CAPITOLO

3

Equivalenza delle superfici e i teoremi di Pitagora e di Euclide

Ritaglia, sposta, ricomponi: la carta resta la stessa. Da questa osservazione quasi infantile nasce il teorema più famoso della geometria.

OBIETTIVI

1. Usare l'equivalenza delle superfici e le sue proprietà, distinguendola dalla congruenza.
2. Dimostrare i teoremi di equivalenza tra parallelogrammi, triangoli, trapezi e poligoni circoscritti, e ricavarne le formule delle aree.
3. Enunciare e dimostrare i due teoremi di Euclide, il teorema di Pitagora e il suo inverso, e applicarli in forma numerica.
4. Risolvere problemi sui triangoli rettangoli, sui triangoli con angoli di 45°, 30° e 60° e problemi geometrici con equazioni.
5. Collegare il teorema di Pitagora ai numeri irrazionali e alle terne pitagoriche.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 L'equivalenza delle superfici 2
3.2 I teoremi di equivalenza 3
3.3 Dall'equivalenza alle aree 7
3.4 I teoremi di Euclide e di Pitagora 8
3.5 Applicazioni del teorema di Pitagora 14
3.6 Pitagora e i numeri 17

Matematica 2 · Parte II · Geometria del piano · versione 1.0
Capitolo 3: Equivalenza delle superfici e i teoremi di Pitagora e di Euclide · pagine 65–88 del volume completo · estratto per lo studio

Prendi un foglio quadrato, taglialo lungo una diagonale e ricomponi i due pezzi: puoi ottenere un triangolo più grande o un parallelogramma, figure che non si possono sovrapporre al quadrato di partenza. Eppure nessuno dubita che la carta sia «la stessa»: non ne hai aggiunta né tolta. Questo capitolo dà un nome preciso a questa idea, l'**equivalenza** delle superfici, e la usa per ottenere senza formule magiche le aree dei poligoni che conosci dalla scuola media.

Lo stesso strumento porta a uno dei risultati più celebri della matematica, il **teorema di Pitagora**, insieme ai due teoremi di Euclide sul triangolo rettangolo. Li dimostreremo come li dimostrava Euclide, spostando e confrontando figure, e poi li tradurremo in uguaglianze tra numeri. Alla fine scopriremo che il teorema di Pitagora non è soltanto un fatto geometrico: costruisce sulla retta i numeri irrazionali del capitolo 1 e apre una domanda di aritmetica, quella delle terne pitagoriche, che ha appassionato i matematici per quattromila anni.

3.1 L'equivalenza delle superfici

3.1.1 Estensione ed equivalenza

Ogni figura piana limitata occupa una certa porzione di piano: la sua **estensione superficiale** (o semplicemente *estensione*). Come per la congruenza in *Matematica 1*, non diamo una definizione di estensione: la consideriamo un **concetto primitivo**, del quale fissiamo le proprietà con alcuni postulati. Due figure con la stessa estensione si dicono **equivalenti** (o *equiestese*) e si scrive $F \doteq G$.

Le proprietà che assumiamo sono quelle che l'esperienza del foglio di carta suggerisce:

- l'equivalenza è **riflessiva** ($F \doteq F$), **simmetrica** (se $F \doteq G$ allora $G \doteq F$) e **transitiva** (se $F \doteq G$ e $G \doteq K$ allora $F \doteq K$): è una relazione di equivalenza, nel senso di *Matematica 1*;
- **figure congruenti sono equivalenti**;
- **somme** di figure a due a due equivalenti sono equivalenti, purché gli addendi non abbiano punti interni in comune; allo stesso modo sono equivalenti le **differenze** di figure equivalenti;
- una figura non è equivalente a una sua parte propria (**postulato di De Zolt**, vedi il box qui sotto).

Qui la **somma** di due figure che hanno in comune al più dei punti del contorno è la figura formata dalla loro unione; la **differenza** tra una figura e una sua parte è ciò che rimane togliendo la parte. Per esempio, se un poligono P è diviso da un segmento nei poligoni P_1 e P_2, si scrive $P = P_1 + P_2$.

3.1.2 Figure equiscomponibili

Due poligoni si dicono **equiscomponibili** se si possono dividere nello stesso numero di parti a due a due congruenti. È esattamente quello che succede nel gioco cinese del tangram: con gli stessi sette pezzi si compongono un quadrato, un gatto, una barca. Dalle proprietà precedenti segue subito che **due figure equiscomponibili sono equivalenti**: le loro parti sono congruenti, quindi equivalenti, e le somme di parti equivalenti sono equivalenti.

Il viceversa del secondo postulato invece **non** vale: due figure equivalenti non sono necessariamente congruenti. Un rettangolo di lati 2 cm e 8 cm e un quadrato di lato 4 cm sono equivalenti (basta tagliare il rettangolo a metà e affiancare le due metà per ottenere il quadrato), ma non si sovrappongono. L'equivalenza è una relazione più debole della congruenza: $F \cong G$ implica $F \doteq G$, non il contrario.

ERRORE FREQUENTE

Equivalente non vuol dire congruente, e non vuol dire isoperimetrico. «I due rettangoli hanno lo stesso perimetro, quindi sono equivalenti» è falso. Un rettangolo di lati 1 cm e 9 cm e un quadrato di lato 5 cm hanno entrambi perimetro 20 cm, ma il primo è formato da 9 quadratini di lato 1 cm, il secondo da 25. Viceversa, il rettangolo 2×8 e il quadrato 4×4 sono equivalenti ma hanno perimetri diversi (20 cm e 16 cm). Estensione e perimetro sono grandezze diverse, e vanno tenute distinte anche nei simboli: $\cong$ per la congruenza, $\doteq$ per l'equivalenza.

APPROFONDIMENTO · IL POSTULATO DI DE ZOLT

Che una figura non possa essere equivalente a una sua parte sembra ovvio, ma non discende dagli altri postulati: per questo va assunto esplicitamente. Prende il nome dal matematico italiano Antonio De Zolt, che lo pose a fondamento della teoria dell'equivalenza dei poligoni nella seconda metà dell'Ottocento. Senza di esso potremmo dimostrare che due figure sono equivalenti, ma non potremmo escludere che una figura sia equivalente a un'altra più piccola contenuta in essa.

Nello stesso secolo fu dimostrato un risultato sorprendente, che porta i nomi di Wallace, Bolyai e Gerwien: **due poligoni equivalenti sono sempre equiscomponibili**. Con un numero finito di tagli rettilinei si può sempre trasformare un poligono in qualsiasi altro poligono della stessa estensione, come in un tangram su misura.

3.2 I teoremi di equivalenza

I teoremi di questo paragrafo trasformano un poligono in un altro equivalente, più semplice. Ricorda che l'**altezza di un parallelogramma** rispetto a una base è la distanza tra la retta della

base e la retta del lato opposto: due parallelogrammi con la stessa base e la stessa altezza hanno quindi i lati opposti alla base sulla stessa retta parallela.

3.2.1 Parallelogrammi e rettangoli

IN SINTESI

Teorema 1. Due parallelogrammi che hanno basi congruenti e altezze congruenti sono equivalenti.

Ipotesi: $ABCD$, $ABEF$ parallelogrammi con la base AB in comune e D, C, F, E sulla stessa retta $r \parallel AB$. **Tesi:** $ABCD \doteq ABEF$.

Se le basi sono soltanto congruenti, possiamo prima spostare uno dei due parallelogrammi con un movimento rigido in modo che le basi coincidano: figure congruenti sono equivalenti, quindi basta dimostrare il caso della Figura 3.1, con la base in comune.

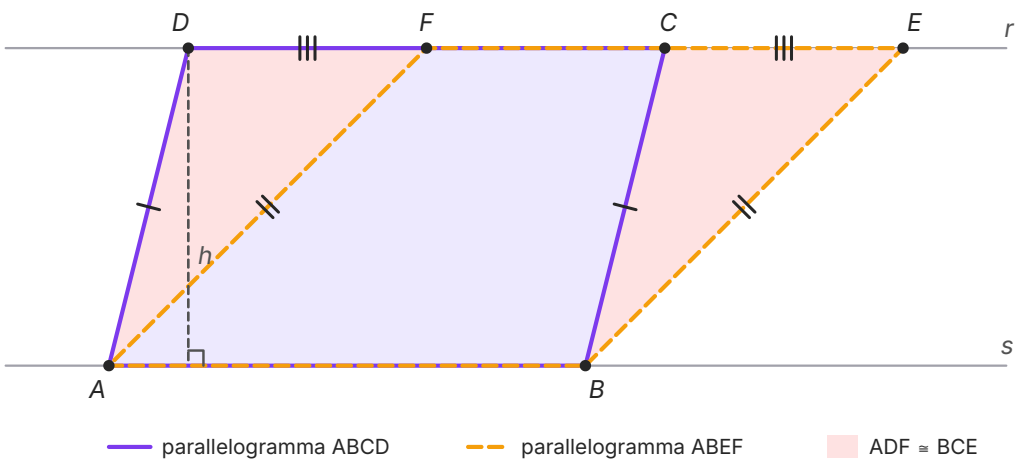


Figura 3.1 Due parallelogrammi con la stessa base AB e i lati opposti sulla stessa parallela r: hanno la stessa altezza h. Il trapezio $ABED$ meno il triangolo BCE dà $ABCD$; lo stesso trapezio meno il triangolo ADF dà $ABEF$. I due triangoli rossi sono congruenti (lati con lo stesso numero di tacche).

Dimostrazione. Consideriamo i triangoli ADF e BCE. Si ha $AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$, e $AF \cong BE$ perché lati opposti di $ABEF$. Inoltre $DC \cong AB \cong FE$; nella situazione della figura i segmenti DF e CE si ottengono togliendo a questi due segmenti congruenti la parte comune FC, dunque $DF \cong CE$ (se F cadesse oltre C, si aggiungerebbe invece a entrambi il segmento CF, con la stessa conclusione). Per il terzo criterio i triangoli ADF e BCE sono congruenti, quindi equivalenti. Ora il parallelogramma $ABCD$ è la differenza tra il trapezio $ABED$ e il trian-

golo *BCE*, mentre *ABEF* è la differenza tra lo stesso trapezio e il triangolo *ADF*: differenze di figure equivalenti sono equivalenti. c.v.d.

Poiché un rettangolo è un parallelogramma particolare, si ha subito il **corollario**: *ogni parallelogramma è equivalente al rettangolo che ha la stessa base e la stessa altezza*. È il passaggio che, a parole, fa chi «raddrizza» un parallelogramma tagliando un triangolo da un lato e incollandolo dall'altro.

3.2.2 Triangoli, trapezi, poligoni circoscritti

IN SINTESI

Teorema 2. Un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma che ha base congruente e altezza congruente alle sue. Di conseguenza, due triangoli con basi e altezze congruenti sono equivalenti.

Teorema 3. Un trapezio è equivalente a un triangolo che ha per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza.

Teorema 4. Un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente a un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.

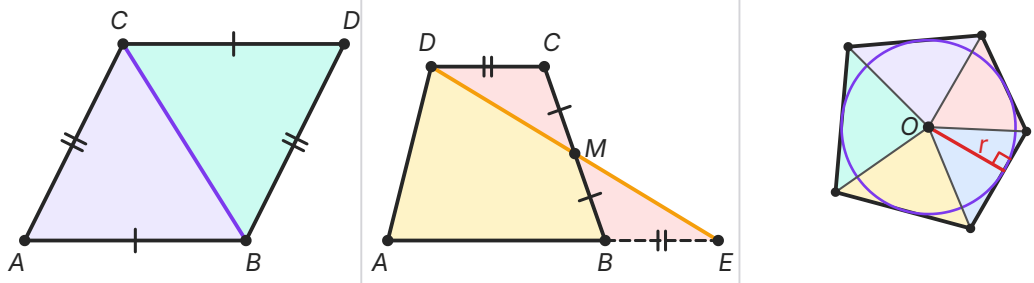


Figura 3.2 A sinistra, la diagonale *BC* divide il parallelogramma *ABDC* in due triangoli congruenti (teorema 2). Al centro, il punto medio *M* del lato *BC* e il prolungamento di *DM* trasformano il trapezio *ABCD* nel triangolo equivalente *AED*: i triangoli rossi *DCM* ed *EBM* sono congruenti (teorema 3). A destra, un pentagono circoscritto diviso in cinque triangoli di vertice *O* e altezza *r* (teorema 4).

Dimostrazione del teorema 2. Dato il triangolo *ABC*, tracciamo da *C* la parallela ad *AB* e da *B* la parallela ad *AC*; si incontrano in *D* (Figura 3.2, a sinistra). Il quadrilatero *ABDC* è un parallelogramma con la stessa base e la stessa altezza del triangolo, e la diagonale *BC* lo divide in due

triangoli congruenti ($ABC \cong DCB$, come visto in *Matematica 1*). Il triangolo è quindi equivalente a metà di questo parallelogramma e, per il teorema 1, a metà di qualsiasi parallelogramma con base e altezza congruenti. c.v.d.

Il teorema 2 ha una conseguenza che sorprende chi la vede la prima volta: se il vertice C di un triangolo scorre lungo una retta parallela alla base AB, la forma del triangolo cambia in continuazione, ma la sua estensione no. Tutti quei triangoli hanno la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione del teorema 3. Nel trapezio $ABCD$ di basi AB e DC, sia M il punto medio del lato obliquo BC; la retta DM incontra il prolungamento di AB in E (Figura 3.2, al centro). I triangoli DCM ed EBM hanno $CM \cong MB$, gli angoli in M opposti al vertice e $\angle DCM \cong \angle EBM$ perché alterni interni rispetto alle parallele DC e AE: sono congruenti per il secondo criterio. Allora $BE \cong DC$ e

$$ABCD = ABMD + DCM \doteq ABMD + EBM = AED.$$

Il triangolo AED ha la stessa altezza del trapezio e base $AE = AB + BE \cong AB + DC$. c.v.d.

Dimostrazione del teorema 4. Sia O il centro della circonferenza inscritta nel poligono. Congiungendo O con i vertici dividiamo il poligono in tanti triangoli quanti sono i lati (Figura 3.2, a destra). Ciascun triangolo ha per base un lato del poligono e per altezza il raggio r, perché il raggio che va al punto di contatto è perpendicolare al lato tangente: è una proprietà della circonferenza che si studia negli anni successivi, e qui la accettiamo come nota. Disponiamo su una stessa retta, uno dopo l'altro, segmenti congruenti ai lati, e costruiamo su ciascuno un triangolo di altezza r con il vertice in un punto comune: per il teorema 2 ognuno è equivalente al triangolo corrispondente del poligono, e insieme formano un unico triangolo che ha per base il perimetro e per altezza r. c.v.d.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Dato un quadrilatero convesso $ABCD$, costruisci con riga e compasso un triangolo equivalente.

Costruzione. 1) Traccia la diagonale AC. 2) Da D conduci la parallela ad AC (costruzione della parallela con riga e compasso, *Matematica 1*). 3) Questa retta incontra il prolungamento del lato BC oltre C in un punto E. Il triangolo ABE è quello cercato.

Giustificazione. I triangoli ACD e ACE hanno la base AC in comune e i vertici D ed E su una parallela ad AC: hanno la stessa altezza e quindi, per il teorema 2, sono equivalenti. Allora $ABCD = ABC + ACD \doteq ABC + ACE = ABE$.

Osservazione. Ripetendo la costruzione si abbassa di uno il numero dei lati a ogni passo: qualsiasi poligono convesso si trasforma in un triangolo equivalente, e poi (teorema 2) in un rettangolo. Era il modo in cui i geometri greci «quadravano» un poligono: la **quadratura** di una figura è la costruzione di un quadrato equivalente a essa.

3.3 Dall'equivalenza alle aree

Finora abbiamo confrontato figure senza mai usare numeri. Per misurare l'estensione scegliamo come unità un quadrato di lato unitario, per esempio di lato 1 cm, la cui estensione si indica con cm^2. L'**area** di una figura è la misura della sua estensione rispetto a questa unità: un numero reale positivo. La teoria della misura, che non sviluppiamo, garantisce che **figure equivalenti hanno la stessa area e figure con la stessa area sono equivalenti**, e che l'area di una somma di figure è la somma delle aree.

Il punto di partenza è il **rettangolo**: se i lati misurano 3 cm e 5 cm, il rettangolo si divide in 3 file di 5 quadratini unitari e la sua area è 15 cm^2. In generale l'area di un rettangolo di base b e altezza h è $A = b \cdot h$; per lati di misura qualsiasi, anche irrazionale, si accetta la stessa formula, approssimando i lati con numeri razionali come nel capitolo 1. Da qui, i teoremi di equivalenza producono tutte le altre formule (Tabella 3.1).

Tabella 3.1 Le aree dei poligoni, ricavate dall'equivalenza.

Figura	Area	Perché
rettangolo	$A = b \cdot h$	conteggio dei quadratini unitari
parallelogramma	$A = b \cdot h$	è equivalente al rettangolo con stessa base e altezza (teorema 1)
triangolo	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$	è metà di un parallelogramma (teorema 2)
trapezio	$A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$	è equivalente a un triangolo di base B + b (teorema 3)
rombo	$A = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$	una diagonale lo divide in due triangoli di altezza metà dell'altra
poligono circoscritto	$A = p \cdot r$	teorema 4; p è il semiperimetro
poligono regolare	$A = p \cdot a$	è circoscritto alla circonferenza di raggio uguale all'apotema a

Nella formula del poligono circoscritto compare il **semiperimetro** p, cioè metà del perimetro: il triangolo del teorema 4 ha base $2p$ e altezza r, quindi area $2p \cdot r : 2 = p \cdot r$. Un poligono regolare, come sai dalla scuola media, è sempre circoscrivibile a una circonferenza, il cui raggio si chiama **apotema**: per questo la sua area è il semiperimetro per l'apotema.

3.3.1 Le tre altezze di un triangolo

Un triangolo ha tre basi possibili, ciascuna con la sua altezza. L'area però è una sola, quindi indicando con h_a, h_b, h_c le altezze relative ai lati a, b, c:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2A.$$

Le altezze sono dunque **inversamente proporzionali** ai lati: al lato più lungo corrisponde l'altezza più corta. Conoscendo un lato e la sua altezza si trovano tutte le altre.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel triangolo ABC il lato BC misura 14 cm e l'altezza AH relativa a esso misura 12 cm; gli altri lati misurano $AB = 13$ cm e $AC = 15$ cm. Calcola l'area e le altre due altezze.

Soluzione. L'area è $A = 14 \cdot 12 : 2 = 84\ \text{cm}^2$. Dalla relazione $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2A = 168\ \text{cm}^2$:

$h_c = 168 : 13 \approx 12{,}92$ cm (altezza relativa ad AB); $h_b = 168 : 15 = 11{,}2$ cm (altezza relativa ad AC).

Controllo. La più corta delle tre altezze, 11,2 cm, è quella relativa al lato più lungo, 15 cm, come deve essere.

3.4 I teoremi di Euclide e di Pitagora

In tutto il paragrafo ABC è un triangolo rettangolo in A. Il lato BC opposto all'angolo retto è l'**ipotenusa**, gli altri due sono i **cateti**. Tracciamo l'altezza AH relativa all'ipotenusa: il piede H cade dentro l'ipotenusa e la divide in due segmenti, BH e HC, che sono le **proiezioni dei cateti** sull'ipotenusa (BH è la proiezione di AB, HC quella di AC). Useremo per le misure i nomi della Figura 3.6: a l'ipotenusa, b e c i cateti, p e q le proiezioni, h l'altezza.

3.4.1 Il primo teorema di Euclide

IN SINTESI

Primo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Ipotesi: $\angle BAC$ retto; $AH \perp BC$. **Tesi:** il quadrato $ABDE$ costruito su AB è equivalente al rettangolo $BHKL$ con $BL \cong BC$.

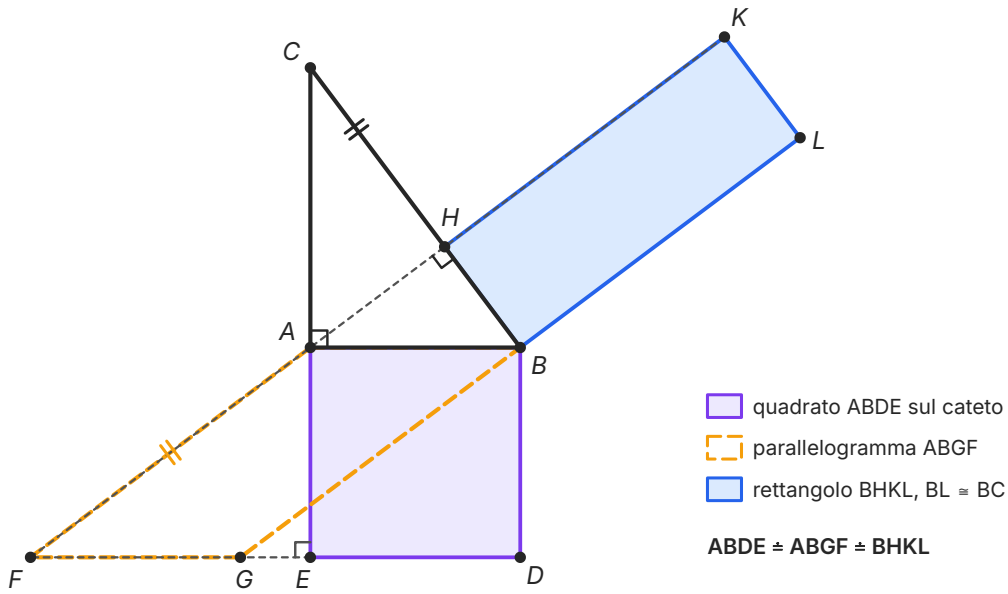


Figura 3.3 Il primo teorema di Euclide. Il quadrato *ABDE* sul cateto *AB* si trasforma nel parallelogramma *ABGF* (stessa base *AB*, stessa altezza), e questo nel rettangolo *BHKL* costruito sulla proiezione *BH* con l'altro lato congruente all'ipotenusa (stessa base $AF \cong HK$, stessa altezza *BH*).

Dimostrazione (Figura 3.3). Costruiamo il quadrato *ABDE* sul cateto *AB*, dalla parte opposta al triangolo, e il rettangolo *BHKL* sulla proiezione *BH*, dalla parte opposta ad *A*, con $BL \cong BC$. Prolunghiamo l'altezza *HA* oltre *A* fino a incontrare in *F* la retta *DE*, e completiamo il parallelogramma *ABGF* con *G* sulla stessa retta.

1. **Il quadrato è equivalente al parallelogramma.** *ABDE* e *ABGF* hanno la base *AB* in comune e i lati opposti sulla stessa retta *ED*: per il teorema 1 sono equivalenti.
2. ***AF* ≅ *BC*.** I triangoli *AEF* e *ABC* sono rettangoli (in *E* e in *A*), hanno $AE \cong AB$ (lati del quadrato) e $\angle EAF \cong \angle ABC$: infatti entrambi sono complementari dell'angolo $\angle BAH$ (il primo perché *F*, *A*, *H* sono allineati e $\angle EAB$ è retto, il secondo perché il triangolo *ABH* è rettangolo in *H*). Per il secondo criterio sono congruenti, e $AF \cong BC \cong BL$.
3. **Il parallelogramma è equivalente al rettangolo.** Le rette *FK* e *BL* sono entrambe perpendicolari a *BC*, quindi parallele, a distanza *BH*. Prendendo come basi *AF* e *HK* (congruenti, perché entrambi congruenti a *BC*), il parallelogramma *ABGF* e il rettangolo *BHKL* hanno basi congruenti sulla retta *FK* e la stessa altezza *BH*: per il teorema 1 sono equivalenti.

Per la proprietà transitiva il quadrato *ABDE* è equivalente al rettangolo *BHKL*. c.v.d.

3.4.2 Il teorema di Pitagora

IN SINTESI

Teorema di Pitagora. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Ipotesi: $\angle BAC$ retto. **Tesi:** $Q(BC) \doteq Q(AB) + Q(AC)$, dove $Q(XY)$ indica il quadrato costruito sul segmento XY.

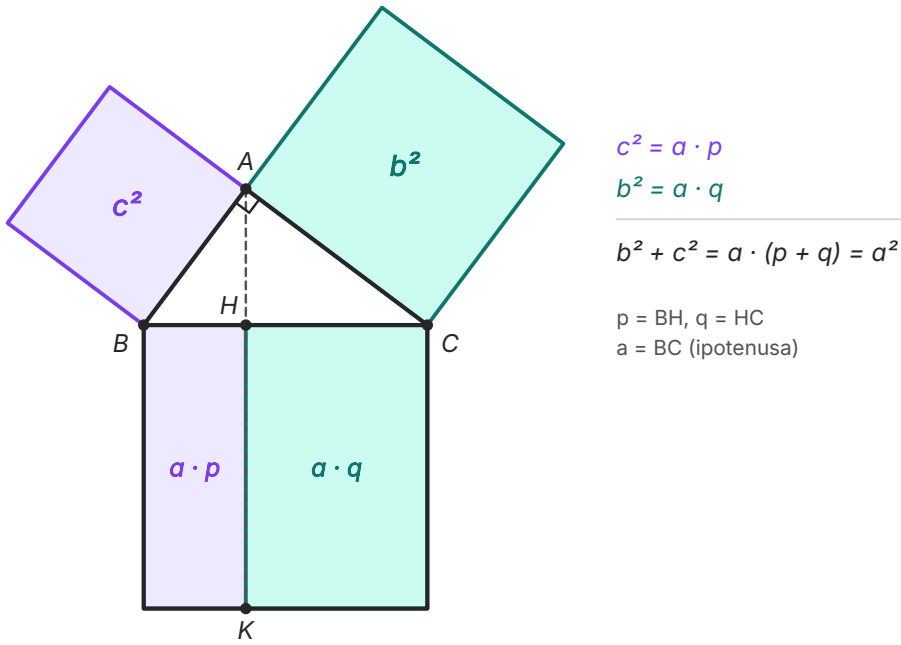


Figura 3.4 La figura della dimostrazione di Euclide (*Elementi*, I.47), con il triangolo di lati 3, 4, 5. Il prolungamento dell'altezza AH divide il quadrato dell'ipotenusa in due rettangoli: quello viola è equivalente al quadrato su AB, quello verde al quadrato su AC (primo teorema di Euclide).

Dimostrazione (Figura 3.4). Costruiamo il quadrato sull'ipotenusa BC e prolunghiamo l'altezza AH fino al lato opposto, in K: il quadrato resta diviso in due rettangoli, uno con i lati BH e BC, l'altro con i lati HC e BC. Per il primo teorema di Euclide il primo rettangolo è equivalente al quadrato su AB e il secondo al quadrato su AC. Il quadrato dell'ipotenusa, somma dei due rettangoli, è equivalente alla somma dei due quadrati. c.v.d.

È, nella sostanza, la dimostrazione con cui si chiude il primo libro degli *Elementi* di Euclide (proposizione 47); la proposizione 48, l'ultima del libro, ne dimostra l'inverso. Esistono centina-

ia di dimostrazioni diverse. Una delle più immediate, per **scomposizione**, è quella della Figura 3.5.

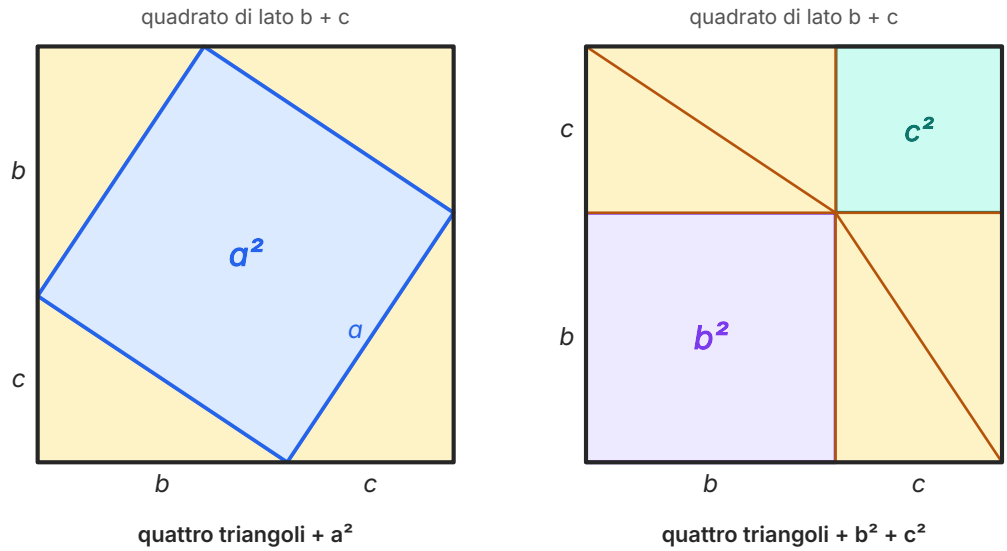


Figura 3.5 Dimostrazione per scomposizione, con cateti b e c e ipotenusa a. Due quadrati congruenti di lato $b + c$ contengono ciascuno quattro triangoli rettangoli congruenti a quello dato (in giallo). Ciò che resta è, a sinistra, il quadrato dell'ipotenusa; a destra, i quadrati dei due cateti.

Nel quadrato di sinistra i quattro triangoli lasciano libero un quadrilatero con i quattro lati congruenti all'ipotenusa a; i suoi angoli sono retti, perché in ogni vertice si sommano a esso i due angoli acuti del triangolo, che sono complementari, e un angolo piatto. È dunque il quadrato dell'ipotenusa. Nel quadrato di destra gli stessi quattro triangoli, accoppiati in due rettangoli, lasciano liberi il quadrato di lato b e quello di lato c. Togliendo da due figure congruenti quattro triangoli congruenti si ottengono figure equivalenti: $a^2 \doteq b^2 + c^2$.

3.4.3 Il teorema inverso

IN SINTESI

Inverso del teorema di Pitagora. Se in un triangolo il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due, il triangolo è rettangolo, e l'angolo retto è quello opposto al primo lato.

Ipotesi: nel triangolo ABC si ha $a^2 = b^2 + c^2$. **Tesi:** $\angle BAC$ è retto.

Dimostrazione. Costruiamo un triangolo $A'B'C'$ rettangolo in A' con i cateti congruenti a quelli di ABC: $A'B' = c$, $A'C' = b$. Per il teorema di Pitagora la sua ipotenusa misura a' con $a'^2 = b^2 + c^2 = a^2$, e quindi $a' = a$ (due numeri positivi con lo stesso quadrato sono uguali). I due triangoli hanno i tre lati congruenti: per il terzo criterio sono congruenti, e l'angolo in A è congruente all'angolo retto in A'. c.v.d.

Il teorema diretto e quello inverso sono due teoremi diversi: il primo parte dall'angolo retto e arriva ai lati, il secondo fa il cammino opposto. Insieme dicono che **la relazione tra i lati caratterizza i triangoli rettangoli**, e forniscono un modo per controllare un angolo retto misurando soltanto lunghezze.

3.4.4 Il secondo teorema di Euclide

IN SINTESI

Secondo teorema di Euclide. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

Ipotesi: $\angle BAC$ retto; $AH \perp BC$. **Tesi:** $Q(AH) \doteq R(BH, HC)$, dove $R(XY, ZW)$ è il rettangolo di lati congruenti a XY e ZW.

Dimostrazione. Il triangolo ABH è rettangolo in H, con ipotenusa AB: per Pitagora $Q(AB) \doteq Q(AH) + Q(BH)$. Per il primo teorema di Euclide nel triangolo ABC, $Q(AB) \doteq R(BC, BH)$; e poiché $BC = BH + HC$, il rettangolo $R(BC, BH)$ si divide nel quadrato $Q(BH)$ e nel rettangolo $R(BH, HC)$. Dunque $Q(AH) + Q(BH) \doteq R(BH, HC) + Q(BH)$ e, togliendo da entrambe le parti il quadrato $Q(BH)$, $Q(AH) \doteq R(BH, HC)$. c.v.d.

3.4.5 I teoremi in forma numerica

Passando alle aree, i tre teoremi diventano uguaglianze tra le misure dei lati (Figura 3.6). A esse aggiungiamo la relazione che si ottiene calcolando l'area del triangolo in due modi, con i cateti come base e altezza oppure con l'ipotenusa e l'altezza relativa:

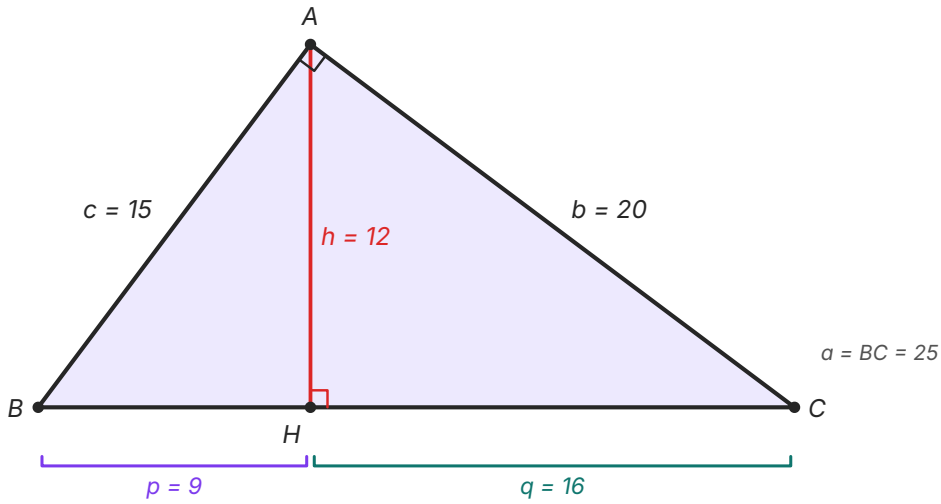


Figura 3.6 Il triangolo rettangolo dell'esempio svolto: cateti 15 e 20, ipotenusa 25, proiezioni dei cateti 9 e 16, altezza relativa all'ipotenusa 12.

IN SINTESI

Primo teorema di Euclide: $c^2 = a \cdot p, \quad b^2 = a \cdot q$.

Teorema di Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$; quindi $a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Secondo teorema di Euclide: $h^2 = p \cdot q$.

Area: $b \cdot c = a \cdot h$, da cui $h = \dfrac{b \cdot c}{a}$.

Questa volta Pitagora segue anche dal primo teorema di Euclide con un solo passaggio algebrico: sommando $c^2 = a \cdot p$ e $b^2 = a \cdot q$ si ha $b^2 + c^2 = a \cdot (p + q) = a \cdot a = a^2$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. I cateti di un triangolo rettangolo misurano 15 cm e 20 cm. Calcola l'ipotenusa, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa.

Soluzione. Ipotenusa: $a = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$ cm. Proiezioni (primo teorema di Euclide): $p = c^2 : a = 225 : 25 = 9$ cm, $q = b^2 : a = 400 : 25 = 16$ cm. Altezza: $h = b \cdot c : a = 300 : 25 = 12$ cm.

Controllo. $p + q = 25 = a$; $h^2 = 144 = 9 \cdot 16 = p \cdot q$, come vuole il secondo teorema di Euclide.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. L'altezza relativa all'ipotenusa divide l'ipotenusa in due parti di 4 cm e 9 cm. Calcola l'altezza, i cateti e l'area.

Soluzione. $h^2 = p \cdot q = 4 \cdot 9 = 36$, quindi $h = 6$ cm. L'ipotenusa misura $a = 13$ cm. Primo teorema di Euclide: $c^2 = 13 \cdot 4 = 52$, $c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm; $b^2 = 13 \cdot 9 = 117$, $b = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ cm (semplificazione dei radicali, capitolo 2). Area: $A = a \cdot h : 2 = 13 \cdot 6 : 2 = 39$ cm^2.

Controllo. Con i cateti: $b \cdot c : 2 = 3\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13} : 2 = 6 \cdot 13 : 2 = 39$ cm^2. I cateti sono irrazionali anche se proiezioni e altezza sono intere: il teorema di Pitagora produce radicali con grande naturalezza.

ERRORE FREQUENTE

La radice di una somma non è la somma delle radici. «L'ipotenusa di cateti 5 e 12 è $\sqrt{5^2 + 12^2} = 5 + 12 = 17$» è sbagliato: $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Basta un'occhiata per accorgersene: in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, quindi l'ipotenusa non può valere $5 + 12$.

Pitagora vale solo per i triangoli rettangoli, e l'ipotenusa è il lato più lungo. Per decidere se un triangolo di lati 7, 24, 25 è rettangolo si confronta il quadrato del lato *maggiore* con la somma degli altri due quadrati: $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$, quindi è rettangolo (teorema inverso). Confrontare 24^2 con $7^2 + 25^2$ non ha senso.

3.5 Applicazioni del teorema di Pitagora

3.5.1 Il quadrato e il triangolo equilatero

La diagonale d di un quadrato di lato l è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di cateti l: $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$, quindi

$$d = l\sqrt{2}, \qquad l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

L'altezza h di un triangolo equilatero di lato l cade nel punto medio della base (*Matematica 1*) e forma un triangolo rettangolo di ipotenusa l e cateto $l/2$: $h^2 = l^2 - l^2/4 = 3l^2/4$. Quindi

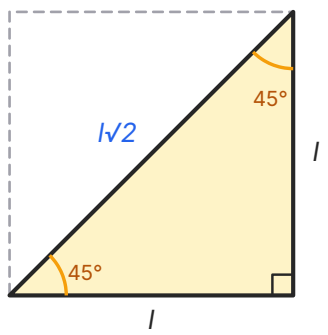
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \qquad A = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Un triangolo equilatero di lato 6 cm ha altezza $3\sqrt{3}$ cm $\approx 5{,}20$ cm e area $9\sqrt{3}$ cm$^2 \approx 15{,}59$ cm^2. Il lato e l'altezza, come il lato e la diagonale del quadrato, sono grandezze il cui rapporto è un numero irrazionale.

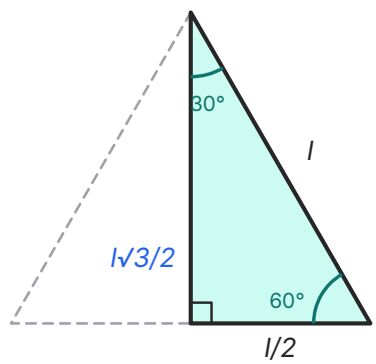
3.5.2 I triangoli con angoli di 45° e di 30° e 60°

Due triangoli rettangoli torneranno di continuo, nei problemi di questo libro e, negli anni successivi, nello studio delle funzioni circolari (Figura 3.7).

- Il triangolo rettangolo con due angoli di 45° è **isoscele** ed è metà di un quadrato: se i cateti misurano l, l'ipotenusa misura $l\sqrt{2}$. I lati stanno nel rapporto $1 : 1 : \sqrt{2}$.
- Il triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° è **metà di un triangolo equilatero**. Infatti, se ABH è rettangolo in H con $\angle B = 60°$, il suo simmetrico rispetto alla retta AH forma con esso un triangolo con tre angoli di 60°, cioè equilatero. Se l'ipotenusa misura l, il cateto opposto all'angolo di 30° misura $l/2$ e l'altro $l\sqrt{3}/2$: i lati stanno nel rapporto $1 : \sqrt{3} : 2$.



lati in rapporto 1 : 1 : √2



lati in rapporto 1 : √3 : 2

Figura 3.7 A sinistra, il triangolo rettangolo isoscele è metà di un quadrato di lato l. A destra, il triangolo con angoli di 30° e 60° è metà di un triangolo equilatero di lato l: il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa.

DA RICORDARE

In un triangolo rettangolo con un angolo di 30°, **il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa** e l'altro cateto è questa metà moltiplicata per $\sqrt{3}$. In un triangolo rettangolo isoscele l'ipotenusa è il cateto moltiplicato per $\sqrt{2}$. Con queste due regole si risolvono a mente molti problemi: per esempio un triangolo rettangolo con ipotenusa 10 cm e un angolo di 60° ha cateti 5 cm e $5\sqrt{3}$ cm $\approx$ 8,66 cm.

3.5.3 Problemi risolti con le equazioni

Spesso un problema geometrico non dà direttamente due lati di un triangolo rettangolo, ma una relazione tra di essi. Si sceglie allora come incognita una lunghezza, si scrivono le altre in funzione di essa e si usa il teorema di Pitagora come equazione. Alla fine si controlla che la soluzione sia **accettabile**: una lunghezza deve essere positiva e rispettare i vincoli del problema.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. In un triangolo rettangolo un cateto misura 6 cm e l'ipotenusa supera l'altro cateto di 2 cm. Calcola il perimetro e l'area.

Impostazione. Sia x la misura in cm del cateto incognito ($x > 0$); l'ipotenusa misura $x + 2$. Per il teorema di Pitagora $(x + 2)^2 = x^2 + 6^2$.

Risoluzione. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36$, quindi $4x = 32$ e $x = 8$. Il termine x^2 si è eliminato: l'equazione è di primo grado. La soluzione è accettabile ($8 > 0$).

Risultato. Cateti 6 cm e 8 cm, ipotenusa 10 cm; perimetro 24 cm, area $6 \cdot 8 : 2 = 24$ cm^2. Controllo: $36 + 64 = 100 = 10^2$.

COLLEGAMENTI

Pitagora nello spazio. La diagonale d di un parallelepipedo rettangolo di spigoli a, b, c si trova applicando due volte il teorema. La diagonale di base misura $\sqrt{a^2 + b^2}$; con lo spigolo verticale c essa forma un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è la diagonale del solido: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Una scatola di 3 dm × 4 dm × 12 dm contiene quindi un'asta lunga fino a $\sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$ dm, e la diagonale di un cubo di spigolo l è $l\sqrt{3}$. La stessa formula dà la distanza tra due punti nello spazio, e con due sole coordinate quella tra due punti del piano cartesiano, che userai nel capitolo 5.

Le parole di Pitagora. *Ipotenusa* viene dal greco ὑποτείνουσα, participio di ὑποτείνω, «tendere sotto»: è il lato «teso sotto» l'angolo retto, come la corda sotto un arco. *Cateto* viene da κάθετος, «calato giù, perpendicolare». Euclide enuncia il teorema (*Elementi* I.47) proprio con queste parole: ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις, «nei triangoli rettangoli il quadrato del lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto». Nota che Euclide non parla di numeri né di aree misurate: dice che due figure sono «uguali» (ἴσον), cioè, nel linguaggio di questo capitolo, equivalenti.

COLLEGAMENTI

La squadra del muratore. Chi traccia le fondazioni di una casa o il campo di una palestra deve controllare gli angoli retti su distanze di metri, dove una squadra da disegno non serve. Si usa il teorema inverso: si misurano 3 m lungo un lato e 4 m lungo l'altro a partire dall'angolo, e si controlla che la distanza tra i due segni sia esattamente 5 m. Se è così, l'angolo è retto, perché $3^2 + 4^2 = 5^2$. Vanno bene anche le misure 60 cm, 80 cm, 100 cm, o qualsiasi multiplo della terna 3, 4, 5.

3.6 Pitagora e i numeri

3.6.1 Lati incommensurabili e numeri irrazionali

Le *Indicazioni nazionali* chiedono di leggere il teorema di Pitagora anche dal lato dei numeri, e la ragione è storica. Un triangolo rettangolo isoscele di cateto 1 ha ipotenusa $\sqrt{2}$, un numero che non è razionale (capitolo 1). Ciò significa che lato e diagonale di un quadrato non hanno un sottomultiplo comune, per quanto piccolo: sono grandezze **incommensurabili**, tema che riprenderemo nel capitolo 4. In particolare **non esiste un triangolo rettangolo isoscele con tutti e tre i lati di misura intera**: se i cateti misurassero n e l'ipotenusa m, interi, sarebbe $m/n = \sqrt{2}$, un rapporto di interi uguale a $\sqrt{2}$.

Il teorema permette anche di **costruire** sulla retta numeri irrazionali con riga e compasso. Su un cateto di lunghezza 1 si alza un cateto perpendicolare di lunghezza 1: l'ipotenusa misura $\sqrt{2}$. Su quest'ipotenusa si alza un nuovo cateto perpendicolare di lunghezza 1: la nuova ipotenusa misura $\sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$. Continuando, se un'ipotenusa misura $\sqrt{n}$, la successiva misura $\sqrt{n + 1}$. Si ottiene la **spirale di Teodoro** (Figura 3.8), che costruisce tutte le radici quadrate dei numeri naturali; riportandole con il compasso su una retta, a partire da un'origine, si ottengono i punti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, … della retta reale.

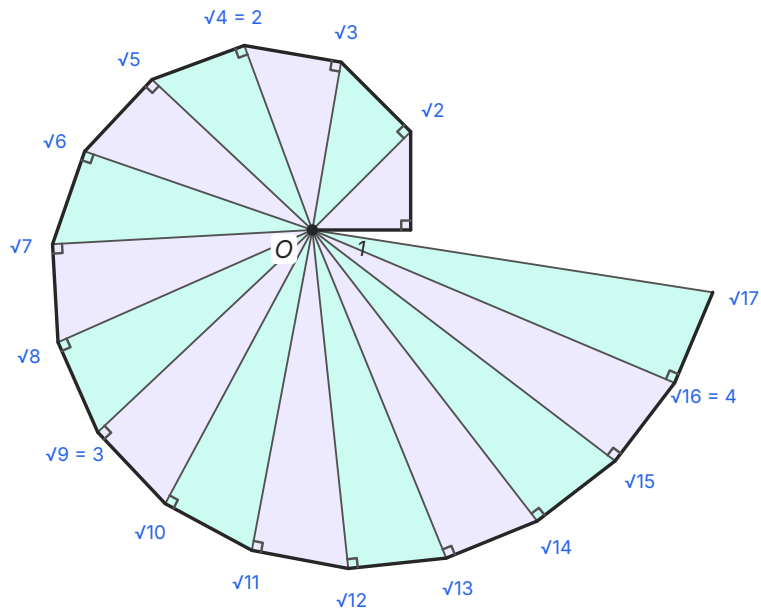


Figura 3.8 La spirale di Teodoro: sedici triangoli rettangoli con un cateto lungo 1 (sul bordo esterno) e l'altro uguale all'ipotenusa precedente. Le ipotenuse misurano √2, √3, …, √17. Il diciassettesimo triangolo si sovrapporrebbe al primo.

Il nome ricorda Teodoro di Cirene: nel dialogo *Teeteto* di Platone si racconta che egli dimostrava, una per una, l'irrazionalità delle radici quadrate di 3, di 5 e degli altri numeri non quadrati fino a 17. Che abbia usato proprio questa spirale è un'ipotesi moderna, suggerita dal fatto curioso che la spirale si chiude su sé stessa proprio dopo il triangolo di ipotenusa √17.

3.6.2 Le terne pitagoriche

Esistono invece moltissimi triangoli rettangoli con i tre lati interi. Una **terna pitagorica** è una terna di numeri naturali non nulli $(a; b; c)$ tali che $a^2 + b^2 = c^2$; per il teorema inverso, ogni terna pitagorica dà i lati di un triangolo rettangolo. La più nota è (3; 4; 5); altre sono (5; 12; 13), (8; 15; 17), (7; 24; 25), (20; 21; 29).

Moltiplicando i tre numeri di una terna per uno stesso naturale k si ottiene ancora una terna: da $a^2 + b^2 = c^2$ segue $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2$. Così da (3; 4; 5) nascono (6; 8; 10), (9; 12; 15), (30; 40; 50), … Una terna i cui tre numeri non hanno divisori comuni diversi da 1 si dice **terna primitiva**: (3; 4; 5) è primitiva, (6; 8; 10) no. Ogni terna è un multiplo di una terna primitiva, quindi basta conoscere queste.

APPROFONDIMENTO · UNA FORMULA PER LE TERNE

Scelti due numeri naturali $m > n > 0$, la terna

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

è sempre pitagorica. La verifica è un esercizio di calcolo letterale: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$. Con $m = 2$, $n = 1$ si ottiene (3; 4; 5); con $m = 3$, $n = 2$ si ottiene (5; 12; 13); con $m = 4$, $n = 1$ si ottiene (15; 8; 17); con $m = 5$, $n = 2$ si ottiene (21; 20; 29).

Si può dimostrare (non lo facciamo) che, scegliendo m e n primi tra loro e non entrambi dispari, si ottengono **tutte** le terne primitive, ciascuna una sola volta a meno dello scambio dei cateti. Con $m = 3$, $n = 1$, entrambi dispari, si ottiene invece (8; 6; 10), che non è primitiva.

APPROFONDIMENTO · PITAGORA PRIMA DI PITAGORA

Di Pitagora di Samo (VI secolo a.C.) non ci è giunto nessuno scritto, e l'attribuzione del teorema a lui o alla sua scuola risale a fonti molto più tarde. La relazione tra i lati del triangolo rettangolo era però nota molto prima e altrove.

Una tavoletta d'argilla babilonese in scrittura cuneiforme, conservata alla Columbia University di New York con il nome di *Plimpton 322* e datata intorno al 1800 a.C., contiene una tabella di numeri in base sessanta nella quale si riconoscono, riga per riga, il cateto minore e l'ipotenusa di triangoli rettangoli con i lati interi, cioè di terne pitagoriche. La prima riga, per esempio, corrisponde alla terna (119; 120; 169).

In Cina, il *Zhoubi suanjing*, un antico testo di astronomia e di calcolo la cui datazione è incerta (è collocato di solito intorno all'inizio della nostra era), discute il triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5 e la relazione tra i suoi lati, che nella tradizione cinese prende il nome di *gougu*.

Il merito dei Greci, ed è il motivo per cui il teorema porta un nome greco, fu di **dimostrarlo** come conseguenza di postulati, invece di constatarlo su casi particolari.

SINTESI

- L'estensione superficiale è un concetto primitivo. Due figure con la stessa estensione sono equivalenti (≒). L'equivalenza è riflessiva, simmetrica e transitiva; figure congruenti sono equivalenti; somme e differenze di figure equivalenti sono equivalenti; una figura non è equivalente a una sua parte (De Zolt).
- Figure equiscomponibili sono equivalenti. Figure equivalenti non sono, in generale, congruenti, e possono avere perimetri diversi.
- Teorema 1: parallelogrammi con basi e altezze congruenti sono equivalenti; ogni parallelogramma è equivalente a un rettangolo con stessa base e altezza.
- Teorema 2: un triangolo è equivalente a metà di un parallelogramma con stessa base e altezza. Teorema 3: un trapezio è equivalente a un triangolo di base B + b e stessa altezza. Teorema 4: un poligono circoscritto è equivalente a un triangolo di base il perimetro e altezza il raggio.
- L'area è la misura dell'estensione. Dalle equivalenze: parallelogramma $b \cdot h$, triangolo $b \cdot h/2$, trapezio $(B + b) \cdot h/2$, rombo $d_1 \cdot d_2/2$, poligono circoscritto $p \cdot r$, poligono regolare $p \cdot a$ (p semiperimetro).
- In un triangolo $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2A$: le altezze sono inversamente proporzionali ai lati.
- Primo teorema di Euclide: il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo di ipotenusa e proiezione del cateto ($c^2 = a \cdot p$, $b^2 = a \cdot q$).
- Teorema di Pitagora: in un triangolo rettangolo $a^2 = b^2 + c^2$. Il teorema inverso: se $a^2 = b^2 + c^2$, il triangolo è rettangolo e l'angolo retto è opposto ad a.
- Secondo teorema di Euclide: il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni ($h^2 = p \cdot q$). Inoltre $a \cdot h = b \cdot c$.
- Diagonale del quadrato $d = l\sqrt{2}$; altezza del triangolo equilatero $h = l\sqrt{3}/2$. I triangoli rettangoli con angoli di 45° e di 30°–60° hanno i lati in rapporto $1 : 1 : \sqrt{2}$ e $1 : \sqrt{3} : 2$.
- Il teorema di Pitagora costruisce gli irrazionali $\sqrt{n}$ (spirale di Teodoro) e mostra che lato e diagonale del quadrato sono incommensurabili.
- Una terna pitagorica è una terna di naturali con $a^2 + b^2 = c^2$; i multipli di una terna sono terne; $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ è sempre una terna.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Due figure piane sono equivalenti quando:
   - **A.** sono congruenti
   - **B.** hanno lo stesso perimetro
   - **C.** hanno la stessa estensione
   - **D.** hanno gli stessi angoli

2. ● Un triangolo e un parallelogramma hanno basi congruenti e altezze congruenti. Allora:
   - **A.** il triangolo è equivalente a metà del parallelogramma
   - **B.** sono equivalenti
   - **C.** il parallelogramma è equivalente a metà del triangolo
   - **D.** non si può dire nulla sulla loro estensione

3. ●● In un triangolo rettangolo i cateti misurano 6 cm e 8 cm. La proiezione sull'ipotenusa del cateto di 6 cm misura:
   - **A.** 4,8 cm
   - **B.** 6,4 cm
   - **C.** 3 cm
   - **D.** 3,6 cm

4. ● Quale delle seguenti è una terna pitagorica?
   - **A.** (7; 9; 12)
   - **B.** (5; 12; 13)
   - **C.** (4; 6; 8)
   - **D.** (6; 8; 12)

5. ●● La diagonale di un quadrato misura 10 cm. Il lato misura:
   - **A.** $10\sqrt{2}$ cm
   - **B.** $5\sqrt{2}$ cm
   - **C.** 5 cm
   - **D.** $\sqrt{10}$ cm

6. ●● L'altezza di un triangolo equilatero di lato 4 cm misura:
   - **A.** $4\sqrt{3}$ cm
   - **B.** $2\sqrt{2}$ cm
   - **C.** $\sqrt{3}$ cm
   - **D.** $2\sqrt{3}$ cm

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
   a) Due figure congruenti sono equivalenti.
   b) Due figure equivalenti sono congruenti.
   c) Due rettangoli con lo stesso perimetro sono equivalenti.
   d) In ogni triangolo il quadrato di un lato è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due.
   e) Se in un triangolo $a^2 = b^2 + c^2$, l'angolo opposto al lato a è retto.
   f) Una mediana divide un triangolo in due triangoli equivalenti.

8. ● Completa.
   a) Due poligoni si dicono equiscomponibili se _____ .
   b) Nel primo teorema di Euclide il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati _____ e _____ .
   c) Nel secondo teorema di Euclide il quadrato costruito su _____ è equivalente al rettangolo che ha per lati _____ .
   d) L'area di un poligono circoscritto a una circonferenza è il prodotto del _____ per il _____ .

Calcolare

9. ● Calcola l'area di: a) un parallelogramma di base 12 cm e altezza 7,5 cm; b) un trapezio di basi 14 cm e 8 cm e altezza 5 cm; c) un rombo di diagonali 9 cm e 16 cm; d) un triangolo di base 11 cm e altezza 6 cm.

10. ● Un triangolo ha i lati di 10 cm, 17 cm e 21 cm e area 84 cm^2. Calcola le sue tre altezze.

11. ● In un triangolo rettangolo calcola il lato mancante: a) cateti 9 e 40; b) ipotenusa 61 e un cateto 11; c) cateti 1 e 2; d) ipotenusa 6 e un cateto 4. Semplifica i radicali.

12. ●● In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 50 cm e la proiezione di un cateto su di essa 18 cm. Calcola i cateti, l'altra proiezione, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area.

13. ●● In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa misura 6 cm e divide l'ipotenusa in due parti, una delle quali misura 3 cm. Calcola l'ipotenusa, i cateti e l'area.

14. ● Stabilisci quali triangoli sono rettangoli: a) lati 9, 12, 15; b) lati 10, 24, 26; c) lati 6, 7, 9; d) lati $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$.

15. ●● a) Un quadrato ha la diagonale di $6\sqrt{2}$ cm: calcola il lato e l'area. b) Un quadrato ha perimetro 32 cm: calcola la diagonale. c) Un triangolo equilatero ha lato 10 cm: calcola altezza e area, esatte e approssimate al centesimo.

16. ●● a) Un triangolo rettangolo ha un angolo di 30° e l'ipotenusa di 14 cm: calcola i cateti. b) Un triangolo rettangolo isoscele ha l'ipotenusa di 9 cm: calcola i cateti e l'area.

17. ●● Un rombo ha le diagonali di 10 cm e 24 cm. Calcola il lato, l'area e l'altezza del rombo (distanza tra due lati opposti).

18. ●● Un trapezio isoscele ha le basi di 22 cm e 10 cm e i lati obliqui di 10 cm. Calcola l'altezza, l'area e la diagonale.

19. ●● a) Un poligono è circoscritto a una circonferenza di raggio 5 cm e ha perimetro 46 cm: calcola l'area. b) Calcola l'apotema e l'area di un esagono regolare di lato 6 cm, sapendo che è formato da sei triangoli equilateri.

Dimostrare e argomentare

20. ● Dimostra che una mediana divide un triangolo in due triangoli equivalenti.

21. ●● Dimostra che le diagonali di un parallelogramma lo dividono in quattro triangoli equivalenti.

22. ●● Dimostra che un rombo è equivalente a metà del rettangolo che ha per lati le sue diagonali, e ricava la formula dell'area del rombo.

23. ●● Dimostra che le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli, e che i due adiacenti ai lati obliqui sono equivalenti.

24. ●● Trova l'errore. a) «L'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 5 e 12 misura $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25} + \sqrt{144} = 5 + 12 = 17$.» b) «Il triangolo di lati 7, 24, 25 non è rettangolo, perché $7^2 + 25^2 = 674$ è diverso da $24^2 = 576$.»

25. ●● Spiega perché non esiste un triangolo rettangolo isoscele con i tre lati di misura intera. Esiste un triangolo rettangolo con i cateti interi e l'ipotenusa irrazionale? E uno con un cateto e l'ipotenusa interi e l'altro cateto irrazionale? Fai un esempio per ciascun caso possibile.

26. ●●● Sia P un punto interno a un triangolo equilatero di lato l e altezza h. Congiungendo P con i vertici, dimostra che la somma delle distanze di P dai tre lati è uguale ad h, qualunque sia la posizione di P.

Problemi

27. ● Una scala lunga 5 m è appoggiata a un muro verticale, con il piede a 1,4 m dalla base del muro. A che altezza arriva la cima della scala?

28. ●● Un campo da calcio rettangolare misura 105 m × 68 m. Quanti metri si risparmiano andando da un angolo a quello opposto lungo la diagonale invece che lungo due lati? Approssima al decimetro.

29. ●● Un muratore vuole controllare un angolo retto: segna 60 cm su un lato e 80 cm sull'altro e misura la distanza tra i due segni, trovando 99 cm. L'angolo è retto? Quale misura avrebbe dovuto trovare, e quale teorema giustifica il controllo?

30. ●● Un aquilone è trattenuto da un filo teso e rettilineo lungo 50 m. Marta tiene il filo a 1,2 m da terra, e l'aquilone si trova esattamente sopra un punto del prato distante 30 m dai suoi piedi. A che altezza da terra vola l'aquilone?

31. ●● In un triangolo rettangolo un cateto misura 12 cm e l'ipotenusa supera l'altro cateto di 8 cm. Imposta un'equazione e calcola il perimetro e l'area.

32. ●●● Da un foglio quadrato di lato 20 cm si tagliano agli angoli quattro triangoli rettangoli isosceli congruenti, in modo che il foglio rimasto sia un ottagono regolare. Calcola il cateto dei triangoli tagliati e il lato dell'ottagono, esatti (razionalizza) e approssimati al centesimo.

Verso la verifica

33. ●● I cateti di un triangolo rettangolo sono proporzionali a 3 e 4 e l'ipotenusa misura 35 cm. Calcola i cateti, le loro proiezioni sull'ipotenusa, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area.

34. ●● Un triangolo isoscele ha la base di 16 cm e il perimetro di 36 cm. Calcola l'altezza relativa alla base, l'area e l'altezza relativa a uno dei lati congruenti.

35. ●●● **Sfida.** Sia P un punto interno al rettangolo $ABCD$. a) Tracciando da P le perpendicolari ai lati, dimostra che $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. b) Se $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$, quanto misura PD?

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro I, proposizioni 35–41 (i teoremi di equivalenza tra parallelogrammi e triangoli) e 47–48 (il teorema di Pitagora e il suo inverso), da confrontare con le dimostrazioni di questo capitolo.
- [MAP] Maor, *The Pythagorean Theorem*: la storia del teorema dalla tavoletta Plimpton 322 alle sue generalizzazioni, con molte dimostrazioni diverse.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la matematica babilonese e la scuola pitagorica.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le terne pitagoriche e le costruzioni con riga e compasso.

Glossario del capitolo

Area
Misura dell'estensione di una figura rispetto a un quadrato unitario; figure equivalenti hanno la stessa area.

Cateti
I due lati di un triangolo rettangolo che formano l'angolo retto.

Estensione superficiale
Concetto primitivo: la porzione di piano occupata da una figura limitata.

Figure equiscomponibili
Figure che si possono dividere nello stesso numero di parti a due a due congruenti; sono sempre equivalenti.

Figure equivalenti
Figure con la stessa estensione; si scrive $F \doteq G$. Figure congruenti sono equivalenti, non viceversa.

Grandezze incommensurabili
Grandezze omogenee prive di un sottomultiplo comune, come il lato e la diagonale di un quadrato.

Inverso del teorema di Pitagora
Se $a^2 = b^2 + c^2$, il triangolo è rettangolo e l'angolo retto è opposto al lato a.

Ipotenusa
In un triangolo rettangolo, il lato opposto all'angolo retto; è il lato più lungo.

Postulato di De Zolt
Una figura non è equivalente a una sua parte propria.

Primo teorema di Euclide
Il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo di ipotenusa e proiezione del cateto: $c^2 = a \cdot p$.

Proiezione di un cateto
Il segmento dell'ipotenusa compreso tra il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa e il vertice del cateto.

Secondo teorema di Euclide
Il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei cateti: $h^2 = p \cdot q$.

Semiperimetro
Metà del perimetro di un poligono; nelle formule si indica con p.

Spirale di Teodoro
Successione di triangoli rettangoli con un cateto unitario che costruisce le lunghezze $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ...

Teorema di Pitagora
In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti: $a^2 = b^2 + c^2$.

Terna pitagorica
Terna di numeri naturali non nulli (a; b; c) con $a^2 + b^2 = c^2$.

Terna primitiva
Terna pitagorica i cui numeri non hanno divisori comuni diversi da 1, come (3; 4; 5).

Soluzioni

1. C. Equivalenti significa «con la stessa estensione»; figure equivalenti possono avere forma e perimetro diversi.

2. A. Per il teorema 2 il triangolo è equivalente a metà di un parallelogramma con base e altezza congruenti.

3. D. Ipotenusa $\sqrt{36 + 64} = 10$ cm; per il primo teorema di Euclide $p = 6^2 : 10 = 3{,}6$ cm.

4. B. $25 + 144 = 169 = 13^2$. Le altre no:
$49 + 81 = 130 \neq 144$; $16 + 36 = 52 \neq 64$;
$36 + 64 = 100 \neq 144$.

5. B. $l = d/\sqrt{2} = 10/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm $\approx 7{,}07$ cm.

6. D. $h = l\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$ cm $\approx 3{,}46$ cm.

7. a) V. b) F: figure equivalenti hanno la stessa estensione ma possono avere forma diversa (rettangolo 2 × 8 e quadrato 4 × 4). c) F: un rettangolo 1 × 9 e un quadrato 5 × 5 hanno perimetro 20 ma aree 9 e 25. d) F: vale solo nei triangoli rettangoli, e solo per il quadrato dell'ipotenusa. e) V (inverso del teorema di Pitagora). f) V: i due triangoli hanno basi congruenti (le metà del lato) e la stessa altezza (teorema 2).

8. a) si possono dividere nello stesso numero di parti a due a due congruenti. b) l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. c) l'altezza relativa all'ipotenusa; le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa. d) semiperimetro; raggio della circonferenza.

9. a) $12 \cdot 7{,}5 = 90$ cm^2. b) $(14 + 8) \cdot 5 : 2 = 55$ cm^2. c) $9 \cdot 16 : 2 = 72$ cm^2. d) $11 \cdot 6 : 2 = 33$ cm^2.

10. $2A = 168$ cm^2. Altezze: relativa al lato di 10 cm: $168 : 10 = 16{,}8$ cm; al lato di 17 cm: $168 : 17 \approx 9{,}88$ cm; al lato di 21 cm: $168 : 21 = 8$ cm.

11. a) $\sqrt{81 + 1600} = \sqrt{1681} = 41$. b) $\sqrt{3721 - 121} = \sqrt{3600} = 60$. c) $\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. d) $\sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

12. Cateto: $c^2 = a \cdot p = 50 \cdot 18 = 900$, $c = 30$ cm. Altra proiezione $q = 50 - 18 = 32$ cm; $b^2 = 50 \cdot 32 = 1600$, $b = 40$ cm. Altezza: $h^2 = 18 \cdot 32 = 576$, $h = 24$ cm. Area $30 \cdot 40 : 2 = 600$ cm^2 (controllo: $50 \cdot 24 : 2 = 600$).

13. Altra proiezione: $q = h^2 : p = 36 : 3 = 12$ cm; ipotenusa 15 cm. Cateti: $\sqrt{(15 \cdot 3)} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm $\approx 6{,}71$ cm e $\sqrt{(15 \cdot 12)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ cm $\approx 13{,}42$ cm. Area $15 \cdot 6 : 2 = 45$ cm^2 (controllo: $3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} : 2 = 90 : 2 = 45$).

14. Si confronta il quadrato del lato maggiore con la somma degli altri due quadrati. a)
$81 + 144 = 225 = 15^2$: rettangolo. b)
$100 + 576 = 676 = 26^2$: rettangolo. c) $36 + 49 = 85 \neq 81$: non rettangolo. d) Il lato maggiore è $2\sqrt{2}$ ($\sqrt{8} > \sqrt{5} > \sqrt{3}$): $3 + 5 = 8 = (2\sqrt{2})^2$: rettangolo.

15. a) Lato $6\sqrt{2} : \sqrt{2} = 6$ cm, area 36 cm^2. b) Lato 8 cm, diagonale $8\sqrt{2}$ cm $\approx 11{,}31$ cm. c) Altezza $5\sqrt{3}$ cm $\approx 8{,}66$ cm; area $10 \cdot 5\sqrt{3} : 2 = 25\sqrt{3}$ cm^2 $\approx 43{,}30$ cm^2.

16. a) Il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa: 7 cm; l'altro misura $7\sqrt{3}$ cm $\approx 12{,}12$ cm. b) Cateti $9 : \sqrt{2} = 9\sqrt{2}/2$ cm $\approx 6{,}36$ cm; area $(9\sqrt{2}/2)^2 : 2 = (81/2) : 2 = 81/4 = 20{,}25$ cm^2.

17. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari e si dimezzano: il lato è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 5 e 12, quindi $\sqrt{25 + 144} = 13$ cm. Area $10 \cdot 24 : 2 = 120$ cm^2. Il rombo è un parallelogramma di base 13: altezza $120 : 13 \approx 9{,}23$ cm.

18. La proiezione di ciascun lato obliquo sulla base maggiore è $(22 - 10) : 2 = 6$ cm; altezza $\sqrt{100 - 36} = 8$ cm. Area $(22 + 10) \cdot 8 : 2 = 128$ cm^2. La diagonale è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 8 e $22 - 6 = 16$: $\sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ cm $\approx 17{,}89$ cm.

19. a) Semiperimetro 23 cm; $A = 23 \cdot 5 = 115$ cm^2. b) L'apotema è l'altezza di uno dei triangoli equilateri: $6\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$ cm $\approx 5{,}20$ cm. Semiperimetro 18 cm; $A = 18 \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ cm^2 $\approx 93{,}53$ cm^2 (controllo: sei triangoli equilateri di area $36\sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}$).

20. Sia AM la mediana relativa a BC, con $BM \cong MC$. I triangoli ABM e AMC hanno basi congruenti BM e MC sulla stessa retta e la stessa altezza, la distanza di A dalla retta BC: per il teorema 2 sono equivalenti.

21. Sia O il punto d'incontro delle diagonali di $ABCD$; le diagonali si dimezzano. In ABC, BO è una mediana: $AOB \doteq BOC$ (esercizio precedente). Allo stesso modo $BOC \doteq COD$ (mediana CO di BCD) e $COD \doteq DOA$. Per la proprietà transitiva i quattro triangoli sono equivalenti.

22. La diagonale AC divide il rombo $ABCD$ in due triangoli congruenti di base $AC = d_1$; poiché le diagonali sono perpendicolari e si dimezzano, ciascuno ha altezza $BO = d_2/2$. Ciascun triangolo è equivalente a metà del rettangolo di lati d_1 e $d_2/2$, cioè a un quarto del rettangolo di lati d_1, d_2; i due insieme a metà di esso. Quindi $A = d_1 \cdot d_2 / 2$.

23. Nel trapezio $ABCD$ di basi AB e DC, le diagonali si incontrano in O. I triangoli ABD e ABC hanno la base AB in comune e i vertici D e C sulla parallela DC: sono equivalenti (teorema 2). Togliendo a entrambi la parte comune ABO restano AOD e BOC, i triangoli adiacenti ai lati obliqui: differenze di figure equivalenti, quindi equivalenti.

24. a) La radice di una somma non è la somma delle radici: $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. b) L'ipotenusa è il lato maggiore, 25: si deve confrontare $25^2 = 625$ con $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$. Sono uguali, quindi il triangolo è rettangolo.

25. Se i cateti misurassero n e l'ipotenusa m, interi, sarebbe $m^2 = 2n^2$, cioè $m/n = \sqrt{2}$: impossibile, perché $\sqrt{2}$ è irrazionale. Cateti interi e ipotenusa irrazionale: sì, per esempio cateti 1 e 2, ipotenusa $\sqrt{5}$. Un cateto e l'ipotenusa interi e l'altro cateto irrazionale: sì, per esempio ipotenusa 3 e cateto 1, altro cateto $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

26. Siano d_1, d_2, d_3 le distanze di P dai lati BC, CA, AB. Il triangolo ABC è la somma dei triangoli PBC, PCA, PAB, che hanno basi uguali a l e altezze d_1, d_2, d_3. Sommando le aree: $l \cdot d_1 / 2 + l \cdot d_2 / 2 + l \cdot d_3 / 2 = l \cdot h / 2$, e dividendo per $l/2$: $d_1 + d_2 + d_3 = h$.

27. Altezza $\sqrt{25 - 1{,}96} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ m.

28. Diagonale $\sqrt{11\,025 + 4624} = \sqrt{15\,649} \approx 125{,}10$ m; lungo i lati $105 + 68 = 173$ m. Si risparmiano circa $173 - 125{,}1 = 47{,}9$ m.

29. Non è retto: per il teorema inverso di Pitagora la distanza dovrebbe essere $\sqrt{3600 + 6400} = \sqrt{10\,000} = 100$ cm (terna 60, 80, 100, multipla di 3, 4, 5). Con 99 cm i quadrati non soddisfano la relazione: $99^2 = 9801 \neq 10\,000$.

30. Il filo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha un cateto orizzontale di 30 m (dalla mano di Marta alla verticale dell'aquilone) e l'altro verticale: questo misura $\sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40$ m. L'aquilone vola a $40 + 1{,}2 = 41{,}2$ m da terra.

31. Sia x l'altro cateto: $(x + 8)^2 = x^2 + 144$, $16x + 64 = 144$, $x = 5$. Ipotenusa 13 cm; perimetro $12 + 5 + 13 = 30$ cm; area $12 \cdot 5 : 2 = 30$ cm^2.

32. Sia x il cateto dei triangoli tagliati: il lato dell'ottagono è l'ipotenusa $x\sqrt{2}$ e anche ciò che resta di un lato del quadrato, $20 - 2x$. Da $x\sqrt{2} = 20 - 2x$: $x = 20/(2 + \sqrt{2}) = 20(2 - \sqrt{2})/2 = 10(2 - \sqrt{2}) = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5{,}86$ cm. Lato dell'ottagono $x\sqrt{2} = 20\sqrt{2} - 20 = 20(\sqrt{2} - 1) \approx 8{,}28$ cm.

33. Cateti $3k$, $4k$, ipotenusa $5k = 35$: $k = 7$, cateti 21 cm e 28 cm. Proiezioni: $21^2 : 35 = 441 : 35 = 12{,}6$ cm e $28^2 : 35 = 784 : 35 = 22{,}4$ cm. Altezza $21 \cdot 28 : 35 = 16{,}8$ cm. Area $21 \cdot 28 : 2 = 294$ cm^2.

34. Lati congruenti $(36 - 16) : 2 = 10$ cm. L'altezza relativa alla base cade nel punto medio: $\sqrt{100 - 64} = 6$ cm. Area $16 \cdot 6 : 2 = 48$ cm^2. Altezza relativa a un lato di 10 cm: $2 \cdot 48 : 10 = 9{,}6$ cm.

35. a) Le perpendicolari da P ai lati dividono AB in due parti x, x' e AD in due parti y, y', con A all'incrocio di x e y e C all'incrocio di x' e y'. Per Pitagora: $PA^2 = x^2 + y^2$, $PC^2 = x'^2 + y'^2$, $PB^2 = x'^2 + y^2$, $PD^2 = x^2 + y'^2$. Le due somme valgono entrambe $x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2$. b) $PD^2 = 9 + 25 - 16 = 18$, $PD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$.