CAPITOLO

7

Equazioni e disequazioni di primo grado

Un'equazione è una domanda scritta in simboli: risolverla vuol dire trasformarla, un passo alla volta, finché la risposta non si legge da sola.

OBIETTIVI

1. Distinguere uguaglianze, identità ed equazioni e classificare un'equazione come determinata, indeterminata o impossibile.
2. Applicare i principi di equivalenza per risolvere equazioni numeriche intere e, con la legge di annullamento del prodotto, semplici equazioni già scomposte o facili da scomporre.
3. Risolvere equazioni fratte con denominatori semplici e semplici equazioni letterali intere, controllando le soluzioni.
4. Impostare e risolvere problemi con un'equazione o una disequazione, verificando l'accettabilità della soluzione.
5. Conoscere le proprietà delle disuguaglianze e risolvere disequazioni intere di primo grado, scrivendo le soluzioni come intervalli.
6. Risolvere sistemi di disequazioni intersecando gli insiemi delle soluzioni.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 Uguaglianze, identità ed equazioni 2
7.2 Equazioni numeriche intere 5
7.3 Equazioni fratte e letterali 7
7.4 Problemi risolubili con le equazioni 9
7.5 Disuguaglianze, intervalli e disequazioni 10
7.6 Sistemi di disequazioni 17

Matematica 1 · Parte IV · Equazioni e disequazioni · versione 1.0
Capitolo 7: Equazioni e disequazioni di primo grado · pagine 179–202 del volume completo · estratto per lo studio

«Penso un numero, lo moltiplico per 3, aggiungo 7 e ottengo 25. Che numero ho pensato?» Probabilmente rispondi subito 6, perché procedi a ritroso: tolgo 7 e ho 18, divido per 3 e ho 6. Senza accorgertene hai risolto un'*equazione*. Scritto in simboli, l'indovinello diventa $3x + 7 = 25$, e il tuo ragionamento a ritroso corrisponde esattamente alle regole che studieremo in questo capitolo.

Le equazioni permettono di trovare una quantità sconosciuta a partire dalle informazioni che la legano a quantità note: qui troveranno la loro applicazione più naturale le frazioni e i prodotti notevoli dei capitoli precedenti. Nella seconda parte del capitolo passeremo dalle uguaglianze alle *disuguaglianze*: le disequazioni rispondono a domande come «almeno quanto?» o «fino a quando?».

7.1 Uguaglianze, identità ed equazioni

7.1.1 Uguaglianze e identità

Un'**uguaglianza** è una scrittura formata da due espressioni collegate dal segno «=». Se le espressioni sono numeriche, l'uguaglianza è semplicemente vera o falsa: $3 + 4 \cdot 5 = 23$ è vera, $2^3 = 6$ è falsa. Le cose si fanno più interessanti quando compaiono delle lettere, perché la verità dell'uguaglianza può dipendere dai valori che assegniamo a esse.

Consideriamo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Qualunque coppia di numeri sostituiamo ad a e b, otteniamo un'uguaglianza vera: è il quadrato di binomio del capitolo 6. Un'uguaglianza tra espressioni letterali che risulta vera per *tutti* i valori attribuiti alle lettere (per i quali le espressioni hanno significato) si chiama **identità**.

L'uguaglianza $2x + 1 = 7$, invece, è vera se al posto di x mettiamo 3 ($2 \cdot 3 + 1 = 7$) ed è falsa per qualunque altro valore: per $x = 0$ diventa $1 = 7$, per $x = 5$ diventa $11 = 7$. Qui non stiamo affermando un fatto generale: stiamo ponendo una domanda.

7.1.2 Che cos'è un'equazione

Un'**equazione** è un'uguaglianza tra due espressioni contenenti una o più lettere, dette **incognite**, per la quale ci si chiede per quali valori delle incognite essa risulta vera. In questo capitolo le equazioni hanno una sola incognita, che indichiamo di solito con x. L'espressione a sinistra del segno «=» è il **primo membro**, quella a destra il secondo membro.

Un numero che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza si chiama **soluzione** (o radice) dell'equazione. L'insieme di tutte le soluzioni si chiama **insieme delle soluzioni** e si indica di solito con S. **Risolvere** un'equazione significa trovarne l'insieme delle soluzioni.

Come hai visto nel capitolo 4, la risposta dipende dall'insieme numerico in cui cerchiamo le soluzioni: l'equazione $2x = 5$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$, mentre in $\mathbb{Q}$ ha la soluzione $\frac{5}{2}$. In questo volume, se non è detto altro, cerchiamo le soluzioni in $\mathbb{Q}$.

C'è poi un secondo aspetto. Nell'equazione $\frac{3}{x-2} = 1$ il primo membro non ha significato per $x = 2$, perché il denominatore si annulla. L'insieme dei valori per i quali entrambi i membri hanno significato si chiama **dominio** (o insieme di definizione) dell'equazione; le soluzioni vanno cercate solo lì. Per l'equazione precedente il dominio è $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$.

7.1.3 Come si classificano le equazioni

Secondo il numero delle soluzioni, un'equazione si dice:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni (per esempio $2x + 1 = 7$, con $S = \{3\}$);
- **indeterminata** se ha infinite soluzioni; nel caso delle equazioni di primo grado questo accade quando *ogni* numero del dominio è soluzione, come per $2(x + 1) = 2x + 2$, che è in realtà un'identità: $S = \mathbb{Q}$;
- **impossibile** se non ha soluzioni, come $x + 1 = x + 3$ (un numero aumentato di 1 non può essere uguale allo stesso numero aumentato di 3): $S = \varnothing$.

Un'equazione si dice **intera** se l'incognita non compare in nessun denominatore, **fratta** (o frazionaria) se l'incognita compare in almeno un denominatore. Si dice **numerica** se, oltre all'incognita, contiene solo numeri; **letterale** se contiene altre lettere, che rappresentano numeri dati e si chiamano **parametri**. Infine, un'equazione intera che si può scrivere nella forma $P(x) = 0$, con $P(x)$ polinomio ridotto a forma normale, ha come **grado** il grado del polinomio.

7.1.4 Equazioni equivalenti

Due equazioni nella stessa incognita si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni. Per esempio $2x = 6$ e $x + 1 = 4$ sono equivalenti, perché entrambe hanno $S = \{3\}$; invece $x^2 = 9$ e $x = 3$ non lo sono, perché la prima ha anche la soluzione -3.

7.1.5 Il primo principio

Una bilancia a due piatti in equilibrio è il modello più intuitivo di un'equazione. Se aggiungiamo o togliamo lo stesso peso da entrambi i piatti, l'equilibrio resta (figura 7.1). Lo stesso vale per i due membri di un'equazione.

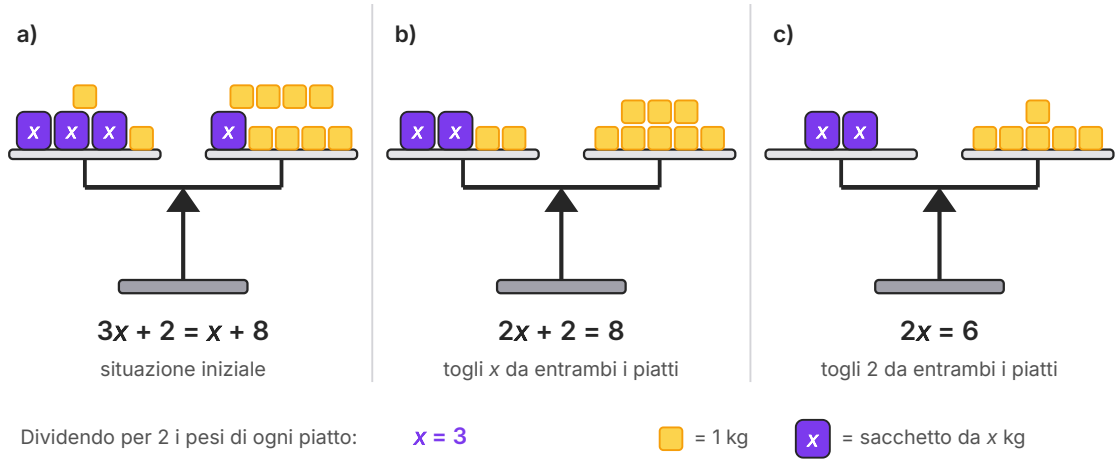

Figura 7.1 L'equazione $3x + 2 = x + 8$ come bilancia in equilibrio. Togliendo da entrambi i piatti un sacchetto e poi 2 kg, l'equilibrio resta (primo principio); dividendo infine a metà il contenuto dei piatti si trova $x = 3$ (secondo principio).

IN SINTESI

Primo principio di equivalenza. Aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, o una stessa espressione contenente l'incognita definita in tutto il dominio, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Secondo principio di equivalenza. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero *diverso da zero*, o per una stessa espressione definita e diversa da zero in tutto il dominio, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Dal primo principio discendono due regole pratiche che userai di continuo.

- **Regola del trasporto**: un termine si può spostare da un membro all'altro cambiandogli il segno. Infatti in $3x + 2 = x + 8$, sottraendo x e 2 a entrambi i membri si ottiene $3x - x = 8 - 2$: il termine x è «passato» a sinistra come $-x$ e il termine 2 è passato a destra come -2.
- **Regola di cancellazione**: due termini uguali che compaiono in entrambi i membri si possono eliminare. In $x^2 + 5x = x^2 - 10$, togliendo x^2 a entrambi i membri, resta $5x = -10$.

7.1.6 Il secondo principio

Anche il secondo principio si giustifica allo stesso modo: se $A(c) = B(c)$, allora $k \cdot A(c) = k \cdot B(c)$; viceversa, se $k \neq 0$, dividendo per k si torna all'uguaglianza di partenza. La condizione $k \neq 0$ è essenziale: moltiplicando per 0 qualsiasi equazione diventa $0 = 0$, vera per ogni x, e tutta l'informazione va perduta. Le conseguenze più utili sono tre.

- **Cambiare segno a tutti i termini** (cioè moltiplicare per -1): $-2x + 3 = -7$ equivale a $2x - 3 = 7$.

- **Eliminare i denominatori numerici**, moltiplicando entrambi i membri per il loro mcm: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$, moltiplicata per 6, diventa $3x + 2x = 30$.
- **Dividere per il coefficiente dell'incognita**, se è diverso da zero: da $5x = 30$ si ottiene $x = 6$.

ERRORE FREQUENTE

Dividere (o moltiplicare) per un'espressione che contiene l'incognita. Per risolvere $x^2 = 3x$ qualcuno «semplifica» dividendo per x e ottiene $x = 3$. Ma x potrebbe valere 0, e il secondo principio vieta di dividere per zero: infatti $x = 0$ è soluzione ($0 = 0$) ed è andata perduta. Il modo corretto è portare tutto al primo membro e scomporre: $x^2 - 3x = 0$, $x(x - 3) = 0$, quindi $S = \{0, 3\}$ (paragrafo 7.2.3).

L'errore opposto aggiunge soluzioni: moltiplicando $x = 2$ per $x - 1$ si ottiene $x(x - 1) = 2(x - 1)$, che ha come soluzioni 2 *e* 1. La soluzione 1, che non risolve l'equazione di partenza, si dice **soluzione estranea**.

7.2 Equazioni numeriche intere

7.2.1 La forma normale e la discussione

Applicando i principi di equivalenza, ogni equazione intera di primo grado (o che si riduce al primo grado) si può scrivere nella **forma normale**

$$ax = b$$

dove a è il coefficiente dell'incognita e b il termine noto. Che cosa succede ora dipende dai valori di a e b. Se $a \neq 0$, possiamo dividere per a e troviamo l'unica soluzione $x = \frac{b}{a}$. Se invece $a = 0$, il primo membro vale $0 \cdot x = 0$ per ogni x, e l'equazione diventa $0 = b$: è vera per ogni x se $b = 0$, falsa per ogni x se $b \neq 0$. Questo esame dei casi possibili si chiama **discussione** dell'equazione (tabella 7.1).

Tabella 7.1 Discussione dell'equazione in forma normale $ax = b$.

Caso	L'equazione diventa	Insieme delle soluzioni	L'equazione è
$a \neq 0$	$x = \frac{b}{a}$	$S = \{\frac{b}{a}\}$	determinata
$a = 0, b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	$S = \varnothing$	impossibile
$a = 0, b = 0$	$0 \cdot x = 0$	$S = \mathbb{Q}$	indeterminata

Ne segue un fatto importante: un'equazione di primo grado vera e propria (con $a \neq 0$) ha sempre *una e una sola* soluzione. Non può averne due, e nemmeno nessuna.

7.2.2 Il procedimento risolutivo

Per risolvere un'equazione numerica intera conviene seguire sempre lo stesso ordine:

1. svolgere i calcoli ed eliminare le parentesi (prodotti, prodotti notevoli, potenze);
2. se ci sono denominatori numerici, ridurre allo stesso denominatore ed eliminarli (secondo principio);
3. trasportare i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo (primo principio);
4. sommare i termini simili, ottenendo la forma normale $ax = b$;
5. discutere: se $a \neq 0$, dividere per a; altrimenti riconoscere se l'equazione è impossibile o indeterminata;
6. verificare la soluzione nell'equazione di partenza.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $\frac{x-1}{3} - \frac{2x+1}{4} = \frac{x}{6} - 1$.

Denominatori. Il mcm di 3, 4 e 6 è 12. Moltiplichiamo entrambi i membri per 12, cioè moltiplichiamo ogni termine per 12 e semplifichiamo: $4(x-1) - 3(2x+1) = 2x - 12$. Attenzione al segno meno davanti alla seconda frazione: riguarda *tutto* il numeratore, per questo lo scriviamo tra parentesi.

Calcoli. $4x - 4 - 6x - 3 = 2x - 12$, cioè $-2x - 7 = 2x - 12$.

Trasporto. $-2x - 2x = -12 + 7$, quindi $-4x = -5$.

Soluzione. Dividendo per -4: $x = \frac{5}{4}$. L'equazione è determinata, $S = \{\frac{5}{4}\}$.

Verifica. Primo membro: $\frac{1}{4} : 3 - \frac{7}{2} : 4 = \frac{1}{12} - \frac{7}{8} = \frac{2-21}{24} = -\frac{19}{24}$. Secondo membro: $\frac{5}{24} - 1 = -\frac{19}{24}$. I due membri coincidono.

Vediamo ora due equazioni che non sono determinate. In $2(x+3) - x = x + 4$ i calcoli danno $x + 6 = x + 4$, cioè $0 \cdot x = -2$: l'equazione è impossibile. In $3(x-1) + 2 = 3x - 1$ si ottiene $3x - 1 = 3x - 1$, cioè $0 \cdot x = 0$: l'equazione è indeterminata, anzi è un'identità.

7.2.3 La legge di annullamento del prodotto

Le equazioni di secondo grado e di grado superiore si studieranno in modo sistematico il prossimo anno. Molte di esse, però, si possono già risolvere ora, grazie alle scomposizioni più sem-

plici del capitolo 6 e a una proprietà dei numeri che conosci da sempre.

IN SINTESI

Legge di annullamento del prodotto. Un prodotto di numeri è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero:

$$A \cdot B = 0 \iff A = 0 \vee B = 0$$

Per risolvere un'equazione intera di grado superiore al primo si porta tutto al primo membro, si scompone il polinomio in fattori di primo grado e si uguaglia a zero ciascun fattore. Ogni fattore di primo grado fornisce una soluzione. Per esempio $(2x - 1)(x + 3) = 0$ ha $S = \{\frac{1}{2}, -3\}$; $x^2 - 5x = 0$ diventa $x(x - 5) = 0$, con $S = \{0, 5\}$; $x^3 - 4x = 0$ diventa $x(x - 2)(x + 2) = 0$, con $S = \{-2, 0, 2\}$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi $x^3 - 2x^2 = x - 2$.

Forma $P(x) = 0$. Trasportiamo: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. È un'equazione di terzo grado.

Scomposizione. Raccoglimento parziale: $x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$.

Annullamento del prodotto. $x - 2 = 0$ oppure $x - 1 = 0$ oppure $x + 1 = 0$, quindi $S = \{-1, 1, 2\}$.

Verifica (per $x = -1$): primo membro $-1 - 2 = -3$, secondo membro $-1 - 2 = -3$. Le altre si controllano allo stesso modo.

7.3 Equazioni fratte e letterali

7.3.1 Condizioni di esistenza e procedimento

In un'equazione fratta l'incognita compare al denominatore. Come per le frazioni algebriche del capitolo 6, la prima cosa da fare è stabilire le **condizioni di esistenza** (C.E.): i valori che annullano un denominatore non appartengono al dominio e non possono essere soluzioni. Poi si procede così:

1. si scompongono i denominatori in fattori;
2. si scrivono le C.E., imponendo che ogni fattore che contiene l'incognita sia diverso da zero;
3. si calcola il mcm dei denominatori e si moltiplicano per esso entrambi i membri: per il secondo principio è lecito, perché nel dominio il mcm non si annulla mai;
4. si risolve l'equazione intera ottenuta;
5. si confrontano le soluzioni trovate con le C.E.: si accettano quelle che le rispettano, si scartano le altre.

Un esempio semplice: $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+1}$. C.E.: $x \neq 2$ e $x \neq -1$. Moltiplicando per $(x-2)(x+1)$: $3(x+1) = 2(x-2)$, cioè $3x + 3 = 2x - 4$, da cui $x = -7$. Il valore -7 rispetta le C.E. ed è accettabile: $S = \{-7\}$.

7.3.2 Il controllo delle soluzioni

Il passo 5 non è una formalità. Consideriamo

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

Poiché $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, le C.E. sono $x \neq 1$ e $x \neq -1$, e il mcm è $(x-1)(x+1)$. Moltiplicando: $2(x+1) + (x-1) = 4$, cioè $3x + 1 = 4$, quindi $x = 1$. Ma 1 è escluso dalle C.E.: sostituendolo, i denominatori si annullano. L'unica «soluzione» trovata va scartata, e l'equazione è impossibile: $S = \varnothing$.

Che cosa è successo? Moltiplicando per un'espressione contenente l'incognita abbiamo ottenuto un'equazione intera che ha una soluzione in più, quella che annulla il mcm: è una soluzione estranea, come nell'Errore frequente del paragrafo 7.1.6. Le C.E. servono proprio a riconoscerla.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare le C.E. o scriverle dopo aver semplificato. Le condizioni di esistenza si scrivono sull'equazione di partenza, prima di qualsiasi trasformazione, e vanno controllate alla fine. Chi risolve $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$ «togliendo i denominatori» trova $x = 3$ e conclude $S = \{3\}$; invece 3 annulla i denominatori e l'equazione è impossibile.

7.3.3 Equazioni letterali

In un'equazione letterale, accanto all'incognita compaiono altre lettere, i parametri, che rappresentano numeri fissati ma non specificati. Per evitare equivoci si dichiara sempre quale lettera è l'incognita. Risolvere un'equazione letterale significa trovare le soluzioni in funzione dei parametri, e *discuterla* significa stabilire per quali valori dei parametri essa è determinata, impossibile o indeterminata.

Il procedimento è quello delle equazioni numeriche, con una cautela in più: non si può dividere per un'espressione che contiene i parametri senza chiedersi se essa possa valere zero. Consideriamo, nell'incognita x, l'equazione $ax = 3$. Se $a \neq 0$ la soluzione è $x = \frac{3}{a}$; se $a = 0$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 3$, impossibile. Un'unica scrittura, $x = \frac{3}{a}$, sarebbe incompleta, perché per $a = 0$ non ha significato.

COLLEGAMENTI

Scienze: formule inverse e una temperatura speciale. Ogni formula delle scienze è un'equazione letterale, e ricavarne una grandezza significa risolverla rispetto a quella grandezza. Le scale di temperatura Celsius e Fahrenheit sono legate dalla formula $F = 1{,}8C + 32$. Esiste una temperatura che si esprime con lo stesso numero nelle due scale? Ponendo $F = C = x$ si ottiene $x = 1{,}8x + 32$, cioè $-0{,}8x = 32$, quindi $x = -40$: -40 °C corrispondono esattamente a -40 °F.

7.4 Problemi risolubili con le equazioni

7.4.1 Un metodo in quattro fasi

Saper risolvere un'equazione è solo metà del lavoro: nella vita e nelle scienze le equazioni non arrivano già scritte, bisogna costruirle a partire da un testo. Conviene procedere con ordine, in quattro fasi (figura 7.2).

1. **Comprendere.** Leggere con attenzione il testo, individuare i dati e la domanda, scegliere l'incognita (dichiarando che cosa rappresenta e in quale unità di misura) e scrivere le **limitazioni**, cioè le condizioni che l'incognita deve soddisfare perché abbia senso nel problema: un numero di persone è un naturale, una lunghezza è positiva, un'età non supera un certo valore.
2. **Tradurre.** Esprimere le altre quantità in funzione dell'incognita e scrivere l'equazione che traduce la relazione del testo, detta **equazione risolvente**.
3. **Risolvere** l'equazione con i principi di equivalenza.
4. **Controllare.** Stabilire se la soluzione rispetta le limitazioni (**accettabilità**) e verificarla nel testo del problema, non solo nell'equazione: se l'equazione è sbagliata, la verifica nell'equazione non lo rivela.

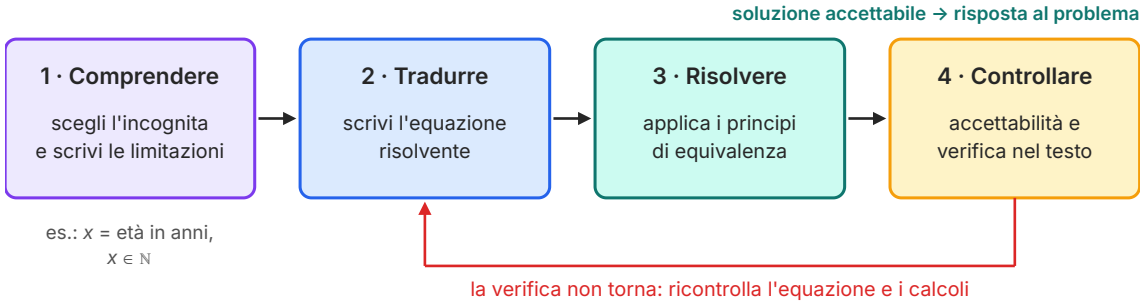

Figura 7.2 Le quattro fasi della risoluzione di un problema con un'equazione. Se la verifica nel testo non torna, l'errore è di solito nella traduzione: si torna alla fase 2.

APPROFONDIMENTO

Da al-jabr all'algebra. Nel IX secolo il matematico persiano Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī, attivo a Baghdad, scrisse un trattato sulla risoluzione delle equazioni il cui titolo contiene due parole chiave: *al-jabr* e *al-muqabala*. La prima indica il «ripristino», cioè l'operazione di portare nell'altro membro un termine sottratto, rendendolo positivo: è la nostra regola del trasporto. La seconda indica il «confronto», cioè la cancellazione dei termini uguali nei due membri. Dalla parola *al-jabr* deriva il nostro «algebra», e dal nome di al-Khwārizmī la parola «algoritmo».

7.4.2 Problemi di numeri

Tre numeri naturali consecutivi hanno per somma 87. Quali sono? Sia x il minore, con la limitazione $x \in \mathbb{N}$; gli altri sono $x + 1$ e $x + 2$. L'equazione risolvente è $x + (x + 1) + (x + 2) = 87$, cioè $3x + 3 = 87$, da cui $x = 28$. La soluzione è accettabile e i numeri sono 28, 29, 30; verifica: $28 + 29 + 30 = 87$. Se la somma fosse 100, avremmo $3x = 97$ e $x = \frac{97}{3}$, che non è naturale: il problema non avrebbe soluzione, anche se l'equazione ne ha una. È qui che le limitazioni fanno la differenza.

7.5 Disuguaglianze, intervalli e disequazioni

Molte domande della vita reale non chiedono un valore esatto. Chiedono *fino a quando*, *almeno quanto*, *non più di*. Quanti minuti posso telefonare prima che un abbonamento diventi più caro di un altro? Che voto mi serve, come minimo, nell'ultima verifica per avere la sufficienza in pagella? Quanto può essere lungo il terzo lato di un triangolo, se gli altri due misurano 5 cm e 8 cm?

Per rispondere servono le **disequazioni**: confronti tra due espressioni che contengono un'incognita, scritti con i simboli $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. La loro soluzione, di solito, non è un numero ma un insieme di numeri, spesso infinito: tutti i numeri maggiori di 7,5, tutti quelli compresi tra 3 e 13. Per descrivere questi insiemi in modo compatto useremo gli **intervalli**.

La buona notizia è che le tecniche usate per le equazioni restano quasi tutte valide: si sviluppano i calcoli, si trasportano i termini, si eliminano i denominatori numerici. C'è però una regola nuova, che è anche la fonte dell'errore più frequente: quando si moltiplicano o si dividono i due membri per un numero *negativo*, il verso della disuguaglianza si rovescia. Vediamo perché.

7.5.1 Disuguaglianze e loro proprietà

Una **disuguaglianza** confronta due espressioni con uno dei simboli $<$ (minore), $>$ (maggiore), $\leq$ (minore o uguale), $\geq$ (maggiore o uguale). Come le proposizioni del capitolo 4, una disugua-

glianza numerica è vera oppure falsa: $-3 < 2$ è vera, $5 \leq 5$ è vera, $5 < 5$ è falsa. I simboli $<$ e $>$ esprimono una disuguaglianza *stretta*, i simboli $\leq$ e $\geq$ una disuguaglianza *larga*. Le scritture $a < b$ e $b > a$ dicono la stessa cosa con **verso** opposto.

Per risolvere le disequazioni ci servono alcune regole che dicono come si comporta una disuguaglianza quando la si trasforma. Partiamo da un esempio numerico: $3 < 7$.

- Aggiungiamo 5 a entrambi i membri: $8 < 12$. Il verso non cambia. Lo stesso accade sottraendo: $3 - 10 < 7 - 10$, cioè $-7 < -3$. Sulla retta, aggiungere lo stesso numero significa spostare entrambi i punti della stessa distanza: chi stava a sinistra resta a sinistra.
- Moltiplichiamo per 2: $6 < 14$. Il verso non cambia.
- Moltiplichiamo per -2: otteniamo -6 e -14, e ora $-6 > -14$. Il verso *si è rovesciato*.

Perché la moltiplicazione per un negativo rovescia il verso? Moltiplicare per -1 significa passare all'opposto, cioè riflettere i punti della retta rispetto all'origine: lo specchio scambia la sinistra con la destra, e il numero che era più piccolo diventa il più grande. In modo algebrico: se $a < b$, allora $b - a > 0$; moltiplicando per un numero $c < 0$, il prodotto $(b - a)c$ è negativo per la regola dei segni, cioè $b\,c - a\,c < 0$, ovvero $a\,c > b\,c$.

IN SINTESI

Proprietà delle disuguaglianze (per a, b, c razionali).

- **Transitiva:** se $a < b$ e $b < c$, allora $a < c$.
- **Addizione:** se $a < b$, allora $a + c < b + c$ per ogni c (lo stesso vale sottraendo).
- **Moltiplicazione per un positivo:** se $a < b$ e $c > 0$, allora $a\,c < b\,c$ e $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- **Moltiplicazione per un negativo:** se $a < b$ e $c < 0$, allora $a\,c > b\,c$ e $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$: **il verso cambia**.
- **Somma membro a membro:** se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$.

Le stesse regole valgono con $\leq$ al posto di $<$.

7.5.2 Disequazioni e soluzioni

Una **disequazione** è una disuguaglianza tra due espressioni letterali, di cui almeno una contiene un'incognita, che ci chiediamo per quali valori dell'incognita sia vera. Per esempio

$$2x - 5 > 1$$

non è né vera né falsa finché non si sceglie un valore di x: per $x = 4$ diventa $3 > 1$, vera; per $x = 2$ diventa $-1 > 1$, falsa; per $x = 3$ diventa $1 > 1$, falsa (1 non è maggiore di sé stesso). È un enunciato aperto, nel senso del capitolo 4.

Si chiama **soluzione** di una disequazione ogni valore dell'incognita che, sostituito, la rende una disuguaglianza vera. L'**insieme delle soluzioni**, indicato con S, è l'insieme di verità dell'e-

nunciato. Per la disequazione $2x - 5 > 1$ scopriremo tra poco che le soluzioni sono tutti i numeri maggiori di 3: sono infinite, e non si possono elencare.

7.5.3 Gli intervalli

Un **intervallo** è l'insieme di tutti i numeri compresi tra due estremi, oppure di tutti i numeri che stanno da una stessa parte di un estremo. Sulla retta orientata un intervallo è un segmento oppure una semiretta. Gli intervalli si descrivono in tre modi equivalenti:

1. con una o due **disuguaglianze**, per esempio $-2 \le x < 3$;
2. con la notazione con le **parentesi quadre**, per esempio $[-2; 3[$;
3. con una **rappresentazione grafica** sulla retta (figura 7.3).

Nella notazione con le parentesi, la parentesi quadra «rivolta verso il numero», come in $[-2$, indica che l'estremo *appartiene* all'intervallo; la parentesi «rivolta all'esterno», come in $3[$, indica che l'estremo è *escluso*. Gli estremi si separano con il punto e virgola, perché la virgola è già usata per i decimali. Sulla retta, un estremo incluso si disegna con un pallino pieno, un estremo escluso con un pallino vuoto.

Un intervallo è **limitato** se ha entrambi gli estremi numerici, **illimitato** se si estende senza fine da una parte. Per gli intervalli illimitati si usano i simboli $+\infty$ (più infinito) e $-\infty$ (meno infinito), che *non sono numeri*: indicano soltanto che l'intervallo prosegue senza fine in quella direzione. Per questo dalla parte di $\pm\infty$ la parentesi è sempre aperta. Un intervallo si dice **aperto** se non contiene i suoi estremi numerici, **chiuso** se li contiene; se ne contiene uno solo, è chiuso da una parte e aperto dall'altra.

Tabella 7.2 Gli intervalli di estremi a e b, con $a < b$, nelle tre notazioni.

Disuguaglianza	Intervallo	Sulla retta	Nome
$a \le x \le b$	$[a; b]$	segmento, due pallini pieni	limitato chiuso
$a < x < b$	$]a; b[$	segmento, due pallini vuoti	limitato aperto
$a \le x < b$	$[a; b[$	pieno in a, vuoto in b	chiuso a sinistra, aperto a destra
$a < x \le b$	$]a; b]$	vuoto in a, pieno in b	aperto a sinistra, chiuso a destra
$x \ge a$	$[a; +\infty[$	semiretta verso destra, pallino pieno	illimitato superiormente, chiuso
$x > a$	$]a; +\infty[$	semiretta verso destra, pallino vuoto	illimitato superiormente, aperto
$x \le b$	$]-\infty; b]$	semiretta verso sinistra, pallino pieno	illimitato inferiormente, chiuso
$x < b$	$]-\infty; b[$	semiretta verso sinistra, pallino vuoto	illimitato inferiormente, aperto

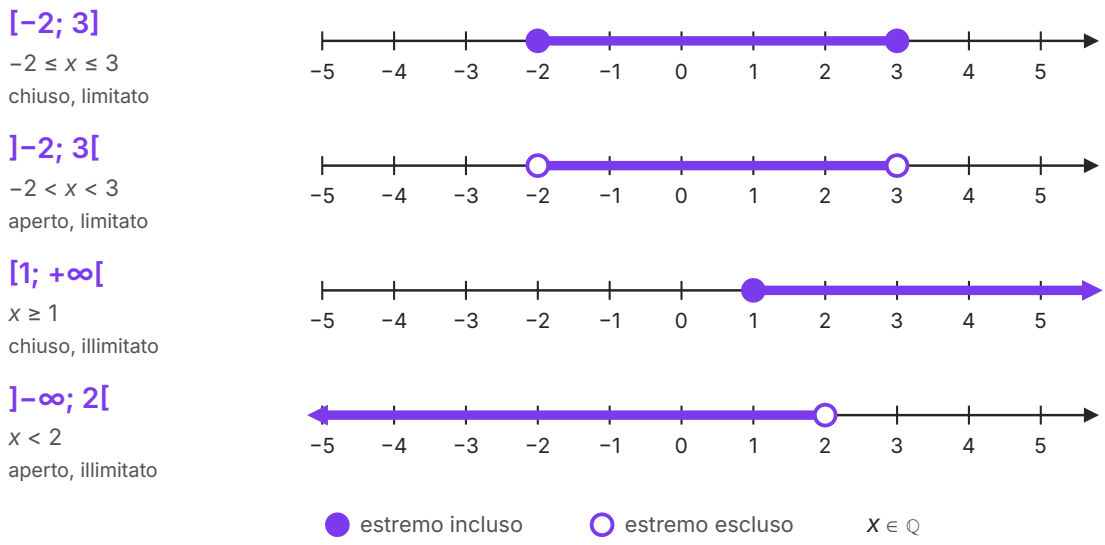

Figura 7.3 Quattro intervalli sulla retta orientata. Il pallino pieno indica un estremo che appartiene all'intervallo, il pallino vuoto un estremo escluso; la freccia indica che l'intervallo prosegue senza fine.

L'insieme di *tutti* i numeri si può scrivere come $]-\infty; +\infty[$. Quando non ci sono soluzioni si scrive $S = \varnothing$.

APPROFONDIMENTO

Da dove vengono i simboli. I simboli < e > compaiono a stampa nell'*Artis analyticae praxis* del matematico inglese Thomas Harriot, pubblicata nel 1631, dieci anni dopo la morte dell'autore. I simboli con il trattino, ≤ e ≥, si diffusero più tardi, nel corso del Settecento. Prima di allora le disuguaglianze si scrivevano a parole: una regola che oggi occupa mezza riga poteva richiedere un intero paragrafo in latino.

COLLEGAMENTI

Intervalli nelle scienze e nella vita quotidiana. Nel capitolo 2 hai visto che ogni misura ha un errore. In laboratorio una lunghezza si scrive, per esempio, $l = (12{,}4 \pm 0{,}1)$ cm: il valore vero sta nell'intervallo $[12{,}3; 12{,}5]$, cioè $12{,}3 \le l \le 12{,}5$. Un farmaco «da conservare tra 2 °C e 8 °C» chiede che la temperatura T soddisfi $2 \le T \le 8$.

7.5.4 Disequazioni equivalenti e principi di equivalenza

IN SINTESI

Primo principio di equivalenza. Aggiungendo o sottraendo ai due membri di una disequazione uno stesso numero, o una stessa espressione definita per ogni valore dell'incognita, si ottiene una disequazione equivalente.

Secondo principio di equivalenza. Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per uno stesso numero **positivo** si ottiene una disequazione equivalente con lo **stesso verso**; moltiplicando o dividendo per uno stesso numero **negativo** si ottiene una disequazione equivalente **solo se si cambia il verso**.

Dal primo principio seguono le stesse conseguenze che conosci per le equazioni: si può *trasportare* un termine da un membro all'altro cambiandone il segno, e si possono cancellare termini uguali presenti in entrambi i membri. Dal secondo principio segue che si possono eliminare i denominatori numerici moltiplicando per il loro mcm, che è positivo, senza cambiare il verso. Segue anche che si può cambiare segno a tutti i termini, cioè moltiplicare per -1, *a patto di cambiare il verso*: $-x > 4$ equivale a $x < -4$.

Attenzione: non si moltiplicano né si dividono mai i due membri per un'espressione che contiene l'incognita, come x o $x - 1$: il suo segno non è noto, e per qualche valore è zero. Questi casi, che richiedono lo *studio del segno*, li affronterai il prossimo anno.

ERRORE FREQUENTE

Dimenticare di cambiare il verso. Da $-3x > 12$ molti scrivono «$x > -4$». È sbagliato: dividendo per -3, numero negativo, il verso cambia e si ottiene $x < -4$. Controllo rapido: $x = 0$ soddisfa $x > -4$, ma sostituito nella disequazione di partenza dà $0 > 12$, falso. Un controllo con un valore facile smaschera quasi sempre l'errore.

7.5.5 Risolvere una disequazione intera

Una disequazione si dice **disequazione intera** se l'incognita non compare in nessun denominatore. La strategia di risoluzione è quella delle equazioni:

1. si eliminano i denominatori numerici moltiplicando i due membri per il loro mcm;
2. si svolgono i calcoli (prodotti, prodotti notevoli) ed eventualmente si semplifica;
3. si portano i termini con l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo, e si riducono i termini simili;
4. si divide per il coefficiente dell'incognita, **cambiando il verso se il coefficiente è negativo**;
5. si scrive l'insieme delle soluzioni, anche come intervallo, e lo si rappresenta sulla retta.

Torniamo alla disequazione del paragrafo 7.5.2: da $2x - 5 > 1$ trasportiamo -5 e otteniamo $2x > 6$; dividendo per 2, che è positivo, $x > 3$. Quindi $S =]3; +\infty[$, come avevamo anticipato.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi la disequazione $3(x - 2) - 2(x + 1) < 5 - 2x$.

Calcoli. Svolgiamo i prodotti al primo membro: $3x - 6 - 2x - 2 < 5 - 2x$, cioè $x - 8 < 5 - 2x$.

Trasporto. Portiamo $-2x$ al primo membro e -8 al secondo, cambiandone il segno: $x + 2x < 5 + 8$, cioè $3x < 13$.

Divisione. Dividiamo per 3, positivo, senza cambiare il verso: $x < \frac{13}{3}$.

Soluzioni. $S =]-\infty; \frac{13}{3}[$. Controllo: $x = 0$ appartiene a S; sostituito, dà $-6 - 2 < 5$, cioè $-8 < 5$, vero. Il valore $x = 5$ non appartiene a S: dà $9 - 12 < -5$, cioè $-3 < -5$, falso. I due controlli sono coerenti con la soluzione.

Dopo i passi 1–3 ogni disequazione intera di primo grado assume una delle **forme normali** $a\,x > b$, $a\,x \geq b$, $a\,x < b$, $a\,x \leq b$, con a e b numeri. La conclusione dipende dal segno di a.

- Se $a > 0$, si divide per a senza cambiare il verso: $a\,x > b$ dà $x > \frac{b}{a}$.
- Se $a < 0$, si divide per a cambiando il verso: $a\,x > b$ dà $x < \frac{b}{a}$.
- Se $a = 0$, non si può dividere. La disequazione diventa $0 \cdot x > b$, cioè $0 > b$, che non contiene più l'incognita: è vera per tutti i valori di x oppure per nessuno, a seconda del valore di b.

Nel terzo caso la disequazione è **sempre verificata** se la disuguaglianza numerica che resta è vera ($S =]-\infty; +\infty[$), **impossibile** se è falsa ($S = \varnothing$). Per esempio $2(x + 3) - x > x + 4$ diventa $0 \cdot x > -2$, sempre verificata; $3(x - 1) \geq 3x$ diventa $0 \cdot x \geq 3$, impossibile.

Con una disuguaglianza larga bisogna fare attenzione al caso $b = 0$: $0 \cdot x \geq 0$ è sempre verificata (0 è maggiore *o uguale* a 0), mentre $0 \cdot x > 0$ è impossibile. La tabella 7.3 riassume tutti i casi; confrontala con la discussione dell'equazione $a\,x = b$ (tabella 7.1).

Tabella 7.3 La disequazione $a\,x > b$ (e la sua versione larga $a\,x \geq b$) al variare di a e b.

Caso	$a\,x > b$	$a\,x \geq b$
$a > 0$	$x > \frac{b}{a}$	$x \geq \frac{b}{a}$
$a < 0$	$x < \frac{b}{a}$ (il verso cambia)	$x \leq \frac{b}{a}$ (il verso cambia)
$a = 0$, $b < 0$	sempre verificata	sempre verificata
$a = 0$, $b = 0$	impossibile ($0 > 0$ è falso)	sempre verificata ($0 \geq 0$ è vero)
$a = 0$, $b > 0$	impossibile	impossibile

7.5.6 Disequazioni e grafici

Il grafico di $y = 2x - 5$ è una retta (capitolo 5). La soluzione dell'equazione $2x - 5 = 0$, cioè $x = 2{,}5$, è l'ascissa del punto in cui la retta taglia l'asse x: si chiama **zero della funzione**. Le disequazioni hanno un'interpretazione grafica altrettanto semplice. Risolvere $2x - 5 > 0$ significa cercare i valori di x per cui l'ordinata $y = 2x - 5$ è positiva, cioè i punti del grafico che stanno *sopra* l'asse x: nella figura 7.4 sono i punti del tratto verde, la cui proiezione sull'asse x è l'intervallo $]2{,}5;\,+\infty[$. Equazioni e disequazioni si possono quindi risolvere sia per via algebrica sia per via grafica.

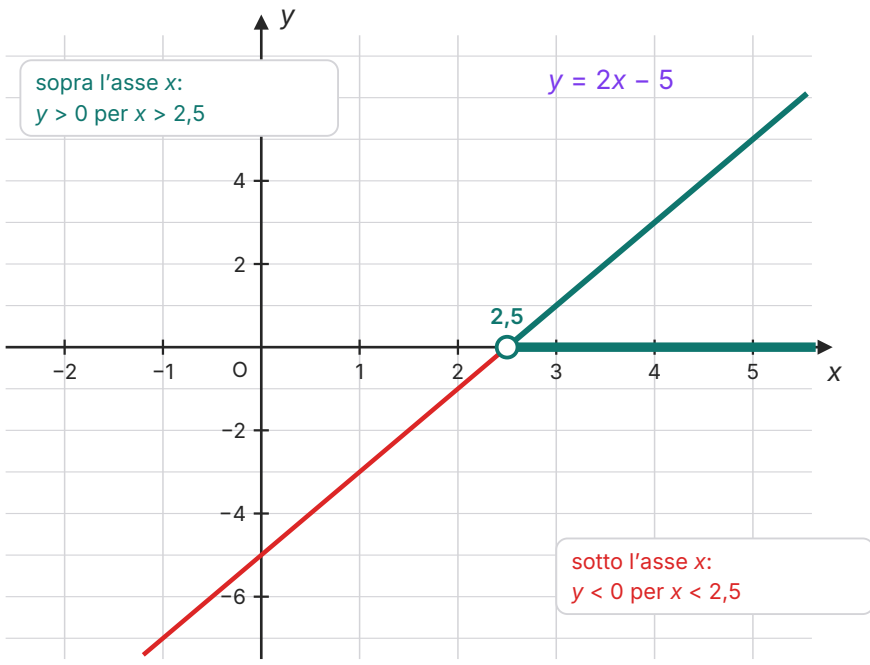

Figura 7.4 Il grafico di $y = 2x - 5$. Il tratto verde, sopra l'asse x, corrisponde alle soluzioni di $2x - 5 > 0$, cioè $x > 2{,}5$; il tratto rosso alle soluzioni di $2x - 5 < 0$. Nel punto (2,5; 0) la funzione si annulla.

7.6 Sistemi di disequazioni

7.6.1 Risolvere un sistema

A volte un numero deve soddisfare più condizioni *contemporaneamente*. Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni nella stessa incognita, scritte una sotto l'altra e collegate da una parentesi graffa, di cui si cercano le soluzioni *comuni*. La parentesi graffa si legge «e»: con il linguaggio del capitolo 4, l'insieme delle soluzioni del sistema è l'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.

Il metodo è sempre lo stesso: si risolve ogni disequazione separatamente, poi si riportano le soluzioni su uno **schema grafico** formato da una riga per ogni disequazione, con le stesse posizioni dei numeri; si tracciano le linee verticali in corrispondenza degli estremi e si prendono i tratti in cui *tutte* le righe sono «piene».

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Risolvi il sistema formato dalle tre disequazioni (1) $2(x-1) \geq x-4$, (2) $5-3x > x-7$, (3) $\frac{x}{2}+1 > 0$.

Disequazione (1). $2x-2 \geq x-4$, quindi $x \geq -2$.

Disequazione (2). $-3x-x > -7-5$, cioè $-4x > -12$; dividendo per -4 il verso cambia: $x < 3$.

Disequazione (3). Moltiplicando per 2: $x+2 > 0$, cioè $x > -2$.

Schema. Nella figura 7.5 le tre soluzioni sono riportate su tre righe. La (1) contiene -2, la (3) no: poiché il sistema chiede che valgano *tutte*, -2 è escluso. Il valore 3 è escluso dalla (2).

Soluzioni. $S =]-2;\,3[$, cioè $-2 < x < 3$.

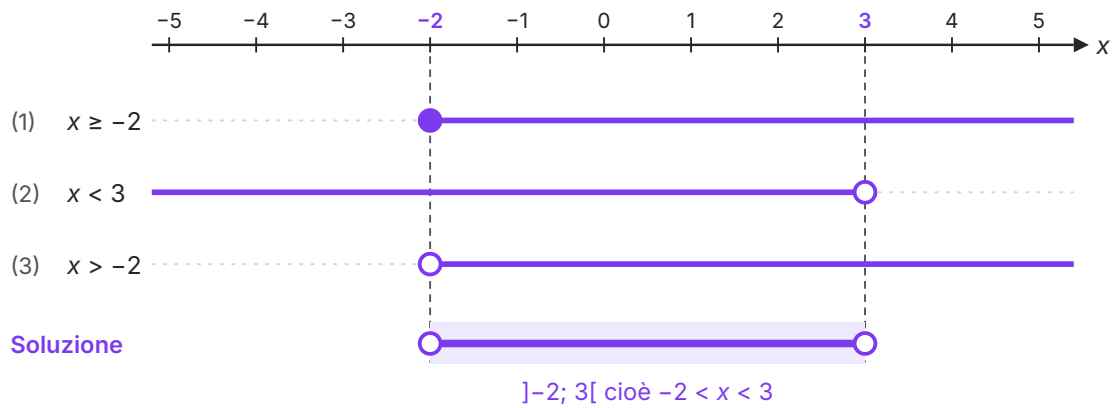

Figura 7.5 Lo schema grafico del sistema dell'esempio svolto. Ogni riga riporta le soluzioni di una disequazione; la soluzione del sistema è la parte comune a tutte le righe. L'estremo -2 è escluso perché non soddisfa la disequazione (3).

Un sistema può essere impossibile anche se ogni sua disequazione ha infinite soluzioni: nessun numero soddisfa insieme $x > 4$ e $x < 1$, quindi $S = \varnothing$.

7.6.2 Problemi con le disequazioni

Per i problemi con le disequazioni valgono le stesse fasi dei problemi con le equazioni (paragrafo 7.4), con un'attenzione in più alle parole del testo: «almeno» si traduce con $\geq$, «al massimo» e «non più di» con $\leq$, «più di» con $>$, «meno di» con $<$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Nelle prime tre verifiche di matematica Marta ha preso 5,5, 7 e 6. Che voto deve prendere, come minimo, nella quarta verifica perché la media dei quattro voti sia almeno 6,5? (I voti vanno da 1 a 10.)

Incognita e limitazioni. Sia x il voto della quarta verifica, con $1 \le x \le 10$.

Disequazione. La media è $\frac{5{,}5 + 7 + 6 + x}{4} = \frac{18{,}5 + x}{4}$ e deve essere almeno 6,5: $\frac{18{,}5 + x}{4} \ge 6{,}5$.

Risoluzione. Moltiplicando per 4: $18{,}5 + x \ge 26$, quindi $x \ge 7{,}5$.

Confronto con le limitazioni. Il sistema formato da $x \ge 7{,}5$ e $x \le 10$ dà $7{,}5 \le x \le 10$. Risposta: Marta deve prendere almeno 7,5.

Una condizione geometrica. Tre segmenti formano un triangolo solo se ciascuno è più corto della somma degli altri due: è la **disuguaglianza triangolare**, che sarà dimostrata nel capitolo 9. Se due lati misurano 5 cm e 8 cm, il terzo lato x deve soddisfare $x < 5 + 8$, $5 < 8 + x$ e $8 < 5 + x$. La prima dà $x < 13$, la seconda è vera per ogni $x > 0$, la terza dà $x > 3$: il terzo lato è compreso tra 3 cm e 13 cm, cioè tra la differenza e la somma degli altri due.

SINTESI

- Un'identità è un'uguaglianza tra espressioni letterali vera per tutti i valori delle lettere; un'equazione è un'uguaglianza di cui si cercano i valori dell'incognita che la rendono vera.
- Un'equazione è determinata, indeterminata o impossibile se ha un numero finito di soluzioni, infinite soluzioni o nessuna.
- Primo principio: aggiungendo o togliendo la stessa quantità ai due membri si ottiene un'equazione equivalente (regola del trasporto, cancellazione).
- Secondo principio: moltiplicando o dividendo i due membri per una stessa quantità diversa da zero si ottiene un'equazione equivalente (cambio di segno, eliminazione dei denominatori numerici).
- La forma normale è $ax = b$: se $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$; se $a = 0$ e $b \neq 0$ è impossibile; se $a = b = 0$ è indeterminata.
- Legge di annullamento del prodotto: $AB = 0$ se e solo se $A = 0$ o $B = 0$; permette di risolvere equazioni di grado superiore scomposte in fattori di primo grado.
- Equazioni fratte: C.E. sull'equazione di partenza, eliminazione del mcm, controllo finale delle soluzioni. Equazioni letterali: si discutono i casi in cui il coefficiente dell'incognita si annulla.
- Problemi: comprendere e scegliere l'incognita con le limitazioni, tradurre, risolvere, controllare accettabilità e verifica nel testo.
- Una disuguaglianza confronta due espressioni con $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Sommando uno stesso numero ai due membri o moltiplicandoli per uno stesso numero positivo il verso resta; moltiplicando per un numero negativo il verso cambia.
- Intervalli: $[a; b]$ chiuso, $]a; b[$ aperto, $[a; +\infty[$ e $]-\infty; b[$ illimitati. Da parte di $\pm\infty$ la parentesi è sempre aperta. Sulla retta: pallino pieno = estremo incluso, pallino vuoto = escluso.
- Principi di equivalenza: si possono trasportare termini cambiandone il segno ed eliminare denominatori numerici (mcm positivo); dividendo per un coefficiente negativo si cambia il verso.
- Forma normale $a\,x > b$: se $a > 0$, $x > \frac{b}{a}$; se $a < 0$, $x < \frac{b}{a}$; se $a = 0$ la disequazione è sempre verificata o impossibile.
- Graficamente, le soluzioni di $m\,x + q > 0$ sono le ascisse dei punti della retta $y = m\,x + q$ che stanno sopra l'asse x.
- Le soluzioni di un sistema di disequazioni sono l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni: si usa lo schema grafico a righe.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti uguaglianze è un'identità?
   - **A.** $2x + 3 = 5$
   - **B.** $(x - 1)^2 = x^2 - 1$
   - **C.** $3(x + 2) = 3x + 6$
   - **D.** $x + 1 = x$

2. ● Il numero -2 è soluzione dell'equazione:
   - **A.** $2x - 4 = 0$
   - **B.** $x^2 + 4 = 0$
   - **C.** $5 - x = 3$
   - **D.** $3x + 6 = 0$

3. ● L'equazione $0 \cdot x = 5$ è:
   - **A.** determinata
   - **B.** impossibile
   - **C.** indeterminata
   - **D.** di secondo grado

4. ●● Le condizioni di esistenza dell'equazione $\frac{x}{x^2 - 9} = \frac{1}{x + 3}$ sono:
   - **A.** $x \neq 3$ e $x \neq -3$
   - **B.** solo $x \neq 3$
   - **C.** $x \neq 9$
   - **D.** nessuna condizione

5. ● L'insieme dei numeri x tali che $-1 < x \leq 4$ si scrive:
   - **A.** $[-1; 4]$
   - **B.** $]-1; 4[$
   - **C.** $]-1; 4]$
   - **D.** $[-1; 4[$

6. ● La disequazione $-3x > 12$ è equivalente a:
   - **A.** $x > -4$
   - **B.** $x < -4$
   - **C.** $x > 4$
   - **D.** $x < 4$

7. ●● Le soluzioni del sistema formato da $x > 2$ e $x \leq 5$ sono:

   A. $]2; 5]$

   B. $[2; 5[$

   C. $]-\infty; 2[\cup [5; +\infty[$

   D. $\varnothing$

8. ● Completa. a) Un'uguaglianza tra espressioni letterali vera per tutti i valori delle lettere si chiama _____ . b) La regola del trasporto è una conseguenza del _____ principio di equivalenza. c) L'equazione $ax = b$ con $a = 0$ e $b \neq 0$ è _____ . d) Per eliminare i denominatori numerici si moltiplicano i due membri per il _____ dei denominatori. e) In un problema, le condizioni che l'incognita deve rispettare per avere senso si chiamano _____ .

9. ● Completa. a) Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per un numero negativo, si ottiene una disequazione equivalente solo se si _____ il verso. b) L'insieme dei numeri minori di 7 si scrive come intervallo _____ . c) Un intervallo si dice _____ se contiene entrambi i suoi estremi. d) Le soluzioni di un sistema di disequazioni sono l' _____ delle soluzioni delle singole disequazioni.

Calcolare

10. ● Risolvi e verifica. a) $5x - 3 = 2x + 9$ b) $7 - 2x = 3x + 22$ c) $4(x - 1) = 3(x + 2) - 5$ d) $2(3x - 1) - (x + 4) = 3x$

11. ● Risolvi e stabilisci se ciascuna equazione è determinata, impossibile o indeterminata. a) $3x + 2(x - 4) = 5x - 8$ b) $2(x + 1) - 3 = 2x + 5$ c) $3(2 - x) = -(3x - 6) + x$

12. ●● Risolvi le equazioni con denominatori numerici. a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ b) $\frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{6} = 1$ c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{2} = \frac{x}{6} + 1$ d) $0{,}5x - 1{,}2 = 0{,}3x + 0{,}4$

13. ●● Risolvi, sviluppando i prodotti notevoli. a) $(x + 2)^2 - x^2 = 16$ b) $(x - 3)(x + 3) - (x - 1)^2 = 2$ c) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$ d) $(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 4$

14. ●● Risolvi con la legge di annullamento del prodotto. a) $(x - 4)(3x + 2) = 0$ b) $x^2 - 7x = 0$ c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ e) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

15. ●● Risolvi le equazioni fratte. a) $\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-2}$ b) $\frac{x+3}{x-1} = 2$ c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x^2-4}$

16. ●● Risolvi le equazioni fratte, controllando con cura le soluzioni. a) $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$ b) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$ c) $\frac{x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$ d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

17. ●● Risolvi e discuti, nell'incognita x (le altre lettere sono parametri). a) $ax = a^2$ b) $(a+2)x = a^2 - 4$ c) $a(x-1) = 2(x+1)$ d) $(b^2-9)x = b - 3$

18. ● Risolvi e scrivi le soluzioni come intervallo: a) $3x - 5 > 7$; b) $4 - 2x \geq 10$; c) $5(x-1) < 2(x+5)$; d) $2x + 3 \leq 4x - 9$.

19. ●● Risolvi: a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1$; b) $\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3} \geq 1$; c) $\frac{2x-1}{3} + \frac{1}{2} < \frac{x+2}{6}$.

20. ●● Risolvi i sistemi: a) $2x - 1 > 3$ e $x + 4 \leq 10$; b) $3 - x \geq 1$ e $2x + 5 > 1$; c) $\frac{x}{3} - 1 < 0$ e $4 - x < 0$; d) $5x - 2 \geq 3x$, $1 - x < 4$ e $x - 1 \leq 2x + 1$.

Dimostrare e argomentare

21. ●● Trova l'errore. Sara deve risolvere $x^2 = 5x$: divide entrambi i membri per x e scrive «$x = 5$, $S = \{5\}$». Spiega che cosa ha sbagliato e qual è l'insieme delle soluzioni corretto.

22. ●●● Trova l'errore in questa «dimostrazione» che $2 = 1$. Siano a e b due numeri uguali e diversi da zero: $a = b$. Moltiplico per a: $a^2 = ab$. Sottraggo b^2: $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Scompongo: $(a+b)(a-b) = b(a-b)$. Divido per $a - b$: $a + b = b$. Poiché $a = b$: $2b = b$, e dividendo per b: $2 = 1$.

23. ●● Dimostra che se $a < b$ e $c < d$, allora $a + c < b + d$. Usa la proprietà dell'addizione due volte e la proprietà transitiva.

Problemi

24. ● Trova tre numeri dispari consecutivi la cui somma è 75.

25. ● Un padre ha 45 anni e il figlio 13. Tra quanti anni l'età del padre sarà il triplo di quella del figlio? E tra quanti anni sarà il doppio?

26. ●● Un giubbotto viene scontato del 25% e poi, sul prezzo già scontato, di un ulteriore 10%. Ora costa 81 €. Qual era il prezzo iniziale? Lo sconto complessivo è del 35%?

27. ● Una palestra propone due formule: A, con 30 € di iscrizione e 6 € per ogni ingresso; B, senza iscrizione, con 10 € per ingresso. Da quanti ingressi in poi la formula A costa meno della B?

28. ●● Due lati di un triangolo misurano 7 cm e 12 cm. a) Quali valori può avere la misura x del terzo lato? b) Quante sono le possibili misure intere in centimetri? c) Quante restano se il perimetro deve essere minore di 35 cm?

Verso la verifica

29. ●● Risolvi. a) $\frac{x-1}{2} - \frac{(x+2)(x-2)}{4} = \frac{1-x^2}{4} + \frac{x}{3}$ b) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{12}{x^2-4}$

30. ●●● Sfida. Una tradizione antica, raccolta in un epigramma greco, racconta così la vita del matematico Diofanto di Alessandria: la sua infanzia durò un sesto della vita; dopo un altro dodicesimo gli spuntò la barba; dopo un ulteriore settimo si sposò; cinque anni dopo il matrimonio gli nacque un figlio, che visse la metà degli anni del padre; Diofanto morì quattro anni dopo il figlio. Quanti anni visse Diofanto? A che età si sposò e a che età nacque il figlio?

31. ●● Risolvi il sistema formato da $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \leq 1$ e $(x+2)^2 - (x-2)^2 > 8$ e rappresenta le soluzioni sulla retta.

PER APPROFONDIRE

- [POL] Il metodo di Pólya (comprendere, concepire un piano, eseguirlo, guardare indietro) è il fondamento delle quattro fasi del paragrafo 7.4.
- [BOY] Per la storia dell'algebra: da Diofanto ad al-Khwārizmī, fino alla notazione simbolica di Viète.
- [CR] Courant e Robbins mostrano come le equazioni algebriche abbiano spinto ad ampliare gli insiemi numerici.

Glossario del capitolo

Disequazione
Disuguaglianza tra due espressioni contenenti un'incognita, di cui si cercano i valori che la rendono vera.

Disequazione sempre verificata
Disequazione soddisfatta da ogni valore dell'incognita, come $0 \cdot x > -2$; $S =]-\infty; +\infty[$.

Disuguaglianza
Scrittura che confronta due espressioni con uno dei simboli $<$, $>$, $\leq$, $\geq$; se le espressioni sono numeriche è vera oppure falsa.

Equazione
Uguaglianza tra due espressioni contenenti un'incognita, di cui si cercano i valori che la rendono vera.

Equazione determinata
Equazione che ha un numero finito di soluzioni; un'equazione di primo grado $ax = b$ con $a \neq 0$ ne ha esattamente una, $x = b/a$.

Equazione fratta
Equazione in cui l'incognita compare in almeno un denominatore.

Equazione impossibile
Equazione che non ha soluzioni: il suo insieme delle soluzioni è vuoto.

Equazione indeterminata
Equazione che ha infinite soluzioni; al primo grado accade quando ogni numero del dominio è soluzione.

Equazione letterale
Equazione che contiene, oltre all'incognita, altre lettere (parametri) che rappresentano numeri dati.

Equazioni equivalenti
Equazioni che hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Identità
Uguaglianza tra espressioni letterali vera per tutti i valori delle lettere per cui le espressioni hanno significato.

Intervallo
Insieme dei numeri compresi tra due estremi, o che stanno da una stessa parte di un estremo; si scrive per esempio $[a; b]$ o $]a; +\infty[$.

Intervallo chiuso / aperto
Chiuso se contiene i suoi estremi numerici (parentesi quadre rivolte verso l'interno), aperto se non li contiene.

Legge di annullamento del prodotto
Un prodotto è zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero: $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ oppure $B = 0$.

Limitazioni
In un problema, condizioni che l'incognita deve soddisfare perché abbia senso nella situazione concreta (per esempio essere un numero naturale o una lunghezza positiva).

Regola del trasporto
Un termine può essere spostato da un membro all'altro di un'equazione cambiandogli il segno.

Sistema di disequazioni
Insieme di disequazioni nella stessa incognita che devono valere contemporaneamente; le soluzioni sono l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni.

Soluzione
Valore dell'incognita che, sostituito, rende vera l'uguaglianza; si dice anche radice dell'equazione.

Soluzione estranea
Valore che risolve un'equazione trasformata ma non quella di partenza; compare moltiplicando per un'espressione che può annullarsi.

Soluzioni

1. C. È la proprietà distributiva, vera per ogni x. A è un'equazione ($x = 1$); B è falsa in generale, perché $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; D è un'equazione impossibile.

2. D. $3 \cdot (-2) + 6 = 0$. Per le altre: $-8 \neq 0$; $4 + 4 = 8 \neq 0$; $5 + 2 = 7 \neq 3$.

3. B. Nessun numero moltiplicato per 0 dà 5.

4. A. $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$; i denominatori si annullano per $x = 3$ e per $x = -3$.

5. C. -1 è escluso (parentesi aperta), 4 è incluso (parentesi chiusa): $]-1; 4]$.

6. B. Dividendo per -3 il verso cambia: $x < -4$.

7. A. Intersezione: $2 < x \leq 5$, cioè $]2; 5]$.

8. a) identità. b) primo. c) impossibile. d) mcm (minimo comune multiplo). e) limitazioni (condizioni di accettabilità).

9. a) cambia (si inverte); b) $]-\infty; 7[$; c) chiuso; d) intersezione.

10. a) $3x = 12$, $x = 4$. b) $-5x = 15$, $x = -3$. c) $4x - 4 = 3x + 1$, $x = 5$. d) $6x - 2 - x - 4 = 3x$, $2x = 6$, $x = 3$.

11. a) $5x - 8 = 5x - 8$, $0 \cdot x = 0$: indeterminata, $S = \mathbb{Q}$. b) $2x - 1 = 2x + 5$, $0 \cdot x = 6$: impossibile, $S = \varnothing$. c) $6 - 3x = -3x + 6 + x$, quindi $0 = x$: determinata, $S = \{0\}$.

12. a) Per 6: $3x + 2x = 60$, $x = 12$. b) Per 12: $3(x-1) - 2(x+2) = 12$, $x - 7 = 12$, $x = 19$. c) Per 6: $2(2x+1) - 3(x-2) = x + 6$, $x + 8 = x + 6$, $0 \cdot x = -2$: impossibile. d) Per 10: $5x - 12 = 3x + 4$, $2x = 16$, $x = 8$.

13. a) $4x + 4 = 16$, $x = 3$. b) $x^2 - 9 - x^2 + 2x - 1 = 2$, $2x = 12$, $x = 6$. c) $8x = 8x$: indeterminata, $S = \mathbb{Q}$. d) $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 + 4$, $3x = 3$, $x = 1$.

14. a) $S = \{4, -\frac{2}{3}\}$. b) $x(x-7) = 0$, $S = \{0, 7\}$. c) $(2x-3)(2x+3) = 0$, $S = \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$. d) $x(x-3)^2 = 0$, $S = \{0, 3\}$. e) $x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x-1)(x+1) = 0$, $S = \{-2, -1, 1\}$.

15. a) C.E. $x \neq 1$, $x \neq 2$; $4(x-2) = 3(x-1)$, $x = 5$, accettabile. b) C.E. $x \neq 1$; $x + 3 = 2x - 2$, $x = 5$, accettabile. c) C.E. $x \neq 0$; per $4x$: $4 + 2 = 3x$, $x = 2$, accettabile. d) C.E. $x \neq \pm 2$; $3(x-2) - (x+2) = 2$, $2x - 8 = 2$, $x = 5$, accettabile.

16. a) C.E. $x \neq 3$; $x = 3$ va scartato: impossibile, $S = \varnothing$. b) C.E. $x \neq \pm 1$; $2(x+1) - (x-1) = x + 3$, cioè $x + 3 = x + 3$: indeterminata nel dominio, $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$. c) C.E. $x \neq \pm 3$; $x(x-3) = 18$, $x^2 - 3x - 18 = 0$, $(x-6)(x+3) = 0$; $x = -3$ va scartato, $S = \{6\}$. d) C.E. $x \neq \pm 1$; $(x+1) + (x-1) = 2$, $x = 1$, da scartare: impossibile.

17. a) Se $a \neq 0$: $x = a$; se $a = 0$: indeterminata. b) $(a+2)x = (a-2)(a+2)$: se $a \neq -2$, $x = a - 2$; se $a = -2$: indeterminata. c) $(a-2)x = a + 2$: se $a \neq 2$, $x = \frac{a+2}{a-2}$; se $a = 2$: $0 \cdot x = 4$, impossibile. d) $(b-3)(b+3)x = b - 3$: se $b \neq \pm 3$, $x = \frac{1}{b+3}$; se $b = 3$: $0 \cdot x = 0$, indeterminata; se $b = -3$: $0 \cdot x = -6$, impossibile.

18. a) $3x > 12$, $x > 4$: $]4; +\infty[$. b) $-2x \geq 6$, $x \leq -3$: $]-\infty; -3]$. c) $5x - 5 < 2x + 10$, $3x < 15$, $x < 5$: $]-\infty; 5[$. d) $-2x \leq -12$ (oppure $12 \leq 2x$), $x \geq 6$: $[6; +\infty[$.

19. a) mcm 6: $3x - 2x > 6$, $x > 6$. b) mcm 12: $3(x+1) - 4(x-2) \geq 12$, $-x + 11 \geq 12$, $-x \geq 1$, $x \leq -1$. c) mcm 6: $2(2x-1) + 3 < x + 2$, $4x + 1 < x + 2$, $3x < 1$, $x < \frac{1}{3}$.

20. a) $x > 2$ e $x \leq 6$: $]2; 6]$. b) $x \leq 2$ e $x > -2$: $]-2; 2]$. c) $x < 3$ e $x > 4$: impossibile, $S = \varnothing$. d) $x \geq 1$, $x > -3$, $x \geq -2$: $[1; +\infty[$.

21. Ha diviso per x, che può valere 0: il secondo principio permette di dividere solo per quantità diverse da zero, e così ha perso la soluzione $x = 0$. Corretto: $x^2 - 5x = 0$, $x(x-5) = 0$, $S = \{0, 5\}$.

22. Poiché $a = b$, si ha $a - b = 0$: il passaggio «divido per $a - b$» è una divisione per zero, vietata dal se-

condo principio. Fino a $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ tutto è corretto (entrambi i membri valgono 0); da lì in poi no.

23. Da $a < b$, aggiungendo c ai due membri: $a + c < b + c$. Da $c < d$, aggiungendo b: $b + c < b + d$. Per la proprietà transitiva, $a + c < b + d$.

24. Sia x il primo, dispari: $x + (x + 2) + (x + 4) = 75$, $3x = 69$, $x = 23$. I numeri sono 23, 25, 27.

25. Triplo: $45 + x = 3(13 + x)$, $2x = 6$, $x = 3$ (48 e 16 anni). Doppio: $45 + y = 2(13 + y)$, $y = 19$ (64 e 32 anni).

26. $0{,}75 \cdot 0{,}90 \cdot x = 81$, cioè $0{,}675x = 81$, $x = 120$ €. Lo sconto complessivo non è del 35%: il prezzo finale è il 67,5% dell'iniziale, quindi lo sconto è del 32,5%.

27. Con n ingressi (n naturale): $30 + 6n < 10n$, $4n > 30$, $n > 7{,}5$. La formula A conviene da 8 ingressi in poi.

28. a) $x < 7 + 12 = 19$ e $12 < 7 + x$, cioè $x > 5$: $5 < x < 19$ (la condizione $7 < 12 + x$ è sempre vera). b) Le misure intere da 6 a 18: 13 valori. c) $19 + x < 35$ dà $x < 16$: restano le misure da 6 a 15, cioè 10 valori.

29. a) Per 12: $6(x - 1) - 3(x^2 - 4) = 3(1 - x^2) + 4x$, cioè $6x + 6 = 4x + 3$, $x = -\frac{3}{2}$. b) C.E. $x \neq \pm 2$; $(x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x - 2) = 12$, cioè $6x = 12$, $x = 2$, da scartare: impossibile, $S = \varnothing$.

30. Detta x la durata della vita: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$. Per 84: $14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$, cioè $75x + 756 = 84x$, $x = 84$. Diofanto visse 84 anni; si sposò a $14 + 7 + 12 = 33$ anni; il figlio nacque quando il padre aveva 38 anni (e visse 42 anni: $38 + 42 + 4 = 84$).

31. Prima: mcm 6, $3(x - 1) - 2(x + 1) \leq 6$, $x - 5 \leq 6$, $x \leq 11$. Seconda: $x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 > 8$, $8x > 8$, $x > 1$. Sistema: $1 < x \leq 11$, cioè $]1; 11]$: pallino vuoto in 1, pieno in 11.