
traslazione $t_{\mathbf{v}}$	il vettore $\mathbf{v}$	nessuno (se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)	$t_{-\mathbf{v}}$	diretta
rotazione $R(O;\,\alpha)$	il centro O e l'angolo orientato α	solo O (se $\alpha \neq 0°, 360°$)	$R(O;\,-\alpha)$	diretta
simmetria centrale S_O	il centro O	solo O	S_O	diretta
simmetria assiale s_r	l'asse r	i punti di r	s_r	inversa

7.2.7 Costruzioni con riga e compasso

Le immagini nelle isometrie si costruiscono con gli strumenti di Euclide. Per il simmetrico di un punto P rispetto a una retta r:

1. con centro in P si traccia un arco che taglia r in due punti H e K;
2. con centro in H e raggio HP, e poi con centro in K e raggio KP, si tracciano due archi dall'altra parte di r;
3. il loro punto d'incontro, diverso da P, è P'.

Perché funziona? H è equidistante da P e da P', e così K: dunque H e K stanno sull'asse del segmento PP', cioè r è l'asse di PP'. Per ruotare P di un angolo α attorno a O si traccia la circonferenza di centro O passante per P, si riporta l'angolo α con vertice O e primo lato OP (nel verso giusto), e si prende l'intersezione del secondo lato con la circonferenza. Per un angolo di $60°$ basta il compasso: la circonferenza di centro P e raggio OP taglia quella di centro O in due punti P' tali che il triangolo OPP' sia equilatero, cioè $\angle POP' = 60°$; dei due si sceglie quello che corrisponde al verso richiesto.

7.3 Comporre le isometrie

La composizione di due isometrie è un'isometria: se ciascuna conserva le distanze, le conserva anche l'una dopo l'altra. Ma quale isometria si ottiene? In alcuni casi importanti la risposta è sorprendentemente semplice.

7.3.1 Due traslazioni

Applichiamo a P la traslazione $t_{\mathbf{v}}$, che lo porta in P', e poi la traslazione $t_{\mathbf{w}}$, che porta P' in P''. Il segmento orientato PP'' si ottiene mettendo «in coda» il secondo spostamento al primo, ed è lo stesso per ogni punto P: la composizione è una traslazione, il cui vettore si chiama *somma* dei due vettori, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (la studierai negli anni successivi). Fare prima uno spostamento e poi l'altro, o

viceversa, porta allo stesso punto: le traslazioni, a differenza di altre isometrie, commutano tra loro.

7.3.2 Due simmetrie assiali

IN SINTESI

Teorema. Siano a e b due rette del piano.

a) Se $a \parallel b$, a distanza d, la composizione $s_b \circ s_a$ è la **traslazione** di vettore perpendicolare agli assi, di modulo $2d$ e verso da a verso b.

b) Se a e b si incontrano in O e l'angolo orientato da a a b è α, la composizione $s_b \circ s_a$ è la **rotazione** $R(O; 2\alpha)$: il centro è il punto d'incontro degli assi, l'angolo è **il doppio** dell'angolo tra gli assi.

Dimostrazione. a) Sia P un punto, $P_1 = s_a(P)$, $P_2 = s_b(P_1)$. Entrambe le simmetrie spostano i punti lungo perpendicolari agli assi, che sono le stesse rette per a e per b: quindi P, P_1, P_2 stanno sulla perpendicolare agli assi per P. Fissiamo su questa perpendicolare un'ascissa, con l'origine su a e il verso positivo da a verso b, così che b la incontri nel punto di ascissa d. Se P ha ascissa x, il suo simmetrico rispetto ad a ha ascissa $-x$; il simmetrico rispetto a b del punto di ascissa u ha ascissa $2d - u$, perché d deve essere la media delle due ascisse. Quindi P_2 ha ascissa $2d - (-x) = x + 2d$: qualunque sia P, si sposta di $2d$ nel verso da a a b.

b) Il punto O sta su entrambi gli assi ed è unito. Per ogni altro punto P, le simmetrie conservano la distanza dai punti dell'asse, quindi $OP = OP_1 = OP_2$: P, P_1, P_2 stanno su una circonferenza di centro O. Inoltre a è la bisettrice dell'angolo $\angle POP_1$ e b è la bisettrice di $\angle P_1OP_2$ (Figura 7.4): l'angolo da OP ad a è congruente a quello da a a OP_1, l'angolo da OP_1 a b è congruente a quello da b a OP_2. Sommando, l'angolo orientato da OP a OP_2 è il doppio dell'angolo da a a b, cioè 2α. (Nella figura è facile controllarlo; negli altri casi lo stesso calcolo funziona tenendo conto dei segni degli angoli orientati.) c.v.d.

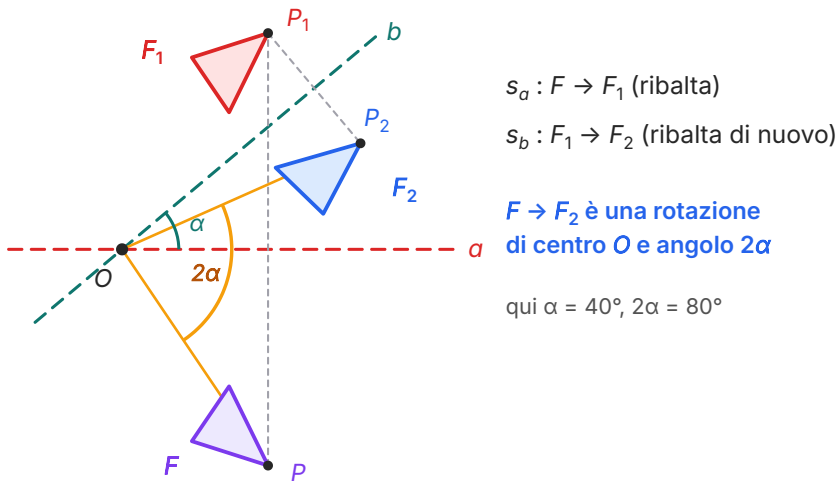


Figura 7.4 La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti. La figura F è ribaltata da s_a in F_1, e F_1 è ribaltata da s_b in F_2: due ribaltamenti si annullano, e F_2 si ottiene da F con una rotazione di centro O e angolo $2\alpha = 80°$, il doppio dell'angolo $\alpha = 40°$ tra gli assi.

Il teorema si può leggere anche al contrario, ed è questo il suo uso più importante. Una rotazione $R(O; \alpha)$ si può sempre scrivere come composizione di due simmetrie con assi passanti per O che formano un angolo di $\alpha/2$; il primo asse si può scegliere **a piacere** tra le rette per O, perché conta solo l'angolo tra i due. Allo stesso modo una traslazione di vettore $\mathbf{v}$ è la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari a $\mathbf{v}$ a distanza $|\mathbf{v}|/2$, il primo dei quali si può scegliere a piacere. Si può dimostrare che **ogni isometria del piano è la composizione di al massimo tre simmetrie assiali**: le simmetrie assiali sono i «mattoni» con cui si costruiscono tutte le isometrie.

ERRORE FREQUENTE

Due errori opposti sulla composizione di due simmetrie con assi incidenti. Il primo: «gli assi formano un angolo di 30°, quindi la composizione è una rotazione di 30°». No: l'angolo di rotazione è il **doppio**, 60°. Il secondo: «l'ordine non conta». Invece $s_a \circ s_b$ è la rotazione di angolo -2α, cioè la rotazione in verso opposto a $s_b \circ s_a$: le due composizioni coincidono solo se $2\alpha = 180°$, cioè se gli assi sono **perpendicolari**, e in quel caso entrambe sono la simmetria centrale S_O. La composizione di isometrie, in generale, **non è commutativa**.

COLLEGAMENTI

Specchi e caleidoscopi. Riflettersi in uno specchio è una simmetria assiale (nello spazio, rispetto al piano dello specchio): per questo sul cofano delle ambulanze la scritta è stampata rovesciata, così che nello specchietto retrovisore dell'auto che precede si legga diritta. Due specchi piani incernierati lungo un lato e aperti di 60° mostrano cinque immagini di un oggetto posto tra loro: con l'oggetto, sei copie disposte attorno alla cerniera. Le immagini viste dopo due riflessioni sono ruotate di $2 \cdot 60° = 120°$ rispetto all'oggetto: è il teorema appena dimostrato, ed è il principio del caleidoscopio.

7.3.3 Le simmetrie di una figura

Una retta r è un **asse di simmetria** di una figura F se la figura è unita nella simmetria di asse r: $s_r(F) = F$. Un punto O è un **centro di simmetria** di F se $S_O(F) = F$. Ripercorriamo con questo linguaggio le figure di *Matematica 1* e dei capitoli precedenti.

- **Triangoli.** Un triangolo scaleno non ha assi di simmetria; un triangolo isoscele non equilatero ne ha uno, la retta dell'altezza relativa alla base; un triangolo equilatero ne ha tre. Nessun triangolo ha un centro di simmetria.
- **Quadrilateri.** Ogni parallelogramma ha un centro di simmetria, il punto d'incontro delle diagonali, ma in generale nessun asse. Il rettangolo ha due assi (gli assi dei lati), il rombo due (le rette delle diagonali), il quadrato quattro; il trapezio isoscele ha un asse, l'asse delle basi.
- **Poligoni regolari.** Un poligono regolare di n lati ha esattamente n assi di simmetria, tutti passanti per il centro (Figura 7.5), ed è unito nelle rotazioni attorno al centro di angolo multiplo di $360°/n$. Ha un centro di simmetria se e solo se n è pari.
- **Circonferenza.** Ogni retta passante per il centro è un asse di simmetria, e il centro è centro di simmetria.

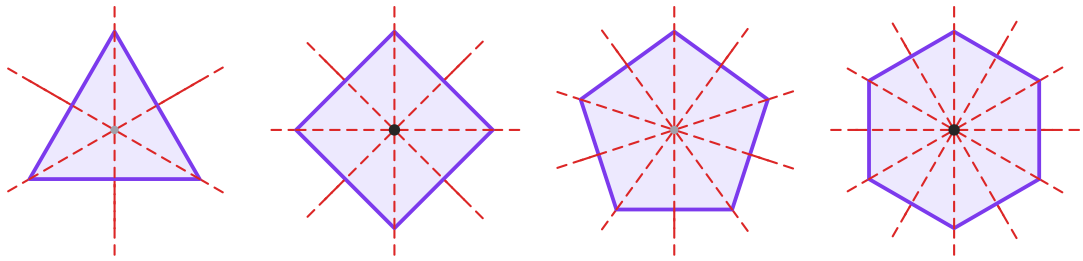


Figura 7.5 Gli assi di simmetria dei poligoni regolari con 3, 4, 5 e 6 lati. Se n è dispari ogni asse passa per un vertice e per il punto medio del lato opposto; se n è pari metà degli assi passa per due vertici opposti e metà per i punti medi di due lati opposti. Solo i poligoni con un numero pari di lati (quadrato, esagono) hanno il centro come centro di simmetria.

APPROFONDIMENTO · FREGI E ROSONI

Un **fregio** è una decorazione su una striscia che si ripete con regolarità lungo una direzione: la si trova nelle cornici dei templi, nei bordi dei tappeti e delle piastrelle, nei ricami. Tutti i fregi sono uniti nelle traslazioni di un certo vettore e dei suoi multipli; alcuni lo sono anche in altre isometrie: simmetrie assiali con asse perpendicolare alla striscia, la simmetria rispetto alla linea mediana della striscia, simmetrie centrali, glissosimmetrie (una simmetria assiale seguita da una traslazione parallela all'asse, come le orme lasciate camminando sulla sabbia). Combinando queste possibilità si dimostra che esistono **esattamente sette tipi** di fregi, cioè sette modi diversi in cui un motivo può ripetersi lungo una striscia: la Figura 7.6 ne mostra due.

Un rosone (come quelli delle facciate delle chiese, o un fiore visto dall'alto) è invece una figura limitata: non può essere unita in nessuna traslazione, e le sue simmetrie sono soltanto rotazioni attorno a un centro, ed eventualmente simmetrie con assi passanti per esso. Le possibilità sono quelle già viste per i poligoni regolari: le sole rotazioni di $360°/n$ e dei suoi multipli, oppure queste rotazioni insieme a n assi.

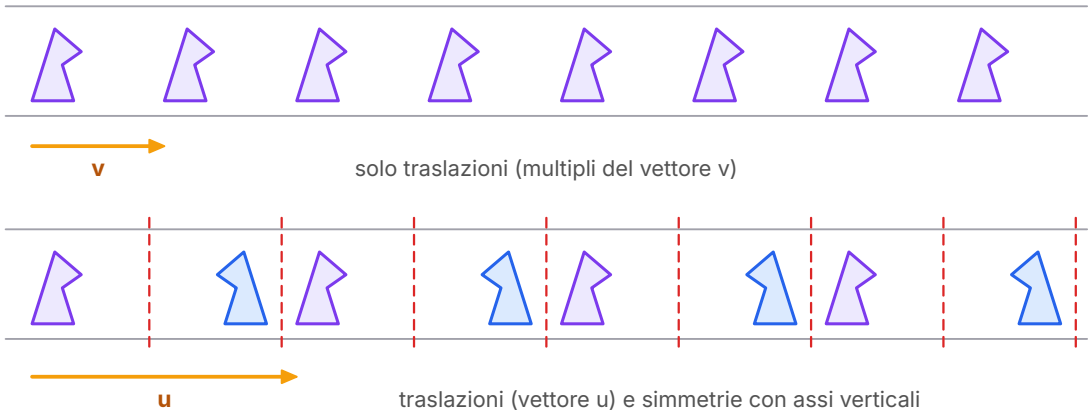


Figura 7.6 Due dei sette tipi di fregi, costruiti con lo stesso motivo. In alto il motivo si ripete soltanto per traslazione. In basso il fregio è unito anche nelle simmetrie assiali con gli assi verticali tratteggiati; il vettore **u** della traslazione più breve è doppio della distanza tra due assi consecutivi, come prevede il teorema sulle due simmetrie con assi paralleli.

7.4 Le isometrie nel piano cartesiano

7.4.1 Le equazioni di una trasformazione

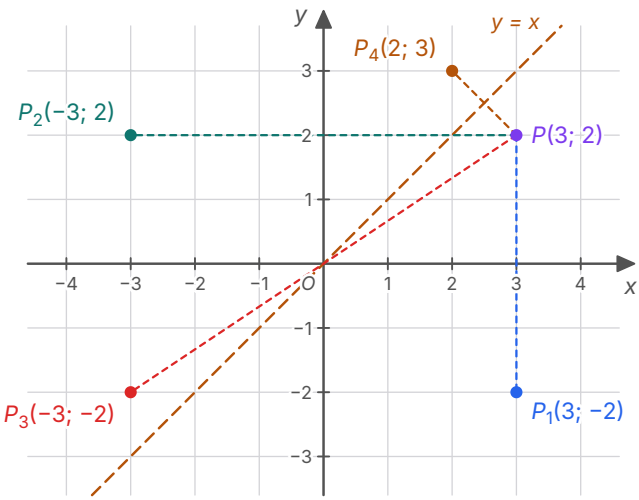
Nel piano cartesiano una trasformazione si descrive con le sue *equazioni*: due formule che danno le coordinate $(x'; y')$ dell'immagine in funzione delle coordinate $(x; y)$ del punto. La traslazione di vettore $\mathbf{v}(a; b)$, che sposta ogni punto di a in orizzontale e di b in verticale, ha equazioni

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Per esempio la traslazione di vettore $\mathbf{v}(3; -2)$ porta $A(1; 4)$ in $A'(4; 2)$. Le equazioni dell'inversa si ottengono ricavando x e y: $x = x' - a$, $y = y' - b$, cioè la traslazione di vettore $(-a; -b)$. Le equazioni delle simmetrie e di alcune rotazioni si ricavano dalle definizioni; le principali sono raccolte nella Tabella 7.2 e illustrate nella Figura 7.7.

Tabella 7.2 Equazioni di alcune isometrie nel piano cartesiano.

Trasformazione	Equazioni
traslazione di vettore $\mathbf{v}(a; b)$	$x' = x + a,\ y' = y + b$
simmetria rispetto all'asse x	$x' = x,\ y' = -y$
simmetria rispetto all'asse y	$x' = -x,\ y' = y$
simmetria rispetto all'origine	$x' = -x,\ y' = -y$
simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$	$x' = y,\ y' = x$
simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$	$x' = -y,\ y' = -x$
simmetria rispetto alla retta $x = h$	$x' = 2h - x,\ y' = y$
simmetria rispetto alla retta $y = k$	$x' = x,\ y' = 2k - y$
simmetria centrale di centro $M(a; b)$	$x' = 2a - x,\ y' = 2b - y$
rotazione di +90° attorno all'origine	$x' = -y,\ y' = x$
rotazione di −90° attorno all'origine	$x' = y,\ y' = -x$



simmetrico di $P(x; y)$ rispetto a

asse x:
$P_1(x; -y) = (3; -2)$

asse y:
$P_2(-x; y) = (-3; 2)$

origine:
$P_3(-x; -y) = (-3; -2)$

bisettrice $y = x$:
$P_4(y; x) = (2; 3)$

Figura 7.7 Il punto $P(3; 2)$ e i suoi simmetrici rispetto all'asse x, all'asse y, all'origine e alla bisettrice $y = x$ (tratteggiata). A ogni simmetria corrisponde una regola sulle coordinate.

Giustifichiamo alcune righe. Nella simmetria rispetto alla retta $x = h$ il punto P' ha la stessa ordinata di P, e il punto medio di PP' deve stare sull'asse: $(x + x')/2 = h$, da cui $x' = 2h - x$. Allo stesso

modo, nella simmetria di centro $M(a; b)$ il punto M è il punto medio di PP', quindi $x' = 2a - x$ e $y' = 2b - y$; con $a = b = 0$ si ritrova la simmetria rispetto all'origine. Nella simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ si scambiano le coordinate: il punto medio di $P(x; y)$ e $P'(y; x)$ ha le due coordinate uguali, quindi sta sulla bisettrice, e la retta PP' ha coefficiente angolare $(x - y)/(y - x) = -1$, quindi è perpendicolare alla bisettrice, che ha coefficiente angolare 1 (capitolo 5).

Nella rotazione di +90° attorno all'origine, $P(x; y)$ va in $P'(-y; x)$: le distanze da O sono uguali, $OP = OP' = \sqrt{x^2 + y^2}$, le rette OP e OP' hanno coefficienti angolari y/x e $x/(-y)$, il cui prodotto è -1, e il verso è quello antiorario, come mostra il punto (1; 0), che va in (0; 1).

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Siano s_x la simmetria rispetto all'asse x e s_d la simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$. Scrivi le equazioni di $s_d \circ s_x$ e di $s_x \circ s_d$ e riconosci le due trasformazioni.

Soluzione. $s_d \circ s_x$: prima s_x, che porta $(x; y)$ in $(x; -y)$, poi s_d, che scambia le coordinate: $(x; y) \mapsto (-y; x)$. È la rotazione di +90° attorno all'origine. $s_x \circ s_d$: prima s_d, $(x; y) \mapsto (y; x)$, poi s_x: $(x; y) \mapsto (y; -x)$. È la rotazione di −90°.

Controllo con il teorema. Gli assi si incontrano in O e l'angolo orientato dall'asse x alla bisettrice è +45°: la composizione $s_d \circ s_x$ è la rotazione di $2 \cdot 45° = 90°$, e invertendo l'ordine si ottiene la rotazione di −90°. Con $P(3; 1)$: $s_x(P) = (3; -1)$, $s_d(3; -1) = (-1; 3)$, che è proprio il ruotato di P di +90°. Le due composizioni sono diverse: la composizione di isometrie non è commutativa.

7.4.2 Trasformare il grafico di una funzione

Le equazioni delle trasformazioni permettono di spostare i grafici delle funzioni senza ricalcolarli punto per punto. Per esempio, il grafico di $y = (x - 2)^2 - 1$ è la parabola $y = x^2$ di *Matematica 1* spostata di 2 unità a destra e di 1 verso il basso. Vediamo perché, con un ragionamento che vale per ogni funzione. Sia G il grafico di $y = f(x)$ e applichiamo la traslazione di vettore $\mathbf{v}(a; b)$. Un punto $(X; Y)$ appartiene al grafico traslato se e solo se il punto da cui proviene, $(X - a; Y - b)$, appartiene a G, cioè se $Y - b = f(X - a)$. Il grafico traslato ha dunque equazione $y = f(x - a) + b$. Con lo stesso ragionamento si trattano le simmetrie rispetto agli assi.

IN SINTESI

Se G è il grafico di $y = f(x)$:

- traslando G di $\mathbf{v}(a; b)$ si ottiene il grafico di $y = f(x - a) + b$;
- la simmetrica di G rispetto all'asse x è il grafico di $y = -f(x)$;
- la simmetrica di G rispetto all'asse y è il grafico di $y = f(-x)$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. a) Scrivi l'equazione della parabola che si ottiene traslando $y = x^2$ di $\mathbf{v}(3; -2)$. b) Scrivi l'equazione del grafico che si ottiene traslando $y = |x|$ di $\mathbf{w}(-2; 1)$ e trova il suo vertice.

Soluzione. a) Con $a = 3$ e $b = -2$: $y = (x - 3)^2 - 2$, cioè, sviluppando, $y = x^2 - 6x + 7$. Il vertice $O(0; 0)$ va in $V(3; -2)$. Controllo: il punto $(1; 1)$ di $y = x^2$ va in $(4; -1)$, e infatti $4^2 - 6 \cdot 4 + 7 = -1$.

b) Con $a = -2$ e $b = 1$: $y = |x - (-2)| + 1 = |x + 2| + 1$. Il vertice del grafico di $y = |x|$, l'origine, va nel punto $(-2; 1)$.

ERRORE FREQUENTE

«$y = f(x - 3)$ sposta il grafico di 3 unità verso sinistra, perché c'è un meno.» È il contrario: il grafico si sposta di 3 unità verso **destra**. Il valore che f assumeva in $x = 0$ ora si trova in $x = 3$, dove $x - 3 = 0$. Per evitare l'errore controlla sempre un punto: il vertice di $y = (x - 3)^2$ è in $(3; 0)$, non in $(-3; 0)$.

Anche le simmetrie rivelano proprietà dei grafici. Il grafico di $y = |x|$ coincide con il suo simmetrico rispetto all'asse y, perché $|-x| = |x|$: l'asse y è un suo asse di simmetria. Il grafico dell'iperbole $y = 1/x$ di *Matematica 1* coincide con il suo simmetrico rispetto all'origine: se $(x; y)$ vi appartiene, cioè $y = 1/x$, allora anche $-y = 1/(-x)$, e l'origine ne è un centro di simmetria.

7.5 Omotetie e similitudini

7.5.1 L'omotetia

Le isometrie spostano le figure senza cambiarne le dimensioni. Per ingrandirle o ridurle serve un altro tipo di trasformazione. Fissati un punto O e un numero reale $k \neq 0$, l'**omotetia** di centro O e rapporto k, che indichiamo con $\omega(O; k)$, lascia fermo O e associa a ogni altro punto P il punto P' della retta OP tale che

$$OP' = |k| \cdot OP$$

e P' sta dalla stessa parte di P rispetto a O se $k > 0$, dalla parte opposta se $k < 0$.

Se $|k| > 1$ l'omotetia ingrandisce, se $|k| < 1$ riduce; con $k = 1$ è l'identità, con $k = -1$ è la simmetria centrale S_O. La Figura 7.8 mostra l'immagine di un triangolo nelle omotetie di rapporto 2 e $-\frac{1}{2}$: nel secondo caso il triangolo è ridotto e «capovolto» dall'altra parte del centro. Nel piano cartesiano l'omotetia di centro l'origine e rapporto k ha equazioni $x' = kx$, $y' = ky$.

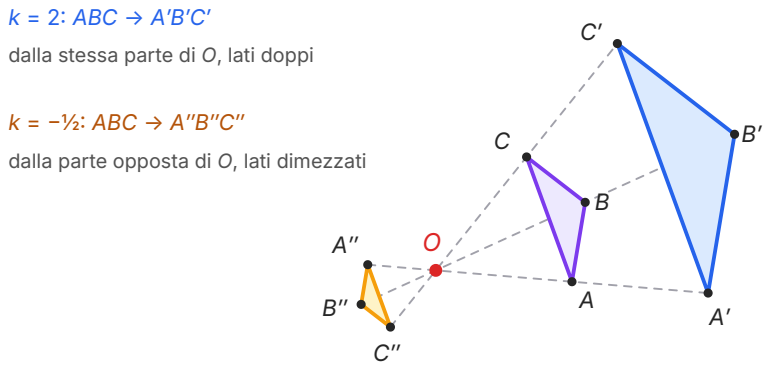


Figura 7.8 Le omotetie di centro O e rapporto $k = 2$ e $k = -\frac{1}{2}$ applicate al triangolo ABC. Ogni vertice e le sue due immagini sono allineati con O (rette tratteggiate). I lati dei tre triangoli sono paralleli; con $k = -\frac{1}{2}$ le immagini stanno dalla parte opposta di O.

IN SINTESI

Teorema. In un'omotetia di rapporto k ogni segmento ha per immagine un segmento parallelo (o appartenente alla stessa retta) e di lunghezza moltiplicata per $|k|$.

Ipotesi: $P' = \omega(O; k)(P)$, $Q' = \omega(O; k)(Q)$. **Tesi:** $P'Q' \parallel PQ$ e $P'Q' = |k| \cdot PQ$.

Dimostrazione (se O, P, Q non sono allineati). I triangoli OPQ e $OP'Q'$ hanno gli angoli in O congruenti, perché coincidono (se $k > 0$) oppure sono opposti al vertice (se $k < 0$), e i lati che li comprendono in proporzione: $OP' : OP = OQ' : OQ = |k|$. Per il secondo criterio di similitudine (capitolo 4) i triangoli sono simili con rapporto $|k|$, quindi $P'Q' = |k| \cdot PQ$; inoltre $\angle OP'Q' \cong \angle OPQ$, e questi angoli, corrispondenti (se $k > 0$) o alterni interni (se $k < 0$) rispetto alle rette PQ, $P'Q'$ tagliate da OP, garantiscono che le due rette siano parallele. c.v.d.

Ne discende che un'omotetia trasforma rette in rette parallele, conserva l'ampiezza degli angoli e il verso di percorrenza (è diretta), moltiplica le lunghezze e i perimetri per $|k|$ e, per quanto visto nel capitolo 4, le aree per k^2. Se $k \neq 1$ l'unico punto unito è il centro, mentre le rette per il centro sono unite. Non è un'isometria, salvo per $k = \pm 1$. L'inversa di $\omega(O; k)$ è $\omega(O; 1/k)$. Uno strumento antico, il *pantografo*, usato per copiare un disegno ingrandito o ridotto, realizza meccanicamente un'omotetia: un sistema di aste articolate tiene allineati il punto fisso, la punta che ripassa il disegno e la matita, in un rapporto di distanze costante.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Il triangolo ABC ha vertici $A(1;\,1)$, $B(4;\,1)$, $C(1;\,5)$. Trova la sua immagine nell'omotetia di centro l'origine e rapporto -2 e confronta perimetri e aree.

Soluzione. Con $x' = -2x$, $y' = -2y$: $A'(-2;\,-2)$, $B'(-8;\,-2)$, $C'(-2;\,-10)$. Il triangolo ABC è rettangolo in A, con cateti $AB = 3$ e $AC = 4$ e ipotenusa $BC = 5$: perimetro 12, area 6. Il triangolo immagine ha cateti $A'B' = 6$, $A'C' = 8$ e ipotenusa $B'C' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$: perimetro 24, area 24.

Controllo. Il perimetro è moltiplicato per $|k| = 2$, l'area per $k^2 = 4$: $6 \cdot 4 = 24$. I lati AB e $A'B'$ sono entrambi orizzontali, AC e $A'C'$ entrambi verticali: sono paralleli, come prevede il teorema.

7.5.2 Le similitudini

Componendo un'omotetia di rapporto k con un'isometria si ottiene una trasformazione che moltiplica tutte le distanze per uno stesso numero positivo, $|k|$. Una trasformazione di questo tipo si chiama **similitudine**, e $|k|$ è il suo *rapporto*. Si dimostra che, viceversa, ogni trasformazione che moltiplica tutte le distanze per uno stesso numero è una similitudine di questo tipo, e che **due poligoni sono simili, nel senso del capitolo 4, se e solo se esiste una similitudine che trasforma l'uno nell'altro**. I poligoni simili sono quindi le immagini l'uno dell'altro in una similitudine, così come i poligoni congruenti sono le immagini l'uno dell'altro in un'isometria.

APPROFONDIMENTO · KLEIN E IL PROGRAMMA DI ERLANGEN

Nel 1872 il matematico tedesco Felix Klein, chiamato come professore all'università di Erlangen, presentò un programma di ricerca che da quella città ha preso il nome. La sua idea era di usare le trasformazioni per mettere ordine tra le molte geometrie che il XIX secolo aveva prodotto: **una geometria è lo studio delle proprietà delle figure che restano invarianti per un certo gruppo di trasformazioni**. Un *gruppo* è una famiglia di trasformazioni che contiene l'identità, l'inversa di ogni sua trasformazione e la composizione di due qualsiasi sue trasformazioni: è il caso delle isometrie, delle similitudini, delle traslazioni.

In questa prospettiva la geometria euclidea studia gli invarianti delle similitudini: angoli, parallelismo, rapporti tra lunghezze. I suoi teoremi, da Talete a Pitagora, valgono infatti allo stesso modo in un disegno e nel suo ingrandimento. Scegliendo un gruppo più ampio si ottiene una geometria con meno invarianti e meno teoremi, ma valida per una classe più vasta di figure.

Gli invarianti delle similitudini sono quelli che hai incontrato studiando la similitudine: l'allineamento, il parallelismo, l'ampiezza degli angoli e i **rapporti** tra lunghezze; non si conservano invece le lunghezze, moltiplicate per il rapporto k, né le aree, moltiplicate per k^2. Le isometrie sono le similitudini di rapporto 1: conservano tutto ciò che conserva una similitudine, e in più le distanze. Più una famiglia di trasformazioni è ampia, meno proprietà restano invarianti;

negli anni successivi incontrerai trasformazioni ancora più generali, che non conservano neppure gli angoli.

Con il computer

Nei programmi di geometria dinamica le trasformazioni sono strumenti pronti: «simmetria assiale», «simmetria centrale», «rotazione», «traslazione», «omotetia» (a volte chiamata «dilatazione»). Disegna due rette a e b che si incontrano in O e un poligono qualsiasi; costruisci il simmetrico del poligono rispetto ad a, poi il simmetrico di questo rispetto a b. Misura l'angolo tra le rette e confronta il risultato con la rotazione del poligono di partenza attorno a O di un angolo doppio: le due figure coincidono. Trascina la retta b: l'angolo cambia, la coincidenza resta. Rendi poi b parallela ad a: la rotazione diventa una traslazione, di vettore doppio della distanza tra le rette. Con lo strumento «omotetia» puoi infine verificare che il rapporto tra le aree di un poligono e della sua immagine è sempre il quadrato del rapporto.

SINTESI

- Una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca del piano in sé. Un punto è unito se coincide con la sua immagine; ogni trasformazione ha un'inversa, e due trasformazioni si possono comporre: in $g \circ f$ si applica prima f.
- Un'isometria conserva le distanze; di conseguenza conserva allineamento, parallelismo, ampiezza degli angoli e aree. Due figure sono congruenti se e solo se un'isometria trasforma l'una nell'altra.
- La traslazione $t_{\mathbf{v}}$ sposta tutti i punti allo stesso modo; la rotazione $R(O;\,\alpha)$ fa girare i punti attorno a O di un angolo orientato α (positivo in verso antiorario); la simmetria centrale S_O è la rotazione di 180°; la simmetria assiale s_r ha come punti uniti i punti dell'asse r.
- Traslazioni, rotazioni e simmetrie centrali sono isometrie dirette (conservano il verso di percorrenza); le simmetrie assiali sono inverse.
- Due traslazioni si compongono in una traslazione (il vettore somma), e commutano. Due simmetrie assiali con assi paralleli a distanza d danno una traslazione di modulo $2d$; con assi incidenti con angolo α danno una rotazione di angolo 2α attorno al punto d'incontro.
- La composizione di isometrie non è commutativa in generale: $s_a \circ s_b$ è la rotazione opposta di $s_b \circ s_a$.
- Un poligono regolare di n lati ha n assi di simmetria e ha un centro di simmetria solo se n è pari. Esistono esattamente sette tipi di fregi.
- Nel piano cartesiano la traslazione di vettore $(a;\,b)$ ha equazioni $x' = x + a$, $y' = y + b$; la simmetria rispetto all'asse x cambia segno a y, quella rispetto all'asse y a x, quella rispetto all'origine a entrambe; la simmetria rispetto a $y = x$ scambia le coordinate; la rotazione di +90° attorno a O porta $(x;\,y)$ in $(-y;\,x)$.
- Traslando di $(a;\,b)$ il grafico di $y = f(x)$ si ottiene $y = f(x - a) + b$; i simmetrici rispetto agli assi x e y sono $y = -f(x)$ e $y = f(-x)$.
- L'omotetia di centro O e rapporto k moltiplica le lunghezze per $|k|$ e le aree per k^2, trasforma rette in rette parallele e conserva gli angoli; con centro l'origine ha equazioni $x' = kx$, $y' = ky$.
- Una similitudine è la composizione di un'omotetia e di un'isometria: conserva angoli e rapporti tra lunghezze. Due poligoni sono simili se e solo se una similitudine trasforma l'uno nell'altro.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale di queste trasformazioni è un'isometria inversa?
   A. la traslazione
   B. la rotazione di 90°
   C. la simmetria centrale
   D. la simmetria assiale

2. ● Quali sono i punti uniti della rotazione di centro O e angolo 50°?
   A. nessuno
   B. solo il punto O
   C. tutti i punti di una retta per O
   D. tutti i punti del piano

3. ● Quanti assi di simmetria ha un esagono regolare?
   A. 6
   B. 3
   C. 12
   D. 2

4. ●● Due rette si incontrano in un punto e formano un angolo di 40°. La composizione delle simmetrie assiali rispetto alle due rette è:
   A. una rotazione di 40°
   B. una traslazione
   C. una rotazione di 80°
   D. una simmetria centrale

5. ●● Il simmetrico di $P(-2; 5)$ rispetto alla bisettrice $y = x$ è:
   A. $(5; -2)$
   B. $(2; -5)$
   C. $(-5; 2)$
   D. $(-2; -5)$

6. ●● Un'omotetia di rapporto -3 trasforma un quadrato di area 4 cm² in un quadrato di area:
   A. 12 cm²
   B. −36 cm²
   C. 9 cm²
   D. 36 cm²

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Ogni isometria conserva il verso di percorrenza delle figure.
   b) Una simmetria centrale è una rotazione di 180°.
   c) La composizione di due traslazioni è una traslazione.
   d) Un'omotetia conserva le distanze.
   e) Ogni parallelogramma ha un centro di simmetria.
   f) Un triangolo isoscele non equilatero ha tre assi di simmetria.

8. ● Completa.
   a) Un punto P è unito nella trasformazione f se _____ .
   b) Un'isometria è una trasformazione che conserva _____ .
   c) La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli a distanza d è una _____ di modulo _____ , con vettore _____ agli assi.
   d) Un'omotetia di rapporto k moltiplica le lunghezze per _____ e le aree per _____ .

Calcolare

9. ● Applica la traslazione di vettore $\mathbf{v}(3; -2)$ ai punti $A(1; 4)$, $B(-2; 0)$, $C(0; -5)$. Quale punto ha per immagine l'origine?

10. ● Scrivi le coordinate dei simmetrici di $P(4; -3)$ rispetto a: a) l'asse x; b) l'asse y; c) l'origine; d) la bisettrice $y = x$; e) la bisettrice $y = -x$.

11. ●● Trova il simmetrico di $A(5; 1)$ rispetto alla retta $x = 2$ e rispetto alla retta $y = -3$. Scrivi le equazioni delle due simmetrie.

12. ●● Applica la rotazione di +90° attorno all'origine ai punti $A(3; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; -5)$. Verifica, con i coefficienti angolari, che le rette OA e OA' sono perpendicolari.

13. ●● Trova l'immagine del triangolo di vertici $A(1; 1)$, $B(5; 1)$, $C(1; 4)$ nella simmetria centrale di centro $M(3; 2)$. Confronta i perimetri dei due triangoli e stabilisci che tipo di quadrilatero è $ABA'B'$.

14. ●● Componi la traslazione di vettore $\mathbf{u}(2; 1)$ con quella di vettore $\mathbf{w}(-5; 3)$: scrivi le equazioni della composizione, il suo vettore e il modulo del vettore. Qual è l'immagine di $P(1; -1)$? Cambia qualcosa se si inverte l'ordine?

15. ●● Siano s_x e s_y le simmetrie rispetto agli assi cartesiani. Calcola $(s_y \circ s_x)(P)$ con $P(2; 5)$, scrivi le equazioni di $s_y \circ s_x$ e di $s_x \circ s_y$ e riconosci la trasformazione. Perché in questo caso l'ordine non conta?

16. ●● Siano s_x la simmetria rispetto all'asse x e t la traslazione di vettore $\mathbf{v}(0; 2)$. Scrivi le equazioni di $t \circ s_x$ e di $s_x \circ t$, calcola l'immagine di $P(1; 1)$ nelle due composizioni e riconosci la trasformazione $t \circ s_x$.

17. ●● Trova l'immagine del triangolo $A(2; 0)$, $B(4; 2)$, $C(0; 2)$ nelle omotetie di centro l'origine e rapporto a) 3; b) $-\frac{1}{2}$. Calcola le tre aree e verifica la regola k^2.

18. ●● a) Scrivi l'equazione della parabola ottenuta traslando $y = x^2$ di $\mathbf{v}(2; -3)$ e quella della sua simmetrica rispetto all'asse x. b) Scrivi l'equazione del grafico ottenuto traslando $y = |x|$ di $(-1; 2)$ e indica il suo vertice.

Dimostrare e argomentare

19. ● Dimostra che la simmetria centrale di centro O trasforma ogni retta che non passa per O in una retta parallela. *(Suggerimento: confronta i triangoli OPQ e OP′Q′.)*

20. ●● Dimostra che un'isometria trasforma il punto medio di un segmento nel punto medio del segmento immagine.

21. ●● Dimostra che le rette delle diagonali di un rombo sono assi di simmetria del rombo. *(Suggerimento: nel rombo ABCD i punti A e C sono equidistanti da B e da D.)*

22. ●● Trova l'errore. a) «Componendo la simmetria rispetto alla retta a e poi quella rispetto alla retta b, incidenti con un angolo di 30°, si ottiene la rotazione di 30°, qualunque sia l'ordine.» b) «La simmetria centrale capovolge le figure, quindi è un'isometria inversa.»

23. ●● Spiega perché un poligono regolare di n lati ha un centro di simmetria se e solo se n è pari.

24. ●●● Siano A e B due punti distinti. Dimostra che la composizione $S_B \circ S_A$ delle simmetrie centrali di centri A e B è la traslazione di vettore doppio del vettore rappresentato da AB. *(Suggerimento: nel triangolo PP_1P_2 usa il teorema dei punti medi di Matematica 1.)*

Problemi

25. ●● **Il tiro di sponda.** Su un biliardo la sponda è la retta $y = 0$; la palla è in $P(1; 2)$ e deve colpire la sponda e poi raggiungere $Q(7; 4)$. Una palla che rimbalza senza effetto si comporta come un raggio di luce su uno specchio: il percorso dopo il rimbalzo è il simmetrico, rispetto alla sponda, del prolungamento del percorso prima del rimbalzo. Usa il simmetrico Q' di Q rispetto alla sponda per trovare il punto T in cui la palla deve colpire la sponda e la lunghezza del percorso PTQ.

26. ●● **L'orologio.** Un orologio ha il centro nell'origine e la lancetta dei minuti lunga 10 cm. a) Di quale angolo orientato ruota la lancetta in 20 minuti? b) Alle 12:00 la punta della lancetta è in $(0; 10)$: dove si trova alle 12:15? Scrivi le equazioni della rotazione che la porta lì.

27. ●● **Il proiettore.** In un modello semplificato di proiettore, l'obiettivo è il centro di un'omotetia che porta la diapositiva, di 24 mm × 36 mm, sullo schermo. La diapositiva è a 5 cm dall'obiettivo, dalla parte opposta allo schermo, che si trova a 4 m dall'obiettivo. Calcola il rapporto dell'omotetia (con il segno), le dimensioni dell'immagine e il rapporto tra le aree. Perché le diapositive si inseriscono capovolte?

28. ●●● **Il ponte.** Due paesi $A(0; -3)$ e $B(6; 5)$ si trovano sulle due rive di un fiume, delimitato dalle rette parallele $y = 0$ e $y = 2$ (unità: km). Si vuole costruire un ponte perpendicolare alle rive in modo che il percorso $A \to$ ponte $\to B$ sia il più breve possibile. Traslando B del vettore $(0; -2)$ in B', spiega perché il ponte va costruito dove la retta AB' incontra la riva $y = 0$, trova la posizione del ponte e la lunghezza del percorso.

29. ● **Lo specchio.** Una persona è in piedi a 1,5 m da uno specchio piano verticale. a) A quale distanza da sé vede la propria immagine? b) Se si avvicina allo specchio di 0,5 m, di quanto si avvicina la sua immagine a lei? c) Perché sul cofano delle ambulanze la scritta «AMBULANZA» è stampata rovesciata?

Con il computer

30. ●● In un software di geometria dinamica disegna due rette incidenti a e b e un triangolo. Costruisci il simmetrico del triangolo rispetto ad a e poi il simmetrico del risultato rispetto a b; misura l'angolo tra le rette e confronta con la rotazione del triangolo iniziale. Che cosa cambia se costruisci le simmetrie nell'ordine opposto? Che cosa succede se rendi b parallela ad a?

Verso la verifica

31. ●● Data la retta r: $y = 2x - 1$, scrivi l'equazione della sua immagine: a) nella simmetria rispetto all'asse y; b) nella simmetria rispetto all'origine; c) nella traslazione di vettore $\mathbf{v}(1; 3)$. Quali delle tre rette sono parallele a r?

32. ●● Il triangolo $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 3)$ viene ruotato di $+90°$ attorno all'origine e poi trasformato con l'omotetia di centro l'origine e rapporto 2. Trova i vertici finali, il perimetro e l'area del triangolo ottenuto, e il rapporto della similitudine composta.

33. ●●● **Sfida.** Dimostra che la composizione di due rotazioni con lo stesso centro O, di angoli α e β, è la rotazione di centro O e angolo $\alpha + \beta$. *(Suggerimento: scrivi ciascuna rotazione come composizione di due simmetrie assiali con assi per O, scegliendo gli assi in modo che il secondo asse della prima rotazione coincida con il primo della seconda.)*

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le trasformazioni geometriche e l'idea di invariante, con le riflessioni negli specchi e i problemi di minimo che si risolvono con una simmetria.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Felix Klein, il programma di Erlangen e le geometrie del XIX secolo.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come una simmetria o una traslazione ben scelta trasformano un problema difficile in uno già risolto, come nei problemi del biliardo e del ponte.

Glossario del capitolo

Angolo orientato
Angolo percorso da un primo a un secondo lato; la sua ampiezza è positiva in verso antiorario, negativa in verso orario.

Asse di simmetria
Retta r tale che una figura sia unita nella simmetria di asse r.

Centro di simmetria
Punto O tale che una figura sia unita nella simmetria centrale di centro O.

Composizione di trasformazioni
Applicazione di due trasformazioni una dopo l'altra; in $g \circ f$ si applica prima f, poi g. In generale non è commutativa.

Fregio
Decorazione su una striscia che si ripete per traslazione; esistono esattamente sette tipi di fregi.

Isometria
Trasformazione che conserva le distanze; due figure sono congruenti se e solo se un'isometria trasforma l'una nell'altra.

Isometria diretta
Isometria che conserva il verso di percorrenza delle figure: traslazioni, rotazioni, simmetrie centrali.

Isometria inversa
Isometria che inverte il verso di percorrenza delle figure, come la simmetria assiale.

Omotetia
Trasformazione di centro O e rapporto $k \neq 0$ che porta P nel punto P′ della retta OP con $OP' = |k| \cdot OP$, dalla parte di P se $k > 0$, dalla parte opposta se $k < 0$.

Proprietà invariante
Proprietà delle figure che si conserva in una trasformazione, come la lunghezza, l'allineamento o l'ampiezza degli angoli.

Punto unito
Punto che coincide con la propria immagine in una trasformazione.

Rotazione
Isometria di centro O e angolo orientato α che fa girare ogni punto attorno a O, su una circonferenza di centro O, di un angolo α.

Similitudine
Composizione di un'omotetia e di un'isometria; moltiplica tutte le distanze per uno stesso numero positivo e conserva gli angoli.

Simmetria assiale
Isometria di asse r che associa a ogni punto P il punto P′ tale che r sia l'asse del segmento PP′; i suoi punti uniti sono i punti di r.

Simmetria centrale
Isometria di centro O che associa a ogni punto P il punto P′ tale che O sia il punto medio di PP′; è la rotazione di 180°.

Trasformazione geometrica
Corrispondenza biunivoca del piano in sé: a ogni punto associa un'immagine, e ogni punto è immagine di uno e un solo punto.

Trasformazione identica
La trasformazione che associa a ogni punto il punto stesso.

Trasformazione inversa
La trasformazione che riporta ogni immagine nel punto di partenza: $f^{-1}(P') = P$ se $f(P) = P'$.

Traslazione
Isometria che sposta tutti i punti secondo uno stesso vettore; non ha punti uniti, salvo il caso del vettore nullo.

Soluzioni

1. D. Traslazioni, rotazioni e simmetrie centrali conservano il verso di percorrenza; la simmetria assiale lo inverte.

2. B. Una rotazione di angolo non multiplo di 360° ha come unico punto unito il centro.

3. A. Un poligono regolare di n lati ha n assi di simmetria.

4. C. L'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo tra gli assi: $2 \cdot 40° = 80°$.

5. A. La simmetria rispetto a $y = x$ scambia le coordinate: $(5; -2)$.

6. D. Le aree sono moltiplicate per $k^2 = (-3)^2 = 9$: $4 \cdot 9 = 36$ cm^2. Un'area non è mai negativa.

7. a) Falso: le simmetrie assiali invertono il verso. b) Vero. c) Vero: il vettore è la somma dei due vettori. d) Falso: moltiplica le distanze per $|k|$; le conserva solo se $k = \pm 1$. e) Vero: il punto d'incontro delle diagonali. f) Falso: ne ha uno, la retta dell'altezza relativa alla base.

8. a) $f(P) = P$. b) le distanze (la lunghezza dei segmenti). c) traslazione; $2d$; perpendicolare. d) $|k|$; k^2.

9. $A'(4; 2)$, $B'(1; -2)$, $C'(3; -7)$. Il punto che va nell'origine si trova con l'inversa: $(0 - 3; 0 + 2) = (-3; 2)$.

10. a) $(4; 3)$; b) $(-4; -3)$; c) $(-4; 3)$; d) $(-3; 4)$; e) $(3; -4)$.

11. Rispetto a $x = 2$: $x' = 4 - x$, $y' = y$, quindi $A'(-1; 1)$. Rispetto a $y = -3$: $x' = x$, $y' = -6 - y$, quindi $A''(5; -7)$.

12. Con $x' = -y$, $y' = x$: $A'(-1; 3)$, $B'(-4; -2)$, $C'(5; 0)$. Il coefficiente angolare di OA è $1/3$, quello di OA' è $3/(-1) = -3$; il prodotto è -1, quindi le rette sono perpendicolari.

13. Con $x' = 6 - x$, $y' = 4 - y$: $A'(5; 3)$, $B'(1; 3)$, $C'(5; 0)$. Entrambi i triangoli hanno lati 4, 3, 5 e perimetro 12 (la simmetria centrale è un'isometria). $ABA'B'$ ha vertici $(1; 1)$, $(5; 1)$, $(5; 3)$, $(1; 3)$: è un rettangolo di lati 4 e 2, con le diagonali AA' e BB' che si dimezzano in M.

14. $x' = x + 2 - 5 = x - 3$, $y' = y + 1 + 3 = y + 4$: è la traslazione di vettore $(-3; 4)$, di modulo $\sqrt{9 + 16} = 5$. $P'(-2; 3)$. Invertendo l'ordine non cambia nulla: le traslazioni commutano.

15. $s_x(P) = (2; -5)$, $s_y(2; -5) = (-2; -5)$. $s_y \circ s_x$: $x' = -x$, $y' = -y$; anche $s_x \circ s_y$ ha le stesse equazioni. È la simmetria rispetto all'origine. L'ordine non conta perché gli assi sono perpendicolari: la composizione è la rotazione di $2 \cdot 90° = 180°$ in un verso o nell'altro, che è la stessa trasformazione.

16. $t \circ s_x$: $(x; y) \mapsto (x; -y) \mapsto (x; -y + 2)$, cioè $x' = x$, $y' = 2 - y$. $s_x \circ t$: $(x; y) \mapsto (x; y + 2) \mapsto (x; -y - 2)$. Per $P(1; 1)$: $(t \circ s_x)(P) = (1; 1)$, $(s_x \circ t)(P) = (1; -3)$: le composizioni sono diverse. $t \circ s_x$ ha equazioni $x' = x$, $y' = 2 \cdot 1 - y$: è la simmetria rispetto alla retta $y = 1$ (e infatti $P(1; 1)$ è unito).

17. Area di ABC: base $CB = 4$ sulla retta $y = 2$, altezza 2, area 4. a) $A'(6; 0)$, $B'(12; 6)$, $C'(0; 6)$; area $12 \cdot 6/2 = 36 = 9 \cdot 4$. b) $A''(-1; 0)$, $B''(-2; -1)$, $C''(0; -1)$; area $2 \cdot 1/2 = 1 = 4 \cdot 1/4$.

18. a) $y = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$; la simmetrica rispetto all'asse x è $y = -(x - 2)^2 + 3 = -x^2 + 4x - 1$. b) $y = |x + 1| + 2$, con vertice $(-1; 2)$.

19. Siano r la retta, P, Q due suoi punti e P', Q' le immagini. I triangoli OPQ e $OP'Q'$ sono congruenti per il primo criterio ($OP \cong OP'$, $OQ \cong OQ'$, angoli in O opposti al vertice). Quindi $\angle OPQ \cong \angle OP'Q'$; questi angoli sono alterni interni rispetto alle rette PQ e $P'Q'$ tagliate dalla trasversale PP', dunque $P'Q' \parallel PQ$.

20. Sia M il punto medio di AB. Per la proprietà a) del teorema sulle isometrie M' sta sul segmento $A'B'$; inoltre $A'M' \cong AM$ e $M'B' \cong MB$, e $AM \cong MB$. Quindi $A'M' \cong M'B'$: M' è il punto medio di $A'B'$.

21. Nel rombo $ABCD$, $AB \cong AD$ e $CB \cong CD$: A e C sono equidistanti da B e da D, quindi stanno sull'asse del segmento BD, che è dunque la retta AC. La simmetria di asse AC lascia fermi A e C e scambia B e D: trasforma il rombo in sé. Lo stesso ragionamento,

scambiando i ruoli delle diagonali, vale per la retta BD.

22. a) Due errori: l'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo tra gli assi, 60°; e l'ordine conta: invertendolo si ottiene la rotazione di −60°. b) Errato: la simmetria centrale è la rotazione di 180°, che conserva il verso di percorrenza; è un'isometria diretta. «Capovolgere» una figura nel piano (mettere sotto ciò che stava sopra) può essere una rotazione; a invertire il verso è lo specchio, cioè la simmetria assiale.

23. *Traccia.* Le rotazioni attorno al centro che portano il poligono in sé sono quelle di angolo multiplo di $360°/n$, e la simmetria centrale è la rotazione di 180°. Quindi il centro è centro di simmetria se e solo se $180° = h \cdot 360°/n$ per qualche intero h, cioè $n = 2h$: n è pari. (Un centro di simmetria diverso dal centro del poligono non può esistere: il centro di simmetria è unito nella simmetria, e il centro della circonferenza circoscritta deve andare in sé stesso.)

24. Sia P un punto, $P_1 = S_A(P)$, $P_2 = S_B(P_1)$. A è il punto medio di PP_1 e B è il punto medio di P_1P_2. Per il teorema dei punti medi nel triangolo PP_1P_2 (se P non è sulla retta AB) il segmento AB è parallelo a PP_2 e ne è la metà; i versi sono gli stessi (da A a B e da P a P_2). Quindi il segmento orientato PP_2 rappresenta il doppio del vettore AB, qualunque sia P (il caso di P sulla retta AB si verifica con le ascisse sulla retta). Con le coordinate: $x_2 = 2b_1 - (2a_1 - x) = x + 2(b_1 - a_1)$, e lo stesso per y.

25. $Q'(7; -4)$. La retta PQ' ha coefficiente angolare $(-4 - 2)/(7 - 1) = -1$: $y = -x + 3$, che incontra la sponda in $T(3; 0)$. Il percorso $PT + TQ = PT + TQ' = PQ' = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$. (Ogni altro punto X della sponda dà $PX + XQ' > PQ'$ per la disuguaglianza triangolare: il percorso con il rimbalzo è anche il più breve.)

26. a) In 20 minuti la lancetta compie un terzo di giro in verso orario: −120°. b) Alle 12:15 ha ruotato di −90°: $x' = y$, $y' = -x$, quindi la punta va in (10; 0).

27. La diapositiva e lo schermo stanno da parti opposte dell'obiettivo: $k = -400 : 5 = -80$. L'immagine misura $2{,}4 \cdot 80 = 192$ cm per $3{,}6 \cdot 80 = 288$ cm, cioè 1,92 m × 2,88 m; le aree stanno nel rapporto $80^2 = 6400$. Poiché $k < 0$, l'immagine è capovolta (ruotata di 180° rispetto alla diapositiva): inserendo la diapositiva capovolta, l'immagine sullo schermo appare diritta.

28. Qualunque sia la posizione del ponte, il suo tratto è lungo 2 km. Se il ponte va da $X(x; 0)$ a $Y(x; 2)$, la traslazione di vettore $(0; -2)$ porta Y in X e B in $B'(6; 3)$, quindi $YB = XB'$; il percorso è $AX + 2 + XB'$, minimo quando X sta sul segmento AB' (disuguaglianza triangolare). La retta AB' è $y = x - 3$ e incontra $y = 0$ in $X(3; 0)$: il ponte va da (3; 0) a (3; 2). Lunghezza: $AB' + 2 = \sqrt{6^2 + 6^2} + 2 = 6\sqrt{2} + 2 \approx 10{,}49$ km.

29. a) L'immagine è 1,5 m dietro lo specchio: la vede a 3 m. b) Ora l'immagine è a 1 m dietro lo specchio e la persona a 1 m davanti: distanza 2 m, quindi l'immagine si avvicina di 1 m. c) Lo specchietto retrovisore, come ogni specchio, inverte il verso (isometria inversa): la scritta rovesciata, riflessa, appare diritta all'autista che precede l'ambulanza.

30. *Traccia.* Il triangolo finale coincide con il ruotato del triangolo iniziale attorno al punto d'incontro delle rette, di un angolo doppio dell'angolo tra le rette (da a a b). Invertendo l'ordine si ottiene la rotazione di verso opposto. Con le rette parallele si ottiene una traslazione, perpendicolare alle rette, di modulo doppio della loro distanza.

31. a) $y = -2x - 1$. b) $-y = 2(-x) - 1$, cioè $y = 2x + 1$. c) $y - 3 = 2(x - 1) - 1$, cioè $y = 2x$. Sono parallele a r le rette b) e c): la simmetria centrale e la traslazione trasformano ogni retta in una retta parallela.

32. Rotazione: $(x; y) \mapsto (-y; x)$: (0; 0), (0; 4), (−3; 0). Omotetia: (0; 0), (0; 8), (−6; 0). Il triangolo finale ha cateti 8 e 6 e ipotenusa 10: perimetro 24 (il doppio di 12), area 24 (il quadruplo di 6). È una similitudine di rapporto 2.

33. Siano a, b, c tre rette per O tali che l'angolo orientato da a a b sia $\alpha/2$ e quello da b a c sia $\beta/2$ (si sceglie b a piacere, poi a e c). Allora $R(O; \alpha) = s_b \circ s_a$ e $R(O; \beta) = s_c \circ s_b$. La composizione è $s_c \circ s_b \circ s_b \circ s_a = s_c \circ s_a$, perché $s_b \circ s_b = i$. L'angolo da a a c è $\alpha/2 + \beta/2$, quindi $s_c \circ s_a = R(O; \alpha + \beta)$.