CAPITOLO

10

Rette perpendicolari e parallele

Che due binari non si incontrino lo vede chiunque; che non si incontrino mai, nemmeno all'infinito, Euclide dovette chiederlo come postulato.

OBIETTIVI

1. Dimostrare l'esistenza e l'unicità della perpendicolare per un punto e definire distanza e proiezione ortogonale.
2. Riconoscere l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo come luoghi geometrici, e costruirli con riga e compasso insieme alla perpendicolare e alla parallela per un punto.
3. Nominare le coppie di angoli formate da due rette e una trasversale e usare il criterio di parallelismo.
4. Distinguere i risultati che dipendono dal postulato delle parallele da quelli che non ne dipendono.
5. Calcolare angoli di triangoli e poligoni con i teoremi sulla somma degli angoli interni ed esterni.
6. Applicare i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli e il secondo criterio generalizzato.

INDICE DEL CAPITOLO

10.1 Rette perpendicolari 2
10.2 Rette parallele e trasversali 6
10.3 Il postulato delle parallele 9
10.4 Gli angoli di triangoli e poligoni 12
10.5 Congruenza dei triangoli rettangoli 16
10.6 Costruzioni con riga e compasso 19

Matematica 1 · Parte V · Geometria euclidea · versione 1.0
Capitolo 10: Rette perpendicolari e parallele · pagine 255–280 del volume completo · estratto per lo studio

Guarda una pagina a quadretti: le righe orizzontali non si incontrano mai, e ciascuna taglia quelle verticali formando quattro angoli retti. Parallele e perpendicolari sono ovunque: binari, spigoli di una stanza, strisce pedonali.

Eppure proprio qui la geometria ha vissuto la sua avventura più sorprendente, che è anche una lezione di filosofia sulla natura dei postulati. Nel capitolo 8 abbiamo fissato tredici postulati; nel capitolo 9 ne abbiamo aggiunto un quattordicesimo, il primo criterio di congruenza. Con quei soli strumenti si può dimostrare che le parallele *esistono*, ma non che ce n'è *una sola* per un punto dato. Per andare avanti occorre un postulato nuovo, il celebre postulato delle parallele. Da esso discenderà che la somma degli angoli di un triangolo è 180°.

10.1 Rette perpendicolari

10.1.1 La perpendicolare per un punto

Ricordiamo dal capitolo 8 che due rette incidenti si dicono **rette perpendicolari** se formano quattro angoli retti, e si scrive $r \perp s$; per il corollario del paragrafo 8.5 basta che *uno* dei quattro angoli sia retto. Il punto comune si chiama **piede della perpendicolare**.

> **IN SINTESI**
> **Teorema della perpendicolare.** Per un punto passa una e una sola retta perpendicolare a una retta data.
> **Ipotesi:** r è una retta, P è un punto. **Tesi:** esiste una e una sola retta per P perpendicolare a r.

Dimostrazione. Distinguiamo due casi.

Primo caso: $P \in r$. Il punto P divide r in due semirette opposte, che formano un angolo piatto *(definizione di angolo piatto)*. Questo angolo ha una bisettrice PQ *(postulato 13)*, che lo divide in due angoli retti *(definizione di angolo retto)*: la retta PQ è perpendicolare a r. L'unicità segue dal postulato 10: in ciascuno dei due semipiani di origine r c'è una sola semiretta di origine P che forma con r un angolo retto.

Secondo caso: $P \notin r$. *Esistenza.* Scegliamo su r due punti A e B. Nel semipiano di origine r che non contiene P tracciamo la semiretta AQ tale che $\angle QAB \cong \angle PAB$ *(postulato 10)* e su di essa il punto P' tale che $AP' \cong AP$ *(postulato 9)*. Poiché P e P' stanno in semipiani opposti, il segmento PP' incontra r in un punto H *(postulato 7)*.

1. Se $H = A$, i punti P, A, P' sono allineati e gli angoli $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ sono adiacenti e congruenti; essendo supplementari e congruenti, sono retti, e $PA \perp r$.

2. Se $H \neq A$, consideriamo i triangoli AHP e AHP': hanno AH in comune, $AP \cong AP'$ *(costruzione)* e $\angle PAH \cong \angle P'AH$ (sono gli angoli costruiti oppure, se H sta dalla parte opposta di B, i loro supplementari, congruenti per il teorema del paragrafo 8.5). Per il primo criterio di congruenza *(postulato 14, LAL)* i due triangoli sono congruenti, quindi $\angle AHP \cong \angle AHP'$.
3. Questi due angoli sono adiacenti, perché P, H, P' sono allineati; adiacenti e congruenti, sono entrambi retti. Dunque $PH \perp r$.

Unicità. Supponiamo per assurdo che da P escano due perpendicolari distinte, con piedi H e K su r. Il triangolo PHK avrebbe due angoli retti, in H e in K; ma un triangolo ha al massimo un angolo retto o ottuso *(corollario 2 del teorema dell'angolo esterno, paragrafo 9.4)*. Contraddizione. c.v.d.

10.1.2 Distanza di un punto da una retta e proiezioni

Dato un punto P fuori da r, sia H il piede della perpendicolare da P a r. Un segmento PK con $K \in r$ e $K \neq H$ si chiama **obliquo** (figura 10.1a).

> **IN SINTESI**
>
> **Teorema.** Il segmento di perpendicolare condotto da un punto a una retta è minore di ogni segmento obliquo condotto dallo stesso punto.
>
> **Ipotesi:** $P \notin r$; $PH \perp r$ con $H \in r$; $K \in r$, $K \neq H$. **Tesi:** $PH < PK$.

Dimostrazione. Nel triangolo PHK l'angolo in H è retto *(ipotesi)*, quindi l'angolo in K è acuto *(corollario 2 del teorema dell'angolo esterno)*. Allora $\angle PHK > \angle PKH$, e ad angolo maggiore si oppone lato maggiore *(paragrafo 9.5)*: $PK > PH$. c.v.d.

Il teorema giustifica una definizione naturale. Si chiama **distanza di un punto da una retta** la lunghezza del segmento di perpendicolare PH; se $P \in r$ la distanza è zero. Il punto H si chiama **proiezione ortogonale** di P su r. La proiezione ortogonale di un segmento AB su r è il segmento $A'B'$ che ha per estremi le proiezioni di A e di B (figura 10.1b); se $AB \perp r$ la proiezione si riduce a un punto.

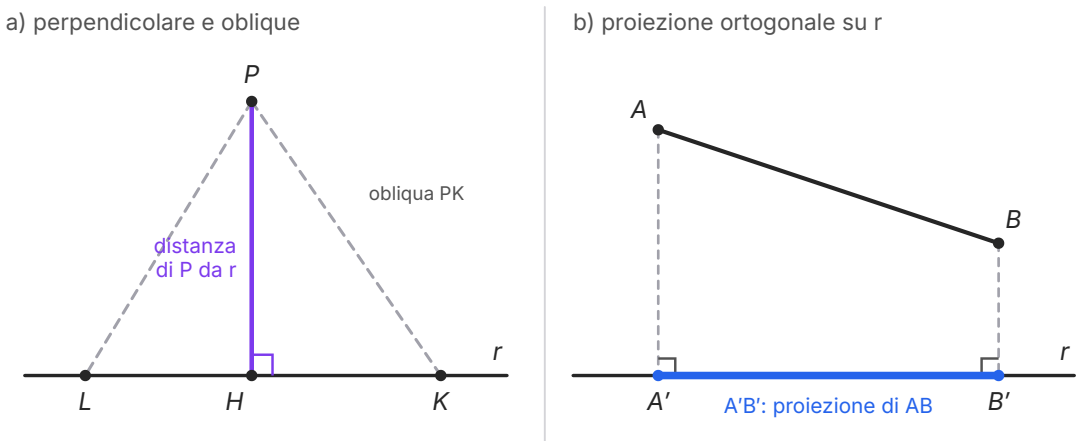

Figura 10.1 a) Da *P* esce una sola perpendicolare a *r*, con piede *H*: il segmento *PH* è più corto di ogni obliquo, come *PK* o *PL*, e la sua lunghezza è la distanza di *P* da *r*. b) La proiezione ortogonale del segmento *AB* sulla retta *r* è il segmento *A′B′* che unisce i piedi delle perpendicolari.

ERRORE FREQUENTE

La distanza di un punto da una retta non è la lunghezza di un segmento *qualsiasi* che li congiunge, ma quella del segmento di perpendicolare, che è il più corto di tutti.

10.1.3 Luoghi geometrici: l'asse di un segmento

Si chiama **luogo geometrico** l'insieme di *tutti e soli* i punti del piano che godono di una certa proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo. Per dimostrare che una figura F è il luogo dei punti con la proprietà p occorrono *due* dimostrazioni: ogni punto di F ha la proprietà p; ogni punto che ha la proprietà p sta in F. È la doppia implicazione del capitolo 4.

Si chiama **asse di un segmento** la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio. L'asse esiste ed è unico, perché il punto medio è unico *(postulato 13)* e per esso passa una sola perpendicolare *(teorema della perpendicolare)*.

IN SINTESI

Teorema dell'asse. L'asse di un segmento è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Ipotesi: a è l'asse del segmento AB, M il punto medio di AB. **Tesi:** $P \in a \Leftrightarrow PA \cong PB$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $P \in a$. Se $P = M$ la tesi è vera per definizione di punto medio. Altrimenti consideriamo i triangoli PMA e PMB (figura 10.2): $AM \cong MB$ *(definizione di punto medio)*, PM è in

comune, $\angle PMA \cong \angle PMB$ *(sono retti, perché* $a \perp AB$*)*. Per il primo criterio *(postulato 14)* i triangoli sono congruenti, quindi $PA \cong PB$.

($\Leftarrow$) Sia $PA \cong PB$. Se P appartiene alla retta AB, deve stare tra A e B (se fosse esterno al segmento, uno dei due segmenti PA, PB conterrebbe l'altro e sarebbe maggiore), quindi è il punto medio M, che sta su a. Altrimenti consideriamo i triangoli PMA e PMB: $PA \cong PB$ *(ipotesi)*, $AM \cong MB$ *(definizione di punto medio)*, PM in comune. Per il terzo criterio *(LLL, paragrafo 9.3)* sono congruenti, quindi $\angle PMA \cong \angle PMB$. I due angoli sono adiacenti e congruenti, quindi retti: la retta PM è perpendicolare ad AB in M, cioè è l'asse *(unicità della perpendicolare)*. Dunque $P \in a$. c.v.d.

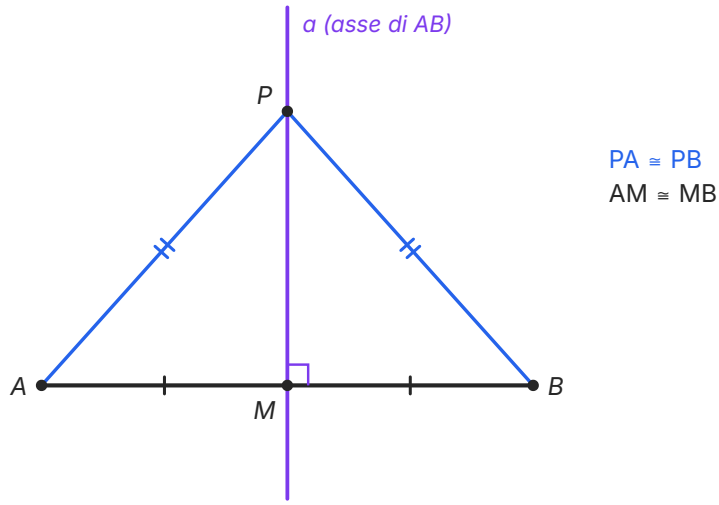

Figura 10.2 L'asse a del segmento AB è perpendicolare ad AB nel punto medio M. Ogni suo punto P è equidistante da A e da B: le tacche doppie segnano $PA \cong PB$, quelle singole $AM \cong MB$.

10.1.4 La bisettrice come luogo geometrico

Una proprietà simile vale per la bisettrice di un angolo. La distanza di un punto da un lato dell'angolo è la distanza dalla retta che contiene quel lato.

IN SINTESI

Teorema della bisettrice. La bisettrice di un angolo convesso è il luogo dei punti dell'angolo equidistanti dai suoi lati.

Ipotesi: P è un punto dell'angolo convesso di vertice O e lati a, b; $PH \perp a$, $PK \perp b$. **Tesi:** P sta sulla bisettrice $\Leftrightarrow PH \cong PK$.

Nella figura 10.3 i triangoli *OPH* e *OPK* sono rettangoli, con l'ipotenusa *OP* in comune. Per confrontarli servono i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, che dimostreremo nel paragrafo 10.5: lì completeremo anche questa dimostrazione.

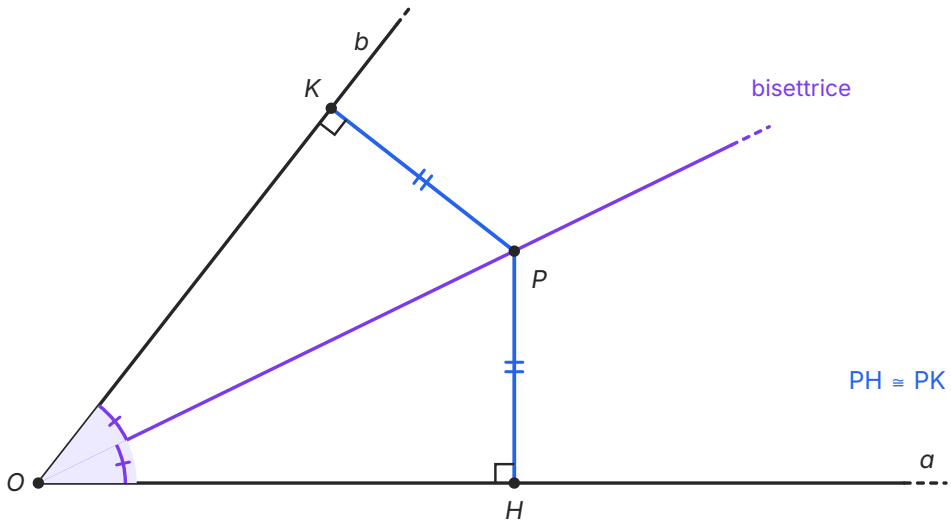

Figura 10.3 Il punto *P* sta sulla bisettrice dell'angolo di vertice *O* (gli archi con una tacca segnano le due metà congruenti). Le sue distanze *PH* e *PK* dai lati *a* e *b* sono congruenti (tacche doppie); i quadratini indicano gli angoli retti in *H* e in *K*.

10.2 Rette parallele e trasversali

10.2.1 Le coppie di angoli

Due rette di un piano si dicono **rette parallele** se non hanno punti in comune oppure se coincidono, e si scrive $r \parallel s$. Includere le rette coincidenti, come abbiamo fatto nel capitolo 5, permette di dire che il parallelismo è una relazione di equivalenza: ogni retta è parallela a sé stessa.

Una retta *t* che incontra due rette *r* e *s* in due punti distinti *R* e *S* si chiama **trasversale**. Attorno a *R* e a *S* si formano otto angoli convessi, che numeriamo come nella figura 10.4. Gli angoli che stanno nella striscia compresa tra *r* e *s* (3, 4, 5, 6) si dicono *interni*; gli altri (1, 2, 7, 8) *esterni*. Prendendo un angolo in *R* e uno in *S* si ottengono coppie con un nome preciso (tabella 10.1).

- Due angoli interni, da parti opposte rispetto a *t*, si dicono **angoli alterni interni**: 3 e 5, 4 e 6.
- Due angoli esterni, da parti opposte rispetto a *t*, sono **angoli alterni esterni**: 1 e 7, 2 e 8.
- Due angoli dalla stessa parte rispetto a *t*, uno interno e l'altro esterno, che occupano la «stessa posizione» rispetto a *r* e a *s*, sono **angoli corrispondenti**: 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8.
- Due angoli interni dalla stessa parte rispetto a *t* sono **angoli coniugati interni**: 3 e 6, 4 e 5; due angoli esterni dalla stessa parte sono **coniugati esterni**: 2 e 7, 1 e 8.

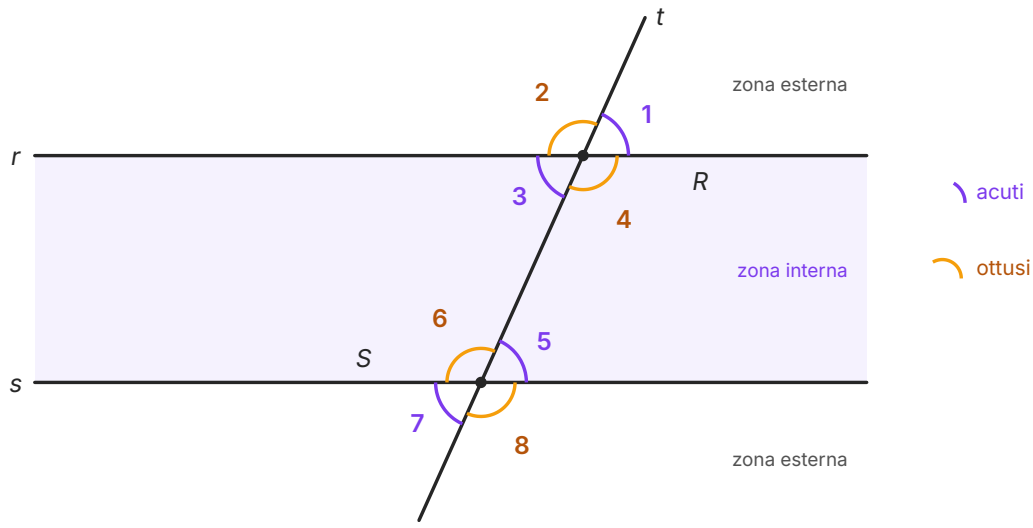

Figura 10.4 Le rette r e s, qui parallele, sono tagliate dalla trasversale t nei punti R e S. Gli otto angoli convessi sono numerati da 1 a 8; la striscia colorata è la zona interna. Poiché $r \parallel s$, gli angoli acuti (in viola) sono tutti congruenti tra loro, e così quelli ottusi (in arancio), come dimostreremo nel paragrafo 10.3.

Tabella 10.1 Le coppie di angoli formate da due rette tagliate da una trasversale (numerazione della figura 10.4) e la loro relazione quando le rette sono parallele.

Nome della coppia	Coppie	Se $r \parallel s$
alterni interni	3 e 5; 4 e 6	congruenti
alterni esterni	1 e 7; 2 e 8	congruenti
corrispondenti	1 e 5; 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8	congruenti
coniugati interni	3 e 6; 4 e 5	supplementari
coniugati esterni	2 e 7; 1 e 8	supplementari

Le coppie non sono indipendenti: gli angoli opposti al vertice sono congruenti ($1 \cong 3$, $2 \cong 4$, $5 \cong 7$, $6 \cong 8$) e gli angoli adiacenti sono supplementari. Per questo, se una coppia di alterni interni è formata da angoli congruenti, lo sono anche tutte le coppie di alterni esterni e di corrispondenti, e le coppie di coniugati sono formate da angoli supplementari. Vale anche il viceversa.

10.2.2 Il teorema delle parallele

Il primo grande risultato del paragrafo è un *criterio* di parallelismo: una condizione sugli angoli che basta a garantire che due rette siano parallele.

IN SINTESI

Teorema delle parallele. Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.

Ipotesi: t taglia r in A e s in B; α e β sono alterni interni; $\alpha \cong \beta$. **Tesi:** $r \parallel s$.

Dimostrazione. Le rette r e s sono distinte, perché tagliano t in due punti diversi. Supponiamo per assurdo che si incontrino in un punto X (figura 10.5).

1. X non sta su t (altrimenti r e t avrebbero in comune A e X e coinciderebbero, *postulato 1*), quindi A, B, X sono i vertici di un triangolo.
2. Dei due angoli alterni interni, uno sta dalla parte di X rispetto a t ed è un angolo interno del triangolo ABX, per esempio $\beta = \angle ABX$; l'altro, α, è adiacente all'angolo $\angle BAX$, quindi è un angolo esterno del triangolo *(definizione di angolo esterno)*.
3. Per il teorema dell'angolo esterno *(capitolo 9)* α è maggiore di ciascun angolo interno non adiacente, in particolare $\alpha > \beta$.
4. Questo contraddice l'ipotesi $\alpha \cong \beta$. Quindi r e s non hanno punti in comune: $r \parallel s$.

c.v.d.

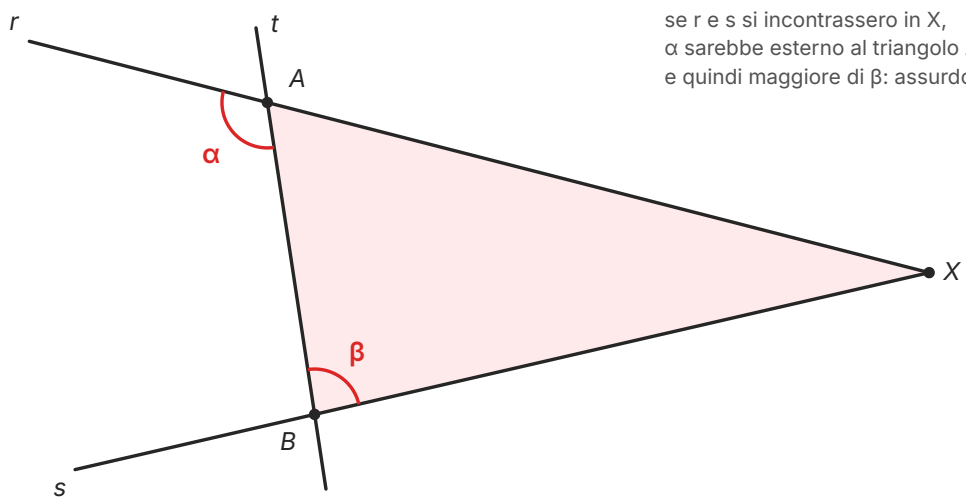

Figura 10.5 La dimostrazione per assurdo del teorema delle parallele. Se r e s si incontrassero in un punto X, l'angolo α sarebbe un angolo esterno del triangolo ABX e β un angolo interno non adiacente: per il teorema dell'angolo esterno sarebbe $\alpha > \beta$, contro l'ipotesi $\alpha \cong \beta$.

Per le osservazioni del paragrafo precedente, il teorema si può enunciare in molte forme equivalenti. Due rette tagliate da una trasversale sono parallele se formano:

- angoli alterni (interni o esterni) congruenti, oppure
- angoli corrispondenti congruenti, oppure
- angoli coniugati (interni o esterni) supplementari.

Ne seguono due corollari importanti.

Corollario 1. *Due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele.* Infatti formano con quella retta angoli corrispondenti retti, quindi congruenti.

Corollario 2. *Per un punto P esterno a una retta r passa almeno una parallela a r.* Infatti si traccia da P la perpendicolare PH a r, poi la perpendicolare p a PH nel punto P (teorema della perpendicolare): p e r sono entrambe perpendicolari a PH, quindi parallele (corollario 1).

Tutto ciò che abbiamo dimostrato finora discende dai postulati 1–14; ma nessuna di queste dimostrazioni dice che la parallela per P sia *unica*.

10.3 Il postulato delle parallele

10.3.1 Unicità della parallela

Per secoli si è cercato di dimostrare l'unicità della parallela dagli altri postulati; oggi sappiamo che è impossibile, e va quindi assunta come postulato.

> **IN SINTESI**
>
> **Postulato 15 · Postulato delle parallele** (forma di Playfair). Per un punto non appartenente a una retta passa al più una retta parallela alla retta data.
>
> Insieme al corollario 2 del paragrafo 10.2: **per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela** a quella retta.

Questa formulazione porta il nome dello scozzese John Playfair (1795). Il quinto postulato di Euclide, che hai letto nel capitolo 8, ha un enunciato diverso: «se una retta, incontrando due rette, forma dalla stessa parte angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, le due rette si incontrano da quella parte». Accettati gli altri postulati, le due formulazioni sono equivalenti. Per questo il **postulato delle parallele** (il nostro postulato 15) viene chiamato anche **quinto postulato**.

10.3.2 Il teorema inverso

Con il nuovo postulato possiamo dimostrare l'inverso del teorema delle parallele. Serve prima un'osservazione: *se una retta t incontra una di due rette parallele distinte, incontra anche l'altra*. Infatti, se t incontra r in R ed è distinta da r, e se t non incontrasse s, per R passerebbero due parallele distinte a s, cioè r e t, contro il postulato 15.

IN SINTESI

Teorema inverso del teorema delle parallele. Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni congruenti.

Ipotesi: $r \parallel s$; t taglia r in A e s in B; α (in A) e β (in B) sono alterni interni. **Tesi:** $\alpha \cong \beta$.

Dimostrazione.

1. Tracciamo per A la retta r' che forma con t un angolo α', alterno interno di β, congruente a β *(postulato 10, trasporto di un angolo)*.
2. Le rette r' e s, tagliate da t, formano angoli alterni interni congruenti, quindi $r' \parallel s$ *(teorema delle parallele)*.
3. Ora r e r' passano entrambe per A e sono entrambe parallele a s: per il postulato 15 coincidono.
4. Quindi α coincide con α', e $\alpha \cong \beta$ *(passo 1)*.

c.v.d.

Ne segue che due parallele tagliate da una trasversale formano anche angoli alterni esterni e corrispondenti congruenti, e angoli coniugati supplementari: è la terza colonna della tabella 10.1. In particolare, *una retta perpendicolare a una di due rette parallele è perpendicolare anche all'altra* (esercizio 15).

Corollario (transitività). *Due rette parallele a una terza sono parallele tra loro.* Siano $r \parallel s$ e $t \parallel s$. Se r e t coincidono non c'è nulla da dimostrare. Se fossero distinte e si incontrassero in un punto X, per X passerebbero due parallele distinte a s, contro il postulato 15. Quindi $r \parallel t$. Questa è la proprietà transitiva promessa nel capitolo 5: il parallelismo è davvero una relazione di equivalenza, e ogni sua classe è una **direzione**.

ERRORE FREQUENTE

Non confondere il teorema delle parallele con il suo inverso. Il teorema dice: *angoli alterni interni congruenti* $\Rightarrow$ *rette parallele*, e si dimostra senza il postulato delle parallele. L'inverso dice: *rette parallele* $\Rightarrow$ *angoli alterni interni congruenti*, e richiede il postulato.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Le rette parallele r e s sono tagliate dalla trasversale t. Con la numerazione della figura 10.4, l'angolo 4 misura $(3x + 5)°$ e l'angolo 5 misura $(2x - 15)°$. Determina le ampiezze di tutti gli otto angoli.

Soluzione. Gli angoli 4 e 5 sono coniugati interni; poiché $r \parallel s$, sono supplementari (teorema inverso):

$$(3x + 5) + (2x - 15) = 180 \quad \Rightarrow \quad 5x - 10 = 180 \quad \Rightarrow \quad x = 38.$$

Quindi l'angolo 4 misura $3 \cdot 38° + 5° = 119°$ e l'angolo 5 misura $2 \cdot 38° - 15° = 61°$. Controllo: $119° + 61° = 180°$. Gli angoli 2, 4, 6, 8 sono congruenti (opposti al vertice e corrispondenti) e misurano 119°; gli angoli 1, 3, 5, 7 misurano 61°.

10.3.3 Distanza tra due rette parallele

Siano r e s due parallele distinte. Da due punti qualsiasi A e B di r conduciamo le perpendicolari AH e BK a s. Esse sono perpendicolari anche a r (teorema inverso) e parallele tra loro (corollario 1). I triangoli ABK e KHA hanno in comune AK e due coppie di angoli alterni interni congruenti: per il secondo criterio *(ALA)* sono congruenti, quindi $AH \cong BK$.

Dunque **tutti i punti di una retta hanno la stessa distanza da una sua parallela**. Questa distanza comune si chiama **distanza tra due rette parallele**; la parte di piano compresa tra le due rette si chiama **striscia**. Per questo binari e righe del quaderno hanno ovunque la stessa larghezza.

APPROFONDIMENTO

Il quinto postulato e le geometrie non euclidee

Euclide chiama i suoi postulati αἰτήματα, «richieste»: il lettore è invitato ad accettarli senza dimostrazione (il latino *postulatum* traduce proprio questa parola). Fin dall'antichità il quinto apparve meno «evidente» degli altri, e più simile a un teorema. Euclide stesso lo usa per la prima volta solo nella proposizione 29 del primo libro: le prime ventotto, tra cui il teorema delle parallele, ne fanno a meno. Nel V secolo d.C. il filosofo neoplatonico Proclo, nel suo commento al primo libro degli *Elementi*, sostenne che andava dimostrato e ne propose una dimostrazione; ma questa usava, senza accorgersene, un'ipotesi equivalente al postulato stesso. È la sorte di quasi tutti i tentativi successivi.

Il tentativo più famoso è quello del gesuita Girolamo Saccheri, che insegnò a Pavia: nel 1733 pubblicò *Euclides ab omni naevo vindicatus* («Euclide liberato da ogni macchia»). Saccheri negò il postulato e cercò una contraddizione; ricavò invece molti teoremi corretti di una geometria diversa, e concluse di aver trovato un assurdo con un ragionamento che oggi sappiamo non valido.

Nella prima metà dell'Ottocento il russo Nikolaj Lobačevskij (1829) e l'ungherese János Bolyai (1832), in modo indipendente, ebbero il coraggio di prendere sul serio l'ipotesi opposta: per un punto esterno a una retta passano *infinite* parallele. Ne nasce una geometria coerente, oggi detta **iperbolica**, in cui la somma degli angoli di un triangolo è sempre *minore* di un angolo piatto. Nel 1854 Bernhard Riemann descrisse geometrie ancora diverse; in quella detta **ellittica** non esistono parallele e la somma degli angoli di un triangolo supera l'angolo piatto. Nel 1868 l'italiano Eugenio Beltrami costruì un modello concreto della geometria iperbolica, mostrando che essa è coerente quanto quella euclidea.

Queste **geometrie non euclidee** hanno mostrato che i postulati sono scelte, non verità evidenti. La scoperta toccò anche la filosofia: per Immanuel Kant (*Critica della ragion pura*, 1781) la geometria euclidea esprimeva la forma necessaria della nostra intuizione dello spazio; dopo Lobačevskij e Bolyai bisognò distinguere tra la coerenza di un sistema di postulati e la sua verità per lo spazio fisico. In questo libro, però, il postulato 15 vale sempre.

10.4 Gli angoli di triangoli e poligoni

10.4.1 La somma degli angoli interni di un triangolo

Che gli angoli di un triangolo sommino a 180°, fatto noto dalla scuola media, dipende dal postulato delle parallele.

IN SINTESI

Teorema della somma degli angoli interni. In ogni triangolo la somma degli angoli interni è congruente a un angolo piatto.

Ipotesi: *ABC* è un triangolo con angoli α, β, γ rispettivamente in *A*, *B*, *C*. **Tesi:** α + β + γ ≅ angolo piatto, cioè α + β + γ = 180°.

Dimostrazione. Tracciamo per *C* la retta *r* parallela ad *AB*, che esiste ed è unica *(corollario 2 del paragrafo 10.2 e postulato 15)*. Siano *D* ed *E* due punti di *r* da parti opposte rispetto a *C*, con *D* dalla stessa parte di *A* rispetto alla retta *BC* (figura 10.6).

1. ∠*DCA* ≅ α: sono alterni interni rispetto alle parallele *r* e *AB* tagliate dalla trasversale *AC (teorema inverso del teorema delle parallele)*.
2. ∠*ECB* ≅ β: sono alterni interni rispetto alle stesse parallele tagliate dalla trasversale *BC (stesso teorema)*.
3. Gli angoli ∠*DCA*, ∠*ACB* = γ e ∠*BCE* sono consecutivi e la loro somma è l'angolo ∠*DCE*, che è piatto perché *CD* e *CE* sono semirette opposte *(definizione di angolo piatto)*.
4. Sostituendo angoli congruenti *(postulato 11)*: α + γ + β ≅ ∠*DCE*, un angolo piatto.

c.v.d.

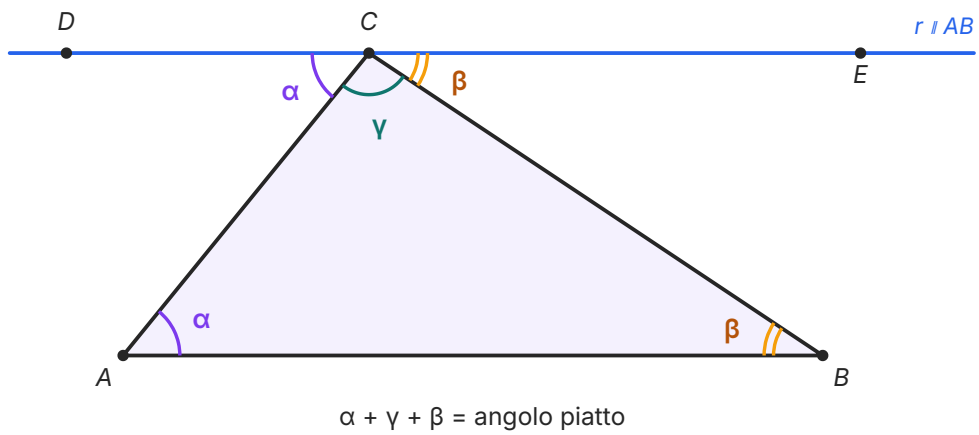

Figura 10.6 La dimostrazione del teorema della somma degli angoli interni. La retta *r* per *C* è parallela ad *AB*; gli angoli in *C* segnati come α e β sono congruenti agli angoli in *A* e in *B* perché alterni interni. I tre angoli in *C* formano un angolo piatto.

Dal teorema discende una serie di corollari, che userai continuamente negli esercizi.

- **Angolo esterno.** *Ogni angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.* Infatti l'angolo esterno in C e la somma $\alpha + \beta$ sono entrambi supplementari di γ, quindi sono congruenti (paragrafo 8.5). Rafforza il teorema dell'angolo esterno del capitolo 9.
- **Triangolo rettangolo.** *Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.* Se $\gamma = 90°$, allora $\alpha + \beta = 90°$.
- **Triangolo equilatero.** *Ogni angolo di un triangolo equilatero misura 60°*, perché i suoi tre angoli sono congruenti (paragrafo 9.3) e hanno somma 180°.
- **Terzo angolo.** *Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli, hanno congruente anche il terzo*, perché il terzo angolo è, in entrambi, la differenza tra un angolo piatto e la somma degli altri due.

DA RICORDARE

Senza il postulato delle parallele (postulati 1–14): esistenza e unicità della perpendicolare; asse e bisettrice come luoghi; teorema dell'angolo esterno nella forma «maggiore»; teorema delle parallele (criterio); esistenza di almeno una parallela; due perpendicolari alla stessa retta sono parallele.

Con il postulato delle parallele: unicità della parallela; teorema inverso (parallele ⇒ alterni interni congruenti); transitività del parallelismo; somma degli angoli di un triangolo = 180°; angolo esterno = somma dei due interni non adiacenti; somma degli angoli di un poligono.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nel triangolo ABC l'angolo esterno in C misura 118° e l'angolo in A supera di 24° l'angolo in B. Calcola gli angoli del triangolo.

Soluzione. L'angolo esterno in C è la somma degli interni non adiacenti: $\alpha + \beta = 118°$. Inoltre $\alpha - \beta = 24°$. Sommando membro a membro, $2\alpha = 142°$, quindi $\alpha = 71°$ e $\beta = 47°$. Infine $\gamma = 180° - 118° = 62°$. Controllo: $71° + 47° + 62° = 180°$.

10.4.2 Gli angoli dei poligoni

Sia ora un poligono convesso di n lati. Dal vertice A escono $n - 3$ diagonali (capitolo 8), che dividono il poligono in $n - 2$ triangoli (figura 10.7a): ogni triangolo ha un lato che è un lato del poligono, tranne il primo e l'ultimo, che ne hanno due. Gli angoli di questi triangoli, messi insieme, formano esattamente gli angoli interni del poligono. Quindi:

IN SINTESI

Teorema. La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è congruente a $n - 2$ angoli piatti:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

La somma degli angoli esterni, presi uno per vertice, è congruente a un angolo giro: $S_e = 360°$, qualunque sia n.

La seconda affermazione si ricava dalla prima. In ogni vertice l'angolo interno e l'angolo esterno sono adiacenti, quindi la loro somma è 180°; sommando sugli n vertici si ottiene $n \cdot 180°$. Togliendo la somma degli angoli interni resta $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$. Percorrendo il contorno, in ogni vertice giri di un angolo esterno, e alla fine hai fatto un giro completo (figura 10.7b).

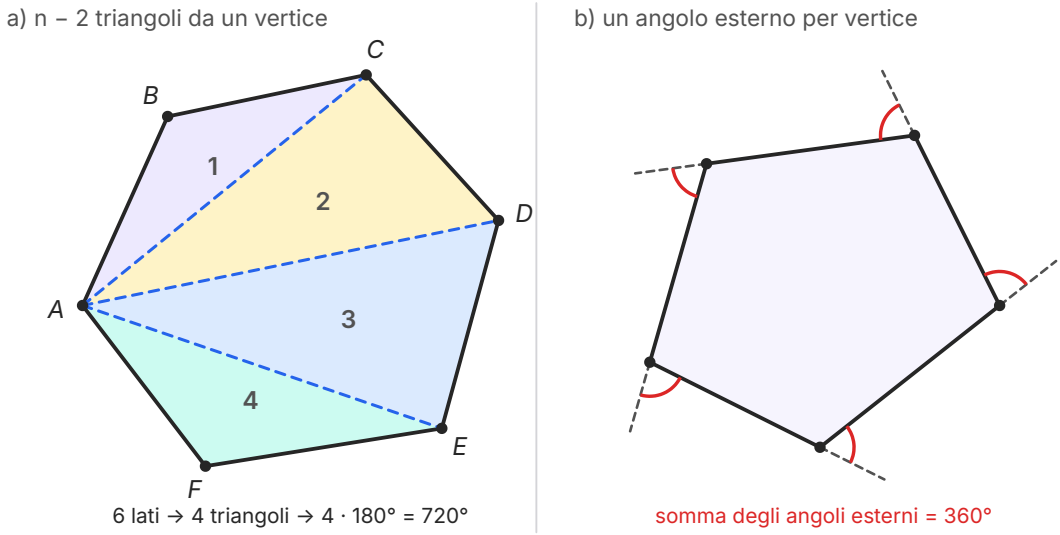

Figura 10.7 a) Le 3 diagonali uscenti da A dividono l'esagono convesso $ABCDEF$ in 6 − 2 = 4 triangoli: la somma degli angoli interni è 4 · 180° = 720°. b) In un pentagono convesso si prolunga ogni lato nello stesso verso di percorrenza: gli angoli esterni così ottenuti, uno per vertice, hanno somma 360°.

In un poligono regolare gli n angoli interni sono congruenti, quindi ciascuno misura $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$, e ciascun angolo esterno misura $\frac{360°}{n}$. Per esempio l'angolo interno di un pentagono regolare misura $3 \cdot 180° : 5 = 108°$, quello di un esagono regolare 120°.

Tabella 10.2 Somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati e ampiezze degli angoli di un poligono regolare.

Poligono	n	Somma angoli interni	Angolo interno (regolare)	Angolo esterno (regolare)
triangolo	3	180°	60°	120°
quadrilatero	4	360°	90°	90°
pentagono	5	540°	108°	72°
esagono	6	720°	120°	60°
ottagono	8	1080°	135°	45°
decagono	10	1440°	144°	36°
dodecagono	12	1800°	150°	30°

COLLEGAMENTI

Eratostene misura la Terra. Nel III secolo a.C. Eratostene di Cirene, che dirigeva la biblioteca di Alessandria, stimò la circonferenza terrestre con un ragionamento sulle parallele, riferito dall'astronomo Cleomede. A mezzogiorno del solstizio d'estate, a Siene (l'odierna Assuan) il Sole era allo zenit; nello stesso momento ad Alessandria, più a nord, i raggi formavano con la verticale un angolo pari a $\frac{1}{50}$ di angolo giro, cioè 7,2°. Poiché il Sole è lontanissimo, i suoi raggi si possono considerare paralleli: la verticale di Alessandria è una trasversale, e l'angolo al centro della Terra tra le verticali delle due città è alterno interno a quello misurato, quindi è anch'esso $\frac{1}{50}$ di giro. Se la distanza tra le città era di 5000 stadi, la circonferenza misurava $50 \cdot 5000 = 250\,000$ stadi. Non sappiamo con certezza quale stadio usasse, ma il metodo è corretto (esercizio 20).

10.5 Congruenza dei triangoli rettangoli

10.5.1 Il secondo criterio generalizzato

Il secondo criterio di congruenza (ALA) richiede che il lato congruente sia compreso tra i due angoli congruenti. Grazie al teorema della somma degli angoli possiamo togliere questa condizione.

IN SINTESI

Secondo criterio generalizzato (LAA). Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli qualsiasi, purché posti allo stesso modo rispetto al lato, sono congruenti.

Ipotesi: $AB \cong A'B'$; $\angle B \cong \angle B'$; $\angle C \cong \angle C'$. **Tesi:** $ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione. I due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli, quindi anche il terzo: $\angle A \cong \angle A'$ *(corollario del terzo angolo, paragrafo 10.4)*. Ora i triangoli hanno congruenti il lato AB e i due angoli adiacenti a esso, $\angle A$ e $\angle B$: per il secondo criterio *(ALA, paragrafo 9.2)* sono congruenti. c.v.d.

10.5.2 I criteri per i triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto si chiama **ipotenusa**, gli altri due si chiamano **cateti** (paragrafo 9.1); l'ipotenusa è il lato maggiore (paragrafo 9.5). Due triangoli rettangoli hanno già una coppia di angoli congruenti, quelli retti: per questo bastano *due* elementi per riconoscerne la congruenza.

IN SINTESI

Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli. Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti:

1. i due cateti *(postulato 14, LAL)*; 2. un cateto e l'angolo acuto adiacente *(ALA)*; 3. un cateto e l'angolo acuto opposto *(LAA)*; 4. l'ipotenusa e un angolo acuto *(LAA)*; 5. l'ipotenusa e un cateto *(criterio speciale, dimostrato qui sotto)*.

I primi quattro casi seguono dai criteri noti; il quinto no, perché per triangoli qualsiasi due lati e un angolo non compreso non bastano (paragrafo 9.3): va dimostrato a parte.

IN SINTESI

Criterio dell'ipotenusa e di un cateto. Due triangoli rettangoli che hanno ordinatamente congruenti l'ipotenusa e un cateto sono congruenti.

Ipotesi: $\angle A$ e $\angle A'$ retti; $BC \cong B'C'$; $AB \cong A'B'$. **Tesi:** $ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione. Sul prolungamento del cateto CA oltre A prendiamo il punto D tale che $AD \cong A'C'$ *(postulato 9)* e congiungiamo B con D (figura 10.8).

1. $\angle BAD$ è adiacente all'angolo retto $\angle BAC$, quindi è retto *(definizione di angolo retto)*.

2. I triangoli ABD e $A'B'C'$ hanno $AB \cong A'B'$ *(ipotesi)*, $AD \cong A'C'$ *(costruzione)*, $\angle BAD \cong \angle B'A'C'$ *(sono retti)*: sono congruenti per il primo criterio *(postulato 14)*. Quindi $BD \cong B'C'$.
3. Poiché $B'C' \cong BC$ *(ipotesi)*, si ha $BD \cong BC$ *(proprietà transitiva, postulato 8)*: il triangolo BCD è isoscele sulla base CD, e $\angle BCD \cong \angle BDC$ *(teorema del triangolo isoscele, paragrafo 9.3)*.
4. I triangoli rettangoli ABC e ABD hanno l'ipotenusa congruente ($BC \cong BD$) e un angolo acuto congruente ($\angle BCA \cong \angle BDA$): sono congruenti per il criterio 4 *(LAA)*. Quindi $AC \cong AD$.
5. Ma $AD \cong A'C'$ *(costruzione)*, quindi $AC \cong A'C'$. I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno allora i tre lati ordinatamente congruenti e sono congruenti *(terzo criterio, LLL)*.

c.v.d.

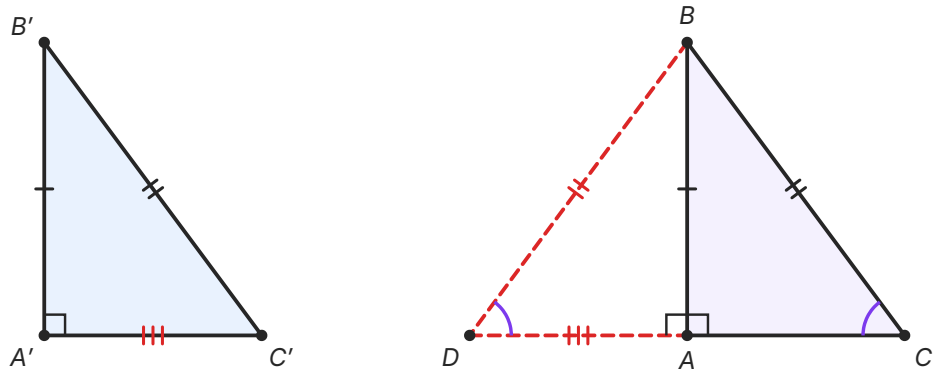

Figura 10.8 La dimostrazione del criterio dell'ipotenusa e di un cateto. A sinistra il triangolo rettangolo $A'B'C'$; a destra il triangolo ABC, con $AB \cong A'B'$ (una tacca) e $BC \cong B'C'$ (due tacche). Il punto D è costruito con $AD \cong A'C'$ (tre tacche): il triangolo BCD risulta isoscele, con gli angoli alla base in C e in D congruenti.

10.5.3 La bisettrice, finalmente

Possiamo ora completare la dimostrazione del teorema della bisettrice (paragrafo 10.1.4, figura 10.3).

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia P un punto della bisettrice, diverso da O, con $PH \perp a$ e $PK \perp b$. I triangoli OPH e OPK sono rettangoli in H e in K, hanno l'ipotenusa OP in comune e $\angle HOP \cong \angle KOP$ *(definizione di bisettrice)*. Per il criterio 4 *(ipotenusa e angolo acuto)* sono congruenti, quindi $PH \cong PK$. (Se $P = O$ entrambe le distanze sono nulle.)

($\Leftarrow$) Sia P un punto interno all'angolo con $PH \cong PK$. I triangoli rettangoli OPH e OPK hanno l'ipotenusa OP in comune e i cateti $PH \cong PK$ *(ipotesi)*. Per il criterio 5 *(ipotenusa e cateto)* sono congruenti, quindi $\angle HOP \cong \angle KOP$: la semiretta OP divide l'angolo in due angoli congruenti, cioè è la bisettrice *(postulato 13: la bisettrice è unica)*. c.v.d.

10.6 Costruzioni con riga e compasso

Nel capitolo 8 abbiamo visto come si trasportano segmenti e angoli con riga e compasso. Con i teoremi di questo capitolo e del capitolo 9 possiamo ora eseguire, e soprattutto *giustificare*, le costruzioni fondamentali: l'asse e il punto medio di un segmento, la perpendicolare e la parallela per un punto, la bisettrice di un angolo (figura 10.9).

10.6.1 L'asse e il punto medio di un segmento

Dato il segmento AB (figura 10.9a):

1. con centro A e un'apertura maggiore della metà di AB (per esempio uguale ad AB) si tracciano due archi, uno da ciascuna parte della retta AB;
2. con la stessa apertura e centro B si tracciano due archi che tagliano i primi in P e in Q;
3. la retta PQ è l'asse di AB, e il punto M in cui incontra AB è il punto medio.

Giustificazione. Per costruzione $PA \cong PB$ e $QA \cong QB$: P e Q sono equidistanti dagli estremi di AB, quindi stanno sull'asse per il teorema dell'asse (paragrafo 10.1). Per due punti distinti passa una sola retta (postulato 1): la retta PQ è l'asse, e il punto M in cui l'asse incontra il segmento è il punto medio.

10.6.2 La perpendicolare per un punto

Se il punto P sta sulla retta r, si punta il compasso in P e si traccia un arco che taglia r in due punti A e B; poi si costruisce l'asse di AB. Poiché $PA \cong PB$, P è il punto medio di AB, e l'asse è la perpendicolare a r in P.

Se P non sta su r (figura 10.9b):

1. con centro P e un'apertura abbastanza grande si traccia un arco che taglia r in due punti A e B;
2. con centri A e B e una stessa apertura si tracciano due archi che si incontrano in un punto Q, dalla parte di r opposta a P;
3. la retta PQ è la perpendicolare a r per P, e il punto H in cui incontra r è il piede della perpendicolare.

Giustificazione. $PA \cong PB$ (stesso arco) e $QA \cong QB$ (stessa apertura): P e Q sono due punti distinti dell'asse di AB, quindi la retta PQ è l'asse di AB, che è perpendicolare ad AB, cioè a r. Per il teorema della perpendicolare è l'unica.

10.6.3 La bisettrice di un angolo

Dato l'angolo convesso di vertice O (figura 10.9c):

1. con centro O e un'apertura qualsiasi si traccia un arco che taglia i lati in C e in D;
2. con centri C e D e una stessa apertura, maggiore della metà di CD, si tracciano due archi che si incontrano in un punto E, dalla parte di CD opposta a O;
3. la semiretta OE è la bisettrice.

Giustificazione. I triangoli OCE e ODE hanno $OC \cong OD$ (stesso arco), $CE \cong DE$ (stessa apertura) e OE in comune: per il terzo criterio di congruenza (LLL) sono congruenti, quindi $\angle COE \cong \angle DOE$, e OE è la bisettrice (unica, postulato 13).

10.6.4 La parallela per un punto

Dati la retta r e un punto P esterno a r (figura 10.9d):

1. si traccia per P una retta t che incontra r in un punto A, e si fissa su r un punto B diverso da A;
2. con la costruzione del capitolo 8 si trasporta l'angolo $\angle PAB$ sulla semiretta PA, nel semipiano di origine t che non contiene B: si ottiene una semiretta PQ con $\angle APQ \cong \angle PAB$;
3. la retta PQ è la parallela a r per P.

Giustificazione. Rispetto alle rette PQ e r tagliate dalla trasversale t, gli angoli $\angle APQ$ e $\angle PAB$ sono alterni interni, e sono congruenti per costruzione: per il teorema delle parallele $PQ \parallel r$. Per il postulato delle parallele è l'unica parallela a r per P.

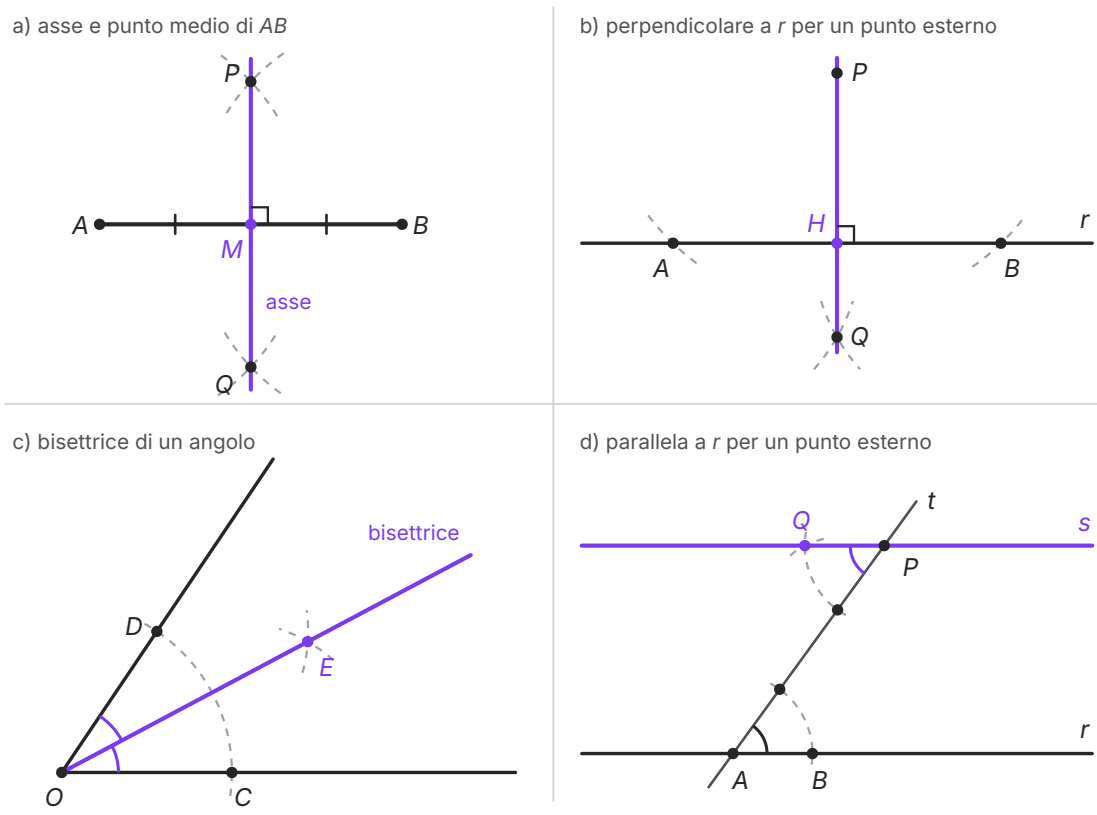

Figura 10.9 Le costruzioni fondamentali con riga e compasso; gli archi tratteggiati sono tracciati con il compasso. a) Asse e punto medio: P e Q sono equidistanti da A e da B. b) Perpendicolare per un punto P esterno a r: l'arco di centro P individua A e B, gli archi di centri A e B individuano Q. c) Bisettrice: $OC \cong OD$ e $CE \cong DE$. d) Parallela per P: l'angolo $\angle PAB$ è trasportato in P in posizione di alterno interno rispetto alla trasversale t.

DA RICORDARE

Costruire e dimostrare. Una costruzione con riga e compasso è corretta solo se si sa dire *perché* funziona. Ogni apertura del compasso produce segmenti congruenti; un criterio di congruenza, o un teorema sui luoghi geometrici, trasforma queste congruenze nella proprietà voluta. Con un programma di geometria dinamica la costruzione si può anche mettere alla prova trascinando i punti iniziali: le proprietà costruite restano vere, quelle disegnate a occhio no.

SINTESI

- Per un punto passa una e una sola perpendicolare a una retta data. Il segmento di perpendicolare è minore di ogni obliquo; la sua lunghezza è la distanza del punto dalla retta.
- La proiezione ortogonale di un punto su una retta è il piede della perpendicolare; quella di un segmento è il segmento che unisce le proiezioni degli estremi.
- Un luogo geometrico è l'insieme di tutti e soli i punti con una proprietà. L'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi; la bisettrice di un angolo convesso è il luogo dei punti dell'angolo equidistanti dai lati.
- Due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni (interni, esterni), corrispondenti e coniugati (interni, esterni).
- Teorema delle parallele: angoli alterni interni congruenti (o corrispondenti congruenti, o coniugati supplementari) ⇒ rette parallele. Si dimostra con il teorema dell'angolo esterno, senza il postulato delle parallele.
- Postulato delle parallele: per un punto esterno a una retta passa al più una parallela (quindi esattamente una). È equivalente al quinto postulato di Euclide.
- Con il postulato: rette parallele ⇒ angoli alterni interni congruenti; il parallelismo è transitivo; i punti di una retta sono equidistanti da una sua parallela.
- La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°; ogni angolo esterno è la somma dei due interni non adiacenti; gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.
- In un poligono convesso di n lati la somma degli angoli interni è $(n-2)\cdot 180°$, quella degli esterni è 360°.
- Criteri dei triangoli rettangoli: due cateti; cateto e angolo acuto; ipotenusa e angolo acuto; ipotenusa e cateto. Secondo criterio generalizzato: un lato e due angoli posti allo stesso modo.
- Negando il postulato delle parallele si ottengono geometrie non euclidee coerenti (Lobačevskij, Bolyai, Riemann), in cui la somma degli angoli di un triangolo non è 180°.
- Con riga e compasso si costruiscono asse e punto medio di un segmento, perpendicolare e parallela per un punto, bisettrice di un angolo; ogni costruzione si giustifica con il teorema dell'asse, i criteri di congruenza o il teorema delle parallele.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Con la numerazione della figura 10.4, gli angoli 3 e 5 sono:
   A. corrispondenti
   B. alterni esterni
   C. alterni interni
   D. coniugati interni

2. ● La somma degli angoli interni di un pentagono convesso è:
   A. 360°
   B. 540°
   C. 720°
   D. 900°

3. ●● Quale di questi risultati **richiede** il postulato delle parallele?
   A. Per un punto esterno a una retta passa almeno una parallela.
   B. Due rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele.
   C. L'angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascun interno non adiacente.
   D. La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

4. ● Il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi di un segmento AB è:
   A. la bisettrice di un angolo di vertice A
   B. l'asse di AB
   C. il punto medio di AB
   D. la perpendicolare ad AB in A

5. ●● Le rette r e s, tagliate dalla trasversale t, formano due angoli coniugati interni di 72° e 118°. Allora:
   A. $r \parallel s$
   B. r e s si incontrano dalla parte dei due angoli dati
   C. r e s si incontrano dalla parte opposta a quella dei due angoli dati
   D. r è perpendicolare a t

6. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Per un punto esterno a una retta passa una sola perpendicolare a essa. b) La distanza di P da r è la lunghezza di un qualsiasi segmento che unisce P a un punto di r. c) Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti congruenti, sono parallele. d) Un triangolo può avere due angoli ottusi. e) Ogni angolo esterno di un triangolo è maggiore della somma dei due angoli interni non adiacenti. f) Due triangoli rettangoli con le ipotenuse congruenti sono congruenti.

7. ● Completa. a) Due rette incidenti che formano quattro angoli retti si dicono _____ . b) Il piede H della perpendicolare condotta da P alla retta r si chiama _____ di P su r. c) La somma degli angoli esterni di un poligono convesso, uno per vertice, è _____ . d) L'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una proprietà si chiama _____ . e) In un triangolo rettangolo i due angoli acuti sono _____ .

Calcolare

8. ● Due rette parallele sono tagliate da una trasversale. Con la numerazione della figura 10.4, l'angolo 1 misura 47°. Determina gli altri sette angoli, giustificando ogni risposta.

9. ●● Le rette r e s sono parallele. a) Due angoli alterni interni misurano $(3x + 12)°$ e $(5x - 20)°$: trova x e l'ampiezza degli angoli. b) Due angoli coniugati interni misurano $(2x + 10)°$ e $(4x - 10)°$: trova x e le ampiezze.

10. ● Un angolo esterno di un triangolo misura 128° e uno degli angoli interni non adiacenti misura 75°. Calcola gli angoli del triangolo.

11. ●● Calcola l'ampiezza dell'angolo interno e dell'angolo esterno di un pentagono, di un esagono, di un ottagono e di un dodecagono regolari.

12. ●● a) Quanti lati ha un poligono convesso la cui somma degli angoli interni è 1260°? b) Quanti lati ha un poligono regolare con l'angolo interno di 140°? c) Esiste un poligono regolare con l'angolo interno di 130°? Giustifica.

13. ●● Calcola gli angoli del triangolo ABC sapendo che: a) gli angoli stanno nel rapporto 2 : 3 : 4; b) $\angle A$ supera $\angle B$ di 20° e $\angle C$ è il triplo di $\angle B$.

14. ●● Nel triangolo ABC si ha $\angle A = 70°$ e $\angle B = 50°$. Le bisettrici degli angoli in B e in C si incontrano nel punto I. Calcola $\angle BIC$.

Dimostrare e argomentare

15. ●● Dimostra che, se una retta è perpendicolare a una di due rette parallele, è perpendicolare anche all'altra.

16. ●● Due rette parallele sono tagliate da una trasversale. Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni sono perpendicolari.

17. ●● Nel triangolo isoscele ABC di base BC, siano BH e CK le altezze relative ai lati obliqui AC e AB. Dimostra che $BH \cong CK$.

18. ● Trova l'errore. Per dimostrare che due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti, un compagno scrive: «Le rette sono parallele, quindi, per il teorema delle parallele, gli angoli alterni interni sono congruenti». Spiega che cosa non va e come si dovrebbe procedere.

19. ●●● Dimostra che, se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo è parallela al lato opposto, allora il triangolo è isoscele. Vale anche il viceversa?

Problemi

20. ●● Ripeti il calcolo di Eratostene (box *Collegamenti* del paragrafo 10.4) con dati moderni arrotondati: supponi che tra due città, poste sullo stesso meridiano e distanti 800 km, i raggi del Sole a mezzogiorno formino con le verticali angoli che differiscono di 7,2°. Stima la circonferenza terrestre. Quale proprietà delle parallele usi?

21. ●● Si vuole pavimentare un cortile con piastrelle tutte uguali a forma di poligono regolare, in modo che attorno a ogni vertice si incontrino solo vertici di piastrelle, senza lasciare spazi. Quali poligoni regolari si possono usare? Perché il pentagono regolare non va bene?

22. ● Su un tavolo da biliardo rettangolare una pallina colpisce la sponda lunga formando con essa un angolo di 35°, rimbalza con lo stesso angolo e va a colpire la sponda opposta, che è parallela alla prima. Quale angolo forma con la seconda sponda? Giustifica.

23. ●● Due paesi A e B si trovano dalla stessa parte di una strada rettilinea r. Si vuole costruire sulla strada una fermata dell'autobus equidistante dai due paesi. Spiega come trovarla. In quale posizione dei paesi il problema non ha soluzione? Può averne infinite?

Costruire con riga e compasso

24. ● Disegna un segmento AB di 7 cm e costruisci con riga e compasso il suo punto medio M. Poi, ripetendo la costruzione, dividi AB in quattro parti congruenti. Descrivi i passaggi e indica la lunghezza di ciascuna parte.

25. ●● Partendo da una retta r e da un suo punto P, costruisci con riga e compasso un angolo di 45° con il vertice in P e giustifica la costruzione. Come ottieni, con la stessa figura, un angolo di 135°?

26. ●● **Con il computer.** In un programma di geometria dinamica disegna un triangolo ABC e costruisci gli assi dei tre lati usando solo gli strumenti retta, circonferenza e intersezione (non gli strumenti già pronti per l'asse o la bisettrice). Trascina i vertici: che cosa osservi? Fai lo stesso con le bisettrici dei tre angoli. Poi spiega, con il teorema dell'asse, la proprietà che hai osservato per gli assi.

Verso la verifica

27. ●● Nel triangolo ABC si ha $\angle A = 64°$ e $\angle B = 48°$. Siano CH l'altezza e CD la bisettrice uscenti da C (H e D sul lato AB). Calcola $\angle HCD$.

28. ●● In un poligono convesso la somma degli angoli interni supera di 720° la somma degli angoli esterni. Quanti lati ha il poligono? Quante diagonali ha?

29. ●●● Sfida. Una stella a cinque punte è formata dai cinque segmenti che uniscono ciascun vertice di un pentagono convesso (anche non regolare) ai due vertici non consecutivi. Dimostra che la somma dei cinque angoli «alle punte» della stella è un angolo piatto.

PER APPROFONDIRE

- [EUC] Euclide, *Elementi*, libro I, proposizioni 27–32: il criterio di parallelismo dimostrato senza il quinto postulato, poi il suo inverso e la somma degli angoli del triangolo, che lo richiedono.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la storia dei tentativi di dimostrare il quinto postulato, da Proclo a Saccheri, e la nascita delle geometrie non euclidee con Lobačevskij, Bolyai e Riemann.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: la geometria iperbolica e che cosa significa che un sistema di assiomi sia coerente.

Glossario del capitolo

Angoli alterni interni
Due angoli formati da due rette con una trasversale, entrambi nella striscia tra le due rette e da parti opposte rispetto alla trasversale.

Angoli coniugati interni
Due angoli interni formati da due rette con una trasversale, dalla stessa parte rispetto alla trasversale; se le rette sono parallele sono supplementari.

Angoli corrispondenti
Due angoli formati da due rette con una trasversale, dalla stessa parte della trasversale, uno interno e uno esterno, nella stessa posizione rispetto alle due rette.

Asse di un segmento
Retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio; è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.

Bisettrice (come luogo)
La bisettrice di un angolo convesso è il luogo dei punti dell'angolo equidistanti dai suoi lati.

Distanza di un punto da una retta
Lunghezza del segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta; è minore della lunghezza di ogni segmento obliquo.

Distanza tra due rette parallele
Distanza di un punto qualsiasi di una delle due rette dall'altra: è la stessa per tutti i punti.

Geometrie non euclidee
Geometrie coerenti in cui il postulato delle parallele è sostituito da un'altra ipotesi: infinite parallele (Lobačevskij, Bolyai) o nessuna parallela (Riemann).

Ipotenusa e cateti
In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è il lato opposto all'angolo retto (il lato maggiore); i cateti sono i due lati che formano l'angolo retto.

Luogo geometrico
Insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una data proprietà, detta proprietà caratteristica del luogo.

Piede della perpendicolare
Punto di intersezione tra una retta e la perpendicolare a essa condotta da un punto dato.

Postulato delle parallele
Per un punto esterno a una retta passa al più una parallela alla retta data (forma di Playfair); è equivalente al quinto postulato di Euclide.

Proiezione ortogonale
Di un punto su una retta: il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta. Di un segmento: il segmento che ha per estremi le proiezioni degli estremi.

Rette parallele
Due rette di un piano che non hanno punti in comune oppure coincidono. Si scrive $r \parallel s$.

Rette perpendicolari
Due rette incidenti che formano quattro angoli retti; basta che uno dei quattro angoli sia retto. Si scrive $r \perp s$.

Secondo criterio generalizzato
Due triangoli con un lato e due angoli qualsiasi ordinatamente congruenti, posti allo stesso modo rispetto al lato, sono congruenti (LAA).

Somma degli angoli interni
In un triangolo è un angolo piatto (180°); in un poligono convesso di n lati è $(n-2)\cdot 180°$. Gli angoli esterni, uno per vertice, hanno somma 360°.

Teorema delle parallele
Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele; si dimostra senza il postulato delle parallele.

Trasversale
Retta che incontra due rette date in due punti distinti, formando con esse otto angoli.

Soluzioni

1. C. Sono entrambi interni (nella striscia tra r e s) e stanno da parti opposte rispetto a t.

2. B. $(5 - 2) \cdot 180° = 540°$.

3. D. A, B e C si dimostrano con i postulati 1–14 e il teorema dell'angolo esterno; la somma degli angoli interni richiede la parallela unica per un vertice.

4. B. È il teorema dell'asse.

5. C. La somma $72° + 118° = 190°$ supera $180°$, quindi le rette non sono parallele (servirebbero coniugati supplementari). Dalla parte opposta i coniugati interni sono i supplementari $108°$ e $62°$, con somma $170° < 180°$. Le rette non possono incontrarsi dalla parte dei due angoli dati: si formerebbe un triangolo con due angoli di $72°$ e $118°$, la cui somma supera un angolo piatto (corollario 1 del teorema dell'angolo esterno). Quindi si incontrano dalla parte opposta, come prevede anche il quinto postulato di Euclide.

6. a) V. b) F: è la lunghezza del segmento di perpendicolare, il più corto di tutti. c) V. d) F: un triangolo ha al massimo un angolo retto o ottuso. e) F: è congruente (uguale) a quella somma, e maggiore di ciascuno dei due angoli. f) F: serve un altro elemento, per esempio un cateto o un angolo acuto congruente.

7. a) perpendicolari; b) proiezione ortogonale; c) un angolo giro (360°); d) luogo geometrico; e) complementari.

8. Angoli 3, 5, 7: $47°$ (3 opposto al vertice di 1; 5 corrispondente di 1; 7 opposto al vertice di 5). Angoli 2, 4, 6, 8: $180° - 47° = 133°$ (2 e 4 adiacenti a 1; 6 e 8 corrispondenti di 2 e 4).

9. a) Alterni interni congruenti: $3x + 12 = 5x - 20 \Rightarrow x = 16$; ciascun angolo misura $60°$. b) Coniugati interni supplementari: $(2x + 10) + (4x - 10) = 180 \Rightarrow 6x = 180 \Rightarrow x = 30$; gli angoli misurano $70°$ e $110°$.

10. L'altro angolo interno non adiacente misura $128° - 75° = 53°$; l'angolo interno adiacente all'esterno misura $180° - 128° = 52°$. Angoli: $75°$, $53°$, $52°$ (somma $180°$).

11. Pentagono: interno $108°$, esterno $72°$. Esagono: $120°$, $60°$. Ottagono: $135°$, $45°$. Dodecagono: $150°$, $30°$. (Esterno $= 360° : n$, interno $= 180° -$ esterno.)

12. a) $(n - 2) \cdot 180 = 1260 \Rightarrow n - 2 = 7 \Rightarrow n = 9$. b) Angolo esterno $40°$, $n = 360 : 40 = 9$. c) No: l'angolo esterno sarebbe $50°$ e $360 : 50 = 7{,}2$ non è un numero naturale.

13. a) $180° : 9 = 20°$; angoli $40°$, $60°$, $80°$. b) Posto $\angle B = x$: $(x + 20) + x + 3x = 180 \Rightarrow 5x = 160 \Rightarrow x = 32$. Angoli: $\angle A = 52°$, $\angle B = 32°$, $\angle C = 96°$.

14. $\angle C = 180° - 70° - 50° = 60°$. Nel triangolo BIC: $\angle IBC = 25°$, $\angle ICB = 30°$, quindi $\angle BIC = 180° - 25° - 30° = 125°$.

15. Ipotesi: $r \parallel s$, $t \perp r$. Tesi: $t \perp s$. Poiché t incontra r ed è distinta da essa, incontra anche s (osservazione del paragrafo 10.3.2, che usa il postulato delle parallele). Gli angoli corrispondenti formati da t con r e con s sono congruenti (teorema inverso del teorema delle parallele); quello su r è retto (ipotesi), quindi anche quello su s è retto e $t \perp s$. c.v.d.

16. Siano $r \parallel s$ tagliate da t in R e S, e siano φ (in R) e ψ (in S) due coniugati interni. Per il teorema inverso $\varphi + \psi = 180°$. Le bisettrici si incontrano in un punto X della striscia (traccia: se fossero parallele, i coniugati interni $\varphi/2$ e $\psi/2$ che formano con t sarebbero supplementari, mentre la loro somma è $90°$). Nel triangolo RSX gli angoli in R e in S misurano $\varphi/2$ e $\psi/2$, con somma $90°$; per la somma degli angoli interni, $\angle RXS = 180° - 90° = 90°$. Le bisettrici sono perpendicolari. c.v.d.

17. Ipotesi: $AB \cong AC$; $BH \perp AC$, $CK \perp AB$. Tesi: $BH \cong CK$. Gli angoli alla base $\angle B$ e $\angle C$ sono congruenti (triangolo isoscele) e acuti, quindi H sta sulla semiretta CA e K sulla semiretta BA. I triangoli

BHC e CKB sono rettangoli in H e in K, hanno l'ipotenusa BC in comune e $\angle HCB \cong \angle KBC$. Per il criterio dell'ipotenusa e di un angolo acuto sono congruenti, quindi $BH \cong CK$. c.v.d.

18. Il compagno cita il teorema sbagliato: il teorema delle parallele dice che *angoli alterni interni congruenti ⇒ rette parallele*, mentre qui si vuole l'inverso, *rette parallele ⇒ angoli alterni interni congruenti*, che non è una conseguenza logica del primo. Bisogna dimostrarlo a parte, usando il postulato delle parallele: si traccia per A la retta r' che forma con t un angolo alterno interno congruente a quello in B; per il teorema delle parallele $r' \parallel s$; per l'unicità della parallela $r' = r$ (paragrafo 10.3.2).

19. Sia ABC il triangolo, ε l'angolo esterno in A (adiacente a $\angle BAC$, ottenuto prolungando CA oltre A fino a un punto E) e AF la sua bisettrice, con $AF \parallel BC$. Allora $\angle EAF \cong \angle ACB$ (corrispondenti rispetto alle parallele AF, BC e alla trasversale CE) e $\angle FAB \cong \angle ABC$ (alterni interni rispetto alla trasversale AB). Poiché $\angle EAF \cong \angle FAB$ (bisettrice), si ha $\angle ABC \cong \angle ACB$: il triangolo è isoscele sulla base BC (inverso del teorema del triangolo isoscele). c.v.d. Vale anche il viceversa: se $\angle B \cong \angle C$, l'angolo esterno in A è $\angle B + \angle C$, quindi la sua metà $\angle FAB$ è congruente a $\angle B$; questi angoli sono alterni interni rispetto ad AF, BC e alla trasversale AB, e per il teorema delle parallele $AF \parallel BC$.

20. L'angolo al centro della Terra tra le verticali delle due città è 7,2° (alterni interni: raggi solari paralleli tagliati dalla verticale). 7,2° è $\frac{1}{50}$ di 360°, quindi la circonferenza è circa 50 · 800 km = 40 000 km. Si usa il teorema inverso del teorema delle parallele (rette parallele ⇒ angoli alterni interni congruenti).

21. Attorno a un vertice gli angoli delle piastrelle devono sommare 360°, quindi l'angolo interno deve essere un divisore di 360° e il quoziente almeno 3. Triangolo equilatero: 60° (6 piastrelle); quadrato: 90° (4); esagono regolare: 120° (3). Il pentagono ha angoli di 108° e 360 : 108 ≈ 3,33 non è intero (3 pentagoni lasciano un vuoto di 36°, 4 si sovrapporrebbero). Dal poligono di 7 lati in poi l'angolo interno è compreso tra 120° e 180°, e 360 diviso per l'angolo è compreso tra 2 e 3, quindi non è intero: nessun altro poligono regolare va bene.

22. 35°. Le due sponde sono parallele e il tratto percorso dalla pallina è una trasversale: l'angolo con la seconda sponda è alterno interno all'angolo di 35° formato con la prima, quindi congruente (teorema inverso).

23. La fermata deve essere equidistante da A e da B, quindi stare sull'asse di AB (teorema dell'asse) e sulla strada: è il punto in cui l'asse di AB incontra r. Il problema non ha soluzione se l'asse è parallelo a r, cioè se $AB \perp r$ (due rette perpendicolari ad AB sono parallele). Non ha mai infinite soluzioni: servirebbe che l'asse coincidesse con r, ma l'asse passa per il punto medio di AB, che sta dalla stessa parte di A e B e quindi non su r.

24. Con centri A e B e la stessa apertura (per esempio 7 cm) si tracciano archi che si incontrano in P e Q; la retta PQ è l'asse e taglia AB nel punto medio M: $AM = MB = 3{,}5$ cm. Ripetendo la costruzione sui segmenti AM e MB si trovano i loro punti medi M_1 e M_2: $AM_1 \cong M_1M \cong MM_2 \cong M_2B$ (metà di segmenti congruenti sono congruenti), ciascuno di 1,75 cm.

25. Si costruisce la perpendicolare a r in P: un arco di centro P taglia r in A e B, e l'asse di AB passa per P ed è perpendicolare a r. Sia C un punto della perpendicolare: $\angle BPC$ è retto, cioè 90°. La sua bisettrice PD, costruita come nel paragrafo, forma con PB un angolo di 45°. L'angolo $\angle APD$ è adiacente a $\angle DPB$, quindi ne è il supplementare: 180° − 45° = 135°.

26. In ogni posizione dei vertici i tre assi passano per uno stesso punto (che è esterno al triangolo quando il triangolo è ottusangolo), e anche le tre bisettrici passano per uno stesso punto, sempre interno al triangolo. Per gli assi: gli assi di AB e di BC sono perpendicolari a due rette incidenti, quindi non sono paralleli; sia O il loro punto d'incontro. Per il teorema dell'asse $OA \cong OB$ e $OB \cong OC$, quindi $OA \cong OC$ (proprietà transitiva) e, ancora per il teorema dell'asse, O sta sull'asse di AC. Questi punti, il circocentro e l'incentro, li studierai il prossimo anno.

27. $\angle ACB = 180° - 64° - 48° = 68°$, quindi $\angle ACD = 34°$. Nel triangolo rettangolo ACH: $\angle ACH = 90° - 64° = 26°$. Poiché $26° < 34°$, H sta tra A e D, e $\angle HCD = 34° - 26° = 8°$.

28. $(n - 2) \cdot 180 = 360 + 720 = 1080 \Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$: è un ottagono. Diagonali: $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.

29. Sia $ABCDE$ il pentagono; le punte della stella sono i vertici, con angoli $\angle CAD$, $\angle DBE$, $\angle ECA$, $\angle ADB$, $\angle BEC$. La diagonale BE incontra AC in F e AD in G (nell'ordine B, F, G, E). Nel triangolo AFG: $\angle CAD + \angle AFG + \angle AGF = 180°$. L'angolo $\angle AFG = \angle AFE$ è esterno al triangolo CFE, quindi è la somma dei due interni non adiacenti: $\angle AFE \cong \angle ACE + \angle BEC$. Analogamente $\angle AGF = \angle AGB$ è esterno al triangolo BGD: $\angle AGB \cong \angle EBD + \angle ADB$. Sostituendo, $\angle CAD + \angle ACE + \angle BEC + \angle EBD + \angle ADB = 180°$: la somma dei cinque angoli alle punte è un angolo piatto. c.v.d.