CAPITOLO

6

Il calcolo letterale

Un esempio mostra che una cosa è vera una volta. Una lettera permette di dire che è vera sempre.

OBIETTIVI

1. Tradurre frasi in espressioni letterali, calcolarne il valore numerico e stabilirne le condizioni di esistenza.
2. Eseguire le operazioni con i monomi e calcolarne MCD e mcm.
3. Ridurre, ordinare e classificare un polinomio; sommare e moltiplicare polinomi; usare i prodotti notevoli.
4. Usare il calcolo letterale per dimostrare proprietà dei numeri.
5. Scomporre un polinomio nei casi più semplici: raccoglimenti, differenza di quadrati, quadrato di binomio, trinomio speciale.
6. Semplificare frazioni algebriche e calcolarne somme, prodotti e quozienti, indicando le condizioni di esistenza.

INDICE DEL CAPITOLO

6.1 Perché le lettere 2
6.2 I monomi e le loro operazioni 4
6.3 I polinomi 7
6.4 I prodotti notevoli 8
6.5 Dimostrare con le lettere 11
6.6 Le scomposizioni più semplici 11
6.7 Le frazioni algebriche 15
6.8 Operazioni con le frazioni algebriche 18

Matematica 1 · Parte III · Il calcolo letterale · versione 1.0
Capitolo 6: Il calcolo letterale · pagine 149–174 del volume completo · estratto per lo studio

Nei capitoli precedenti abbiamo lavorato con i numeri: li abbiamo sommati, moltiplicati, elevati a potenza, confrontati. Ma molte delle cose più interessanti che abbiamo detto non riguardavano un numero particolare. Quando abbiamo scritto la proprietà commutativa come $a + b = b + a$, non stavamo parlando di 3 e 5, o di -2 e $\frac{1}{4}$: stavamo dicendo qualcosa che vale per *tutti* i numeri. Le lettere ci hanno permesso di dirlo in una riga.

In questo capitolo le lettere diventano protagoniste. Partiremo dai **monomi** e arriveremo ai **polinomi** e ai prodotti notevoli; useremo le lettere per *dimostrare* proprietà che valgono per infiniti numeri; infine faremo il percorso inverso, dalla somma al prodotto, con le scomposizioni più semplici, e calcoleremo con le **frazioni algebriche**.

6.1 Perché le lettere

6.1.1 Formule e generalizzazione

Conosci già molte formule: l'area di un rettangolo è $A = b \cdot h$, il perimetro di un quadrato è $p = 4l$, il volume di un cubo di spigolo l è $V = l^3$. Le lettere stanno al posto di numeri che possono cambiare: la formula vale per tutti i rettangoli, tutti i quadrati, tutti i cubi. Una lettera usata così si chiama **variabile**.

Una **espressione letterale** (o algebrica) è una scrittura che contiene numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni, come $3a + 2b$, $\frac{x+1}{x-2}$ oppure $(a - b)^2$. Le lettere rappresentano numeri; per ora, salvo avviso contrario, numeri razionali. Su di esse valgono quindi tutte le proprietà delle operazioni che conosci: commutativa, associativa, distributiva, le proprietà delle potenze.

L'uso sistematico delle lettere in matematica è relativamente recente. Per secoli i calcoli furono descritti a parole; l'idea di indicare con lettere sia le quantità note sia quelle incognite si deve soprattutto al francese François Viète, alla fine del Cinquecento. Da allora, scrivere una regola generale è diventato questione di pochi simboli.

6.1.2 Dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico

Saper tradurre una frase in un'espressione letterale è la prima abilità dell'algebra, e servirà moltissimo per risolvere i problemi. Bisogna fare attenzione all'ordine in cui si leggono le operazioni: l'ultima operazione nominata nella frase è spesso la *prima* della frase stessa. «Il doppio della somma di un numero e 3» è $2(x + 3)$: si fa prima la somma e poi si raddoppia. Invece «la somma del doppio di un numero e 3» è $2x + 3$.

Tabella 6.1 Alcune traduzioni dal linguaggio naturale a quello simbolico (x, y, n indicano numeri qualsiasi; n un numero naturale).

Frase	Espressione
il triplo del cubo di un numero	$3x^3$
il cubo del triplo di un numero	$(3x)^3 = 27x^3$
il quadrato della differenza di due numeri	$(x - y)^2$
la differenza dei quadrati di due numeri	$x^2 - y^2$
la metà del successivo di un numero naturale	$\frac{n+1}{2}$
un numero pari; un numero dispari	$2n$; $2n + 1$
tre numeri naturali consecutivi	n, $n + 1$, $n + 2$
il reciproco della somma di due numeri	$\frac{1}{x+y}$

6.1.3 Valore numerico e condizioni di esistenza

Se in un'espressione letterale si sostituisce a ogni lettera un numero e si eseguono i calcoli, si ottiene il **valore numerico** dell'espressione per quei valori delle lettere. Per esempio il valore di $2a^2 - 3b$ per $a = -1$ e $b = 2$ è $2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$.

Non sempre il valore numerico esiste: $\frac{3}{x-2}$ per $x = 2$ diventa $\frac{3}{0}$, e la divisione per zero è impossibile. Le **condizioni di esistenza** (C.E.) sono le condizioni che le lettere devono rispettare perché l'espressione abbia significato: per ora, che *ogni denominatore sia diverso da zero*. Qui la C.E. è $x \neq 2$. Le espressioni senza lettere al denominatore si dicono **espressioni intere**; quelle con lettere al denominatore, **espressioni fratte**: le riprenderemo alla fine del capitolo.

ERRORE FREQUENTE

Il segno meno e l'esponente. Se $a = -3$, quanto vale $-a^2$? Per la convenzione sull'ordine delle operazioni, la potenza si calcola prima del cambio di segno: $-a^2 = -(a^2) = -(-3)^2 = -9$. Invece $(-a)^2 = 3^2 = 9$. Allo stesso modo, per $x = -2$ si ha $3x^2 = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$: non $(3 \cdot (-2))^2 = 36$ e nemmeno -12. Ricorda la regola già vista nel capitolo 1: $-2^2 = -4$ ma $(-2)^2 = 4$.

6.2 I monomi e le loro operazioni

6.2.1 Definizione e forma normale

Un **monomio** è un'espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati soltanto dalla moltiplicazione; le lettere possono comparire con esponenti naturali. Sono monomi $5a^2b$, $-\frac{2}{3}xy^3$, a, 7. Non sono monomi $a + b$ (c'è un'addizione), $\frac{3}{x}$ (c'è una divisione per una lettera) e $a^{-2}b$ (l'esponente di a è negativo, quindi in realtà a sta al denominatore).

Un monomio è scritto in **forma normale** quando compare un solo fattore numerico, scritto per primo, e ogni lettera compare una sola volta. Per ridurre un monomio a forma normale si usano le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la regola del prodotto di potenze con la stessa base:

$$3a \cdot (-2)\, b \cdot a^2 = 3 \cdot (-2) \cdot a \cdot a^2 \cdot b = -6a^3b$$

In un monomio in forma normale il fattore numerico si chiama **coefficiente**, l'insieme delle lettere con i loro esponenti si chiama **parte letterale** (figura 6.1). In $-6a^3b$ il coefficiente è -6, la parte letterale è a^3b. Se il coefficiente è 1 non si scrive (a^2b significa $1 \cdot a^2b$); se è -1 si scrive solo il segno ($-xy$ significa $-1 \cdot xy$). Un monomio senza lettere, come 7, è semplicemente un numero; un monomio con coefficiente 0 è uguale a 0 qualunque sia la parte letterale e si chiama **monomio nullo**.

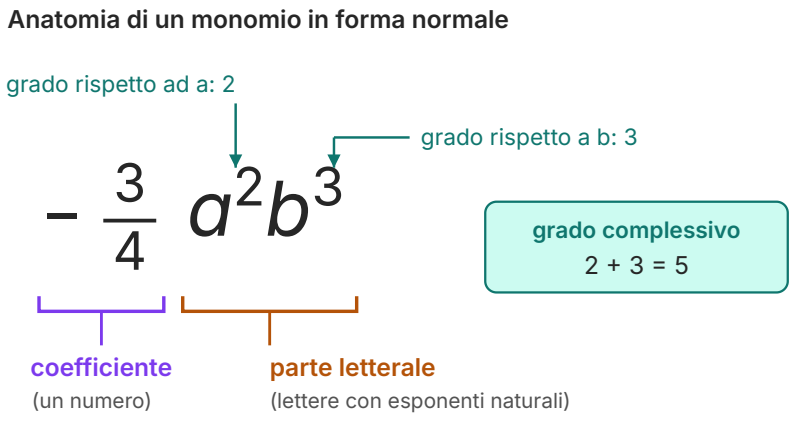

Figura 6.1 Le parti del monomio $-\frac{3}{4}a^2b^3$: il coefficiente, la parte letterale e i gradi.

6.2.2 Il grado

Il **grado di un monomio rispetto a una lettera** è l'esponente con cui quella lettera compare nella forma normale; il **grado complessivo** (o semplicemente grado) è la somma degli esponenti di tutte le lettere. Così $-\frac{3}{4}a^2b^3$ ha grado 2 rispetto ad a, 3 rispetto a b e grado complessivo 5. Un numero diverso da zero è un monomio di grado 0; il monomio nullo, invece, *non ha grado*.

6.2.3 Monomi simili

Due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale (dopo la riduzione a forma normale): $5a^2b$, $-a^2b$ e $\frac{1}{3}b\,a^2$ sono simili tra loro, perché in tutti e tre compaiono a con esponente 2 e b con esponente 1. Non sono simili $5a^2b$ e $5ab^2$: hanno lo stesso coefficiente e lo stesso grado, ma lettere con esponenti diversi.

6.2.4 Somma algebrica

La somma algebrica di monomi simili è un monomio simile a essi, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti. È una conseguenza diretta della proprietà distributiva:

$$5a^2b - 7a^2b + a^2b = (5 - 7 + 1)a^2b = -a^2b$$

Se i monomi non sono simili, invece, la somma non si può semplificare: $3x + 2y$ resta $3x + 2y$. Non è un monomio, perché contiene un'addizione: è un *polinomio*, come vedremo tra poco. Un errore da evitare: $3x + 2x = 5x$, non $5x^2$. Sommare monomi simili non cambia gli esponenti; li cambia solo la moltiplicazione.

6.2.5 Prodotto, quoziente e potenza

Il **prodotto** di due o più monomi è il monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali, cioè ogni lettera con esponente uguale alla somma degli esponenti con cui compare nei fattori:

$$(-2a^2b)\cdot(3ab^4) = -6a^3b^5 \qquad \left(\frac{2}{3}xy\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}x^2\right) = -\frac{3}{2}x^3y$$

Il grado del prodotto è la somma dei gradi dei fattori: nel primo esempio $3 + 5 = 8$.

Il **quoziente** tra due monomi, con il divisore diverso dal monomio nullo, si ottiene dividendo i coefficienti e sottraendo gli esponenti delle lettere uguali, come nella proprietà $a^m : a^n = a^{m-n}$. Per poter dividere supponiamo che le lettere del divisore siano diverse da zero.

$$12a^5b^3 : (-4a^2b) = -3a^3b^2 \qquad 10x^3y : (5x^3) = 2y$$

Il quoziente di due monomi è ancora un monomio soltanto se *ogni lettera del divisore compare nel dividendo con esponente maggiore o uguale*; altrimenti, come in $6a^2b : (3a^3) = \frac{2b}{a}$, il risultato è una frazione algebrica.

La **potenza** di un monomio si ottiene elevando a potenza il coefficiente e moltiplicando ogni esponente delle lettere per l'esponente della potenza:

$$(-2a^2b)^3 = (-2)^3\, a^6b^3 = -8a^6b^3 \qquad \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2 = \frac{1}{9}x^2y^4$$

Il grado della potenza n-esima è n volte il grado del monomio. Ricorda la regola dei segni: una potenza con base negativa è positiva se l'esponente è pari, negativa se è dispari.

Tabella 6.2 Operazioni con i monomi (A, B monomi; n naturale).

Operazione	Coefficiente	Parte letterale	Grado del risultato
Somma algebrica (solo simili)	somma algebrica dei coefficienti	la stessa	lo stesso (se il risultato non è nullo)
Prodotto $A \cdot B$	prodotto dei coefficienti	esponenti sommati	somma dei gradi
Quoziente $A : B$ ($B \neq 0$)	quoziente dei coefficienti	esponenti sottratti	differenza dei gradi
Potenza A^n	potenza del coefficiente	esponenti moltiplicati per n	n volte il grado

6.2.6 MCD e mcm di monomi

Come per i numeri naturali (capitolo 1), anche per i monomi si definiscono un massimo comune divisore e un minimo comune multiplo; ci serviranno alla fine del capitolo per sommare le frazioni algebriche.

- Il **MCD di monomi** ha per parte letterale il prodotto delle sole lettere *comuni* a tutti i monomi, ciascuna con l'esponente *minimo*.
- Il **mcm di monomi** ha per parte letterale il prodotto di *tutte* le lettere che compaiono, comuni e non comuni, ciascuna con l'esponente *massimo*.
- Per il coefficiente si usa questa convenzione: se tutti i coefficienti sono interi si prende il MCD (o il mcm) dei loro valori assoluti; se qualche coefficiente è frazionario si prende 1. Il segno si sceglie positivo.

Per esempio, per $12a^3b^2$ e $18a^2b^4c$ le lettere comuni sono a e b; MCD(12, 18) = 6 e mcm(12, 18) = 36. Quindi MCD = $6a^2b^2$ e mcm = $36a^3b^4c$.

6.3 I polinomi

6.3.1 Definizione e forma normale

Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi, che si chiamano termini del polinomio. Un polinomio con due termini si dice *binomio* ($a + b$), con tre *trinomio* ($x^2 - 5x + 6$), con quattro *quadrinomio*; un monomio si può considerare un polinomio con un solo termine.

COLLEGAMENTI

Parole a metà tra greco e latino. «Monomio» e «polinomio» uniscono un prefisso greco a una parola latina: μόνος (*mónos*), «solo», e πολύς (*polýs*), «molto, numeroso», con il latino *nomen*, «nome», qui nel senso di «termine». In «binomio» e «trinomio» il prefisso è invece latino (*bi-*, *tri-*). Un monomio è dunque un'espressione con un solo termine, un polinomio un'espressione con molti termini. Lo stesso πολύς si ritrova in «poligono», la figura dai «molti angoli» (γωνία, «angolo»), che incontrerai in geometria.

Un polinomio è in **forma normale** (o ridotto) quando tutti i suoi termini sono in forma normale e non contiene monomi simili. Per ridurre un polinomio si sommano tra loro i termini simili:

$$3x^2 - 5x + 2x^3 - x^2 + 4 - 2x^3 + x = 2x^2 - 4x + 4$$

Se dopo la riduzione tutti i termini si annullano, il risultato è il **polinomio nullo**, cioè 0.

6.3.2 Grado e classificazione

Il **grado di un polinomio** (ridotto a forma normale) è il grado più alto tra quelli dei suoi termini. Il grado rispetto a una lettera è il più alto esponente con cui quella lettera compare. Il polinomio

$$P = 3x^3y - 2x^2y^2 + 5xy - 7$$

ha termini di grado 4, 4, 2 e 0: ha quindi grado 4; rispetto a x ha grado 3, rispetto a y grado 2. Il termine senza lettere, qui -7, si chiama **termine noto**.

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado (come $a^2 + 2ab + b^2$), **ordinato** rispetto a una lettera se i termini sono scritti secondo le sue potenze decrescenti (o crescenti), **completo** rispetto a una lettera se contiene tutte le sue potenze, dal grado massimo fino a 0: $x^3 - 2x^2 + x - 5$ è completo, $x^3 - 2x + 5$ no.

6.3.3 Somma algebrica di polinomi

Per sommare algebricamente dei polinomi si eliminano le parentesi, con le regole già viste per i numeri interi (capitolo 1): una parentesi preceduta dal segno + si toglie lasciando invariati i segni dei termini, una parentesi preceduta dal segno − si toglie *cambiando* il segno di tutti i termini. Poi si riducono i termini simili:

$$(3a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + ab - 4b^2) + (-2a^2 + 3ab) = 3a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - ab + 4b^2 - 2a^2 + 3ab = 5b^2$$

6.3.4 Prodotti

Per moltiplicare un **monomio per un polinomio** si applica la proprietà distributiva: si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio e si sommano i prodotti ottenuti.

$$-2a(3a^2 - ab + 4b^2) = -6a^3 + 2a^2b - 8ab^2$$

Per moltiplicare **due polinomi** si applica la proprietà distributiva due volte: si moltiplica *ogni* termine del primo per *ogni* termine del secondo, poi si riducono i termini simili. Se il primo polinomio ha 2 termini e il secondo 3, prima della riduzione si ottengono $2 \cdot 3 = 6$ termini.

$$(2x - 3)(x^2 + x - 1) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 3 = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$$

6.4 I prodotti notevoli

Alcuni prodotti tra polinomi compaiono così spesso che conviene conoscerne il risultato a memoria. Si chiamano **prodotti notevoli**. Nelle formule che seguono A, B, C indicano monomi qualsiasi (o anche polinomi): $A = 3x$, $B = -2y^2$ e così via.

6.4.1 Somma per differenza

Moltiplichiamo la somma di due termini per la loro differenza: $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$. I due termini «misti» sono opposti e si annullano.

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Per esempio $(2x^2 - 5y)(2x^2 + 5y) = 4x^4 - 25y^2$. La figura 6.2 mostra il significato geometrico della formula quando a e b sono lunghezze con $a > b$: da un quadrato di lato a si toglie un quadrato di lato b; la parte che rimane si può tagliare in due rettangoli e ricomporre in un unico rettangolo di lati $a + b$ e $a - b$.

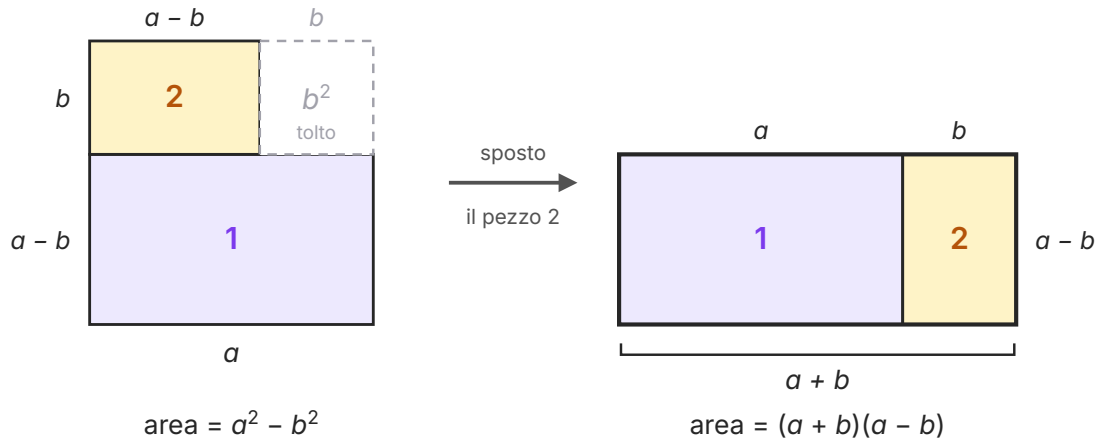

Figura 6.2 Somma per differenza. A sinistra: il quadrato di lato a senza l'angolo b^2 è formato dai pezzi 1 e 2. A destra: spostando il pezzo 2 si ottiene un rettangolo di lati $a + b$ e $a - b$. Le due aree sono uguali.

6.4.2 Quadrato di un binomio

Calcoliamo $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Allo stesso modo $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

In parole: il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine, più il *doppio prodotto* del primo per il secondo, più il quadrato del secondo. La figura 6.3 lo rende evidente: un quadrato di lato $a + b$ si divide in un quadrato a^2, un quadrato b^2 e due rettangoli uguali di area ab.

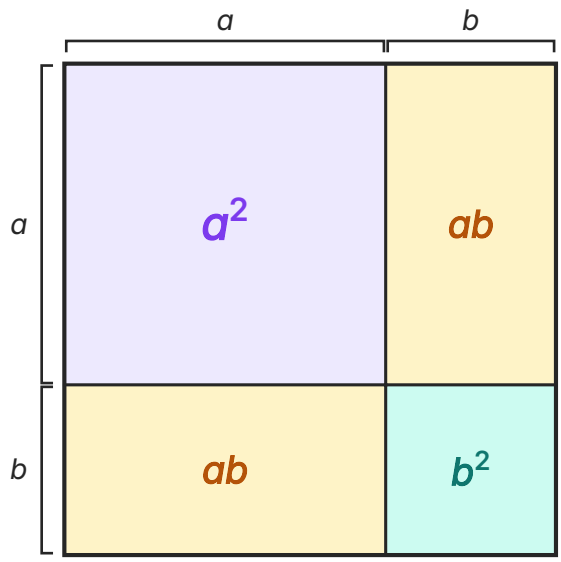

Figura 6.3 Il quadrato di lato $a + b$ è formato da un quadrato di area a^2, uno di area b^2 e due rettangoli di area ab: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

ERRORE FREQUENTE

$(a + b)^2$ non è $a^2 + b^2$. È l'errore più diffuso del calcolo letterale: dimenticare il doppio prodotto. Basta un esempio per convincersi: per $a = 3$ e $b = 4$ si ha $(3 + 4)^2 = 49$, mentre $3^2 + 4^2 = 25$. La differenza, 24, è proprio $2ab$. La figura 6.3 mostra dove sono finiti i due rettangoli dimenticati. Per lo stesso motivo la radice quadrata di $a^2 + b^2$ non è $a + b$: la radice di 25 è 5, non 7. E vale anche per il cubo: $(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$.

6.4.3 Quadrato di un trinomio

Con lo stesso ragionamento si trova il quadrato di un trinomio:

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$(a - 2b + 1)^2 = a^2 + 4b^2 + 1 - 4ab + 2a - 4b$$

6.4.4 Cubo di un binomio

Per calcolare $(A + B)^3$ moltiplichiamo il quadrato per $A + B$: $(A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3$. Riducendo:

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

Nel cubo della differenza i segni si alternano: +, −, +, −. Per esempio $(2a - b)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

Tabella 6.3 I prodotti notevoli in sintesi.

Nome	Formula	Esempio
Somma per differenza	$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	$(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$
Quadrato di binomio	$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$	$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$
Quadrato di trinomio	$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$	$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$
Cubo di binomio	$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$	$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

6.5 Dimostrare con le lettere

Prova a sommare due numeri dispari: 3 + 5 = 8, 7 + 11 = 18, 13 + 21 = 34. Il risultato è sempre pari. Ma nessun numero di esempi basta per esserne sicuri: i dispari sono infiniti, e potrebbe sempre esserci una coppia mai provata per cui la regola non vale. Per una certezza serve una **dimostrazione**, un ragionamento che valga per *tutti* i casi. Il calcolo letterale ce la dà.

IN SINTESI

Teorema. La somma di due numeri dispari è pari.

Ipotesi: p e q sono numeri dispari. **Tesi:** $p + q$ è pari.

Dimostrazione. Poiché p e q sono dispari, esistono due numeri naturali m e n tali che $p = 2m + 1$ e $q = 2n + 1$. Usiamo due lettere diverse perché i due dispari possono essere diversi. Allora $p + q = 2m + 1 + 2n + 1 = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$. Il numero $m + n + 1$ è naturale, quindi $p + q$ è il doppio di un numero naturale, cioè è pari. c.v.d.

Lo stesso metodo funziona per moltissime proprietà.

Eccone una che spiega un fatto curioso sui quadrati: la differenza tra i quadrati di due naturali consecutivi è $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, cioè un numero dispari, anzi la somma dei due numeri. Per questo i quadrati 0, 1, 4, 9, 16, 25, … distano tra loro 1, 3, 5, 7, 9, …: la successione dei dispari.

6.6 Le scomposizioni più semplici

Finora abbiamo trasformato prodotti in somme. Ora facciamo il percorso inverso, come quando hai scritto un numero naturale come prodotto di fattori primi. Bastano pochi metodi, quelli

che servono per le frazioni algebriche e per le equazioni.

6.6.1 Che cosa significa scomporre

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado minore. Il lavoro è finito quando tutti i fattori sono irriducibili. Un polinomio di grado almeno 1 si dice **irriducibile** se non si può scrivere come prodotto di due polinomi entrambi di grado almeno 1. I polinomi irriducibili hanno, tra i polinomi, il ruolo che i numeri primi hanno tra i naturali.

> **DA RICORDARE**
> Scomporre significa trasformare una **somma** in un **prodotto**. Un risultato come $x(x-1)+3(x-1)$ non è ancora scomposto: l'ultima operazione è un'addizione. Lo diventa quando si scrive $(x-1)(x+3)$. E una scomposizione si verifica sempre allo stesso modo: moltiplicando i fattori si deve ritrovare il polinomio di partenza.

6.6.2 Il raccoglimento totale

Il primo metodo è la proprietà distributiva letta da destra verso sinistra: $ab+ac=a(b+c)$. Se tutti i termini di un polinomio hanno un fattore comune, lo si «raccoglie» fuori da una parentesi; dentro rimangono i quozienti dei singoli termini per il fattore raccolto. Questo è il **raccoglimento totale** (o raccoglimento a fattor comune).

Conviene raccogliere il fattore comune «più grande possibile», cioè il MCD dei termini, calcolato come per i monomi: per $6a^3b-9a^2b^2+3a^2b$ il MCD dei coefficienti è 3, la lettera a compare in tutti i termini con esponente minimo 2, la lettera b con esponente minimo 1. Dunque

$$6a^3b-9a^2b^2+3a^2b=3a^2b(2a-3b+1)$$

Nota l'1 nella parentesi: il termine $3a^2b$ diviso per se stesso dà 1, non 0. Il fattore comune può essere anche un polinomio: $2x(x-1)-5(x-1)=(x-1)(2x-5)$.

6.6.3 Il raccoglimento parziale

Talvolta i termini non hanno un fattore comune a tutti, ma si possono dividere in gruppi che, dopo un raccoglimento all'interno di ciascun gruppo, mostrano un fattore comune. È il **raccoglimento parziale**:

$$ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

La figura 6.4 ne dà un'immagine: un rettangolo di lati $a+b$ e $x+y$ è formato da quattro rettangoli più piccoli, di aree ax, ay, bx, by. Raggruppando le due parti della colonna di base a e le due della colonna di base b si ottengono due rettangoli di altezza comune $x+y$.

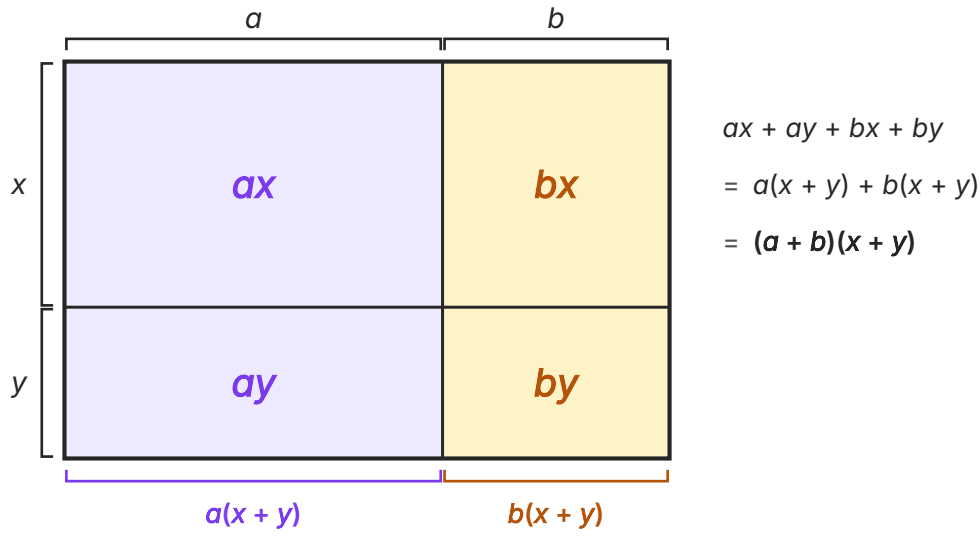

Figura 6.4 Il raccoglimento parziale come somma di aree. I quattro rettangoli ax, ay, bx, by formano, colonna per colonna, $a(x+y)$ e $b(x+y)$, cioè il rettangolo $(a+b)(x+y)$.

Per esempio $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x^2+3)$. Il metodo funziona solo se, dopo il primo passo, le parentesi sono *identiche*; a volte serve raccogliere un segno meno: $2ax - 6a - x + 3 = 2a(x-3) - (x-3) = (x-3)(2a-1)$.

6.6.4 Differenza di quadrati e quadrato di un binomio

Ogni prodotto notevole, letto da destra verso sinistra, è una regola di scomposizione. La difficoltà non sta nelle formule, che già conosci, ma nel *riconoscerle*: bisogna individuare quali termini sono quadrati e controllare che gli altri siano quelli giusti.

Un binomio che è la **differenza di due quadrati** si scompone nel prodotto della somma per la differenza delle basi: $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$. Per esempio $9x^2 - 25y^2 = (3x)^2 - (5y)^2 = (3x+5y)(3x-5y)$, e $a^4 - b^2 = (a^2+b)(a^2-b)$.

A volte la scomposizione si può proseguire: $x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$. Una *somma* di due quadrati come $x^2 + 4$, invece, non si scompone: è sempre almeno 4, quindi non si annulla mai, mentre un prodotto con un fattore di primo grado si annullerebbe.

Un trinomio è il **quadrato di un binomio** se due termini sono quadrati, A^2 e B^2, e il terzo è il loro doppio prodotto $\pm 2AB$. In $4x^2 - 12xy + 9y^2$ i quadrati sono $(2x)^2$ e $(3y)^2$, e il doppio prodotto $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$ compare con il segno meno: dunque $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x-3y)^2$. Il trinomio $x^2 + 4x + 16$, invece, non è un quadrato: i quadrati sono x^2 e 4^2, ma il doppio prodotto sarebbe $8x$, non $4x$.

6.6.5 Il trinomio speciale

Moltiplicando $(x + a)(x + b)$ si ottiene $x^2 + (a + b)x + ab$: il coefficiente di x è la *somma* di a e b, il termine noto è il loro *prodotto*. Leggendo l'uguaglianza al contrario abbiamo un metodo per scomporre i trinomi di secondo grado con primo coefficiente 1, detti **trinomi speciali** (o caratteristici):

$$x^2 + sx + p = (x + a)(x + b) \quad \text{se} \quad a + b = s \text{ e } a \cdot b = p$$

Per scomporre $x^2 + 5x + 6$ cerchiamo due numeri con somma 5 e prodotto 6: sono 2 e 3, quindi $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ (lo stesso fatto, con le aree, nella figura 6.5). Conviene partire dal prodotto, che ha poche coppie di fattori interi, e poi controllare la somma; se il prodotto è negativo i due numeri sono discordi. Così $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ (prodotto −12, somma −1).

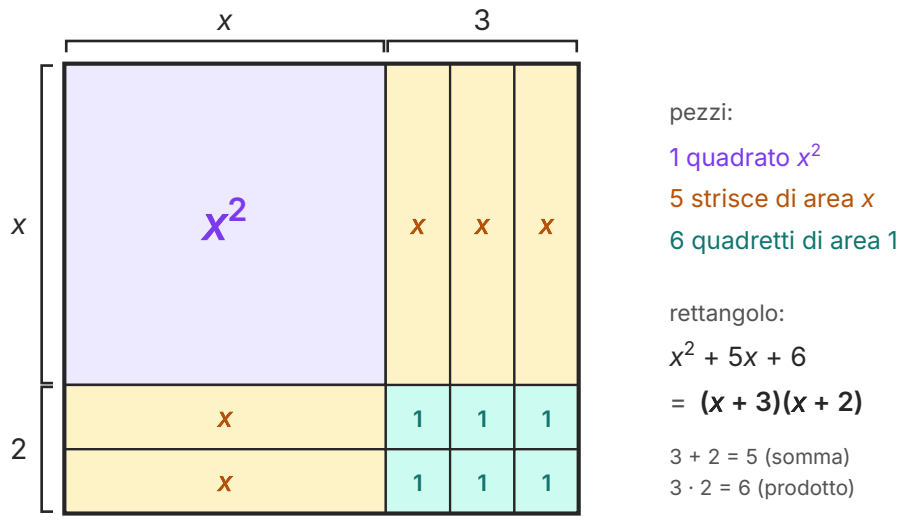

Figura 6.5 Il trinomio $x^2 + 5x + 6$ come area: un quadrato x^2, cinque strisce di area x e sei quadretti unitari si dispongono in un rettangolo di lati $x + 3$ e $x + 2$.

6.6.6 Un ordine per scomporre

Davanti a un polinomio da scomporre conviene seguire sempre lo stesso ordine. Prima si cerca un **raccoglimento totale**: semplifica tutti i passi successivi. Poi si contano i termini: con due termini si cerca una differenza di quadrati, con tre un quadrato di binomio o un trinomio speciale, con quattro un raccoglimento parziale. Infine si **ricomincia** su ogni fattore ottenuto, finché nessuno si può più scomporre.

6.7 Le frazioni algebriche

6.7.1 Che cos'è una frazione algebrica

Si chiama **frazione algebrica** il quoziente di due polinomi A e B, con B diverso dal polinomio nullo, scritto nella forma $\frac{A}{B}$. Il polinomio A è il *numeratore*, il polinomio B il *denominatore*. Sono frazioni algebriche, per esempio:

$$\frac{3}{x} \qquad \frac{x^2-9}{x+3} \qquad \frac{2a-b}{a^2+a\,b} \qquad \frac{x+1}{5}$$

Le frazioni algebriche nascono in modo naturale anche fuori dalla matematica. Stampare n magliette costa 500 € di impianto più 2 € ciascuna: il costo medio di una maglietta è $\frac{500+2n}{n}$ euro. Per 100 magliette vale 7 €, per 1000 magliette 2,5 €; per $n = 0$ non ha senso: senza magliette non c'è nessun costo medio.

6.7.2 Le condizioni di esistenza

Una frazione algebrica rappresenta, per ogni scelta dei valori delle lettere, un numero: il quoziente tra il valore del numeratore e quello del denominatore. Ma la divisione per zero è impossibile. Le **condizioni di esistenza** (C.E.) di una frazione algebrica sono le condizioni che le lettere devono rispettare perché il denominatore sia diverso da zero.

Se il denominatore è di primo grado, basta un controllo diretto: in $\frac{5}{2x-8}$ il denominatore si annulla quando $2x = 8$, cioè per $x = 4$; la C.E. è $x \neq 4$. Se il denominatore è più complicato, lo strumento decisivo è la **scomposizione in fattori** del paragrafo precedente, insieme a una proprietà dei numeri che conosci bene:

> **DA RICORDARE**
>
> Un prodotto di numeri è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero. Quindi un prodotto è **diverso** da zero se e solo se **tutti** i fattori sono diversi da zero. Per scrivere le C.E. si scompone il denominatore e si impone che ogni fattore sia diverso da zero.

Consideriamo $\frac{x+1}{x^2-9}$. Il denominatore è una differenza di quadrati: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Il prodotto è diverso da zero se $x - 3 \neq 0$ e $x + 3 \neq 0$, cioè se $x \neq 3$ e $x \neq -3$. Si scrive in breve: C.E. $x \neq \pm 3$. Osserva che il numeratore non conta: per $x = -1$ la frazione vale $\frac{0}{-8} = 0$, che è un numero ri-

spettabilissimo. Un numeratore nullo dà una frazione nulla; un denominatore nullo dà una frazione *senza significato*.

6.7.3 Semplificare: solo fattori

Semplificare una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per un loro fattore comune. Una frazione è **ridotta ai minimi termini** quando numeratore e denominatore non hanno più fattori comuni, né letterali né numerici: il loro MCD è 1. La procedura è sempre la stessa:

1. si scompongono in fattori il numeratore e il denominatore;
2. si scrivono le C.E. guardando il denominatore *così com'è*, prima di semplificare;
3. si dividono numeratore e denominatore per i fattori comuni.

Per esempio:

$$\frac{4x-12}{x^2-9} = \frac{4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x+3} \qquad \text{C.E. } x \neq \pm 3$$

Nella frazione semplificata il fattore $x-3$ è sparito, ma la condizione $x \neq 3$ resta: la frazione di partenza per $x = 3$ non esiste, e l'uguaglianza vale solo nel suo dominio. Torneremo su questo punto tra poco, con un grafico.

Il punto 1 non è una formalità. Si possono semplificare soltanto *fattori*, cioè termini che moltiplicano tutto il numeratore e tutto il denominatore. Un termine che compare in una somma (un *addendo*) non si semplifica mai. La figura 6.6 mette a confronto semplificazioni corrette e sbagliate.

ERRORE FREQUENTE

Semplificare gli addendi. Scrivere $\frac{x+6}{x+3} = \frac{6}{3} = 2$ è sbagliato: x non è un fattore del numeratore né del denominatore, è un addendo. Basta una prova: per $x = 1$ la frazione vale $\frac{7}{4}$, non 2.

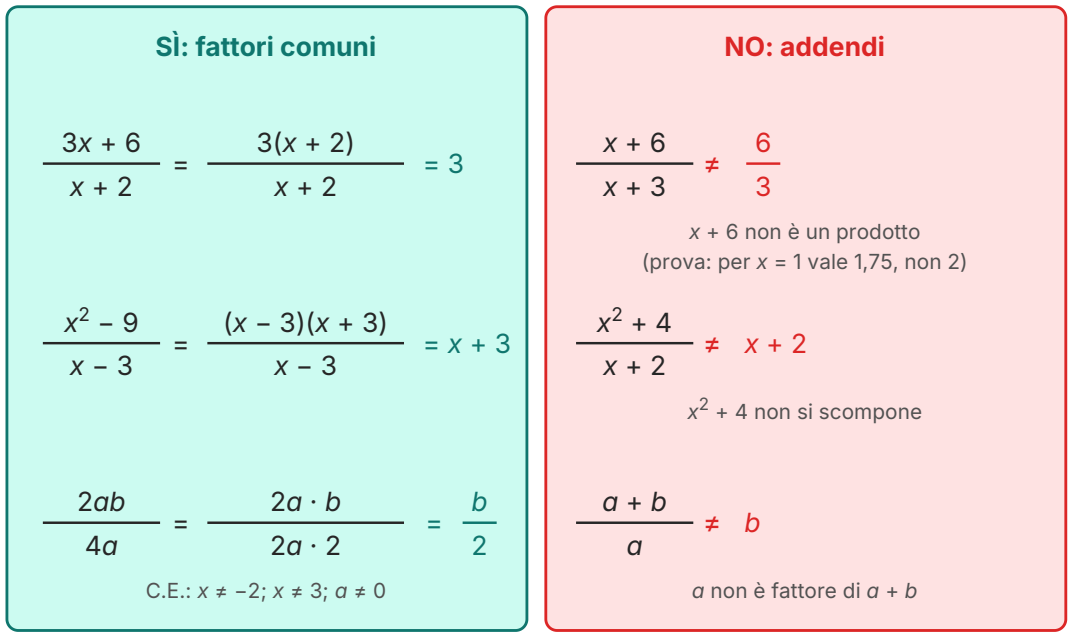

Figura 6.6 Semplificare: sì o no? A sinistra il numeratore e il denominatore sono prodotti con un fattore comune, che si può dividere (con le C.E. della frazione di partenza). A destra le lettere compaiono come addendi: nessuna semplificazione è lecita.

Spesso numeratore e denominatore contengono fattori *opposti*, come $a - b$ e $b - a$. Non sono uguali, ma differiscono solo per il segno:

$$b - a = -(a - b)$$

Raccogliendo il segno meno si fa comparire il fattore comune. Per esempio, con C.E. $a \neq b$:

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$$

6.7.4 Perché le C.E. si scrivono prima di semplificare

Consideriamo la funzione $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. Il suo dominio è $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Semplificando:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \quad \text{con } x \neq 1$$

Per ogni x diverso da 1 la funzione dà lo stesso valore di $y = x + 1$: il suo grafico è la retta $y = x + 1$ privata del punto (1; 2) (figura 6.7). Se avessimo semplificato senza scrivere la C.E., avremmo attribuito alla frazione il valore 2 per $x = 1$: un valore che la frazione di partenza non ha.

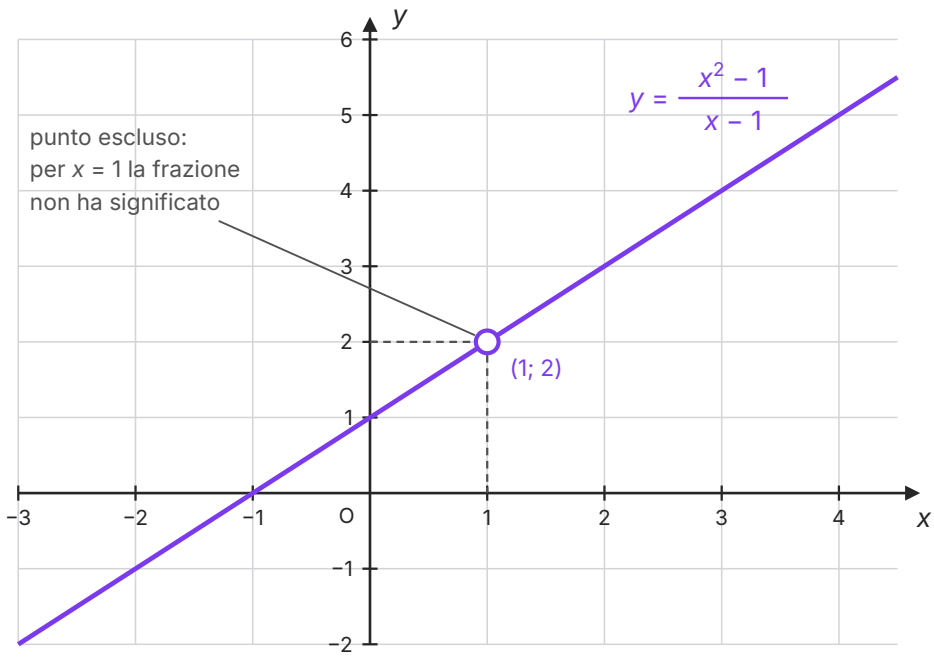

Figura 6.7 Il grafico di $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, calcolato dalla sua equazione, coincide con la retta $y = x + 1$ privata del punto (1; 2), segnato con un pallino vuoto: per $x = 1$ la frazione non è definita.

Ecco perché le C.E. si scrivono sempre sulla frazione *di partenza*, prima di qualsiasi semplificazione, e si portano con sé fino al risultato. Lo stesso accadrà con le equazioni fratte del capitolo 7: dimenticare una C.E. può far accettare come soluzione un numero che non lo è.

6.8 Operazioni con le frazioni algebriche

6.8.1 La somma algebrica

Con le frazioni algebriche si fa come con le frazioni numeriche: per sommare $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ si sceglie come denominatore comune mcm(4, 6) = 12. **Ridurre allo stesso denominatore** più frazioni significa scrivere frazioni equivalenti a esse con lo stesso denominatore, detto **denominatore comune**; il più semplice è il mcm dei denominatori scomposti: il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, ciascuno preso una volta sola con l'esponente massimo, come per i monomi.

Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, la loro somma algebrica ha lo stesso denominatore e per numeratore la somma algebrica dei numeratori: $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$. Se i denominatori sono diversi, prima si riducono allo stesso denominatore. La **somma algebrica di frazioni algebriche** segue quindi una procedura in sei passi.

IN SINTESI

Somma algebrica di frazioni algebriche.

1. Scomponi in fattori tutti i denominatori (e, se è facile, i numeratori: a volte si può semplificare subito).
2. Scrivi le C.E.: ogni fattore di ogni denominatore diverso da zero.
3. Calcola il mcm dei denominatori: sarà il denominatore comune.
4. Dividi il mcm per ciascun denominatore e moltiplica il risultato per il numeratore corrispondente.
5. Somma i nuovi numeratori, con le parentesi: un segno meno davanti a una frazione cambia il segno di *tutti* i termini del suo numeratore.
6. Riduci il numeratore, scomponilo e, se ha fattori in comune con il denominatore, semplifica.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Calcola $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2-x}$.

Passi 1 e 2. Scomponiamo: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Nella terza frazione conviene cambiare segno al denominatore: $-\frac{2}{2-x} = -\frac{2}{-(x-2)} = +\frac{2}{x-2}$. C.E. $x \neq \pm 2$.

Passi 3 e 4. Il mcm è $(x-2)(x+2)$; i fattori mancanti sono 1 per la prima frazione, $x-2$ per la seconda e $x+2$ per la terza.

$$\frac{x + (x-2) + 2(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Passi 5 e 6. Il numeratore vale $x + x - 2 + 2x + 4 = 4x + 2 = 2(2x+1)$. Non ha fattori in comune con il denominatore, quindi il risultato è

$$\frac{2(2x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x+2}{x^2-4} \quad \text{C.E. } x \neq \pm 2$$

ERRORE FREQUENTE

Sommare numeratori e denominatori. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ non è $\frac{2}{x+y}$: con $x=y=1$ la prima vale 2 e la seconda 1. Il risultato corretto è $\frac{y+x}{xy}$.

6.8.2 Il prodotto e il quoziente

Il **prodotto di frazioni algebriche** è la frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}\quad \text{C.E. } B\neq 0,\ D\neq 0$$

Nella pratica non conviene moltiplicare subito: prima si scompongono tutti i numeratori e i denominatori, poi si semplificano i fattori comuni, anche «in croce» (un fattore di un numeratore con un fattore dell'altro denominatore), e solo alla fine si moltiplica ciò che resta. Per esempio:

$$\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+2}\cdot\frac{(x+2)^2}{x-1}=(x+1)(x+2)\quad \text{C.E. } x\neq -2,\ x\neq 1$$

Il **reciproco** della frazione $\frac{C}{D}$ è $\frac{D}{C}$, e ha senso solo se anche C è diverso da zero. Come per le frazioni numeriche, il **quoziente di frazioni algebriche** si calcola moltiplicando la prima per il reciproco della seconda:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}\quad \text{C.E. } B\neq 0,\ D\neq 0,\ C\neq 0$$

La terza condizione è la novità della divisione: oltre ai denominatori, deve essere diverso da zero anche il **numeratore del divisore**, perché non si può dividere per una frazione nulla. È la condizione che si dimentica più spesso.

SINTESI

- Le lettere rappresentano numeri qualsiasi e permettono di scrivere regole generali. Il valore numerico di un'espressione si ottiene sostituendo i numeri alle lettere, mettendo tra parentesi i negativi e le frazioni.
- Le condizioni di esistenza (C.E.) di un'espressione richiedono che ogni denominatore sia diverso da zero.
- Un monomio è un prodotto di numeri e lettere con esponenti naturali; in forma normale ha un coefficiente e una parte letterale.
- Il grado di un monomio è la somma degli esponenti delle lettere; un numero non nullo ha grado 0, il monomio nullo non ha grado.
- Monomi simili hanno la stessa parte letterale; solo i monomi simili si sommano in un unico monomio.
- Nel prodotto di monomi gli esponenti si sommano, nel quoziente si sottraggono, nella potenza si moltiplicano. Il quoziente è un monomio solo se ogni lettera del divisore compare nel dividendo con esponente non minore.
- MCD di monomi: lettere comuni con l'esponente minimo; mcm: tutte le lettere con l'esponente massimo.
- Un polinomio è una somma algebrica di monomi; il suo grado è il massimo grado dei termini dopo la riduzione. Può essere omogeneo, ordinato, completo.
- Due polinomi si moltiplicano moltiplicando ogni termine del primo per ogni termine del secondo; il grado del prodotto è la somma dei gradi.
- Prodotti notevoli: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$; $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$; inoltre il quadrato di un trinomio e il cubo di un binomio.
- Con il calcolo letterale si dimostrano proprietà valide per infiniti numeri: un pari si scrive $2n$, un dispari $2n+1$.
- Scomporre significa trasformare una somma in un prodotto. Metodi: raccoglimento totale e parziale, differenza di quadrati, quadrato di binomio, trinomio speciale $x^2 + sx + p = (x+a)(x+b)$ con $a+b=s$, $ab=p$. Si ricomincia su ogni fattore.
- Una frazione algebrica è un quoziente di polinomi. Le C.E. si trovano scomponendo il denominatore e imponendo che ogni fattore sia diverso da zero; si scrivono sulla frazione di partenza, prima di semplificare.
- Si semplificano solo i fattori, mai gli addendi. Le frazioni algebriche si sommano riducendole al mcm dei denominatori, si moltiplicano dopo aver scomposto e semplificato, si dividono moltiplicando per il reciproco (con la C.E. in più: il numeratore del divisore diverso da zero).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti espressioni è un monomio?

   A. $-\frac{2}{5}a^3b$

   B. $3a + b$

   C. $\frac{2}{x}$

   D. $a^{-2}b$

2. ● Il grado complessivo del monomio $-4x^2y^3z$ è:

   A. 3

   B. 5

   C. 6

   D. -4

3. ● $(-2a^2b)^3$ è uguale a:

   A. $-6a^6b^3$

   B. $-8a^5b^3$

   C. $8a^6b^3$

   D. $-8a^6b^3$

4. ● $(x - 3)^2$ è uguale a:

   A. $x^2 - 9$

   B. $x^2 - 6x + 9$

   C. $x^2 + 9$

   D. $x^2 - 3x + 9$

5. ● Le condizioni di esistenza della frazione $\frac{x+2}{x^2-9}$ sono:

   A. $x \neq 3$

   B. $x \neq -2$

   C. $x \neq \pm 3$

   D. $x \neq -2$, $x \neq \pm 3$

6. ● Quale semplificazione è corretta?

   A. $\frac{3x+6}{x+2} = 3$, con $x \neq -2$

   B. $\frac{x+3}{x} = 3$, con $x \neq 0$

   C. $\frac{x^2+4}{x+2} = x+2$, con $x \neq -2$

   D. $\frac{a+b}{a} = b$, con $a \neq 0$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Due monomi simili hanno lo stesso grado. b) Due monomi con lo stesso grado sono simili. c) Il polinomio nullo ha grado 0. d) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. e) Il polinomio $x^3 - 2x + 5$ è completo rispetto a x. f) $a^2 + 2ab + b^2$ è omogeneo di grado 2.

8. ● Completa. a) Scomporre un polinomio significa trasformare una _____ in un _____. b) Il binomio $A^2 - B^2$ si scompone in _____. c) $x^2 + sx + p = (x+a)(x+b)$ se $a + b =$ _____ e $a \cdot b =$ _____. d) Il mcm di polinomi è il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, con l'esponente _____.

Calcolare

9. ● Calcola MCD e mcm: a) $12a^3b^2$ e $18a^2b^4c$; b) $4x^2y$, $6xy^3$ e $10x^3$; c) $\frac{1}{2}ab^2$ e $3a^2b$.

10. ●● Esegui i prodotti: a) $-2a(3a^2 - ab + 4b^2)$; b) $(2x-3)(x^2+x-1)$; c) $(a+2b)(a-b)(a+b)$.

11. ●● Sviluppa con i prodotti notevoli: a) $(3x+2)^2$; b) $(\frac{1}{2}a - 4b)^2$; c) $(2x^2 - 5y)(2x^2 + 5y)$; d) $(a - 2b + 1)^2$; e) $(x+3)^3$; f) $(2a-b)^3$.

12. ●● Semplifica: a) $(x+2)^2 - (x-1)(x+1) - (x+3)(x-1)$; b) $(2a-b)^2 - (2a+b)(2a-b) + 4ab$.

13. ● Scomponi con il raccoglimento totale. a) $15x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5x^2y^2$ b) $-6a^4 + 12a^3 - 6a^2$ c) $3x(a-b) - 2y(a-b)$ d) $(x+1)^2 - 4(x+1)$

14. ● Scomponi come differenza di quadrati (anche ripetendo). a) $49a^2 - 4b^2$ b) $\frac{1}{9}x^2 - 1$ c) $a^4 - 81$ d) $(2x+1)^2 - 9$

15. ●● Scomponi i trinomi. a) $x^2 + 8x + 15$ b) $x^2 - 2x - 15$ c) $a^2 - 9a + 14$ d) $x^4 - 5x^2 + 4$ (pensa a x^2 come a una nuova variabile)

16. ● Semplifica, indicando le C.E.: a) $\frac{6a^2b}{9a\,b^3}$; b) $\frac{4x-12}{x^2-9}$; c) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; d) $\frac{a^2 - a\,b}{b^2 - a\,b}$.

17. ●● Calcola, indicando le C.E.: a) $\frac{3x}{x-1} - \frac{3}{x-1}$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$; c) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$; d) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$.

18. ● Calcola i prodotti, indicando le C.E.: a) $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{9y^2}{2x}$; b) $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x-1}$; c) $\frac{a^2-ab}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

19. ●● Calcola i quozienti, indicando le C.E.: a) $\frac{x^2-9}{2x} : \frac{x+3}{4x^2}$; b) $\frac{a^2-4}{a^2+2a} : \frac{a-2}{a^2}$; c) $\frac{x^2-x}{x+1} : (x^2-1)$.

Dimostrare e argomentare

20. ● Dimostra che la somma di tre numeri naturali consecutivi è un multiplo di 3.

21. ● Trova l'errore. Uno studente scrive: «$(2x+3)^2 = 4x^2 + 9$». Mostra con un valore numerico che il risultato è sbagliato, spiega quale termine manca e scrivi lo sviluppo corretto.

22. ● Trova l'errore. a) Marta scrive: «$\frac{x+6}{x+3} = 2$, perché semplifico le x e poi $6 : 3 = 2$». b) Luca scrive: «$\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, quindi per $x = 2$ la frazione vale 4». Spiega che cosa sbaglia ciascuno, con un controllo numerico per Marta.

Problemi

23. ● Una stanza rettangolare ha i lati lunghi $x + 3$ e $x - 1$ metri (con $x > 1$). Scrivi i polinomi che esprimono l'area e il perimetro della stanza e calcolali per $x = 5$.

24. ● Un rettangolo ha area $x^2 + 7x + 12$ (in cm^2, con x in cm) e un lato lungo $x + 3$. Trova l'altro lato e il perimetro. Calcola area e perimetro per $x = 5$.

25. ●● Da una lastra quadrata di lato 2,35 m si ritaglia un quadrato di lato 0,65 m. Calcola a mente l'area della parte rimanente usando la differenza di quadrati. Calcola nello stesso modo $1001^2 - 999^2$.

26. ●● Un gruppo di n amici deve dividere in parti uguali il costo di un regalo da 120 €. All'ultimo momento si aggiungono altri 2 amici. a) Scrivi, come frazione algebrica ridotta, di quanto diminuisce la quota di ciascuno. b) Calcola la diminuzione per $n = 6$, sia con la formula sia direttamente.

27. ● Un libro costa p euro. Il negoziante prima lo sconta del 20%, poi aumenta del 20% il prezzo scontato. a) Scrivi il prezzo finale come monomio in p. b) Spiega perché il prezzo finale non torna a p, qualunque sia il prezzo iniziale, e di quale percentuale è diminuito. c) Calcola il prezzo finale per $p = 25$.

Verso la verifica

28. ●● Dimostra che $(x - 2y)^2 - (x + 2y)^2 + 8xy$ è uguale a 0 per qualsiasi valore di x e y.

29. ●● Scomponi completamente. a) $3x^4 - 48$ b) $a^3 - 2a^2 - 9a + 18$ c) $2x^3 - 12x^2 + 18x$

30. ●● Semplifica, indicando le C.E.: $\dfrac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2 + x}$.

31. ●●● Sfida. a) Calcola a mente 1001^2 usando il quadrato di un binomio. b) Dimostra che il prodotto di quattro numeri naturali consecutivi, aumentato di 1, è sempre un quadrato: precisamente $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. Verifica la formula per $n = 2$.

PER APPROFONDIRE

- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: la nascita del simbolismo algebrico, da Diofanto a Viète, e la matematica italiana del Cinquecento.
- [POL] Pólya, *Come risolvere i problemi di matematica*: come si imposta un problema con le lettere e come si controlla un risultato.
- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le dimostrazioni sui numeri interi con il calcolo letterale.

Glossario del capitolo

Coefficiente
Fattore numerico di un monomio in forma normale.

Condizioni di esistenza (C.E.)
Condizioni che le lettere devono rispettare perché un'espressione abbia significato; per un'espressione fratta, ogni denominatore deve essere diverso da zero.

Denominatore comune
Polinomio che è multiplo di tutti i denominatori di un gruppo di frazioni; il più semplice è il loro mcm.

Espressione letterale
Scrittura che contiene numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni, per esempio $3a + 2b$.

Frazione algebrica
Quoziente A/B di due polinomi, con B diverso dal polinomio nullo. Ogni polinomio è una frazione algebrica con denominatore 1.

Frazione ridotta ai minimi termini
Frazione il cui numeratore e denominatore non hanno fattori comuni (sono primi tra loro).

Grado di un monomio
Somma degli esponenti delle sue lettere; un numero non nullo ha grado 0, il monomio nullo non ha grado.

Grado di un polinomio
Il più alto grado dei suoi termini dopo la riduzione a forma normale; il polinomio nullo non ha grado.

Monomi simili
Monomi con la stessa parte letterale; solo i monomi simili si sommano in un unico monomio.

Monomio
Espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati solo da moltiplicazioni, con esponenti naturali.

Parte letterale
Insieme delle lettere di un monomio in forma normale, con i rispettivi esponenti.

Polinomio
Somma algebrica di monomi, detti termini del polinomio.

Prodotti notevoli
Prodotti tra polinomi di uso frequente il cui risultato si scrive direttamente, come $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Raccoglimento parziale
Scomposizione per gruppi di termini che, dopo un raccoglimento in ciascun gruppo, mostrano un fattore comune: $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$.

Raccoglimento totale
Scomposizione che porta fuori da una parentesi il fattore comune a tutti i termini: $ab + ac = a(b + c)$.

Scomposizione in fattori
Scrittura di un polinomio come prodotto di polinomi di grado minore, fino a fattori tutti irriducibili.

Semplificazione di una frazione algebrica
Divisione di numeratore e denominatore per un loro fattore comune, dopo averli scomposti. Si semplificano solo fattori, mai addendi.

Trinomio speciale
Trinomio $x^2 + sx + p$, che si scompone in $(x + a)(x + b)$ se $a + b = s$ e $a \cdot b = p$.

Valore numerico
Numero che si ottiene sostituendo alle lettere di un'espressione dei numeri ed eseguendo i calcoli.

Variabile (in algebra)
Lettera che in una formula o in un'espressione rappresenta un numero qualsiasi di un insieme dato.

Soluzioni

1. A. $-\frac{2}{5}a^3b$ contiene solo prodotti con esponenti naturali; B ha un'addizione, C una divisione per una lettera, D un esponente negativo.

2. C. $2 + 3 + 1 = 6$ (z ha esponente 1).

3. D. $(-2)^3 = -8$; esponenti: $a^{2 \cdot 3} = a^6$, b^3.

4. B. Quadrato di binomio:
$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$.

5. C. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, quindi $x \neq \pm 3$. Il numeratore non impone condizioni.

6. A. $\frac{3(x+2)}{x+2} = 3$ con $x \neq -2$. Nelle altre si semplificano addendi; $x^2 + 4$ non contiene il fattore $x + 2$.

7. a) V. b) F: x^3 e xy^2 hanno grado 3 ma non sono simili; due monomi sono simili se hanno la stessa parte letterale. c) F: il polinomio nullo non ha grado; ha grado 0 un numero diverso da zero. d) F: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. e) F: manca il termine in x^2, quindi il polinomio non è completo. f) V.

8. a) somma; prodotto. b) $(A + B)(A - B)$. c) s; p. d) massimo.

9. a) MCD = $6a^2b^2$, mcm = $36a^3b^4c$. b) MCD = $2x$ (y non compare in $10x^3$), mcm = $60x^3y^3$. c) coefficiente frazionario, quindi coefficiente 1: MCD = ab, mcm = a^2b^2.

10. a) $-6a^3 + 2a^2b - 8ab^2$. b) $2x^3 - x^2 - 5x + 3$. c) $(a + 2b)(a^2 - b^2) = a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$.

11. a) $9x^2 + 12x + 4$. b) $\frac{1}{4}a^2 - 4ab + 16b^2$. c) $4x^4 - 25y^2$. d) $a^2 + 4b^2 + 1 - 4ab + 2a - 4b$. e) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$. f) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$.

12. a) $x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 1) - (x^2 + 2x - 3) = -x^2 + 2x + 8$. b) $4a^2 - 4ab + b^2 - (4a^2 - b^2) + 4ab = 2b^2$.

13. a) $5x^2y^2(3x - 2y + 1)$. b) $-6a^2(a^2 - 2a + 1) = -6a^2(a - 1)^2$ (il trinomio è il quadrato di un binomio). c) $(a - b)(3x - 2y)$. d) $(x + 1)(x + 1 - 4) = (x + 1)(x - 3)$.

14. a) $(7a + 2b)(7a - 2b)$. b) $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{3}x - 1)$. c) $(a^2 + 9)(a^2 - 9) = (a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$. d) $(2x + 1 + 3)(2x + 1 - 3) = (2x + 4)(2x - 2) = 4(x + 2)(x - 1)$.

15. a) Somma 8, prodotto 15: $(x + 3)(x + 5)$. b) Somma -2, prodotto -15: $(x - 5)(x + 3)$. c) Somma -9, prodotto 14: $(a - 2)(a - 7)$. d) Con x^2 come variabile: somma -5, prodotto 4: $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

16. a) $\frac{2a}{3b^2}$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$. b) $\frac{4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x+3}$, con $x \neq \pm 3$. c) $\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$, con $x \neq \pm 2$. d) $\frac{a(a-b)}{b(b-a)} = -\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, $a \neq b$.

17. a) $\frac{3x-3}{x-1} = 3$, con $x \neq 1$. b) $\frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$, con $x \neq 0$, $x \neq -1$. c) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1$, con $a \neq b$. d) $\frac{2-(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$, con $x \neq \pm 1$.

18. a) $6xy$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$. b) $\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x-1} = (x + 1)(x + 2)$, con $x \neq -2$, $x \neq 1$. c) $\frac{a(a-b)}{a+b} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = \frac{(a-b)^2}{a}$, con $a \neq 0$, $a \neq -b$.

19. a) $\frac{(x-3)(x+3)}{2x} \cdot \frac{4x^2}{x+3} = 2x(x - 3)$, con $x \neq 0$, $x \neq -3$. b) $\frac{(a-2)(a+2)}{a(a+2)} \cdot \frac{a^2}{a-2} = a$, con $a \neq 0$ e $a \neq -2$ (denominatore del dividendo) e $a \neq 2$ (numeratore del divisore). c) $\frac{x(x-1)}{x+1} \cdot \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{(x+1)^2}$, con $x \neq \pm 1$.

20. I numeri sono n, $n + 1$, $n + 2$; la somma è $3n + 3 = 3(n + 1)$, multiplo di 3 perché $n + 1$ è naturale. c.v.d.

21. Per $x = 1$: $(2 + 3)^2 = 25$, mentre $4 + 9 = 13$. Manca il doppio prodotto $2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$. Corretto: $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

22. a) Marta semplifica degli addendi: x non è un fattore né del numeratore né del denominatore. Controllo: per $x = 1$ la frazione vale $\frac{7}{4}$, non 2; per $x = 0$ vale $\frac{6}{3} = 2$ solo per caso. La frazione non si semplifica. b) La semplificazione di Luca è corretta solo con la C.E. $x \neq 2$: per $x = 2$ la frazione di partenza ha denominatore 0 e non ha significato, quindi non vale 4.

23. Area $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$; perimetro $2[(x + 3) + (x - 1)] = 4x + 4$. Per $x = 5$: area $8 \cdot 4 = 32$ m^2, perimetro 24 m.

24. $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$: l'altro lato è $x + 4$; perimetro $2(x + 3 + x + 4) = 4x + 14$. Per $x = 5$: area $8 \cdot 9 = 72$ cm^2, perimetro 34 cm.

25. $2{,}35^2 - 0{,}65^2 = (2{,}35 - 0{,}65)(2{,}35 + 0{,}65) = 1{,}7 \cdot 3 = 5{,}1$ m^2. $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4000$.

26. a) $\frac{120}{n} - \frac{120}{n+2} = \frac{120(n+2) - 120n}{n(n+2)} = \frac{240}{n(n+2)}$ euro. b) Per $n = 6$: $\frac{240}{48} = 5$ €. Direttamente: 120 : 6 = 20 € e 120 : 8 = 15 €, differenza 5 €.

27. a) Lo sconto moltiplica per 0,8, l'aumento per 1,2: $p \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96p$. b) Il 20% dell'aumento si calcola sul prezzo già scontato, che è minore di p: i due fattori si moltiplicano, e $0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96$ non è 1. Il prezzo finale è il 96% di quello iniziale, cioè diminuisce sempre del 4%. c) $0{,}96 \cdot 25 = 24$ €.

28. $x^2 - 4xy + 4y^2 - (x^2 + 4xy + 4y^2) + 8xy = -8xy + 8xy = 0$ per ogni x e y.

29. a) $3(x^4 - 16) = 3(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$. b) $a^2(a - 2) - 9(a - 2) = (a - 2)(a - 3)(a + 3)$. c) $2x(x^2 - 6x + 9) = 2x(x - 3)^2$.

30. $\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$, con $x \neq 0$, $x \neq -1$.

31. a) $(1000 + 1)^2 = 1\,000\,000 + 2000 + 1 = 1\,002\,001$. b) Raggruppa $n(n + 3) = n^2 + 3n$ e $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$; posto $t = n^2 + 3n$, il prodotto più 1 è $t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$. c.v.d. Per $n = 2$: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$ e $n^2 + 3n + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$.