Verifica di fine parte II · Insiemi, logica e funzioni

Tempo: 60 minuti. Punteggio totale: 10 punti (punteggio indicato per ogni esercizio). Non è ammessa la calcolatrice. Scrivi tutti i passaggi: un risultato senza procedimento vale metà punteggio.

Test (0,5 punti ciascuno)

1. ● *(0,5 punti · cap. 4)* Se A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6, 8}, l'insieme A ∖ B è:
   A. {1, 3, 5}
   B. {8}
   C. {1, 3, 5, 8}
   D. {2, 4, 6}

2. ●● *(0,5 punti · cap. 4)* La negazione di «tutti gli studenti hanno superato la verifica» è:
   A. nessuno studente ha superato la verifica
   B. tutti gli studenti non hanno superato la verifica
   C. almeno uno studente non ha superato la verifica
   D. almeno uno studente ha superato la verifica

3. ●● *(0,5 punti · cap. 5)* Quale delle seguenti relazioni in $\mathbb{N}$ è una relazione di equivalenza?
   A. «$x \le y$»
   B. «x e y hanno la stessa cifra delle unità»
   C. «x è divisore di y»
   D. «$x + y = 10$»

4. ●● *(0,5 punti · cap. 5)* La funzione inversa di $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x - 6$ è:
   A. $f^{-1}(y) = 2y + 6$
   B. $f^{-1}(y) = y/2 - 6$
   C. $f^{-1}(y) = 1/(2y - 6)$
   D. $f^{-1}(y) = y/2 + 3$

Calcolare

5. ● *(1 punto · cap. 4)* Sia $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \le 10\}$; siano A l'insieme dei multipli di 2 e B l'insieme dei multipli di 3 contenuti in U. Elenca gli elementi di $A \cap B$, $A \cup B$ e del complementare di $A \cup B$ rispetto a U.

6. ●● *(1 punto · cap. 4)* Costruisci le tavole di verità di $\neg(p \wedge q)$ e di $\neg p \vee \neg q$ e stabilisci se le due proposizioni sono equivalenti. Come si chiama questa legge?

7. ●● *(1,5 punti · cap. 5)* Nell'insieme A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} è data la relazione «$x - y$ è multiplo di 3». a) Elenca le coppie della relazione. b) Verifica che è una relazione di equivalenza. c) Scrivi le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

8. ●● *(1 punto · cap. 5)* Sia $f(x) = 3x - 2$. a) Completa la tabella per $x = -1, 0, 1, 2$ e disegna il grafico; indica pendenza e ordinata all'origine. b) Con $g(x) = x^2$, calcola $(g \circ f)(1)$ e $(f \circ g)(-2)$.

Problemi

9. ●● *(1,5 punti · cap. 4)* In una classe di 25 studenti, 14 giocano a calcio, 9 a pallavolo e 5 praticano entrambi gli sport. Rappresenta la situazione con un diagramma di Venn. Quanti studenti praticano solo il calcio? Quanti solo la pallavolo? Quanti nessuno dei due sport?

10. ●● *(1 punto · cap. 5)* Un negozio noleggia biciclette con due tariffe: tariffa A, 3 € fissi più 1,50 € all'ora; tariffa B, 2,50 € all'ora senza quota fissa. a) Scrivi il costo in funzione delle ore t per ciascuna tariffa. b) Con una tabella per $t = 1, 2, 3, 4$ stabilisci per quale durata le due tariffe costano lo stesso e quale conviene per un noleggio di 4 ore.

Sfida

11. ●●● *(1 punto · cap. 4)* «Tutti i filosofi ateniesi frequentavano l'agorà; Socrate frequentava l'agorà; dunque Socrate era un filosofo ateniese.» a) Il ragionamento è valido? Rappresenta le premesse con un diagramma di Eulero-Venn e mostra, se possibile, una situazione in cui le premesse sono vere e la conclusione è falsa. b) Scrivi la prima premessa come implicazione «se… allora…» e indica quale errore logico è stato commesso.

Soluzioni

1. A. $A \setminus B$ contiene gli elementi di A che non stanno in B: {1, 3, 5}. L'8 non appartiene ad A.

2. C. La negazione di «per ogni x, $P(x)$» è «esiste almeno un x per cui non $P(x)$». La B è troppo forte (equivale a «nessuno»).

3. B. È riflessiva, simmetrica e transitiva; le classi sono i numeri che terminano con 0, con 1, ..., con 9. A e C non sono simmetriche (sono relazioni d'ordine); D non è riflessiva ($1 + 1 \neq 10$).

4. D. f «raddoppia e toglie 6»; l'inversa «aggiunge 6 e dimezza»: $(y + 6)/2 = y/2 + 3$. Controllo: $f(5) = 4$ e $4/2 + 3 = 5$.

5. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$. $A \cap B = \{0, 6\}$; $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (verifica: $6 + 4 - 2 = 8$ elementi); complementare di $A \cup B$: {1, 5, 7}.

6. Per $(p; q)$ = (V; V), (V; F), (F; V), (F; F): $\neg(p \wedge q)$ vale F, V, V, V; $\neg p \vee \neg q$ vale F, V, V, V. Le colonne coincidono: le proposizioni sono equivalenti. È una delle leggi di De Morgan.

7. a) (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6), (1; 4), (4; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3): 12 coppie. b) Riflessiva: $x - x = 0 = 3 \cdot 0$. Simmetrica: se $x - y = 3k$, allora $y - x = 3 \cdot (-k)$. Transitiva: se $x - y = 3h$ e $y - z = 3k$, allora $x - z = 3(h + k)$. c) [1] = {1, 4}, [2] = {2, 5}, [3] = {3, 6}; insieme quoziente {[1], [2], [3]}.

8. a) $x = -1, 0, 1, 2 \to y = -5, -2, 1, 4$: una retta crescente con pendenza $m = 3$ e ordinata all'origine $q = -2$. b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$; $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(4) = 10$.

9. Solo calcio: $14 - 5 = 9$; solo pallavolo: $9 - 5 = 4$. Almeno uno sport: $14 + 9 - 5 = 18$. Nessuno: $25 - 18 = 7$. Nel diagramma: 5 nell'intersezione, 9 e 4 nelle parti esterne dei due cerchi, 7 fuori dai cerchi.

10. a) $C_A = 1{,}50\,t + 3$; $C_B = 2{,}50\,t$. b) Per $t = 1, 2, 3, 4$: A costa 4,50; 6; 7,50; 9 €; B costa 2,50; 5; 7,50; 10 €. Costano uguale per 3 ore (7,50 €). Per 4 ore conviene A (9 € contro 10 €).

11. a) Non è valido. Nel diagramma l'insieme F dei filosofi ateniesi sta dentro l'insieme G di chi frequentava l'agorà; la seconda premessa colloca Socrate in G, ma può essere un punto di G fuori da F (per esempio, se Socrate fosse stato un mercante ateniese): premesse vere e conclusione falsa. b) «Se x è un filosofo ateniese, allora x frequentava l'agorà.» Dalla verità di $p \Rightarrow q$ e di q si è dedotta p: è l'errore di scambiare un'implicazione con la sua inversa (la conclusione può essere vera di fatto, ma non segue dalle premesse).