CAPITOLO

# 4

# Proporzionalità e similitudine

*Stessa forma, altra misura: dalla fotocopia alla carta geografica, la geometria che cambia scala. (testo della redazione)*

**OBIETTIVI**

1. Distinguere grandezze commensurabili e incommensurabili e operare con rapporti e proporzioni tra grandezze.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Talete, i suoi corollari e il teorema della bisettrice.
3. Riconoscere poligoni simili e applicare i criteri di similitudine dei triangoli, dimostrando il primo.
4. Usare i rapporti tra perimetri, altezze e aree di figure simili.
5. Dimostrare con la similitudine i teoremi di Euclide e il teorema di Pitagora.
6. Costruire la sezione aurea di un segmento e risolvere problemi di misure inaccessibili e di scale.

**INDICE DEL CAPITOLO**


4.1 Grandezze proporzionali ..... 2
4.2 Il teorema di Talete ..... 4
4.3 La similitudine ..... 8
4.4 Perimetri e aree di figure simili ..... 10
4.5 La similitudine nel triangolo rettangolo ..... 12
4.6 Applicazioni: la sezione aurea e le misure inaccessibili ..... 13

Matematica 2 · Parte II · Geometria del piano · versione 1.0
Capitolo 4: Proporzionalità e similitudine · pagine 89–110 del volume completo · estratto per lo studio

Una fotocopia ingrandita, una cartina stradale, il plastico di un edificio, l'immagine capovolta dentro una camera oscura: in tutti questi casi due figure hanno **la stessa forma** ma **dimensioni diverse**. Riconoscere quando due figure hanno la stessa forma, e sapere che cosa cambia e che cosa resta uguale passando dall'una all'altra, è l'oggetto di questo capitolo: la **similitudine**.

Lo strumento che rende possibile tutto il resto è il **teorema di Talete**. In *Matematica 1* ne hai visto una versione ridotta, il piccolo teorema di Talete: un fascio di parallele che stacca segmenti congruenti su una trasversale li stacca congruenti su ogni altra. Qui lo estendiamo ai segmenti di lunghezza qualsiasi, che non sono più congruenti ma **proporzionali**. Per farlo dobbiamo prima precisare che cosa significhi il rapporto tra due segmenti, anche quando, come per il lato e la diagonale di un quadrato, non esiste un'unità di misura che li contenga entrambi un numero intero di volte. Alla fine del capitolo la similitudine ci restituirà, con una dimostrazione nuova, i teoremi di Euclide e di Pitagora del capitolo 3, e ci darà strumenti per misurare ciò che non si può raggiungere: l'altezza di un albero, di una torre, di una piramide.

## 4.1 Grandezze proporzionali

### 4.1.1 Grandezze omogenee e rapporti

Due grandezze si dicono **omogenee** quando si possono confrontare e sommare tra loro: due segmenti, due angoli, due superfici. Un segmento e un angolo non sono omogenei: non ha senso chiedersi quale dei due sia «più grande». Date due grandezze omogenee $A$ e $B$, chiediamoci quante volte $B$ è contenuta in $A$.

Se esiste una terza grandezza $U$, omogenea alle prime, che sia contenuta un numero intero di volte sia in $A$ sia in $B$, per esempio $A = 7U$ e $B = 4U$, si dice che $A$ e $B$ sono **grandezze commensurabili** e che $U$ è un loro *sottomultiplo comune*. Il **rapporto** tra $A$ e $B$ è allora il numero razionale

$$\frac{A}{B} = \frac{7}{4}.$$

Non sempre però un sottomultiplo comune esiste. Nel capitolo 3 abbiamo visto che il lato $l$ e la diagonale $d = l\sqrt{2}$ di un quadrato non possono essere entrambi multipli interi di uno stesso segmento: se fosse $d = mU$ e $l = nU$, avremmo $d/l = m/n = \sqrt{2}$, e $\sqrt{2}$ sarebbe razionale, contro quanto dimostrato in *Matematica 1*. Grandezze omogenee prive di un sottomultiplo comune si dicono incommensurabili. Anche per esse si definisce un rapporto, che però è un **numero irrazionale**: si ottiene, come nel capitolo 1, con una successione di approssimazioni razionali per difetto e per eccesso, sempre più strette, che individuano un unico numero reale. Per il lato e la diagonale del quadrato il rapporto è $d : l = \sqrt{2}$.

Il risultato è che il rapporto tra due grandezze omogenee è sempre un **numero reale positivo**: razionale se le grandezze sono commensurabili, irrazionale se sono incommensurabili. Scelta un'unità $U$, la **misura** di una grandezza $A$ è il rapporto $A : U$; il rapporto tra due grandezze è uguale al rapporto tra le loro misure (rispetto alla stessa unità). D'ora in poi scriveremo quindi indifferentemente $AB : CD$ per il rapporto tra due segmenti e per il quoziente delle loro lunghezze.

> **DA RICORDARE**
>
> Il rapporto tra due grandezze **non dipende dall'unità di misura**, purché sia la stessa per entrambe. Un segmento di 18 cm e uno di 2,4 dm stanno nel rapporto $18 : 24 = 3 : 4$, non $18 : 2{,}4$: prima di dividere, porta le misure alla stessa unità. Il rapporto è un numero puro, senza unità.

### 4.1.2 Proporzioni

Quattro grandezze $A$, $B$, $C$, $D$, le prime due omogenee tra loro e le ultime due omogenee tra loro, formano una **proporzione** se il rapporto tra le prime due è uguale al rapporto tra le ultime due:

$$A : B = C : D \quad \text{(si legge «}A\text{ sta a }B\text{ come }C\text{ sta a }D\text{»).}$$

$A$ e $D$ sono gli *estremi*, $B$ e $C$ i *medi*. Poiché i rapporti sono numeri reali, una proporzione tra grandezze equivale a una proporzione tra le loro misure, e valgono le proprietà delle proporzioni che hai studiato in *Matematica 1*. Se $a : b = c : d$ con $a, b, c, d$ positivi:

- **proprietà fondamentale**: $a \cdot d = b \cdot c$ (il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi);
- **permutare**: $a : c = b : d$ (se le quattro grandezze sono tutte omogenee) e **invertire**: $b : a = d : c$;
- **comporre**: $(a + b) : b = (c + d) : d$, e anche $(a + b) : a = (c + d) : c$;
- **scomporre**: $(a - b) : b = (c - d) : d$, se $a > b$ (e quindi $c > d$).

Una proporzione con i medi uguali, $a : b = b : c$, si dice **continua**, e $b$ è il **medio proporzionale** tra $a$ e $c$: dalla proprietà fondamentale $b^2 = a \cdot c$, cioè $b = \sqrt{ac}$. Per esempio il medio proporzionale tra 4 e 9 è 6, perché $4 : 6 = 6 : 9$. Incontreremo presto medi proporzionali nel triangolo rettangolo.

### 4.1.3 Classi di grandezze direttamente proporzionali

Consideriamo due insiemi (o *classi*) di grandezze, per esempio i segmenti di una retta e i segmenti di un'altra, e una corrispondenza biunivoca che a ogni grandezza $A$ della prima classe associa una grandezza $A'$ della seconda. Le due classi si dicono **direttamente proporzionali** se il rapporto tra due grandezze qualsiasi della prima è uguale al rapporto tra le corrispondenti della seconda:

$$A : B = A' : B' \quad \text{per ogni coppia } A, B.$$

È la stessa idea della proporzionalità diretta tra numeri di *Matematica 1* ($y = kx$): se $A'$ è il doppio, il triplo, la metà di qualcosa, lo è anche la sua corrispondente. Verificare la definizione su *tutte* le coppie è impossibile; per fortuna basta molto meno. Ricordiamo senza dimostrazione il

**IN SINTESI**

**Criterio di proporzionalità.** Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca sono direttamente proporzionali se e solo se a) a grandezze congruenti corrispondono grandezze congruenti, e b) alla somma di due grandezze corrisponde la somma delle grandezze corrispondenti.

Un esempio importante viene dal capitolo 3. Tra i rettangoli che hanno la stessa altezza, la corrispondenza «base ↦ rettangolo» soddisfa entrambe le condizioni: basi congruenti danno rettangoli congruenti, e se si affiancano due basi i rettangoli si affiancano. Dunque **rettangoli con la stessa altezza stanno tra loro come le basi**; allo stesso modo triangoli con la stessa altezza stanno tra loro come le basi.

## 4.2 Il teorema di Talete

### 4.2.1 Il teorema generale

Un **fascio di rette parallele** è l'insieme delle rette di un piano parallele a una retta data; una retta che le taglia tutte si dice **trasversale**. Ogni segmento $AB$ staccato su una trasversale $t$ da due rette del fascio ha un *corrispondente* $A'B'$, staccato dalle stesse due rette su un'altra trasversale $t'$.

**IN SINTESI**

**Teorema di Talete.** Un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali determina su di esse due classi di segmenti direttamente proporzionali.

**Ipotesi:** $a \parallel b \parallel c \parallel d$; la trasversale $t$ le taglia in $A, B, C, D$, la trasversale $t'$ in $A', B', C', D'$. **Tesi:** $AB : CD = A'B' : C'D'$.

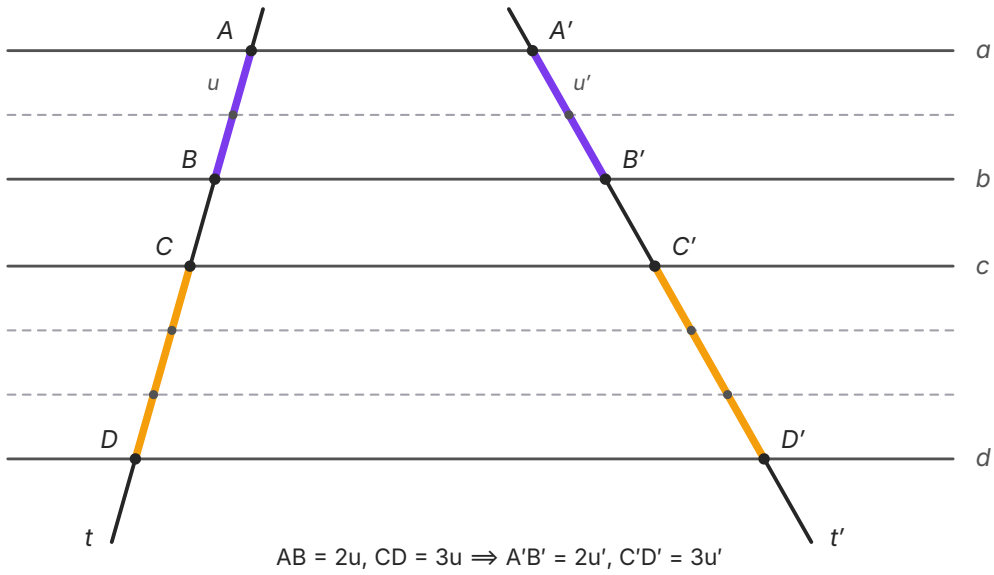



**Figura 4.1** Il teorema di Talete nel caso commensurabile. Il sottomultiplo comune $u$ è contenuto 2 volte in $AB$ e 3 volte in $CD$; le parallele tratteggiate condotte per i punti di divisione staccano su $t'$ segmenti tutti congruenti a uno stesso $u'$ (piccolo teorema di Talete), quindi $A'B' = 2u'$ e $C'D' = 3u'$.

**Dimostrazione** (caso commensurabile, Figura 4.1). Supponiamo che $AB$ e $CD$ abbiano un sottomultiplo comune $u$: $AB = mu$ e $CD = nu$, con $m$, $n$ naturali. Dividiamo $AB$ in $m$ parti e $CD$ in $n$ parti congruenti a $u$, e per ogni punto di divisione conduciamo la parallela alle rette del fascio. Tutte queste rette formano ancora un fascio di parallele, che stacca su $t$ gli $m + n$ segmenti congruenti a $u$. Per il piccolo teorema di Talete (la cui dimostrazione vale anche per segmenti congruenti non consecutivi) le stesse rette staccano su $t'$ segmenti tutti congruenti tra loro, diciamo a $u'$: dunque $A'B' = mu'$ e $C'D' = nu'$. Allora

$$AB : CD = m : n \quad \text{e} \quad A'B' : C'D' = m : n,$$

e i due rapporti sono uguali. c.v.d.

Se $AB$ e $CD$ sono incommensurabili il teorema vale ancora, ma la dimostrazione richiede di approssimare il rapporto irrazionale con rapporti razionali, come nel capitolo 1: la tralasciamo. In entrambi i casi, la corrispondenza tra i segmenti di $t$ e quelli di $t'$ soddisfa il criterio di proporzionalità, ed è proprio questo l'enunciato del teorema. Permutando i medi si ottiene una forma equivalente, spesso comoda: $AB : A'B' = CD : C'D'$.

**ERRORE FREQUENTE**

**Proporzionali, non congruenti.** Il teorema di Talete non dice che $A'B' \cong AB$: le due trasversali possono essere inclinate in modo diverso, e i segmenti di $t'$ possono essere tutti più lunghi o tutti più corti di quelli di $t$. Uguali sono soltanto i **rapporti** tra segmenti della stessa trasversale. Il caso dei segmenti congruenti ($AB \cong CD \Rightarrow A'B' \cong C'D'$) è il piccolo teorema di *Matematica 1*, che ora è un caso particolare del teorema generale (rapporto 1).

### 4.2.2 La parallela a un lato di un triangolo

Applichiamo il teorema a un triangolo $ABC$. Una retta parallela al lato $BC$ incontri il lato $AB$ in $D$ e il lato $AC$ in $E$. Le tre rette parallele $DE$, $BC$ e la parallela a $BC$ condotta per $A$ formano un fascio; le trasversali sono $AB$ e $AC$.

**IN SINTESI**

**Corollario.** Una retta parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali: se $DE \parallel BC$, allora $AD : DB = AE : EC$, e anche $AD : AB = AE : AC$.

**Teorema inverso.** Se una retta divide due lati di un triangolo in parti proporzionali, $AD : DB = AE : EC$, allora è parallela al terzo lato.

**Dimostrazione del teorema inverso.** Per assurdo, sia $DE$ non parallela a $BC$. La parallela a $BC$ condotta per $D$ incontra $AC$ in un punto $E' \neq E$, e per il corollario $AD : DB = AE' : E'C$. Confrontando con l'ipotesi, $AE : EC = AE' : E'C$; componendo, $AE : AC = AE' : AC$, cioè $AE \cong AE'$. Ma su $AC$ c'è un solo punto a distanza $AE$ da $A$: $E' = E$, contro l'ipotesi. c.v.d.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Nel triangolo $ABC$ si ha $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm e $BC = 10$ cm. Una parallela a $BC$ incontra $AB$ in $D$, con $AD = 6$ cm, e $AC$ in $E$. Calcola $AE$ ed $EC$.

**Soluzione.** Per il corollario $AD : AB = AE : AC$, cioè $6 : 15 = AE : 12$. La proprietà fondamentale dà $15 \cdot AE = 6 \cdot 12 = 72$, quindi $AE = 72 : 15 = 4{,}8$ cm, ed $EC = 12 - 4{,}8 = 7{,}2$ cm.

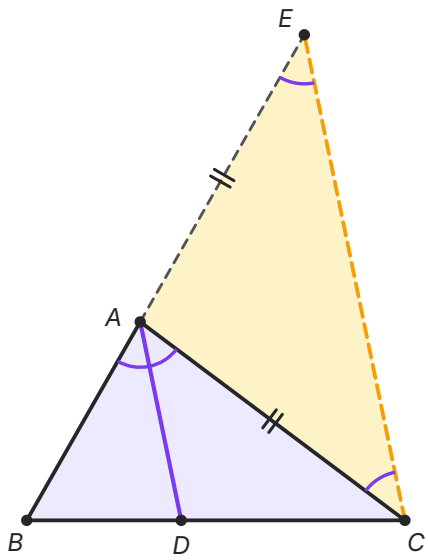
**Controllo.** $AD : DB = 6 : 9 = 2 : 3$ e $AE : EC = 4{,}8 : 7{,}2 = 2 : 3$: le parti sono proporzionali, come deve essere. Il lato $BC$ non serve per questa domanda; servirà quando, nel prossimo paragrafo, calcoleremo anche $DE$.

### 4.2.3 Il teorema della bisettrice

**IN SINTESI**

**Teorema della bisettrice.** In un triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

**Ipotesi:** $AD$ bisettrice di $\angle BAC$, $D$ su $BC$. **Tesi:** $BD : DC = AB : AC$.




AD bisettrice: ∠BAD ≅ ∠DAC

CE parallela ad AD: ∠AEC ≅ ∠BAD, ∠ACE ≅ ∠DAC

quindi ACE è isoscele: AE ≅ AC

Talete (parallele AD, EC, trasversali BE, BC):

**BD : DC = AB : AE = AB : AC**

**Figura 4.2** Il teorema della bisettrice. La parallela ad $AD$ condotta per $C$ incontra il prolungamento di $BA$ in $E$; gli angoli marcati con un arco sono tutti congruenti, quindi il triangolo $ACE$ è isoscele.

**Dimostrazione** (Figura 4.2). Da $C$ conduciamo la parallela alla bisettrice $AD$; essa incontra il prolungamento del lato $BA$ oltre $A$ in un punto $E$. Gli angoli $\angle AEC$ e $\angle BAD$ sono corrispondenti rispetto alle parallele $AD$, $EC$ tagliate da $BE$: sono congruenti. Gli angoli $\angle ACE$ e $\angle DAC$ sono alterni interni rispetto alle stesse parallele tagliate da $AC$: sono congruenti. Poiché $\angle BAD \cong \angle DAC$, il triangolo $ACE$ ha due angoli congruenti, è isoscele e $AE \cong AC$. Ora le parallele $AD$ ed $EC$, con la parallela a esse per $B$, formano un fascio tagliato dalle trasversali $BE$ e $BC$; per il teorema di Talete $BD : DC = BA : AE$, e sostituendo $AE$ con $AC$ si ha la tesi. c.v.d.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Un triangolo ha i lati $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm, $BC = 10$ cm. La bisettrice dell'angolo in $A$ incontra $BC$ in $D$. Calcola $BD$ e $DC$.

**Soluzione.** $BD : DC = 6 : 9$. Componendo, $(BD + DC) : BD = (6 + 9) : 6$, cioè $10 : BD = 15 : 6$, da cui $BD = 10 \cdot 6 : 15 = 4$ cm e $DC = 10 - 4 = 6$ cm. In pratica: il lato $BC$ si divide in parti proporzionali a 6 e 9, cioè in $6 + 9 = 15$ «quote», di cui 6 vanno a $BD$.

## 4.3 La similitudine

### 4.3.1 Poligoni simili

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono **simili** se si può stabilire tra i loro vertici una corrispondenza biunivoca tale che **gli angoli corrispondenti siano congruenti** e **i lati corrispondenti siano proporzionali**. Si scrive $F \sim F'$. Il rapporto costante tra un lato di $F'$ e il lato corrispondente di $F$ si chiama **rapporto di similitudine** e si indica con $k$:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = k.$$

Se $k > 1$ $F'$ è un ingrandimento di $F$, se $k < 1$ una riduzione, se $k = 1$ i due poligoni sono congruenti: la congruenza è un caso particolare della similitudine. La similitudine è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica con rapporto $1/k$, transitiva con rapporto il prodotto dei rapporti).

Le due condizioni della definizione sono **indipendenti**, e servono entrambe. Un quadrato e un rettangolo di lati 1 e 2 hanno tutti gli angoli retti, ma non sono simili: i lati non sono in proporzione. Un quadrato e un rombo non quadrato con lo stesso lato hanno i lati in proporzione (rapporto 1), ma non sono simili: gli angoli sono diversi. Sono invece simili tra loro tutti i quadrati, tutti i triangoli equilateri e, più in generale, tutti i poligoni regolari con lo stesso numero di lati.

### 4.3.2 I criteri di similitudine dei triangoli

Per i triangoli, come per la congruenza, bastano meno informazioni. Ecco i tre **criteri di similitudine** (Figura 4.3).

**IN SINTESI**

**Primo criterio (AA).** Due triangoli che hanno due angoli rispettivamente congruenti sono simili.

**Secondo criterio (LAL).** Due triangoli che hanno due lati in proporzione e congruenti gli angoli tra essi compresi sono simili.

**Terzo criterio (LLL).** Due triangoli che hanno i tre lati in proporzione sono simili.

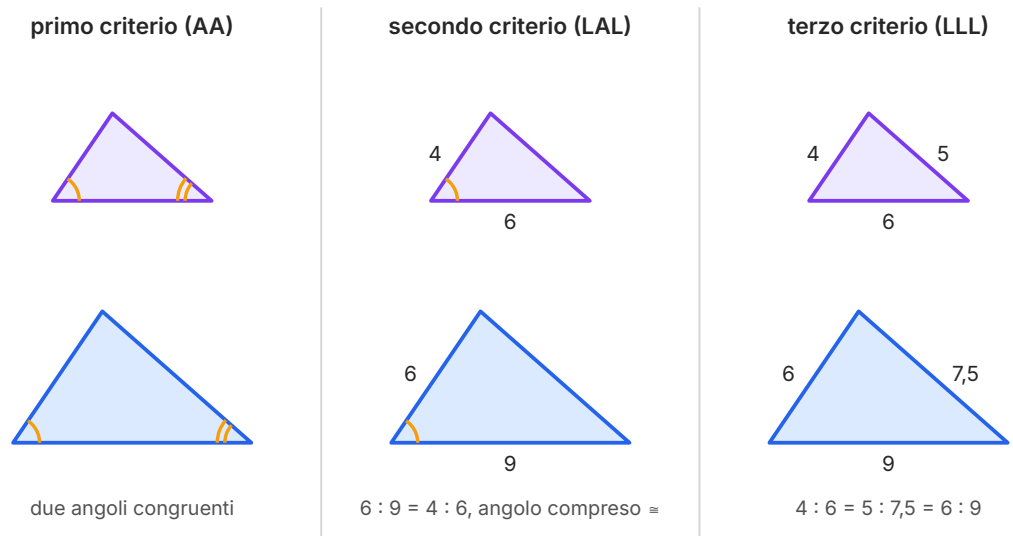



**Figura 4.3** I tre criteri di similitudine, con rapporto $k = 1{,}5$. Nel primo bastano due coppie di angoli congruenti (archi); nel secondo due lati in proporzione e l'angolo compreso; nel terzo i tre lati in proporzione. I lati dei triangoli piccoli misurano 4, 5 e 6.

Nel primo criterio due angoli bastano perché il terzo, per differenza da 180°, è automaticamente congruente. Dimostriamo il primo criterio; gli altri due si dimostrano in modo analogo, usando anche il teorema inverso del paragrafo precedente (uno è proposto negli esercizi).

**Dimostrazione del primo criterio.** Siano $ABC$ e $A'B'C'$ due triangoli con $\angle A \cong \angle A'$ e $\angle B \cong \angle B'$, quindi anche $\angle C \cong \angle C'$. Se $A'B' \cong AB$, i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, e simili con $k = 1$. Altrimenti, supponiamo $A'B' < AB$ (l'altro caso si tratta scambiando i ruoli dei triangoli).

1. Su $AB$ prendiamo $D$ con $AD \cong A'B'$ e su $AC$ prendiamo $E$ con $AE \cong A'C'$. I triangoli $ADE$ e $A'B'C'$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza ($\angle A \cong \angle A'$), quindi $\angle ADE \cong \angle B' \cong \angle B$ e $DE \cong B'C'$.

2. Gli angoli $\angle ADE$ e $\angle ABC$ sono corrispondenti rispetto alle rette $DE$, $BC$ tagliate da $AB$, e sono congruenti: dunque $DE \parallel BC$. Per il corollario del teorema di Talete $AD : AB = AE : AC$.
3. Da $E$ conduciamo la parallela ad $AB$, che incontra $BC$ in $F$. Il quadrilatero $DBFE$ è un parallelogramma, quindi $BF \cong DE$. Per il corollario applicato alla parallela $EF$ al lato $AB$, $AE : AC = BF : BC = DE : BC$.

In conclusione $A'B' : AB = A'C' : AC = B'C' : BC$: i lati sono in proporzione e gli angoli sono congruenti, quindi i triangoli sono simili. c.v.d.

Nei triangoli simili i lati in proporzione sono quelli **opposti ad angoli congruenti**: per non sbagliare la corrispondenza conviene scrivere i vertici nello stesso ordine degli angoli congruenti ($A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$). Due conseguenze del primo criterio si usano continuamente:

- **due triangoli rettangoli sono simili se hanno un angolo acuto congruente** (l'altro angolo congruente è quello retto);
- **una parallela a un lato di un triangolo stacca un triangolo simile al triangolo dato**: nel triangolo $ABC$, se $DE \parallel BC$, allora $ADE \sim ABC$ (angolo in $A$ comune, angoli in $D$ e in $B$ corrispondenti).

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Riprendi il triangolo dell'esempio sulla parallela a un lato ($AB = 15$, $AC = 12$, $BC = 10$ cm, $AD = 6$ cm, $DE \parallel BC$). Calcola $DE$ e il perimetro del triangolo $ADE$.

**Soluzione.** I triangoli $ADE$ e $ABC$ sono simili, con rapporto $k = AD : AB = 6 : 15 = 0{,}4$. Quindi $DE = 0{,}4 \cdot BC = 0{,}4 \cdot 10 = 4$ cm. Il perimetro di $ABC$ è $15 + 12 + 10 = 37$ cm; quello di $ADE$ è $6 + 4{,}8 + 4 = 14{,}8$ cm, e infatti $14{,}8 = 0{,}4 \cdot 37$.

**ERRORE FREQUENTE**

**Lati corrispondenti, non lati «nella stessa posizione».** Se due triangoli simili sono disegnati ruotati o ribaltati, è facile accoppiare i lati sbagliati. Nel triangolo rettangolo $ABC$ (retto in $A$) con altezza $AH$, i triangoli $HBA$ e $ABC$ sono simili, ma il cateto $AB$ del triangolo grande corrisponde all'ipotenusa $AB$ del triangolo piccolo, non al suo cateto $AH$. Regola sicura: individua prima gli angoli congruenti, poi accoppia i lati opposti a essi.

## 4.4 Perimetri e aree di figure simili

Se due poligoni sono simili con rapporto $k$, ogni lato del secondo è $k$ volte il lato corrispondente del primo. Sommando, anche il **perimetro** è moltiplicato per $k$: $2p' = k \cdot 2p$. Lo stesso vale per ogni altro segmento «corrispondente»: **le altezze, le mediane, le bisettrici corrispondenti** di due triangoli simili stanno nel rapporto $k$. Per le altezze basta osservare che l'altezza $AH$ divide

il triangolo $ABC$ in due triangoli rettangoli, e che $ABH \sim A'B'H'$ (rettangoli con $\angle B \cong \angle B'$): quindi $A'H' : AH = A'B' : AB = k$.

Per le **aree** le cose vanno diversamente. Se il triangolo $A'B'C'$ ha base $b' = kb$ e altezza $h' = kh$,

$$S' = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{kb \cdot kh}{2} = k^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = k^2 \cdot S.$$

Un poligono si divide, con le diagonali uscenti da un vertice, in triangoli; nel poligono simile i triangoli corrispondenti sono simili con lo stesso rapporto $k$ (lo si dimostra con il secondo criterio). Sommando le aree, il risultato vale per tutti i poligoni.

**IN SINTESI**

Se due poligoni sono simili con rapporto $k$: i **lati**, i **perimetri** e tutti i segmenti corrispondenti (altezze, mediane, diagonali...) stanno nel rapporto $k$; le **aree** stanno nel rapporto $k^2$. Per i solidi simili, che studierai più avanti, i **volumi** stanno nel rapporto $k^3$.

Raddoppiando le dimensioni di una figura, dunque, l'area diventa quattro volte più grande, non due; triplicandole, nove volte. Viceversa, se si conosce il rapporto delle aree $S' : S$, il rapporto di similitudine è la sua radice quadrata: $k = \sqrt{S' : S}$.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Un triangolo ha area 50 cm² e perimetro 30 cm. Un triangolo simile ha area 72 cm². Calcola il suo perimetro.

**Soluzione.** Il rapporto delle aree è $72 : 50 = 1{,}44$, quindi $k = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$. Il perimetro, che è una lunghezza, si moltiplica per $k$, non per $k^2$: $2p' = 1{,}2 \cdot 30 = 36$ cm.

**ERRORE FREQUENTE**

«Ingrandisco una foto del 50%: l'area aumenta del 50%.» No: se i lati sono moltiplicati per $k = 1{,}5$, l'area è moltiplicata per $k^2 = 2{,}25$, cioè aumenta del 125%. Allo stesso modo una pizza di diametro 40 cm non equivale a due pizze di diametro 20 cm, ma a quattro: i cerchi sono tutti simili, e il rapporto delle aree è $2^2 = 4$.

**COLLEGAMENTI**

**Fotocopie e formati della carta.** I fogli della serie A (A3, A4, A5…) sono costruiti in modo che, piegando a metà un foglio lungo il lato maggiore, si ottenga un foglio **simile** al primo. Se i lati sono $l$ (lungo) e $w$ (corto), la metà ha lati $w$ e $l/2$, e la similitudine richiede $l : w = w : (l/2)$, cioè $l^2 = 2w^2$ e $l : w = \sqrt{2}$. Infatti un A4 misura 210 mm × 297 mm e $297 : 210 \approx 1{,}414$. Per questo la fotocopiatrice ingrandisce da A4 ad A3 con il 141%: il rapporto di similitudine è $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, e l'area raddoppia ($k^2 = 2$). La riduzione da A4 ad A5 usa il 71% ($1/\sqrt{2} \approx 0{,}71$), e l'area si dimezza.

## 4.5 La similitudine nel triangolo rettangolo

### 4.5.1 I teoremi di Euclide, di nuovo

Nel capitolo 3 abbiamo dimostrato i teoremi di Euclide con l'equivalenza delle figure. La similitudine ne dà una dimostrazione più breve. Sia $ABC$ un triangolo rettangolo in $A$, con l'altezza $AH$ relativa all'ipotenusa; usiamo le notazioni del capitolo 3: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = BH$, $q = HC$, $h = AH$ (Figura 4.4).

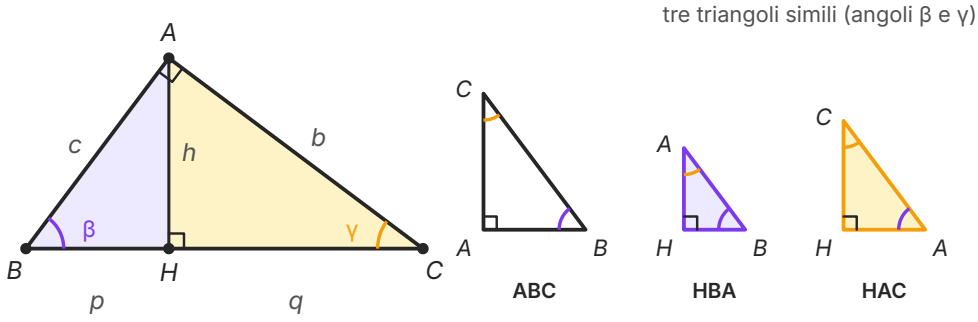



**Figura 4.4** L'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo rettangolo $ABC$ in due triangoli rettangoli, $HBA$ e $HAC$, simili tra loro e al triangolo dato. A destra i tre triangoli sono ridisegnati con la stessa orientazione: angolo retto in basso a sinistra, angolo β in basso a destra. Le misure sono quelle del triangolo di cateti 15 e 20: $p = 9$, $q = 16$, $h = 12$.

I triangoli $HBA$ e $ABC$ sono rettangoli (in $H$ e in $A$) e hanno l'angolo β in $B$ in comune: sono simili. Allo stesso modo $HAC \sim ABC$ (angolo γ in $C$ in comune), e quindi, per la proprietà transitiva, $HBA \sim HAC$. Scriviamo le proporzioni tra lati opposti ad angoli congruenti.

- Da $HBA \sim ABC$: $BH : AB = AB : BC$, cioè $p : c = c : a$, e $c^2 = a \cdot p$: **il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione** (primo teorema di Euclide). Allo stesso modo, da

$HAC \sim ABC$, $b^2 = a \cdot q$.

- Da $HBA \sim HAC$: $BH : AH = AH : HC$, cioè $p : h = h : q$, e $h^2 = p \cdot q$: **l'altezza è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti** (secondo teorema di Euclide).
- Sommando le due uguaglianze del primo punto: $b^2 + c^2 = a \cdot q + a \cdot p = a(p + q) = a \cdot a = a^2$. È il teorema di Pitagora, ottenuto questa volta con la similitudine.

Con il triangolo della Figura 4.4: $c^2 = 25 \cdot 9 = 225$, $c = 15$; $b^2 = 25 \cdot 16 = 400$, $b = 20$; $h^2 = 9 \cdot 16 = 144$, $h = 12$.

## 4.6 Applicazioni: la sezione aurea e le misure inaccessibili

### 4.6.1 La sezione aurea di un segmento

Dato un segmento $AB$, si chiama **sezione aurea** di $AB$ la parte $AC$ (con $C$ su $AB$) che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente:

$$AB : AC = AC : CB.$$

Il segmento intero sta alla parte maggiore come la parte maggiore sta alla minore. Euclide chiama questa divisione «in media ed estrema ragione» e la usa negli *Elementi* per costruire il pentagono regolare: in un pentagono regolare, infatti, il lato è la sezione aurea della diagonale. La sezione aurea si costruisce con riga e compasso (Figura 4.5).

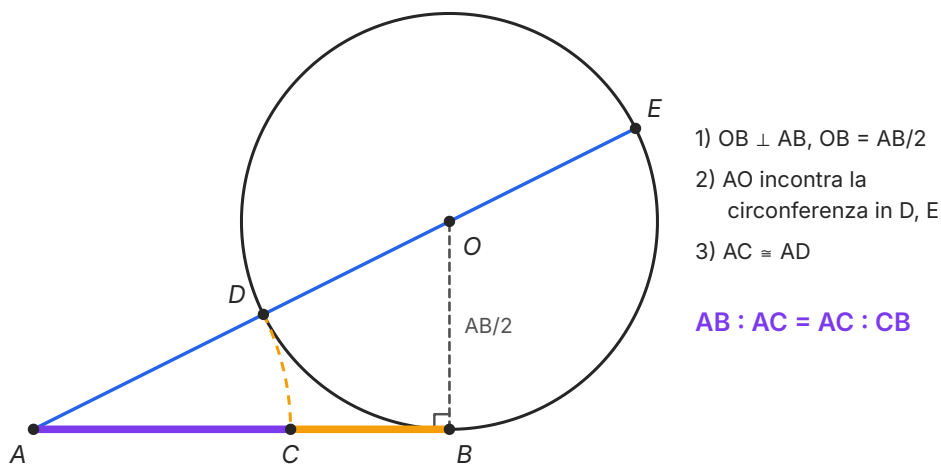



**Figura 4.5** Costruzione della sezione aurea $AC$ del segmento $AB$. La circonferenza di centro $O$ e raggio $AB/2$ è tangente ad $AB$ in $B$; la retta $AO$ la incontra in $D$ ed $E$, e l'arco di centro $A$ riporta $AD$ su $AB$.

1. In $B$ si traccia la perpendicolare ad $AB$ e su di essa si prende $O$ con $BO \cong AB/2$.

2. Si traccia la circonferenza di centro $O$ e raggio $OB$: è tangente in $B$ alla retta $AB$, perché $AB \perp OB$.
3. La retta $AO$ incontra la circonferenza in $D$ (il punto più vicino ad $A$) e in $E$.
4. Con il compasso si riporta $AD$ su $AB$: il punto $C$ con $AC \cong AD$ è quello cercato.

**Giustificazione.** Prendiamo $AB$ come unità di misura, cioè $AB = 1$; allora $BO = OD = \frac{1}{2}$. Il triangolo $ABO$ è rettangolo in $B$, e per il teorema di Pitagora $AO = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Quindi $AC = AD = AO - OD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $CB = 1 - AC = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Con il calcolo dei radicali del capitolo 2: $AC^2 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = AB \cdot CB$. Il quadrato del medio è uguale al prodotto degli estremi, quindi $AB : AC = AC : CB$. c.v.d.

La giustificazione ci ha dato anche il valore esatto del rapporto: $AC : AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, cioè la sezione aurea è circa il 61,8% del segmento. Il rapporto inverso, $AB : AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ (razionalizza per verificarlo), si chiama *numero aureo* e si indica con la lettera greca $\varphi$. È un numero irrazionale: un segmento e la sua sezione aurea sono grandezze incommensurabili. Sulla sezione aurea circolano molte affermazioni non dimostrate (che sia «la proporzione più bella», che la usassero sistematicamente pittori e architetti): la matematica garantisce le proprietà geometriche, non queste leggende.

### 4.6.2 Misure inaccessibili

Con i triangoli simili si misurano lunghezze che non si possono raggiungere con il metro. Il metodo più antico usa le ombre: in un dato istante i raggi del Sole che arrivano in un piccolo luogo sono, con ottima approssimazione, paralleli, quindi un oggetto verticale e la sua ombra formano con il raggio che passa per la sua cima un triangolo rettangolo, e tutti questi triangoli hanno lo stesso angolo $\alpha$ di inclinazione dei raggi: sono simili.

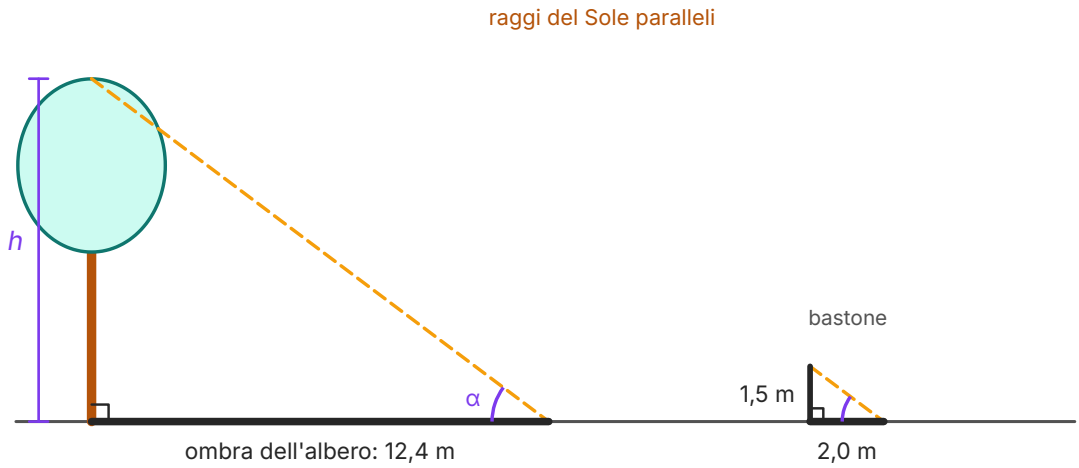



**Figura 4.6** L'altezza di un albero con l'ombra. Il bastone e l'albero sono verticali, i raggi del Sole paralleli: i due triangoli rettangoli hanno lo stesso angolo α e sono simili. Con i dati dell'esempio, $h = 9{,}3$ m.

**ESEMPIO SVOLTO**

**Problema.** Un bastone verticale alto 1,5 m proietta un'ombra di 2,0 m. Nello stesso istante l'ombra di un albero misura 12,4 m. Quanto è alto l'albero (Figura 4.6)?

**Soluzione.** I due triangoli sono simili, quindi altezze e ombre sono proporzionali: $h : 12{,}4 = 1{,}5 : 2{,}0$. Da qui $h = 12{,}4 \cdot 1{,}5 : 2{,}0 = 9{,}3$ m.

**Osservazione.** Non serve conoscere l'angolo α, né l'ora, né la posizione del Sole: basta che le due ombre siano misurate nello stesso momento e su un terreno orizzontale.

**APPROFONDIMENTO · TALETE E LA PIRAMIDE**

Talete di Mileto (VI secolo a.C.) è per la tradizione greca uno dei primi filosofi e matematici, ma di lui non ci è giunto nessuno scritto: ciò che sappiamo ce lo raccontano autori vissuti secoli dopo. Si racconta che misurò l'altezza delle piramidi d'Egitto con la loro ombra. Diogene Laerzio, che scrive nel III secolo d.C., riporta che Talete attese il momento in cui l'ombra di un uomo è lunga quanto la sua altezza; Plutarco ne attribuisce a Talete una versione con un bastone piantato all'estremità dell'ombra della piramide, che è il metodo dell'esempio svolto.

Non sappiamo se l'episodio sia vero, né se Talete abbia mai enunciato il teorema che in Italia porta il suo nome. Il nome stesso varia da un paese all'altro: in inglese e in tedesco, per esempio, «teorema di Talete» indica invece il fatto che un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto (lo studierai insieme alla circonferenza, negli anni successivi). La teoria delle proporzioni tra grandezze, compresi i rapporti incommensurabili, è esposta nel libro V degli *Elementi* di Euclide; la similitudine, il teorema della bisettrice e la divisione in media ed estrema ragione si trovano nel libro VI.

**COLLEGAMENTI**

**La camera oscura.** Una scatola chiusa con un forellino su una parete: la luce che parte da ogni punto di un oggetto passa per il foro e colpisce la parete opposta, dove si forma un'immagine capovolta. I raggi che passano per il foro formano due triangoli simili, opposti al vertice nel foro: se l'oggetto è alto $H$ e dista $D$ dal foro, e la scatola è profonda $d$, l'immagine è alta $h = H \cdot d : D$. Un albero alto 6 m, a 15 m da una scatola profonda 25 cm, dà un'immagine di $6 \cdot 0{,}25 : 15 = 0{,}1$ m, cioè 10 cm. La macchina fotografica e l'occhio funzionano con lo stesso principio, con una lente al posto del foro.

Ancora la similitudine è alla base delle **scale** delle carte geografiche e dei disegni tecnici. Una carta in scala 1 : 25 000 è una figura simile al territorio con rapporto $k = 1/25\,000$: 1 cm sulla carta corrisponde a 25 000 cm = 250 m sul terreno. Le aree però stanno nel rapporto $k^2$: 1 cm² sulla carta corrisponde a $25\,000^2 = 625\,000\,000$ cm², cioè 62 500 m².

## Con il computer

Un programma di geometria dinamica permette di «vedere» il teorema di Talete. Disegna tre rette parallele (costruisci la prima, poi le altre due con il comando «retta parallela») e due trasversali qualsiasi; segna i sei punti di intersezione e fai calcolare al programma i rapporti $AB : BC$ e $A'B' : B'C'$. Trascinando una trasversale o spostando una parallela, le lunghezze cambiano ma i due rapporti restano uguali tra loro: è l'invariante che il teorema garantisce. Allo stesso modo puoi costruire un triangolo, la bisettrice di un angolo e i rapporti del teorema della bisettrice.

**SINTESI**

- Il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero reale positivo: razionale se sono commensurabili (hanno un sottomultiplo comune), irrazionale se sono incommensurabili, come lato e diagonale del quadrato (rapporto $\sqrt{2}$).
- In una proporzione $a : b = c : d$ il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi; valgono le proprietà del permutare, invertire, comporre e scomporre. In una proporzione continua $a : b = b : c$, b è medio proporzionale: $b^2 = ac$.
- Due classi di grandezze sono direttamente proporzionali se e solo se a grandezze congruenti corrispondono grandezze congruenti e alla somma corrisponde la somma (criterio di proporzionalità).
- Teorema di Talete: un fascio di parallele tagliato da due trasversali determina segmenti proporzionali, $AB : CD = A'B' : C'D'$. Il piccolo teorema di Talete è il caso dei segmenti congruenti.
- Una parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due in parti proporzionali; vale anche il teorema inverso. La bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.
- Due poligoni sono simili se hanno gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti proporzionali; il rapporto costante è il rapporto di similitudine k. Le due condizioni sono indipendenti.
- Criteri di similitudine dei triangoli: AA (due angoli congruenti), LAL (due lati in proporzione e l'angolo compreso congruente), LLL (tre lati in proporzione).
- In figure simili i perimetri e tutti i segmenti corrispondenti stanno nel rapporto k, le aree nel rapporto $k^2$, i volumi dei solidi simili nel rapporto $k^3$.
- L'altezza relativa all'ipotenusa divide un triangolo rettangolo in due triangoli simili al dato: ne seguono $c^2 = a \cdot p$, $h^2 = p \cdot q$ e il teorema di Pitagora.
- La sezione aurea AC di un segmento AB verifica $AB : AC = AC : CB$ e si costruisce con riga e compasso; con il teorema di Pitagora si trova $AC = AB \cdot (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618 \cdot AB$.
- Con i triangoli simili si misurano altezze e distanze inaccessibili (ombre, specchi, camera oscura) e si leggono le scale delle carte.

## ESERCIZI

### Comprendere

1. ● Due triangoli hanno due angoli rispettivamente congruenti. Allora sono sicuramente:
   **A.** congruenti
   **B.** simili
   **C.** equivalenti
   **D.** isoperimetrici

2. ● Due poligoni sono simili con rapporto di similitudine 3. Il rapporto tra le loro aree è:
   **A.** 3
   **B.** 6
   **C.** 9
   **D.** 27

3. ●● Nel triangolo $ABC$ si ha $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 10$. La bisettrice dell'angolo in $A$ incontra $BC$ in $D$. Allora $BD$ misura:
   **A.** 4
   **B.** 5
   **C.** 6
   **D.** 3,6

4. ● Quale coppia di grandezze è formata da grandezze incommensurabili?
   **A.** il lato e il perimetro di un quadrato
   **B.** il raggio e il diametro di una circonferenza
   **C.** la base e l'altezza di un rettangolo di lati 2 cm e 3 cm
   **D.** il lato e la diagonale di un quadrato

5. ●● Una fotocopiatrice ingrandisce un disegno al 150%. L'area del disegno è moltiplicata per:
   **A.** 1,5
   **B.** 2
   **C.** 3
   **D.** 2,25

6. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Due rettangoli sono sempre simili.
   b) Due quadrati sono sempre simili.
   c) Due triangoli isosceli con gli angoli al vertice congruenti sono simili.
   d) Due rombi con i lati in proporzione sono simili.
   e) Due triangoli equilateri sono simili.
   f) Se due triangoli sono simili con rapporto 2, le loro altezze corrispondenti stanno nel rapporto 4.

7. ● Completa.
   a) Due grandezze omogenee sono commensurabili se _____ .
   b) Il teorema di Talete afferma che un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali determina su di esse _____ .
   c) La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali _____ .
   d) In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è _____ tra _____ .

**Calcolare**

8. ● Calcola il rapporto tra: a) un segmento di 18 cm e uno di 2,4 dm; b) la diagonale e il lato di un quadrato; c) l'altezza e il lato di un triangolo equilatero; d) il perimetro di un quadrato e il suo lato. Quali coppie sono di grandezze commensurabili?

9. ● Tre rette parallele $a$, $b$, $c$ tagliano la trasversale $t$ in $A$, $B$, $C$ e la trasversale $t'$ in $A'$, $B'$, $C'$. a) Se $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm e $A'B' = 8$ cm, quanto misura $B'C'$? b) Se $AC = 20$ cm, $A'B' = 6$ cm e $B'C' = 10$ cm, quanto misurano $AB$ e $BC$?

10. ● Nel triangolo $ABC$ la retta $DE$ è parallela a $BC$, con $D$ su $AB$ ed $E$ su $AC$. Sapendo che $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm, $AE = 5$ cm e $BC = 15$ cm, calcola $EC$ e $DE$.

11. ●● Nel triangolo $ABC$ il punto $D$ sta su $AB$ ed $E$ su $AC$. Stabilisci se $DE \parallel BC$: a) $AD = 3$, $DB = 5$, $AE = 4{,}5$, $EC = 7{,}5$; b) $AD = 4$, $DB = 6$, $AE = 5$, $EC = 8$.

12. ●● Un triangolo ha i lati $AB = 12$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 15$ cm. a) La bisettrice dell'angolo in $A$ incontra $BC$ in $D$: calcola $BD$ e $DC$. b) La bisettrice dell'angolo in $B$ incontra $AC$ in $E$: calcola $AE$ ed $EC$.

13. ● Un triangolo ha i lati di 6 cm, 8 cm e 12 cm. Un triangolo simile ha il lato maggiore di 18 cm. Calcola il rapporto di similitudine, gli altri due lati e i due perimetri.

14. ●● Stabilisci se i due triangoli sono simili e, in caso affermativo, indica il criterio e il rapporto di similitudine. a) Lati 4, 6, 8 e lati 6, 9, 12. b) Lati 5, 7, 9 e lati 10, 14, 20. c) Un triangolo con angoli di 40° e 75°, un altro con angoli di 75° e 65°. d) $AB = 6$, $AC = 9$, $\angle A = 50°$; $A'B' = 4$, $A'C' = 6$, $\angle A' = 50°$.

15. ●● Nel triangolo $ABC$, rettangolo in $A$, l'altezza $AH$ divide l'ipotenusa in $BH = 9$ cm e $HC = 16$ cm. Usando i triangoli simili calcola $AH$, $AB$, $AC$ e verifica il teorema di Pitagora.

16. ●● a) Due poligoni simili hanno aree di 50 cm$^2$ e 72 cm$^2$; il primo ha perimetro 30 cm. Calcola il perimetro del secondo. b) Un triangolo ha area 48 cm$^2$. Una parallela a un lato stacca dal vertice opposto un triangolo i cui lati sono un quarto di quelli del triangolo dato. Calcola l'area del triangolo staccato e quella del trapezio che rimane.

17. ●● Disegna un segmento AB di 10 cm e costruisci con riga e compasso la sua sezione aurea AC. Misura AC e CB al millimetro e verifica, con la calcolatrice, che $AC^2$ e $AB \cdot CB$ sono quasi uguali. Perché non sono esattamente uguali?

### Dimostrare e argomentare

18. ● Dimostra che due triangoli equilateri sono sempre simili, e che due triangoli rettangoli isosceli sono sempre simili.

19. ●● Nel trapezio $ABCD$, di basi $AB$ e $DC$, le diagonali si incontrano in $O$. Dimostra che i triangoli $ABO$ e $CDO$ sono simili e che $AO : OC = BO : OD = AB : DC$.

20. ●● Siano $M$ ed $N$ i punti medi dei lati $AB$ e $AC$ del triangolo $ABC$. Dimostra che il triangolo $AMN$ è simile ad $ABC$ con rapporto ½ e che la sua area è un quarto di quella di $ABC$.

21. ●● Trova l'errore. a) «Due rettangoli hanno tutti gli angoli retti, quindi congruenti: per il primo criterio di similitudine sono simili.» b) «Se raddoppio il lato di un quadrato, l'area raddoppia.»

22. ●● In un triangolo $ABC$ rettangolo in $A$, con l'altezza $AH$, dimostra con la similitudine che $AH \cdot BC = AB \cdot AC$. Che cosa rappresentano i due membri in termini di area?

23. ●● Dimostra che, se due triangoli sono simili con rapporto $k$, le mediane corrispondenti stanno nel rapporto $k$.

24. ●●● Dimostra il secondo criterio di similitudine. *Traccia:* se $A'B' : AB = A'C' : AC$ e $\angle A \cong \angle A'$, con $A'B' < AB$, prendi $D$ su $AB$ ed $E$ su $AC$ con $AD \cong A'B'$, $AE \cong A'C'$; usa il teorema inverso della parallela a un lato e poi il primo criterio.

### Problemi

25. ● Un palo verticale alto 2 m proietta un'ombra di 1,6 m. Nello stesso momento l'ombra di un palazzo è lunga 14,4 m. Quanto è alto il palazzo?

26. ●● Una carta escursionistica è in scala 1 : 25 000. a) Due rifugi distano sulla carta 6,4 cm: qual è la distanza reale in linea d'aria, in km? b) Un lago occupa sulla carta 3,2 $cm^2$: qual è la sua area reale in $km^2$?

27. ●● Un foglio A4 misura 21,0 cm × 29,7 cm. a) Verifica che, tagliandolo a metà lungo il lato maggiore, si ottiene un rettangolo (A5) approssimativamente simile all'A4, e calcola il rapporto di similitudine. b) Con quale percentuale si deve ridurre una fotocopia da A4 ad A5? c) Di quanto si riduce l'area?

28. ●● Una camera oscura è profonda 30 cm. Una persona alta 1,80 m si trova a 4,5 m dal foro. Quanto è alta la sua immagine sulla parete di fondo? A quale distanza dovrebbe mettersi perché l'immagine fosse alta 9 cm?

29. ●● Per misurare l'altezza di una torre Luca appoggia uno specchietto per terra, a 45 m dalla base della torre, e si allontana dallo specchio lungo la stessa retta fino a vedervi riflessa la cima: in quel momento è a 2 m dallo specchio, e i suoi occhi sono a 1,6 m da terra. Sapendo che il raggio luminoso si riflette formando con il pavimento angoli congruenti, calcola l'altezza della torre.

30. ●●● Il plastico di un edificio è in scala 1 : 200. a) Il plastico è alto 9 cm: quanto è alto l'edificio? b) Una facciata del plastico ha un'area di 54 $cm^2$: qual è l'area reale, in $m^2$? c) Il volume del plastico è 810 $cm^3$: qual è il volume reale, in $m^3$?

### Verso la verifica

31. ●● Nel triangolo $ABC$ si ha $AB = 10$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. Sul lato $AB$ prendi $D$ con $AD = 4$ cm e conduci da $D$ la parallela a $BC$, che incontra $AC$ in $E$. Calcola $AE$, $DE$, il perimetro del triangolo $ADE$ e il rapporto tra l'area di $ADE$ e quella di $ABC$.

32. ●●● **Sfida.** Un triangolo ha la base di 12 cm e l'altezza relativa di 8 cm. Si vuole inscrivere nel triangolo un quadrato con un lato sulla base e gli altri due vertici sugli altri due lati. a) Dimostra che il lato superiore del quadrato stacca un triangolo simile a quello dato. b) Calcola il lato del quadrato. c) Quale frazione dell'area del triangolo occupa il quadrato?

## PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*: il libro V (la teoria delle proporzioni tra grandezze) e il libro VI (i triangoli simili, il teorema della bisettrice, la divisione in media ed estrema ragione).
- [LIV] Livio, *La sezione aurea*: la storia del rapporto aureo, separando con cura i fatti matematici dalle leggende.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: Talete, la scoperta delle grandezze incommensurabili e la teoria delle proporzioni di Eudosso.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: molti dei suoi esempi si risolvono cercando due triangoli simili.

# Glossario del capitolo

**Criteri di similitudine**
Condizioni sufficienti perché due triangoli siano simili: AA, LAL, LLL.

**Fascio di rette parallele**
L'insieme delle rette di un piano parallele a una retta data.

**Grandezze commensurabili**
Grandezze omogenee che hanno un sottomultiplo comune; il loro rapporto è un numero razionale.

**Grandezze direttamente proporzionali**
Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca in cui il rapporto tra due grandezze è uguale al rapporto tra le corrispondenti.

**Grandezze omogenee**
Grandezze che si possono confrontare e sommare tra loro, come due segmenti o due superfici.

**Medio proporzionale**
Il termine b della proporzione continua a : b = b : c; vale $b^2 = ac$.

**Poligoni simili**
Poligoni con gli angoli corrispondenti congruenti e i lati corrispondenti proporzionali; si scrive F ~ F′.

**Proporzione**
Uguaglianza di due rapporti, A : B = C : D; il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

**Rapporto di similitudine**
Il rapporto costante k tra i lati corrispondenti di due poligoni simili; i perimetri stanno nel rapporto k, le aree nel rapporto $k^2$.

**Rapporto tra grandezze**
Numero reale positivo che indica quante volte una grandezza contiene un'altra omogenea; è irrazionale per grandezze incommensurabili.

**Scala**
Il rapporto di similitudine tra una carta o un disegno e la realtà, per esempio 1 : 25 000.

**Sezione aurea**
La parte AC di un segmento AB media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente: AB : AC = AC : CB.

**Teorema della bisettrice**
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

**Teorema di Talete**
Un fascio di parallele tagliato da due trasversali determina su di esse segmenti proporzionali.

# Soluzioni

**1.** B. Per il primo criterio (AA) i triangoli sono simili; non sono necessariamente congruenti, né equivalenti.

**2.** C. Le aree stanno nel rapporto $k^2 = 9$.

**3.** A. $BD : DC = 6 : 9$; $BD = 10 \cdot 6 : 15 = 4$.

**4.** D. Il rapporto tra diagonale e lato è $\sqrt{2}$, irrazionale. Gli altri rapporti sono 4, 2 e 3/2 (oppure 2/3), razionali.

**5.** D. $k = 1{,}5$, $k^2 = 2{,}25$.

**6.** a) F: due rettangoli hanno gli angoli congruenti, ma i lati possono non essere in proporzione ($1 \times 2$ e $1 \times 3$). b) V. c) V: gli angoli alla base sono congruenti (ciascuno è (180° − angolo al vertice) : 2), criterio AA. d) F: i lati sono in proporzione, ma gli angoli possono essere diversi. e) V. f) F: le altezze stanno nel rapporto 2, le aree nel rapporto 4.

**7.** a) hanno un sottomultiplo comune (una grandezza contenuta un numero intero di volte in entrambe). b) due classi di segmenti direttamente proporzionali (segmenti corrispondenti in proporzione). c) agli altri due lati. d) media proporzionale; le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

**8.** a) $18 : 24 = 3/4$ (commensurabili). b) $\sqrt{2}$ (incommensurabili). c) $h : l = \sqrt{3}/2$ (incommensurabili). d) 4 (commensurabili).

**9.** a) $AB : BC = A'B' : B'C'$: $6 : 9 = 8 : B'C'$, $B'C' = 12$ cm. b) $A'C' = 16$ cm; $AB : AC = A'B' : A'C'$: $AB = 20 \cdot 6 : 16 = 7{,}5$ cm, $BC = 20 - 7{,}5 = 12{,}5$ cm.

**10.** $AD : DB = AE : EC$: $4 : 6 = 5 : EC$, $EC = 7{,}5$ cm. $ADE \sim ABC$ con $k = AD : AB = 4 : 10 = 0{,}4$: $DE = 0{,}4 \cdot 15 = 6$ cm.

**11.** a) $3 : 5 = 0{,}6$ e $4{,}5 : 7{,}5 = 0{,}6$: le parti sono proporzionali, quindi $DE \parallel BC$ (teorema inverso). b) $4 : 6 \approx 0{,}667$ e $5 : 8 = 0{,}625$: i rapporti sono diversi, quindi $DE$ non è parallela a $BC$ (se lo fosse, per il corollario i rapporti sarebbero uguali).

**12.** a) $BD : DC = 12 : 8$: $BD = 15 \cdot 12 : 20 = 9$ cm, $DC = 6$ cm. b) $AE : EC = BA : BC = 12 : 15$: $AE = 8 \cdot 12 : 27 = 32/9$ cm $\approx 3{,}56$ cm, $EC = 8 \cdot 15 : 27 = 40/9$ cm $\approx 4{,}44$ cm.

**13.** Rapporto $18 : 12 = 1{,}5$. Lati $6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm e $8 \cdot 1{,}5 = 12$ cm. Perimetri 26 cm e 39 cm ($39 = 1{,}5 \cdot 26$).

**14.** a) Sì, LLL: $6/4 = 9/6 = 12/8 = 1{,}5$. b) No: $10/5 = 14/7 = 2$, ma $20/9 \neq 2$. c) Sì, AA: il terzo angolo del primo è $180° - 40° - 75° = 65°$, quindi entrambi hanno angoli di 75° e 65° (e 40°); il rapporto non si può determinare senza conoscere un lato. d) Sì, LAL: $A'B' : AB = 4 : 6 = 2/3$ e $A'C' : AC = 6 : 9 = 2/3$ con angolo compreso congruente; $k = 2/3$ (oppure 3/2, dal secondo al primo).

**15.** Ipotenusa $BC = 25$ cm. Da $HBA \sim HAC$: $AH^2 = BH \cdot HC = 144$, $AH = 12$ cm. Da $HBA \sim ABC$: $AB^2 = BC \cdot BH = 225$, $AB = 15$ cm. Da $HAC \sim ABC$: $AC^2 = BC \cdot HC = 400$, $AC = 20$ cm. Verifica: $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$.

**16.** a) $k^2 = 72 : 50 = 1{,}44$, $k = 1{,}2$; perimetro $1{,}2 \cdot 30 = 36$ cm. b) $k = 1/4$, area $48 : 16 = 3$ cm$^2$; trapezio $48 - 3 = 45$ cm$^2$.

**17.** Dalla costruzione si misurano $AC \approx 6{,}2$ cm e $CB \approx 3{,}8$ cm (il valore esatto di $AC$ è circa 6,18 cm). Con le misure arrotondate: $AC^2 \approx 38{,}4$ e $AB \cdot CB \approx 38$: quasi uguali. Non coincidono esattamente perché le misure fatte con il righello sono approssimate (al millimetro) e il disegno ha errori inevitabili; la proporzione $AB : AC = AC : CB$ vale per i segmenti esatti.

**18.** Due triangoli equilateri hanno tutti gli angoli di 60°: per il criterio AA sono simili. Due triangoli rettangoli isosceli hanno angoli di 90°, 45° e 45°: anch'essi sono simili per AA.

**19.** $AB \parallel DC$: $\angle OAB \cong \angle OCD$ e $\angle OBA \cong \angle ODC$ (alterni interni rispetto alle parallele tagliate dalle diagonali); inoltre gli angoli in $O$ sono opposti al vertice. Per AA, $ABO \sim CDO$ con $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$. I lati opposti ad

angoli congruenti sono proporzionali: $AO : CO = BO : DO = AB : CD$.

**20.** Per il teorema dei punti medi ($MN \parallel BC$), oppure direttamente: $AM : AB = AN : AC = 1/2$ e l'angolo in $A$ è comune, quindi $AMN \sim ABC$ per LAL con $k = 1/2$. Le aree stanno nel rapporto $k^2 = 1/4$.

**21.** a) Il primo criterio vale per i **triangoli**; per i poligoni con più di tre lati gli angoli congruenti non bastano: un rettangolo $1 \times 2$ e uno $1 \times 3$ non sono simili. b) L'area si moltiplica per $k^2 = 4$: un quadrato di lato 2 ha area 4, quello di lato 1 ha area 1.

**22.** $HAC \sim ABC$ (angolo in $C$ comune, entrambi rettangoli): $AH : AB = AC : BC$, quindi $AH \cdot BC = AB \cdot AC$. Entrambi i membri sono il doppio dell'area del triangolo: base $BC$ per altezza $AH$, oppure cateto per cateto.

**23.** Siano $ABC \sim A'B'C'$ con rapporto $k$, e $AM$, $A'M'$ le mediane relative a $BC$ e $B'C'$. Allora $B'M' = B'C'/2 = k \cdot BC/2 = k \cdot BM$, e $A'B' = k \cdot AB$; inoltre $\angle B \cong \angle B'$. Per LAL $ABM \sim A'B'M'$ con rapporto $k$, quindi $A'M' = k \cdot AM$.

**24.** Con $D$ ed $E$ come nella traccia, $ADE \cong A'B'C'$ per il primo criterio di congruenza ($AD \cong A'B'$, $AE \cong A'C'$, $\angle A \cong \angle A'$). L'ipotesi diventa $AD : AB = AE : AC$; scomponendo, $AD : DB = AE : EC$, e per il teorema inverso $DE \parallel BC$. Allora $\angle ADE \cong \angle ABC$ (corrispondenti) e l'angolo in $A$ è comune: $ADE \sim ABC$ per AA. Poiché $A'B'C' \cong ADE$, anche $A'B'C' \sim ABC$.

**25.** $h : 14{,}4 = 2 : 1{,}6$: $h = 14{,}4 \cdot 2 : 1{,}6 = 18$ m.

**26.** a) $6{,}4 \cdot 25\,000 = 160\,000$ cm $= 1{,}6$ km. b) Il rapporto delle aree è $25\,000^2 = 625\,000\,000$: $3{,}2 \cdot 625\,000\,000 = 2\,000\,000\,000$ cm$^2$ $= 200\,000$ m$^2$ $= 0{,}2$ km$^2$.

**27.** a) L'A5 misura 14,85 cm × 21,0 cm. Rapporti tra i lati: $29{,}7 : 21{,}0 \approx 1{,}414$ e $21{,}0 : 14{,}85 \approx 1{,}414$: i rapporti coincidono (a meno degli arrotondamenti delle misure), quindi i rettangoli sono simili. Il rapporto di similitudine da A4 ad A5 è $21{,}0 : 29{,}7 \approx 0{,}707$ (cioè $1/\sqrt{2}$). b) Circa il 71%. c) L'area si moltiplica per $k^2 \approx 0{,}5$: si dimezza (623,7 cm$^2$ e 311,85 cm$^2$).

**28.** Immagine: $1{,}80 \cdot 0{,}30 : 4{,}5 = 0{,}12$ m $= 12$ cm. Per un'immagine di 9 cm: $1{,}80 \cdot 0{,}30 : D = 0{,}09$, quindi $D = 6$ m.

**29.** I due triangoli rettangoli (Luca–specchio e torre–specchio) hanno gli angoli in corrispondenza dello specchio congruenti: sono simili. $h : 45 = 1{,}6 : 2$, quindi $h = 45 \cdot 1{,}6 : 2 = 36$ m.

**30.** $k = 200$. a) $9 \cdot 200 = 1800$ cm $= 18$ m. b) $54 \cdot 200^2 = 2\,160\,000$ cm$^2$ $= 216$ m$^2$. c) $810 \cdot 200^3 = 6\,480\,000\,000$ cm$^3$ $= 6480$ m$^3$.

**31.** $ADE \sim ABC$ con $k = 4 : 10 = 0{,}4$. $AE = 0{,}4 \cdot 15 = 6$ cm, $DE = 0{,}4 \cdot 20 = 8$ cm. Perimetro $4 + 6 + 8 = 18$ cm ($= 0{,}4 \cdot 45$). Rapporto delle aree $k^2 = 0{,}16$.

**32.** a) Il lato superiore del quadrato è parallelo alla base, quindi stacca un triangolo simile (AA: angolo al vertice comune, angoli corrispondenti). b) Sia $x$ il lato. Il triangolo staccato ha base $x$ e altezza $8 - x$; le altezze stanno come le basi: $x : 12 = (8 - x) : 8$, $8x = 96 - 12x$, $x = 4{,}8$ cm. c) Area del quadrato $4{,}8^2 = 23{,}04$ cm$^2$, del triangolo $12 \cdot 8 : 2 = 48$ cm$^2$: $23{,}04 : 48 = 0{,}48$, cioè il 48% (12/25).