CAPITOLO

2

I radicali

Una calcolatrice dà dieci cifre di $\sqrt{2}$ e si ferma. Il simbolo $\sqrt{2}$ non si ferma mai: è il numero intero, tutto in una volta.

OBIETTIVI

1. Definire la radice n-esima aritmetica, distinguere indice pari e dispari e scrivere le condizioni di esistenza.
2. Usare correttamente $\sqrt{a^2} = |a|$ e il valore assoluto nei calcoli con le lettere.
3. Applicare la proprietà invariantiva per semplificare, ridurre allo stesso indice e confrontare radicali.
4. Moltiplicare, dividere e sommare radicali, trasportare fattori e razionalizzare i denominatori.
5. Passare dai radicali alle potenze con esponente razionale e sapere perché la base deve essere positiva.
6. Risolvere equazioni e disequazioni di primo grado con coefficienti irrazionali.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 La radice n-esima 2
2.2 La proprietà invariantiva e il confronto 6
2.3 Moltiplicare e dividere radicali 7
2.4 Somme di radicali e razionalizzazione 9
2.5 Potenze con esponente razionale 12
2.6 Equazioni e disequazioni con coefficienti irrazionali 14

Matematica 2 · Parte I · I numeri reali · versione 1.0
Capitolo 2: I radicali · pagine 43–60 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente abbiamo scoperto che i numeri razionali non bastano: la diagonale di un quadrato di lato 1 misura $\sqrt{2}$, un numero che non è il rapporto di due interi, e insieme a lui esistono infiniti altri irrazionali. Con l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali la retta non ha più «buchi». Ora dobbiamo imparare a *calcolare* con questi numeri.

La calcolatrice dice che $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ Ma quella scritta è un'approssimazione, e ogni volta che la usiamo in un calcolo l'errore si porta dietro. Se invece scriviamo $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ oppure $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = 4$, diciamo una cosa *esatta*. In questo capitolo impariamo le regole che permettono di trasformare, semplificare e confrontare espressioni con le radici, senza perdere l'esattezza. Le incontrerai continuamente: nella geometria (la diagonale di un quadrato, l'altezza di un triangolo equilatero), nelle formule delle misure (il lato di un quadrato di area data, lo spigolo di un cubo di volume dato), persino nel formato dei fogli di carta che usi ogni giorno.

Un avvertimento, che è anche una promessa. Il calcolo con i radicali può diventare un esercizio di pura manipolazione, lungo e noioso. Non è questo lo scopo. Ci interessano poche regole, capite a fondo: perché valgono, quando valgono e quando invece portano fuori strada.

2.1 La radice *n*-esima

2.1.1 La radice quadrata aritmetica

L'equazione $x^2 = 9$ ha due soluzioni, 3 e -3, perché $3^2 = 9$ e $(-3)^2 = 9$. Il simbolo $\sqrt{9}$ invece indica un numero solo: per convenzione, quello non negativo.

Dato un numero reale $a \geq 0$, la **radice quadrata aritmetica** di a, indicata con $\sqrt{a}$, è il numero reale *non negativo* il cui quadrato è a:

$$\sqrt{a} = b \iff b \geq 0 \text{ e } b^2 = a$$

Così $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, $\sqrt{0} = 0$, e $\sqrt{\dfrac{49}{4}} = \dfrac{7}{2}$. Invece $\sqrt{-9}$ non esiste in $\mathbb{R}$: il quadrato di un numero reale non è mai negativo. Che per ogni $a \geq 0$ un tale numero esista davvero, e sia uno solo, è proprio una delle cose che $\mathbb{R}$ garantisce e $\mathbb{Q}$ no: lo abbiamo visto nel capitolo 1 con $\sqrt{2}$.

2.1.2 La radice *n*-esima aritmetica

Lo stesso discorso vale per le potenze di esponente qualsiasi. Sia n un numero naturale, $n \geq 2$, e sia $a \geq 0$. La **radice *n*-esima aritmetica** di a è il numero reale non negativo la cui potenza n-esima è a:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b \geq 0 \text{ e } b^n = a$$

La scrittura $\sqrt[n]{a}$ si chiama **radicale**; il numero n è l'**indice** della radice, il numero a sotto il segno di radice è il **radicando**. Quando l'indice è 2 non si scrive: $\sqrt{a}$ significa $\sqrt[2]{a}$. Con indice 3 si parla di **radice cubica**. Qualche esempio: $\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ perché $0{,}1^3 = 0{,}001$; $\sqrt[5]{32} = 2$ perché $2^5 = 32$. Infine $\sqrt[n]{1} = 1$ e $\sqrt[n]{0} = 0$ per ogni indice.

2.1.3 Indice dispari e radicando negativo

Che cosa succede se il radicando è negativo? Con un indice dispari la potenza conserva il segno: $(-2)^3 = -8$. Esiste dunque uno e un solo numero reale il cui cubo è -8, cioè -2, e scriviamo $\sqrt[3]{-8} = -2$. Allo stesso modo $\sqrt[5]{-32} = -2$ e $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$. Con un indice pari invece nessun numero reale elevato alla potenza n dà un risultato negativo, e il radicale non esiste in $\mathbb{R}$. La figura 2.1 riassume i due casi.

IN SINTESI

Convenzione di questo libro.

- Il radicale con indice **pari** è definito solo per radicando ≥ 0, e il suo valore è ≥ 0.
- Il radicale con indice **dispari** è definito per *ogni* radicando reale, e il suo valore ha lo stesso segno del radicando: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ per n dispari.

Le regole di calcolo dei paragrafi seguenti sono enunciate per radicandi non negativi. Un radicale di indice dispari con radicando negativo si riporta a quel caso portando il segno meno fuori: $\sqrt[3]{-54} = -\sqrt[3]{54}$.

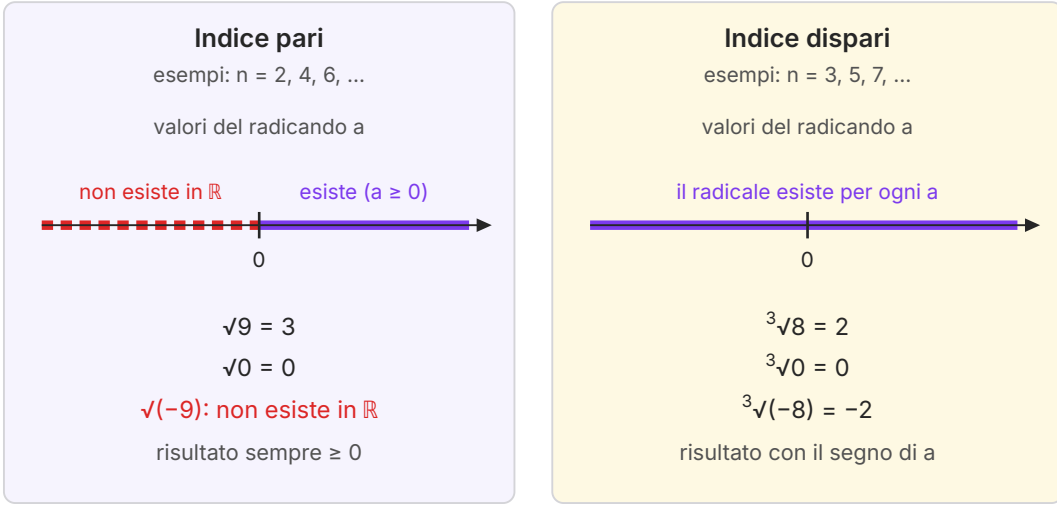
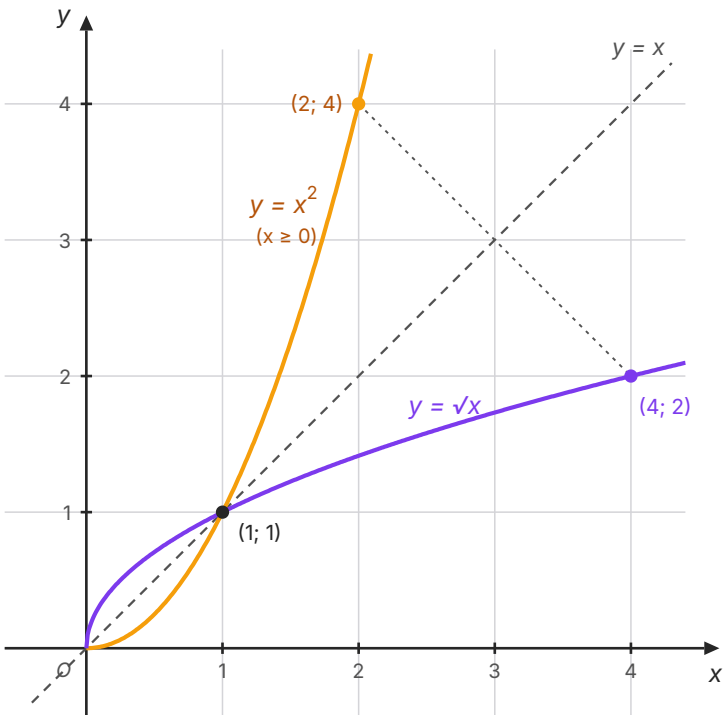


Figura 2.1 Quando esiste il radicale $\sqrt[n]{a}$. Con indice pari il radicando deve essere non negativo e il risultato è non negativo; con indice dispari il radicale esiste per ogni a reale e ha il segno di a.

2.1.4 Il radicale come funzione inversa

Nel primo volume abbiamo visto che una funzione ha un'inversa quando da ogni immagine si risale a un solo punto di partenza, e che $y = x^2$ su tutto $\mathbb{R}$ non ce l'ha: 3 e −3 hanno la stessa immagine 9. Se però la restringiamo agli $x \geq 0$, ogni numero $y \geq 0$ è il quadrato di uno e un solo $x \geq 0$, e da y si può tornare indietro. La sua inversa è proprio $y = \sqrt{x}$: la radice quadrata «disfa» il quadrato. Come per ogni coppia di funzioni inverse, i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$ (figura 2.2): il punto (2; 4) sta sulla parabola e il punto (4; 2) sulla curva della radice.



I due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice y = x: il punto (a; b) sta su uno se e solo se (b; a) sta sull'altro.

Figura 2.2 Il grafico di $y = \sqrt{x}$ (in viola) è il simmetrico, rispetto alla retta $y = x$, del grafico di $y = x^2$ con $x \geq 0$ (in arancione). Entrambi i grafici sono calcolati dalle equazioni.

La funzione $y = x^3$ invece non ha bisogno di restrizioni: numeri diversi hanno cubi diversi, e ogni numero reale è il cubo di uno e un solo numero reale. La sua inversa $y = \sqrt[3]{x}$ è definita per ogni x reale (figura 2.3). Entrambe le funzioni radice sono *crescenti*: se $0 \leq a < b$ allora $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Useremo questa proprietà per confrontare i radicali.

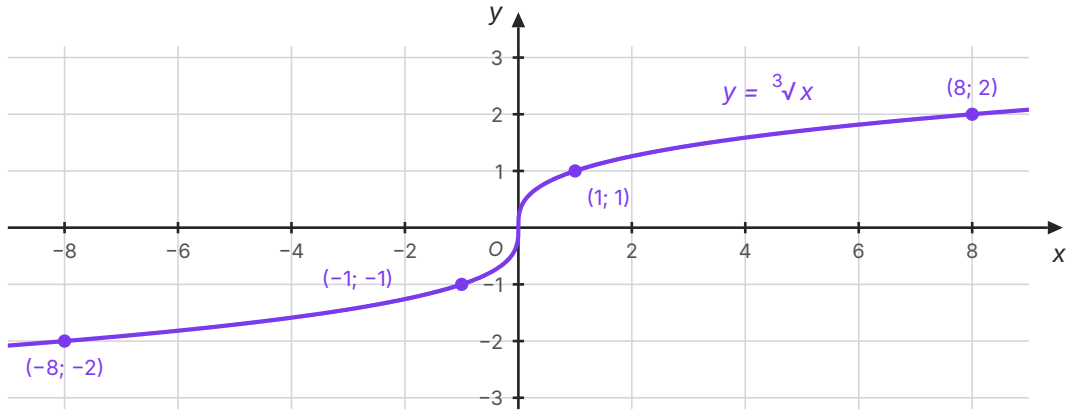


Figura 2.3 Il grafico di $y = \sqrt[3]{x}$, calcolato dall'equazione: è definito per ogni x reale, passa per l'origine ed è simmetrico rispetto a essa (la radice cubica di un numero negativo è negativa).

2.1.5 Condizioni di esistenza

Quando il radicando contiene una lettera, prima di qualsiasi calcolo si scrivono le **condizioni di esistenza** (C.E.), come facevamo per le frazioni algebriche nel primo volume:

- con indice **pari**, il radicando deve essere maggiore o uguale a zero (e deve esistere: niente denominatori nulli);
- con indice **dispari**, basta che il radicando esista.

ESEMPIO SVOLTO

Scriviamo le condizioni di esistenza dei radicali $\sqrt{x-3}$, $\sqrt[4]{5-2x}$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$, $\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$.

- $\sqrt{x-3}$: indice pari, quindi $x - 3 \geq 0$, cioè $x \geq 3$.
- $\sqrt[4]{5-2x}$: $5 - 2x \geq 0$, cioè $-2x \geq -5$; dividendo per -2 il verso si inverte: $x \leq \dfrac{5}{2}$.
- $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$: indice dispari, il radicando può essere negativo; serve solo che la frazione esista: $x \neq 0$.
- $\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$: la frazione deve esistere e non essere negativa. Il numeratore 1 è positivo, quindi serve un denominatore positivo: $x - 2 > 0$, cioè $x > 2$. Il valore $x = 2$ è escluso perché annulla il denominatore.

2.1.6 La radice quadrata di un quadrato

Quanto vale $\sqrt{a^2}$? Viene spontaneo rispondere a, ma proviamo con $a = -3$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, che non è -3. La radice quadrata aritmetica è sempre non negativa, quindi non può valere -3. Il numero non negativo il cui quadrato è a^2 è il valore assoluto di a, che nel capitolo 1 abbiamo interpretato come la distanza di a dall'origine:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

Lo stesso ragionamento vale per ogni indice pari: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $\sqrt[6]{a^6} = |a|$. Con indice dispari invece la potenza conserva il segno e il valore assoluto non serve: $\sqrt[3]{a^3} = a$ per ogni a, per esempio $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

> **ERRORE FREQUENTE**
> **«$\sqrt{x^2} = x$».** È vero solo per $x \geq 0$. In generale $\sqrt{x^2} = |x|$: per $x = -5$ si ha $\sqrt{25} = 5 = |-5|$. Il valore assoluto si può togliere solo quando sappiamo il segno, per esempio perché le condizioni di esistenza di un'espressione impongono già $x \geq 0$. Attenzione anche alla scrittura inversa: $(\sqrt{x})^2 = x$ vale solo dove $\sqrt{x}$ esiste, cioè per $x \geq 0$.

2.2 La proprietà invariantiva e il confronto

Una frazione non cambia se si moltiplicano numeratore e denominatore per uno stesso numero. Per i radicali vale una regola analoga, che lega l'indice e l'esponente del radicando.

Vale la **proprietà invariantiva** dei radicali: se $a \geq 0$ e n, m, p sono naturali (con $n \geq 2$, $p \geq 1$), allora

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

Moltiplicando, o dividendo quando è possibile, l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale non nullo, il valore del radicale non cambia.

Perché vale. Sia $b = \sqrt[n]{a^m}$: allora $b \geq 0$ e $b^n = a^m$. Elevando alla p: $b^{np} = a^{mp}$. Quindi b è un numero non negativo la cui potenza np-esima è a^{mp}, cioè $b = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

2.2.1 Semplificare un radicale

Letta da destra a sinistra, la proprietà permette di *semplificare*: $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ (indice ed esponente divisi per 3); $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$; $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$. Un radicale in cui l'indice e gli esponenti di tutti i fattori del radicando non hanno divisori comuni (diversi da 1) si dice **radicale irriducibile**. Per semplificare conviene scomporre il radicando in fattori primi, proprio come si scompone numeratore e denominatore di una frazione.

La condizione $a \geq 0$ non è un dettaglio. Con un radicando letterale di segno sconosciuto bisogna stare attenti: $\sqrt[4]{x^2}$ esiste per ogni x (il radicando x^2 non è mai negativo), mentre $\sqrt{x}$ esiste solo per $x \geq 0$. Le due scritture non sono equivalenti. Si scrive correttamente $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$: per $x = -3$ entrambi i membri valgono $\sqrt{3}$. Invece con $\sqrt[6]{x^4}$ il problema non si pone: $x^4 = (x^2)^2$ e $x^2 \geq 0$, quindi $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$ per ogni x.

2.2.2 Ridurre allo stesso indice e confrontare

Letta da sinistra a destra, la proprietà invariantiva permette di scrivere più radicali con lo stesso indice, come si riducono le frazioni allo stesso denominatore. Si sceglie come **indice comune** il minimo comune multiplo degli indici. Per esempio $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$ hanno indici 2 e 3, con mcm 6: $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ e $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$.

Ridurre allo stesso indice serve soprattutto a *confrontare*. Poiché la funzione radice è crescente, tra due radicali con lo stesso indice è maggiore quello con il radicando maggiore. Nell'esempio: $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, quindi $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. Senza calcolatrice e senza approssimazioni!

ESEMPIO SVOLTO

Disponiamo in ordine crescente $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$.

Gli indici sono 2, 3, 4; il loro mcm è 12. Applichiamo la proprietà invariantiva:

- $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$;
- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$;
- $\sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$.

Poiché $512 < 625 < 729$, si ha $\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$. Controllo con la calcolatrice: $\sqrt[4]{8} \approx 1{,}682$, $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}710$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. I tre numeri sono molto vicini: proprio per questo il metodo esatto è prezioso.

2.3 Moltiplicare e dividere radicali

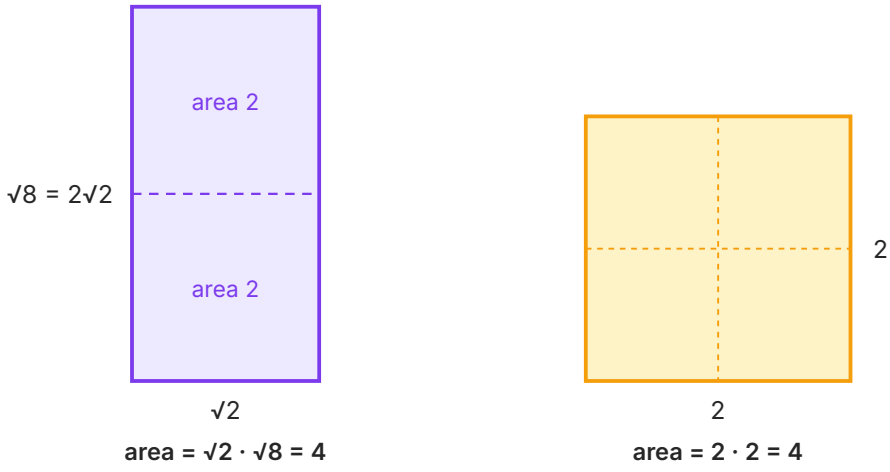
2.3.1 Prodotto e quoziente

Due radicali con lo *stesso indice* si moltiplicano moltiplicando i radicandi:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad (a, b \geq 0;\ \text{nel quoziente } b \neq 0)$$

Perché vale. Il numero $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ è non negativo, e la sua potenza n-esima è $(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$. Allora, per definizione, è la radice n-esima di ab. Per il quoziente il ragionamento è identico.

Così $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt{50} : \sqrt{2} = \sqrt{25} = 5$. Come avevamo osservato nel capitolo 1, il prodotto di due irrazionali può essere razionale. La figura 2.4 lo mostra con le aree: un rettangolo di lati $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ ha la stessa area di un quadrato di lato 2.



Lati irrazionali, area razionale: le due figure sono equivalenti.

Figura 2.4 Il rettangolo di lati √2 e √8 = 2√2 è formato da due quadrati di lato √2, ciascuno di area 2: la sua area è $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, come quella del quadrato di lato 2.

Se gli indici sono diversi, prima si riducono allo stesso indice: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{72}$.

2.3.2 Portare un fattore fuori dal segno di radice

Leggiamo la regola del prodotto al contrario. Se il radicando contiene un fattore che è una potenza n-esima, quel fattore può uscire dalla radice: $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Questa operazione si chiama **trasporto fuori dal segno di radice**; il numero 6 davanti al radicale è il **coefficiente** del radicale. In pratica si scompone il radicando in fattori primi e, per ogni fattore, si divide l'esponente per l'indice: il quoziente dà l'esponente fuori, il resto quello che rimane dentro. Per esempio $\sqrt[3]{2^7} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$, perché 7 diviso 3 dà quoziente 2 e resto 1.

Con le lettere torna in gioco il valore assoluto: per indice pari, $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ con $b \geq 0$. Per esempio $\sqrt{18x^2} = 3|x|\sqrt{2}$ per ogni x reale. Se invece le condizioni di esistenza garantiscono già il segno, il valore assoluto si toglie: $\sqrt{x^3}$ esiste solo per $x \geq 0$, e allora $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$.

2.3.3 Portare un fattore dentro il segno di radice

L'operazione inversa porta un coefficiente sotto la radice, elevandolo all'indice: $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$, $2^3\sqrt{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$. Serve, per esempio, a confrontare $3\sqrt{2}$ e $2\sqrt{5}$: diventano $\sqrt{18}$ e $\sqrt{20}$, quindi $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$.

ERRORE FREQUENTE

Portare dentro un fattore negativo. È sbagliato scrivere $-2\sqrt{3} = \sqrt{(-2)^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$: il primo membro è negativo, il secondo positivo! Con indice pari dentro la radice entrano solo fattori non negativi; il segno meno resta fuori: $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$. Con indice dispari il problema non c'è, perché il segno passa dentro: $-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-24}$. E se il coefficiente è una lettera di segno sconosciuto bisogna distinguere i casi: per $a < 0$ si ha $a\sqrt{3} = -\sqrt{3a^2}$.

2.3.4 Potenza e radice di un radicale

Infine due regole che seguono dalle precedenti (sempre con $a \geq 0$): per elevare un radicale a potenza si eleva il radicando, e la radice di un radicale è un radicale con indice uguale al prodotto degli indici.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Per esempio $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$ e $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$ (controllo: $\sqrt{64} = 8$ e $\sqrt[3]{8} = 2$).

Qualche esempio. Calcoliamo a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$; b) $(\sqrt[3]{4})^2 \cdot \sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

a) Stesso indice: $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15} = \sqrt{900} = 30$. Conviene non moltiplicare subito:

$$6 \cdot 10 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

e la radice si legge a occhio.

b) $(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{16}$, quindi $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$.

c) Indici diversi: $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$ e $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$, quindi il prodotto è $\sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$, già irriducibile.

2.4 Somme di radicali e razionalizzazione

2.4.1 Radicali simili

Due radicali si dicono **radicali simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, e differiscono al più per il coefficiente: $3\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$ sono simili, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ no, $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ nemmeno. La somma algebrica di radicali simili si esegue come quella di monomi simili, grazie alla proprietà distributiva:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 5 - 1)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Radicali non simili non si possono sommare: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ resta così, ed è un numero reale perfettamente definito (vale circa 3,146). Spesso però due radicali che *sembrano* diversi diventano simili dopo aver portato fuori i fattori: $\sqrt{12} + \sqrt{75} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

ERRORE FREQUENTE

La radice di una somma non è la somma delle radici. Si ha $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, mentre $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. In generale $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. La regola del prodotto vale per i *fattori*, non per gli *addendi*: è lo stesso errore che si commette «semplificando» gli addendi di una frazione.

2.4.2 Espressioni e prodotti notevoli

Nelle espressioni con i radicali valgono tutte le regole del calcolo letterale del primo volume, compresi i prodotti notevoli. Due casi ricorrono spesso (con $a, b \geq 0$):

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \qquad (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

La seconda uguaglianza è la somma per differenza: i due radicali «spariscono» e resta un numero razionale se a e b lo sono. Le due espressioni $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ e $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, come pure $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$, si dicono **coniugate**: tra poco saranno lo strumento principale.

Vediamo un esempio: semplifichiamo $E = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6} - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$.

Il primo termine è il quadrato di un binomio:

$$(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 12 - 4\sqrt{6} + 2 = 14 - 4\sqrt{6}$$

L'ultimo è una somma per differenza: $(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4$.

Quindi $E = 14 - 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 4 = 10$. Un'espressione piena di irrazionali ha un valore intero: non è un caso raro, ed è uno dei motivi per cui conviene calcolare in modo esatto.

2.4.3 Razionalizzare il denominatore

Una frazione come $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ha un denominatore irrazionale. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$ (proprietà invariantiva delle frazioni) si ottiene $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, un numero uguale ma con il denominatore razionale. Questa trasformazione si chiama **razionalizzazione** del denominatore. Prima della calcolatrice era una necessità pratica: dividere 1,4142… per 2 a mano è facile, dividere 1 per 1,4142… molto meno. Oggi resta utile perché porta le espressioni a una forma standard, in cui è facile riconoscere radicali simili e confrontare risultati.

Si moltiplica numeratore e denominatore per un fattore scelto in modo che il denominatore diventi razionale:

- denominatore $\sqrt{a}$: si moltiplica per $\sqrt{a}$, perché $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$;
- denominatore $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$: si moltiplica per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, perché il prodotto è $\sqrt[n]{a^n} = a$;
- denominatore $a + \sqrt{b}$, $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: si moltiplica per il *coniugato*, e la somma per differenza fa sparire le radici: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$. Il nuovo deno-

minatore deve essere diverso da zero: per questo serve $a^2 \neq b$ nel primo caso e $a \neq b$ nel secondo.

ESEMPIO SVOLTO

Razionalizziamo a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$; c) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

b) $25 = 5^2$: manca un fattore 5 per arrivare a 5^3. $\frac{10}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10\sqrt[3]{5}}{5} = 2\sqrt[3]{5}$.

c) Il coniugato di $3-\sqrt{5}$ è $3+\sqrt{5}$: $\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5} = 3+\sqrt{5}$.

d) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

COLLEGAMENTI

Il foglio A4 e la radice di 2. I formati di carta della serie A (norma internazionale ISO 216) hanno tutti i lati nel rapporto $\sqrt{2}$, e il formato A0 ha l'area di 1 m^2. Perché proprio $\sqrt{2}$? Perché è l'unico rapporto che si conserva piegando il foglio a metà (figura 2.5).

Un foglio di lati l e $l\sqrt{2}$, tagliato a metà del lato lungo, dà due fogli di lati $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ e l. Il nuovo rapporto è $l : \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (abbiamo razionalizzato). Così un A4 piegato in due dà due A5 con la stessa forma, e una fotocopiatrice può ridurre un A3 in un A4 senza deformarlo. Il foglio A4 misura 210 mm × 297 mm, e infatti $297 : 210 \approx 1{,}414$, molto vicino a $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$: le misure sono arrotondate al millimetro.

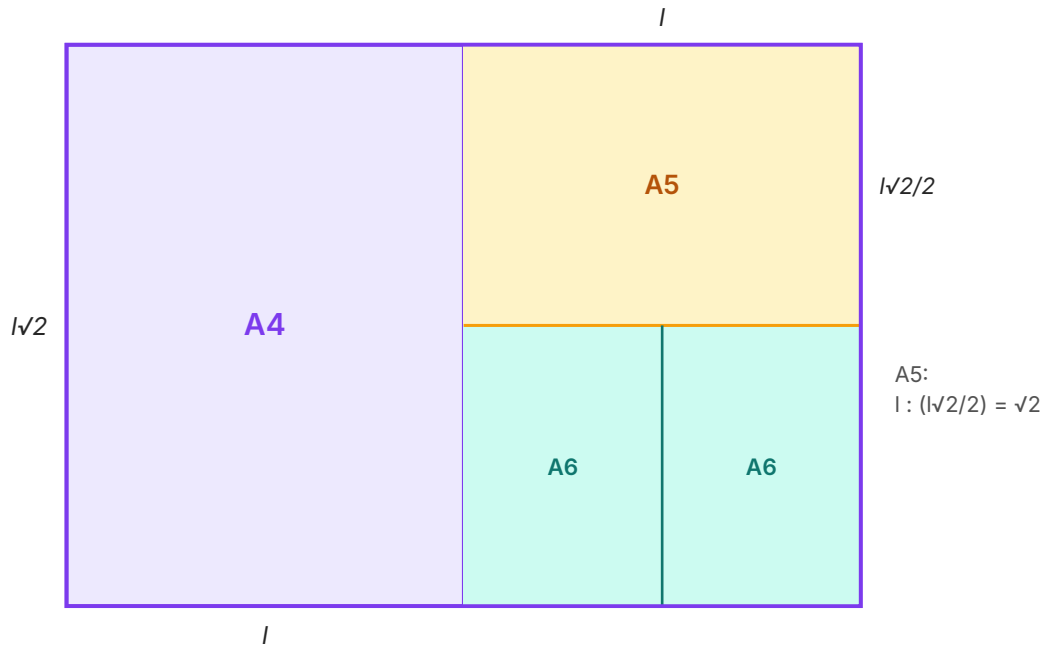


Figura 2.5 Dividendo a metà un foglio con i lati in rapporto √2 si ottengono due fogli con lo stesso rapporto: un foglio A3 si divide in due A4, un A4 in due A5, un A5 in due A6.

APPROFONDIMENTO · I RADICALI DOPPI

Un **radicale doppio** è un'espressione del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, con $a > 0$, $b \geq 0$ e $a^2 \geq b$. Ponendo $c = \sqrt{a^2 - b}$ vale la formula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}$$

che si verifica elevando al quadrato entrambi i membri (sono entrambi non negativi). La formula è utile solo quando $a^2 - b$ è un quadrato perfetto, perché allora il radicale doppio diventa somma di radicali semplici. Esempio: $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$ ha $c = \sqrt{49 - 48} = 1$, quindi $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Controllo: $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$.

2.5 Potenze con esponente razionale

Nel primo volume abbiamo definito le potenze con esponente intero, anche negativo: $2^{-3} = \frac{1}{8}$. Possiamo dare un significato anche a $2^{\frac{1}{2}}$? Se vogliamo che resti valida la regola $(a^m)^n = a^{mn}$,

deve essere $(2^{1/2})^2 = 2^1 = 2$: il numero $2^{1/2}$ deve avere quadrato 2, e se lo vogliamo positivo come tutte le potenze di base positiva, non può che essere $\sqrt{2}$. Questa osservazione suggerisce la definizione.

IN SINTESI

Potenza con esponente razionale. Se $a > 0$, m è intero e n è naturale con $n \geq 2$:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Per $a = 0$ si pone $0^{m/n} = 0$ quando $\frac{m}{n} > 0$. Con questa definizione valgono tutte le proprietà delle potenze: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $a^r : a^s = a^{r-s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $(ab)^r = a^r b^r$, $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ (con $a, b > 0$ e r, s razionali).

La definizione chiama **potenza con esponente razionale** un radicale scritto in un'altra forma. Ma c'è un controllo da fare: lo stesso numero razionale si scrive in infiniti modi, per esempio $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Il valore della potenza non deve dipendere dalla frazione scelta. Per $a > 0$ è così, grazie alla proprietà invariantiva: $a^{4/6} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcoliamo a) $8^{2/3}$; b) $16^{-3/4}$; c) $2^{1/2} \cdot 2^{1/3}$; d) $(a^{2/3})^{3/4}$ con $a > 0$.

a) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$. Più rapido: $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$.

b) $16^{-3/4} = (2^4)^{-3/4} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

c) Si sommano gli esponenti: $2^{1/2 + 1/3} = 2^{5/6} = \sqrt[6]{32}$, lo stesso risultato ottenuto prima riducendo allo stesso indice. Le potenze rendono i calcoli più meccanici.

d) $a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = a^{1/2} = \sqrt{a}$.

2.5.1 Perché la base deve essere positiva

Si potrebbe pensare di scrivere $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$. Ma allora, poiché $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, dovrebbe anche essere $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Lo stesso simbolo avrebbe due valori diversi, -2 e 2: la proprietà invariantiva, che garantisce la coerenza della definizione, vale solo per basi non negative. Per questo in questo libro **una base negativa non si eleva mai a un esponente frazionario**. Il numero -2 si scrive come radicale, $\sqrt[3]{-8}$, e non come potenza.

Radicale e potenza sono due scritture dello stesso numero solo per base positiva: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ con $a > 0$. Sulla calcolatrice la radice n-esima si ottiene spesso con il tasto di potenza e l'espo-

nente $1/n$; molte calcolatrici danno errore con una base negativa anche quando l'indice è dispari, proprio per il motivo appena visto.

I radicali compaiono spesso nelle formule. Il lato di un quadrato di area A è $l = \sqrt{A}$, lo spigolo di un cubo di volume V è $s = \sqrt[3]{V}$. Un quadrato di area 18 m^2 ha lato $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m. Se l'area quadruplica, il lato raddoppia: $\sqrt{4A} = 2\sqrt{A}$. Se invece il volume di un cubo si moltiplica per 8, lo spigolo raddoppia: $\sqrt[3]{8V} = 2 \cdot \sqrt[3]{V}$. Leggere una formula con un radicale significa capire come cambia il risultato quando cambia un dato: la radice «smorza» le variazioni.

2.6 Equazioni e disequazioni con coefficienti irrazionali

Le equazioni e le disequazioni di primo grado si risolvono con i principi di equivalenza che conosci dal primo volume, anche quando i coefficienti sono irrazionali. Cambia solo il calcolo: per isolare l'incognita si divide per un coefficiente come $\sqrt{2} - 1$, e il risultato si razionalizza.

Per esempio, risolviamo $\sqrt{2}\,x - 1 = x$.

Portiamo i termini con x a sinistra: $\sqrt{2}\,x - x = 1$, cioè $(\sqrt{2} - 1)x = 1$. Il coefficiente $\sqrt{2} - 1$ non è zero, quindi l'equazione è determinata:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Verifica: $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) - 1 = 2 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} + 1$, che è proprio il valore di x.

Nelle disequazioni c'è un'insidia in più. Dividendo per un numero negativo il verso si inverte; ma un coefficiente come $\sqrt{3} - 2$ è positivo o negativo? Bisogna stabilirlo *prima* di dividere, confrontando i due termini: poiché $3 < 4$, si ha $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$, quindi $\sqrt{3} - 2 < 0$.

ESEMPIO SVOLTO

Risolviamo $(\sqrt{3} - 2)x \geq 1$.

Il coefficiente è negativo (vedi sopra): dividendo, il verso si inverte.

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = \frac{\sqrt{3} + 2}{3 - 4} = -2 - \sqrt{3}$$

Le soluzioni sono $x \leq -2 - \sqrt{3}$, cioè l'intervallo $]-\infty;\, -2 - \sqrt{3}]$. Controllo con un valore: per $x = -4$ (che è minore di $-2 - \sqrt{3} \approx -3{,}73$) si ha $(\sqrt{3} - 2)(-4) = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1{,}07 \geq 1$: vero.

I sistemi di disequazioni si risolvono come nel primo volume: si risolve ciascuna disequazione e si prende l'intersezione delle soluzioni. Per esempio il sistema formato da $\sqrt{2}\,x + 1 > 0$ e $x - \sqrt{3} \leq 0$ dà $x > -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x \leq \sqrt{3}$; poiché $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$, le soluzioni sono $]-\frac{\sqrt{2}}{2};\, \sqrt{3}]$. Per disegnare gli estremi sulla retta servono le loro approssimazioni: $-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}71$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Un problema: un rettangolo ha i lati nel rapporto $\sqrt{2}$, come un foglio A4, e perimetro 10 cm. Quanto misurano i lati?

Chiamiamo x il lato minore (in cm, $x > 0$); il lato maggiore è $\sqrt{2}\,x$. Il perimetro dà $2x + 2\sqrt{2}\,x = 10$, cioè $(1 + \sqrt{2})x = 5$:

$$x = \frac{5}{1+\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 5(\sqrt{2}-1) = 5\sqrt{2} - 5$$

Il lato maggiore è $\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 5) = 10 - 5\sqrt{2}$. Valori approssimati: $5\sqrt{2} - 5 \approx 2{,}07$ cm e $10 - 5\sqrt{2} \approx 2{,}93$ cm; controllo: $2 \cdot (2{,}07 + 2{,}93) = 10$. La soluzione è accettabile perché positiva.

SINTESI

- Per $a \geq 0$, la radice n-esima aritmetica $\sqrt[n]{a}$ è il numero non negativo la cui potenza n-esima è a; n è l'indice, a il radicando.
- Con indice pari il radicale esiste solo per radicando ≥ 0; con indice dispari esiste per ogni radicando e ha il suo segno: $\sqrt[3]{-8} = -2$.
- Le condizioni di esistenza si scrivono prima di ogni calcolo: radicando ≥ 0 per indice pari.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni a reale; con indice dispari $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- Proprietà invariantiva: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ $(a \geq 0)$; serve a semplificare, a ridurre allo stesso indice e a confrontare radicali.
- Radicali con lo stesso indice si moltiplicano e si dividono operando sui radicandi; si possono portare fattori fuori e dentro il segno di radice (dentro un indice pari entrano solo fattori non negativi).
- Si sommano solo radicali simili (stesso indice, stesso radicando); $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Razionalizzare significa rendere razionale il denominatore: si moltiplica per $\sqrt{a}$, per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ o per il binomio coniugato.
- Per $a > 0$: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, e valgono tutte le proprietà delle potenze; una base negativa non si eleva a esponenti frazionari.
- Equazioni e disequazioni con coefficienti irrazionali si risolvono con i principi di equivalenza; prima di dividere, stabilisci il segno del coefficiente.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Il numero $\sqrt[3]{-27}$:
   - **A.** vale -3
   - **B.** vale 3
   - **C.** non esiste in $\mathbb{R}$
   - **D.** vale ± 3

2. ● Il valore di $\sqrt{(-5)^2}$ è:

   A. -5
   B. ± 5
   C. 5
   D. 25

3. ● Le condizioni di esistenza di $\sqrt{4-2x}$ sono:

   A. $x \geq 2$
   B. $x \leq 2$
   C. $x \geq -2$
   D. $x \neq 2$

4. ●● Quale uguaglianza è vera per ogni $a \geq 0$ e $b \geq 0$?

   A. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
   B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
   C. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
   D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

5. ●● La potenza $8^{2/3}$ vale:

   A. $\dfrac{16}{3}$
   B. 2
   C. 4
   D. 64

6. ●● Razionalizzando $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ si ottiene:

   A. $2\sqrt{3}$
   B. $6\sqrt{3}$
   C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   D. $3\sqrt{2}$

7. ●● Il maggiore tra i numeri $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[6]{26}$ è:

   A. $\sqrt[3]{5}$
   B. $\sqrt[6]{26}$
   C. sono tutti uguali
   D. $\sqrt{3}$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$. b) $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$. c) $\sqrt{x^2} = x$ per ogni x reale. d) $\sqrt[3]{-x^3} = -x$ per ogni x reale.

9. ● Completa. Nel radicale $\sqrt[n]{a}$ il numero n si chiama _____ e il numero a si chiama _____. Due radicali si dicono simili se hanno _____. Razionalizzare una frazione significa _____.

Calcolare

10. ● Calcola, se esistono in $\mathbb{R}$: a) $\sqrt{0{,}09}$; b) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; c) $\sqrt[4]{-16}$; d) $\sqrt[5]{32}$; e) $\sqrt{1+\frac{9}{16}}$.

11. ● Scrivi le condizioni di esistenza: a) $\sqrt{x-3}$; b) $\sqrt[3]{x+5}$; c) $\sqrt[4]{2-x}$; d) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$; e) $\sqrt{x^2+1}$.

12. ●● Semplifica: a) $\sqrt[6]{8}$; b) $\sqrt[4]{9}$; c) $\sqrt[10]{32}$; d) $\sqrt[4]{x^2}$ con x reale qualsiasi; e) $\sqrt[6]{x^4}$ con x reale qualsiasi.

13. ●● Riduci allo stesso indice e disponi in ordine crescente: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{5}$.

14. ●● Calcola e semplifica: a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$; b) $\sqrt{50}:\sqrt{2}$; c) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}$; d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; e) $(\sqrt[3]{2})^4$.

15. ●● Porta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili: a) $\sqrt{72}$; b) $\sqrt[3]{54}$; c) $\sqrt{12a^3b^2}$ con $a, b > 0$; d) $\sqrt{18x^2}$ con x reale qualsiasi.

16. ●● Porta dentro il segno di radice: a) $3\sqrt{2}$; b) $-2\sqrt{5}$; c) $2^3\sqrt{3}$; d) $-2^3\sqrt{3}$; e) $a\sqrt{3}$ con $a < 0$.

17. ●● Esegui le somme algebriche: a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$; c) $2\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{8}$; d) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$.

18. ●● Calcola: a) $(\sqrt{3}+1)^2$; b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$; c) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; d) $\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{2})$.

19. ●● Razionalizza: a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$; d) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

20. ●● a) Calcola $27^{2/3}$ e $16^{-3/4}$. b) Scrivi come radicale $5^{3/4}$. c) Scrivi come unico radicale $2^{1/2}\cdot 2^{1/3}$. d) Semplifica $(a^{2/3})^{3/4}$ con $a > 0$.

21. ●● Risolvi: a) $\sqrt{2}\,x-1=x$; b) $\sqrt{3}\,x+2=2\sqrt{3}\,x-1$; c) $(1-\sqrt{2})x>2$; d) il sistema di disequazioni formato da $\sqrt{2}\,x-2<0$ e $x+\sqrt{3}\geq 0$.

Dimostrare e argomentare

22. ●● *Trova l'errore.* Marco scrive: «$\sqrt{(-4)^2}=(-4)^{2/2}=(-4)^1=-4$». Il risultato è sbagliato: dove sta l'errore e qual è il valore corretto?

23. ●● Dimostra che per $a\geq 0$ e $b\geq 0$ vale $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, usando soltanto la definizione di radice quadrata aritmetica. Spiega perché la condizione $a, b \geq 0$ è necessaria.

24. ●● Dimostra che per $a > 0$ e $b > 0$ si ha $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$. *Suggerimento:* confronta i quadrati dei due membri, che sono positivi.

25. ●●● Dimostra la formula dei radicali doppi con il segno +. Siano $a > 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b$ e $c = \sqrt{a^2 - b}$. a) Spiega perché $0 \leq c \leq a$. b) Verifica che $\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2 = a + \sqrt{b}$ e deduci la formula del box sui radicali doppi.

26. ●● Spiega perché in questo libro non si scrive $(-8)^{1/3}$, anche se $\sqrt[3]{-8} = -2$ esiste. Fai un esempio che mostri che cosa andrebbe storto.

Problemi

27. ●● Un quadrato ha area 50 cm^2. Calcola la misura esatta del lato, in forma di radicale semplificato, e quella della diagonale.

28. ●● I fogli della serie A hanno i lati in rapporto $\sqrt{2}$ e il formato A0 ha area 1 m^2. a) Detto x il lato minore di A0 (in metri), scrivi un'equazione e ricava x come potenza di 2 con esponente razionale. b) Calcola i due lati di A0 in millimetri, arrotondati al millimetro.

29. ●● Lo spigolo di un cubo di volume V è $s = \sqrt[3]{V}$. a) Calcola in forma esatta lo spigolo di un cubo di volume 16 dm^3, semplificando il radicale. b) Che volume ha un cubo di spigolo $2 \cdot \sqrt[3]{3}$ dm?

30. ●● Il raggio di un cerchio di area A è $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$. a) Di quanto cambia r se l'area quadruplica? b) E se raddoppia? Scrivi il fattore in forma esatta e approssimata.

31. ●● Un rettangolo ha i lati di $\sqrt{12}$ cm e $\sqrt{27}$ cm. Calcola in forma esatta il perimetro, l'area e la diagonale, poi dai il perimetro approssimato al millimetro.

32. ●●● Un cubo ha volume 54 cm^3. Calcola la misura esatta dello spigolo, semplificando il radicale, e la superficie totale del cubo, in forma esatta e approssimata al decimo.

Verso la verifica

33. ●● Semplifica l'espressione $\sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})^2$.

34. ●● Razionalizza e semplifica: $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

35. ●●● *Sfida.* a) Verifica che $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ e deduci il valore di $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ (attenzione al segno!). b) Risolvi l'equazione $(\sqrt{3} - 1)x = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la storia delle notazioni algebriche, dal simbolo di radice agli esponenti frazionari.
- [CR] Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*: i numeri reali, le radici e le grandezze che si costruiscono con riga e compasso.

Glossario del capitolo

Binomi coniugati
Coppie come $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, o $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$, il cui prodotto è privo di radicali.

Coefficiente di un radicale
Il fattore che moltiplica il radicale, come 6 in $6\sqrt{2}$.

Condizioni di esistenza (di un radicale)
Condizioni sulle lettere perché il radicale abbia senso: radicando definito e, per indice pari, non negativo.

Indice
Il numero naturale $n \geq 2$ scritto sul segno di radice; se è 2 non si scrive.

Indice comune
Il minimo comune multiplo degli indici, usato per scrivere più radicali con lo stesso indice.

Potenza con esponente razionale
Per $a > 0$, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$; non si usa con basi negative.

Proprietà invariantiva dei radicali
Per $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$; il valore non cambia moltiplicando o dividendo indice ed esponente per uno stesso numero.

Radicale
Scrittura $\sqrt[n]{a}$ che indica una radice; per indice dispari è definito anche per radicando negativo.

Radicale doppio
Espressione del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$; si scrive come somma di radicali semplici quando $a^2 - b$ è un quadrato perfetto.

Radicale irriducibile
Radicale in cui l'indice e gli esponenti dei fattori del radicando non hanno divisori comuni diversi da 1.

Radicali simili
Radicali con lo stesso indice e lo stesso radicando; solo questi si sommano in un unico radicale.

Radicando
Il numero o l'espressione sotto il segno di radice.

Radice n-esima aritmetica
Dato $a \geq 0$ e $n \geq 2$, il numero non negativo $\sqrt[n]{a}$ la cui potenza n-esima è a.

Radice quadrata aritmetica
Dato $a \geq 0$, il numero non negativo $\sqrt{a}$ il cui quadrato è a.

Razionalizzazione
Trasformazione di una frazione in una equivalente con denominatore razionale.

Trasporto fuori dal segno di radice
Estrazione dalla radice dei fattori del radicando che sono potenze n-esime: $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Soluzioni

1. A. $(-3)^3 = -27$ e l'indice è dispari, quindi il radicale esiste ed è negativo.

2. C. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$: la radice quadrata aritmetica non è mai negativa.

3. B. Indice pari: $4 - 2x \geq 0$, $-2x \geq -4$, $x \leq 2$ (dividendo per -2 il verso si inverte).

4. D. È la regola del prodotto. A è falsa (per $a = 9$, $b = 16$: $5 \neq 7$); B è falsa ($\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \neq 1$); C è falsa ($\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2$).

5. C. $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$.

6. A. $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

7. D. Con indice 6: $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$, $\sqrt[6]{26}$; il radicando maggiore è 27.

8. a) Falso: $4 + 3 = 7$, mentre $\sqrt{25} = 5$; la radice di una somma non è la somma delle radici. b) Vero: il segno meno resta fuori e $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. c) Falso: $\sqrt{x^2} = |x|$. d) Vero: con indice dispari $\sqrt[3]{-x^3} = \sqrt[3]{(-x)^3} = -x$.

9. Indice; radicando; lo stesso indice e lo stesso radicando; trasformarla in una frazione equivalente con il denominatore razionale (senza radicali).

10. a) 0,3. b) $-\frac{1}{2}$. c) Non esiste in $\mathbb{R}$ (indice pari, radicando negativo). d) 2. e) $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ (attenzione: non $1 + \frac{3}{4}$).

11. a) $x \geq 3$. b) Nessuna condizione: $\forall x \in \mathbb{R}$. c) $x \leq 2$. d) $x > 1$ (frazione esistente e non negativa con numeratore positivo). e) Nessuna condizione: $x^2 + 1 > 0$ sempre.

12. a) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$. b) $\sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$. c) $\sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$. d) $\sqrt{|x|}$ (il radicando x^2 è non negativo per ogni x, mentre $\sqrt{x}$ esisterebbe solo per $x \geq 0$). e) $\sqrt[3]{x^2}$, valido per ogni x perché $x^4 = (x^2)^2$ con $x^2 \geq 0$.

13. Indice comune 6: $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$, $\sqrt[6]{5}$. Ordine: $\sqrt[6]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

14. a) $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$. b) $\sqrt{25} = 5$. c) $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$. d) $\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{32}$. e) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$.

15. a) $6\sqrt{2}$. b) $3\sqrt[3]{2}$. c) $2ab\sqrt{3a}$. d) $3|x|\sqrt{2}$.

16. a) $\sqrt{18}$. b) $-\sqrt{20}$ (il segno resta fuori). c) $\sqrt[3]{24}$. d) $\sqrt[3]{-24}$ (indice dispari: il segno entra). e) $-\sqrt{3a^2}$, perché a è negativo e $a = -|a|$.

17. a) $7\sqrt{2}$. b) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0$. c) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. d) $2^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{2} = 5^3\sqrt{2}$.

18. a) $3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$. b) $5 - 2 = 3$. c) $12 - 4\sqrt{6} + 2 = 14 - 4\sqrt{6}$. d) $\sqrt{16} - 2 = 4 - 2 = 2$.

19. a) $\frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$. b) $\frac{2^3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2^3\sqrt{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$. c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. d) $\frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$. e) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2 - \sqrt{2}$.

20. a) $27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 9$; $16^{-3/4} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. b) $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$. c) $2^{5/6} = \sqrt[6]{32}$. d) $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

21. a) $(\sqrt{2} - 1)x = 1$, $x = \sqrt{2} + 1$. b) $-\sqrt{3}\,x = -3$, $x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. c) $1 - \sqrt{2} < 0$, il verso si inverte: $x < \frac{2}{1-\sqrt{2}} = -2 - 2\sqrt{2}$. d) $x < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ e $x \geq -\sqrt{3}$: soluzioni $[-\sqrt{3}; \sqrt{2}[$.

22. Il passaggio $\sqrt{(-4)^2} = (-4)^{2/2}$ è illecito: la scrittura con esponente razionale vale solo per base positiva, e la semplificazione dell'esponente $2/2 = 1$ è proprio la proprietà invariantiva, che richiede base non negativa. Corretto: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$.

23. *Traccia.* Il numero $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ è non negativo (prodotto di numeri non negativi) e il suo quadrato è $(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$. Per definizione la radice aritmetica di ab è l'unico numero non negativo con quadrato ab, quindi $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. La condizione serve perché

$\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ esistano: per $a = b = -1$ il secondo membro, $\sqrt{1} = 1$, esiste ma il primo no.

24. Entrambi i membri sono positivi, quindi basta confrontarne i quadrati: $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$ e $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$. Poiché $2\sqrt{ab} > 0$, il secondo quadrato è maggiore; e tra due numeri positivi è maggiore quello con il quadrato maggiore. c.v.d.

25. a) $c \geq 0$ perché è una radice aritmetica; inoltre $c^2 = a^2 - b \leq a^2$ e, per numeri non negativi, il confronto dei quadrati dà $c \leq a$. Quindi $(a \pm c)/2 \geq 0$ e i due radicali esistono. b) Il quadrato vale $\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}} = a + 2 \cdot \frac{\sqrt{b}}{2} = a + \sqrt{b}$, perché $a^2 - c^2 = b$. La somma dei due radicali è un numero non negativo il cui quadrato è $a + \sqrt{b}$: per definizione è $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. c.v.d.

26. La potenza con esponente razionale deve avere lo stesso valore per frazioni equivalenti. Con base negativa questo non succede: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, ma $\sqrt[3]{-8} = -2$ mentre $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Il simbolo $(-8)^{1/3}$ sarebbe ambiguo; si usa invece il radicale $\sqrt[3]{-8}$.

27. Lato $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm; diagonale $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10$ cm.

28. a) Lati x e $\sqrt{2}\,x$: $\sqrt{2}\,x^2 = 1$, $x^2 = 2^{-1/2}$, $x = 2^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m. b) $2^{-1/4} \approx 0{,}8409$ m e $\sqrt{2} \cdot 2^{-1/4} = 2^{1/4} \approx 1{,}1892$ m: 841 mm × 1189 mm (sono proprio le misure del formato A0).

29. a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \approx 2{,}52$ dm. b) $(2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = 8 \cdot 3 = 24$ dm^3.

30. a) $\sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$: il raggio raddoppia. b) Si moltiplica per $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ (aumenta di circa il 41%).

31. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Perimetro $2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ cm. Area $\sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18$ cm^2. Diagonale $\sqrt{12 + 27} = \sqrt{39}$ cm $\approx 6{,}2$ cm.

32. Spigolo $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2} \approx 3{,}78$ cm. Superficie $6 \cdot (3\sqrt[3]{2})^2 = 54\sqrt[3]{4} \approx 85{,}7$ cm^2.

33. $\sqrt{36} - 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 6 - 3 + 4 - 2\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{3}$.

34. $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

35. a) $(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$. Poiché $\sqrt{3} - 1 > 0$, $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$ (non $1 - \sqrt{3}$, che è negativo). b) L'equazione diventa $(\sqrt{3} - 1)x = \sqrt{3} - 1$, quindi $x = 1$.