CAPITOLO

5

Relazioni e funzioni

Una funzione è una promessa mantenuta: a ogni valore che le consegni, ne restituisce uno solo, sempre lo stesso.

OBIETTIVI

1. Definire una relazione binaria come sottoinsieme di un prodotto cartesiano e rappresentarla con frecce, tabelle e grafici.
2. Riconoscere le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e le relazioni di equivalenza, con le loro classi.
3. Riconoscere quando una relazione è una funzione; determinarne dominio, codominio e immagini.
4. Calcolare funzioni composte e inverse in casi semplici.
5. Usare il piano cartesiano per disegnare il grafico di una funzione a partire da una tabella di valori.
6. Riconoscere e usare le funzioni di riferimento $y = kx$, $y = mx + q$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2$, $y = |x|$ come modelli della realtà.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Relazioni tra due insiemi 2
5.2 Relazioni in un insieme: le relazioni di equivalenza 4
5.3 Le funzioni 7
5.4 Il piano cartesiano e il grafico di una funzione 9
5.5 Le funzioni di riferimento 11
5.6 Funzioni e realtà 16

Matematica 1 · Parte II · Insiemi, logica e funzioni · versione 1.0
Capitolo 5: Relazioni e funzioni · pagine 121–144 del volume completo · estratto per lo studio

Ogni giorno mettiamo le cose in relazione tra loro senza nemmeno pensarci. Diciamo che Marco è il fratello di Giulia, che Roma è la capitale dell'Italia, che 12 è un multiplo di 4, che una corsa in taxi costa tanto più quanti più chilometri si percorrono. In tutte queste frasi c'è uno schema comune: due oggetti, presi in un certo ordine, e un legame che li unisce oppure no. La matematica dà a questo schema un nome preciso, *relazione*, e lo descrive con il linguaggio degli insiemi che hai imparato nel capitolo 4.

Tra tutte le relazioni ce n'è una famiglia speciale, quella delle *funzioni*, in cui a ogni oggetto di partenza ne corrisponde esattamente uno di arrivo. Le funzioni descrivono come il costo di una bolletta dipende dai minuti di telefonata o come la posizione di un'automobile dipende dal tempo. In questo capitolo imparerai a riconoscerle, a calcolarle e soprattutto a *vederle*, disegnandone il grafico nel piano cartesiano.

5.1 Relazioni tra due insiemi

5.1.1 Che cos'è una relazione

Consideriamo quattro ragazzi, A = {Anna, Bruno, Carla, Dario}, e i corsi pomeridiani offerti dalla loro scuola, B = {basket, nuoto, scacchi, teatro}. Anna frequenta nuoto e teatro, Bruno frequenta basket, Carla frequenta nuoto, Dario per quest'anno non frequenta nessun corso. La frase «x frequenta il corso y» collega alcuni elementi di A con alcuni elementi di B. Possiamo descrivere questo legame in modo completo elencando le **coppie ordinate** per cui la frase è vera:

$$R = \{(\text{Anna; nuoto}), (\text{Anna; teatro}), (\text{Bruno; basket}), (\text{Carla; nuoto})\}$$

Ricorda dal capitolo 4 che il *prodotto cartesiano* $A \times B$ è l'insieme di **tutte** le coppie ordinate $(a; b)$ con $a \in A$ e $b \in B$. Qui $A \times B$ contiene $4 \cdot 4 = 16$ coppie, ma soltanto 4 rendono vera la frase. L'insieme R è dunque un sottoinsieme di $A \times B$. Questa osservazione diventa la definizione.

Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama **relazione binaria** da A a B un qualsiasi sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$. Se la coppia $(a; b)$ appartiene a R si scrive $a \mathrel{R} b$ e si legge «a è in relazione con b»; l'elemento b si dice **corrispondente** (o immagine) di a. A è l'**insieme di partenza**, B l'**insieme di arrivo**.

Come un insieme, una relazione si può assegnare *per elencazione* delle coppie oppure *mediante una proprietà*, cioè un enunciato aperto in due variabili come «x è divisore di y»: R è allora l'insieme di verità del predicato (capitolo 4).

L'**ordine** conta: $(a; b)$ e $(b; a)$ sono coppie diverse. E la definizione è molto generale: anche $\varnothing$ e l'intero $A \times B$ sono relazioni, anche se poco interessanti.

5.1.2 Tre modi di rappresentare una relazione

Nel **diagramma a frecce** si disegnano gli insiemi A e B con diagrammi di Eulero-Venn e si traccia una freccia da a verso b per ogni coppia $(a; b)$ di R. Nel **grafico cartesiano** si dispongono gli elementi di A su una semiretta orizzontale e quelli di B su una semiretta verticale, come in una griglia; ogni coppia della relazione diventa un punto all'incrocio tra la colonna di a e la riga di b. La figura 5.1 mostra entrambe le rappresentazioni per la relazione dei corsi.

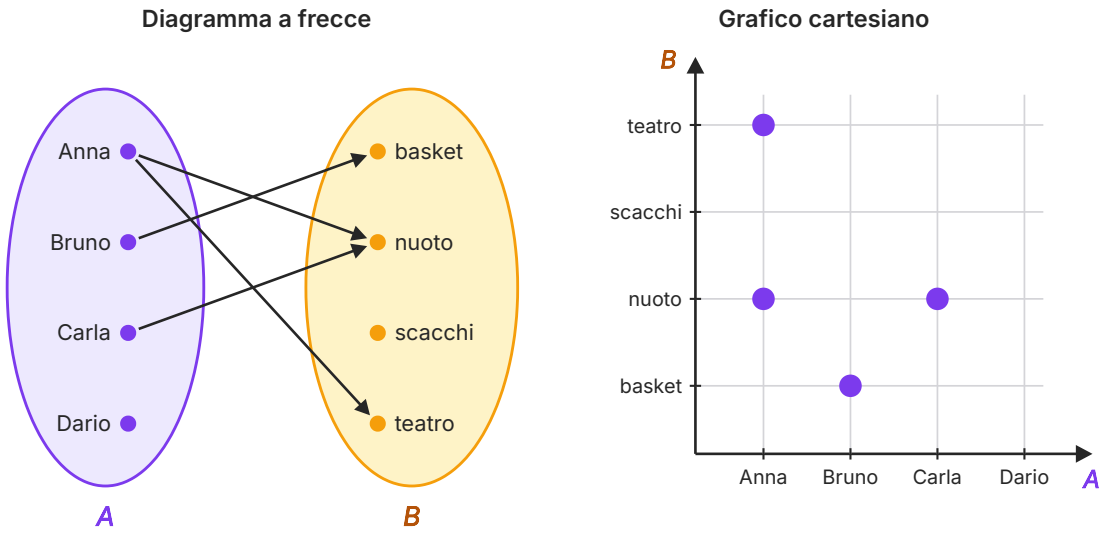

Figura 5.1 La relazione «x frequenta il corso y» da A = {Anna, Bruno, Carla, Dario} a B = {basket, nuoto, scacchi, teatro}: a sinistra il diagramma a frecce, a destra il grafico cartesiano. Ogni freccia, e ogni punto, corrisponde a una delle quattro coppie di R.

Infine, nella **tabella a doppia entrata** si scrivono gli elementi di A sulle righe e quelli di B sulle colonne, e si segna una crocetta nella casella $(a; b)$ quando a R b (tabella 5.1). Il grafico cartesiano sarà la base per disegnare le funzioni numeriche.

Tabella 5.1 La relazione «x frequenta il corso y» come tabella a doppia entrata.

A \ B	basket	nuoto	scacchi	teatro
Anna		×		×
Bruno	×			
Carla		×		
Dario				

5.1.3 Dominio, codominio e relazione inversa

Osservando il diagramma a frecce notiamo che non tutti gli elementi di A hanno una freccia in uscita (Dario no) e non tutti quelli di B ricevono una freccia (scacchi no). Diamo un nome a queste parti.

Il **dominio** di una relazione R da A a B è l'insieme degli elementi di A che hanno almeno un corrispondente in B. Il **codominio** è l'insieme degli elementi di B che sono corrispondenti di almeno un elemento di A. Nel nostro esempio il dominio è {Anna, Bruno, Carla} e il codominio è {basket, nuoto, teatro}. Il dominio è sempre un sottoinsieme di A, il codominio un sottoinsieme di B.

Ogni relazione si può anche «leggere al contrario». Se scambiamo i due elementi di ciascuna coppia otteniamo la **relazione inversa** R^{-1}, che va da B ad A:

$$b\,\mathrm{R}^{-1}a \;\Leftrightarrow\; a\,\mathrm{R}\,b$$

L'inversa di «x frequenta il corso y» è «y è frequentato da x»: R^{-1} = {(nuoto; Anna), (teatro; Anna), (basket; Bruno), (nuoto; Carla)}. Nel diagramma a frecce si invertono tutte le frecce; il dominio di R^{-1} è il codominio di R, e viceversa. L'inversa di «x è divisore di y» è «y è multiplo di x».

5.2 Relazioni in un insieme: le relazioni di equivalenza

5.2.1 Il grafo di una relazione

Molto spesso l'insieme di partenza e quello di arrivo coincidono: «x è minore di y» confronta numeri con numeri, «x è fratello di y» persone con persone. Quando $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ si dice che R è una **relazione in A**. In questo caso, invece di disegnare due copie di A, si usa un solo diagramma, detto **grafo**: gli elementi di A sono punti (i *nodi*) e ogni coppia $(a; b)$ è una freccia da a a b. Una coppia del tipo $(a; a)$ è rappresentata da un **cappio**, una piccola freccia che parte da a e ritorna in a.

Il grafo rende visibili tre proprietà che una relazione in un insieme può avere o non avere.

5.2.2 Le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva

IN SINTESI

Sia R una relazione nell'insieme A.

Riflessiva: ogni elemento è in relazione con se stesso: per ogni $a \in A$, a R a. *Nel grafo: c'è un cappio su ogni nodo.*

Simmetrica: se a R b, allora b R a. *Nel grafo: ogni freccia tra due nodi distinti ha la sua freccia di ritorno.*

Transitiva: se a R b e b R c, allora a R c. *Nel grafo: ogni «percorso in due passi» è accompagnato da una freccia diretta.*

Vediamo qualche esempio nei numeri naturali. La relazione «$x \leq y$» è **riflessiva** (ogni numero è minore o uguale a se stesso) e **transitiva** (da $x \leq y$ e $y \leq z$ segue $x \leq z$), ma non è simmetrica ($3 \leq 5$, ma non $5 \leq 3$). La relazione «$x < y$» non è nemmeno riflessiva: **nessun** numero è minore di se stesso.

Fuori dalla matematica: «x è fratello o sorella di y» è simmetrica, «x è padre di y» no; «x abita nella stessa città di y» è transitiva, mentre «x è amico di y» non lo è: gli amici dei tuoi amici non sono necessariamente tuoi amici.

5.2.3 Relazioni di equivalenza

Una relazione in A che sia riflessiva, simmetrica e transitiva si chiama **relazione di equivalenza**. Esprime l'idea di «essere uguali da un certo punto di vista», come due persone nate nello stesso anno.

Consideriamo l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e la relazione «x ha lo stesso resto di y nella divisione per 3». È riflessiva, simmetrica e transitiva, come l'uguaglianza tra i resti. Il suo grafo (figura 5.2) ha una struttura caratteristica: si spezza in tre «isole» separate, all'interno delle quali ogni nodo è collegato a tutti gli altri, e tra le quali non passa nessuna freccia.

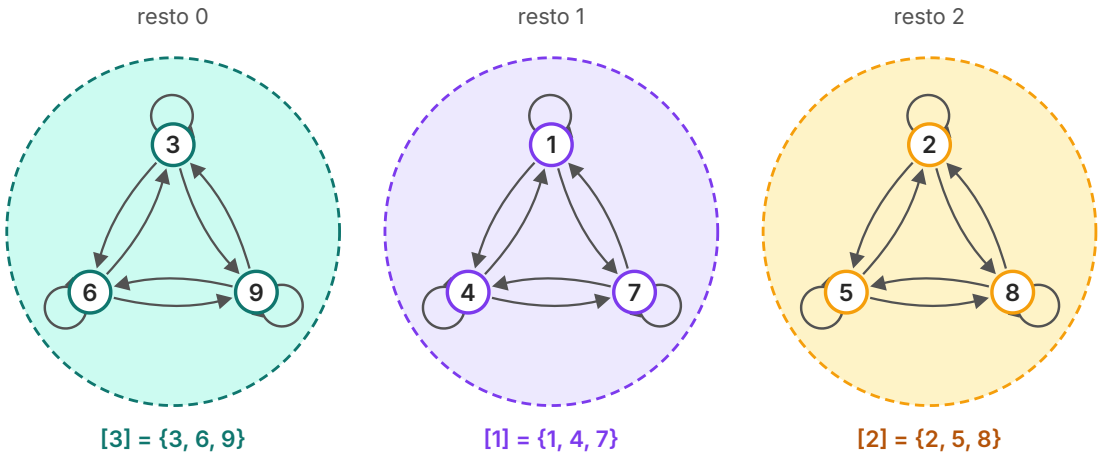

Figura 5.2 Grafo della relazione di equivalenza «x ha lo stesso resto di y nella divisione per 3» in A = {1, 2, …, 9}. Ogni nodo ha un cappio (riflessiva); ogni freccia ha la sua freccia di ritorno (simmetrica). Le tre classi di equivalenza sono disgiunte e la loro unione è A: formano una partizione di A.

Ciascuna di queste isole è una **classe di equivalenza**: la classe di un elemento a, indicata con $[a]$, è l'insieme di tutti gli elementi in relazione con a. Nel nostro esempio [1] = {1, 4, 7}, [2] = {2, 5, 8}, [3] = {3, 6, 9}. Nota che [1] = [4] = [7]: una classe può essere indicata da uno qualunque dei suoi elementi, che si dice *rappresentante* della classe.

Le classi di equivalenza sono sempre non vuote, a due a due disgiunte, e la loro unione è A: formano una **partizione** di A, nel senso del capitolo 4. L'insieme che ha come elementi le classi di equivalenza si chiama **insieme quoziente** di A rispetto a R e si indica con A/R. Qui A/R = {[1], [2], [3]} ha tre elementi.

Hai già incontrato altre relazioni di equivalenza.

- **Stessa parità in $\mathbb{Z}$.** «$x - y$ è pari» divide $\mathbb{Z}$ in due classi: i numeri pari e i numeri dispari.
- **Frazioni equivalenti.** Nel capitolo 2 abbiamo detto che $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono equivalenti se $a \cdot d = b \cdot c$. È una relazione di equivalenza, e ogni sua classe, come $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$, è un numero razionale. L'insieme $\mathbb{Q}$ è quindi un insieme quoziente!
- **Parallelismo tra rette.** Nell'insieme delle rette del piano, «r è parallela a s» è una relazione di equivalenza, se si considera ogni retta parallela a se stessa. Ogni classe è una *direzione*. La transitività si dimostra con il postulato delle parallele (capitolo 10).

Non tutte le relazioni importanti sono di equivalenza. Relazioni come «$x \le y$» in $\mathbb{N}$ o «x è divisore di y» non esprimono un'uguaglianza da un certo punto di vista, ma una graduatoria: si chiamano relazioni d'ordine, e le incontrerai più avanti negli studi.

5.3 Le funzioni

5.3.1 Definizione

Pensa a un distributore automatico: a ogni pulsante corrisponde un solo prodotto. Se lo stesso pulsante desse a volte acqua e a volte un succo, o se qualche pulsante non desse nulla, diremmo che la macchina non funziona. Le funzioni sono le relazioni che «funzionano» in questo senso.

IN SINTESI

Una **funzione** f da A a B, scritta $f\colon A \to B$, è una relazione da A a B che associa a **ogni** elemento x di A **uno e un solo** elemento y di B. L'elemento y si chiama **immagine** di x e si indica con $f(x)$ (si legge «f di x»); si scrive $y = f(x)$ oppure $x \mapsto f(x)$.

Nel diagramma a frecce le due condizioni si controllano subito: da **ogni** elemento di A deve partire **esattamente una** freccia. Non importa invece quante frecce arrivino a un elemento di B: possono essere nessuna, una o molte. La figura 5.3 mette a confronto una funzione e due relazioni che non lo sono.

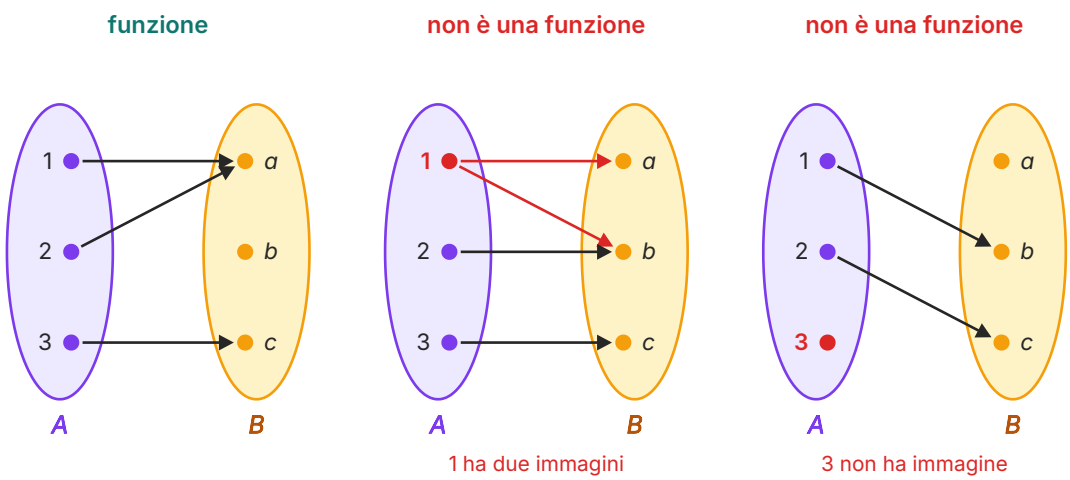

Figura 5.3 Da A = {1, 2, 3} a B = {*a*, *b*, *c*}. A sinistra una funzione: da ogni elemento di A parte una sola freccia (che due frecce arrivino in *a* non è un problema). Al centro una relazione che non è una funzione, perché 1 ha due immagini; a destra un'altra, perché 3 non ha immagine.

La relazione dei corsi di figura 5.1 non è una funzione, per due motivi: Anna frequenta due corsi e Dario nessuno. È invece una funzione la relazione che associa a ogni studente della clas-

se la sua data di nascita: ognuno è nato in un solo giorno, anche se due compagni possono avere lo stesso compleanno.

5.3.2 Dominio, codominio, variabili

In una funzione f: A → B l'insieme A si chiama **dominio** della funzione: poiché ogni elemento di A ha un'immagine, il dominio della relazione coincide con tutto A. L'insieme delle immagini, cioè l'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagine di almeno un elemento di A, si chiama **codominio** o **insieme immagine** e si indica con $f(\text{A})$. In generale $f(\text{A}) \subseteq \text{B}$.

Attenzione ai nomi: in questo libro chiamiamo *codominio* l'insieme delle immagini $f(\text{A})$ e *insieme di arrivo* l'insieme B. Molti testi, soprattutto universitari, usano invece «codominio» per B: quando leggi un altro libro controlla quale convenzione adotta.

La lettera x, che può assumere qualunque valore del dominio, si chiama **variabile indipendente**; la lettera y, il cui valore dipende da quello scelto per x, si chiama **variabile dipendente**. Si dice che y «è funzione di» x.

5.3.3 Funzioni numeriche ed espressione analitica

Quando dominio e insieme di arrivo sono insiemi di numeri, la funzione si dice **funzione numerica**. Molto spesso una funzione numerica è assegnata con una formula, detta **espressione analitica**, che dice quali operazioni eseguire su x per ottenere y. Per esempio $f(x) = 2x - 3$ significa «moltiplica per 2 e poi sottrai 3». Calcolare l'immagine di un numero vuol dire sostituirlo a x:

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \quad f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2$$

Se di una funzione numerica si dà solo l'espressione analitica, si sottintende che il dominio sia il più ampio insieme numerico per cui l'espressione ha significato: si chiama **dominio naturale** della funzione. In questo volume lavoriamo con i numeri razionali, quindi il dominio naturale di $f(x) = 2x - 3$ è tutto $\mathbb{Q}$, mentre per $g(x) = \frac{6}{x}$ dobbiamo escludere $x = 0$, perché la divisione per zero è impossibile. Il dominio di g è $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, cioè l'insieme dei razionali con $x \neq 0$.

ESEMPIO SVOLTO

Data $h(x) = x^2 - 4x$, calcola $h(0)$, $h(4)$, $h(-1)$, $h(2)$ e trova, se esistono, due numeri diversi con la stessa immagine.

Sostituiamo, rispettando la precedenza delle potenze e dei segni:

$h(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$; $h(4) = 16 - 16 = 0$; $h(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$; $h(2) = 4 - 8 = -4$.

I numeri 0 e 4 sono diversi ma hanno la stessa immagine, 0. È permesso: la relazione resta una funzione. Nota l'uso delle parentesi in $h(-1)$: scrivere -1^2 darebbe -1, un errore classico.

5.3.4 Funzione inversa e funzione composta (cenni)

A volte una funzione si può «percorrere all'indietro». La funzione $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x + 1$ («raddoppia e aggiungi 1») fa corrispondere a ogni numero uno e un solo risultato, e da ogni risultato si risale a un solo numero di partenza facendo le operazioni opposte in ordine inverso: «togli 1 e dimezza». La funzione che fa questo percorso si chiama **funzione inversa** di f e si indica con f^{-1}: qui $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$. Controllo: $f(3) = 7$ e $f^{-1}(7) = 3$. Non sempre si può tornare indietro: per $n \mapsto n^2$ in $\mathbb{Z}$ il numero 4 «tornerebbe» sia a 2 sia a -2, e la relazione inversa non è una funzione.

Le funzioni si possono anche applicare una dopo l'altra. Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, la **funzione composta** $g \circ f$ (si legge «g composto f») associa a ogni x di A il numero $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: si applica **prima** f, quella scritta a destra, e poi g. Con $f(x) = x + 3$ e $g(x) = 2x$ si ha $(g \circ f)(4) = g(7) = 14$, ma $(f \circ g)(4) = f(8) = 11$: **la composizione non è commutativa**, come sa chi prova a infilare le scarpe prima delle calze.

5.4 Il piano cartesiano e il grafico di una funzione

5.4.1 Coordinate di un punto

Per rappresentare le funzioni numeriche con un disegno ci serve un modo per associare a ogni coppia di numeri un punto del piano. Tracciamo due rette perpendicolari che si incontrano in un punto O, detto **origine**. Su ciascuna fissiamo un verso positivo (verso destra quella orizzontale, verso l'alto quella verticale) e la stessa unità di misura: ognuna diventa una retta orientata come quelle dei capitoli 1 e 2. La retta orizzontale è l'**asse x** o asse delle ascisse, quella verticale è l'**asse y** o asse delle ordinate. Il piano così attrezzato si chiama **piano cartesiano**.

Da un punto P tracciamo le parallele agli assi: incontrano l'asse x in un punto di ascissa x_P e l'asse y in un punto di ordinata y_P. La coppia ordinata $(x_P; y_P)$ costituisce le **coordinate** di P, e si scrive $P(x_P; y_P)$. Viceversa, data una coppia di numeri, c'è un solo punto che ha quelle coordinate: per disegnare A(3; 2) ci si sposta di 3 unità verso destra a partire da O, poi di 2 verso l'alto. Per B(−2; 4) ci si sposta di 2 verso *sinistra* e di 4 verso l'alto. L'origine ha coordinate O(0; 0).

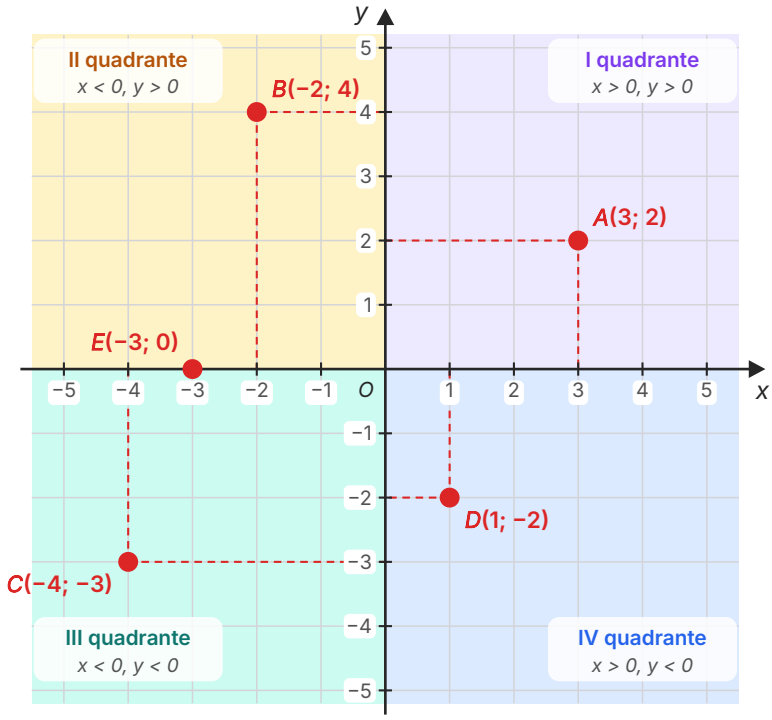

Figura 5.4 Il piano cartesiano. Gli assi dividono il piano in quattro quadranti, numerati in senso antiorario a partire da quello in alto a destra. I punti A, B, C, D sono nei quadranti I, II, III, IV; il punto E(−3; 0), come ogni punto degli assi, non appartiene a nessun quadrante. Le linee tratteggiate mostrano come si leggono le coordinate.

Gli assi dividono il piano in quattro regioni, i **quadranti**, numerati in senso antiorario come nella figura 5.4. Il segno delle coordinate dice subito in quale quadrante si trova un punto: nel I quadrante ascissa e ordinata sono entrambe positive, nel II l'ascissa è negativa e l'ordinata positiva, nel III sono entrambe negative, nel IV l'ascissa è positiva e l'ordinata negativa. I punti con ordinata 0 stanno sull'asse x, quelli con ascissa 0 sull'asse y; i punti degli assi non appartengono a nessun quadrante.

Le coordinate sono una **coppia ordinata**: prima l'ascissa, poi l'ordinata, e i punti $(2; 5)$ e $(5; 2)$ sono diversi. Il piano cartesiano è, in fondo, il prodotto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ disegnato.

APPROFONDIMENTO

Cartesio e Fermat. Il piano cartesiano prende il nome dal filosofo e matematico francese René Descartes (1596–1650), in latino *Cartesius*. Nel 1637 egli pubblicò *La Géométrie*, un'appendice al suo *Discorso sul metodo*, in cui mostrava come tradurre problemi geometrici in equazioni e viceversa. Negli stessi anni Pierre de Fermat, giurista di professione, arrivò in modo indipendente a idee simili. La parola «funzione» in senso matematico comparve con Leibniz alla fine del Seicento, e la notazione $f(x)$ fu introdotta da Euler nel Settecento.

5.4.2 Il grafico di una funzione

Il **grafico** di una funzione numerica f è l'insieme dei punti del piano cartesiano di coordinate $(x; f(x))$, al variare di x nel dominio. È la rappresentazione cartesiana della relazione, vista all'inizio del capitolo, nel caso in cui A e B siano insiemi di numeri.

Per disegnare un grafico si costruisce prima una **tabella di valori**: si scelgono alcuni valori di x, si calcolano le corrispondenti immagini e si disegnano i punti. Se il dominio è $\mathbb{Q}$, o un intervallo di $\mathbb{Q}$, tra due punti calcolati ce ne sono infiniti altri (ricorda la densità di $\mathbb{Q}$, capitolo 2), quindi si uniscono i punti con una linea senza «salti». Il prossimo anno, con i numeri reali, vedrai che questa linea è davvero continua.

Non tutte le figure del piano sono grafici di funzioni. Poiché a ogni x del dominio corrisponde una sola y, ogni retta verticale incontra il grafico di una funzione **al massimo in un punto**. Questo è il **criterio della retta verticale**: se una retta verticale taglia una curva in due punti, quella curva non è il grafico di una funzione di x. Una circonferenza, per esempio, non è il grafico di una funzione.

5.5 Le funzioni di riferimento

Alcune funzioni compaiono così spesso nelle scienze da meritare un posto d'onore. Le studiamo partendo da una tabella di valori.

5.5.1 La proporzionalità diretta: $y = kx$

Nel capitolo 3 abbiamo detto che due grandezze sono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante. Se chiamiamo k questo rapporto (con $k \neq 0$), da $\frac{y}{x} = k$ si ricava $y = kx$: è la funzione di **proporzionalità diretta**, e k si chiama costante di proporzionalità. Per $y = 2x$:

Tabella 5.2 Valori della funzione $y = 2x$.

x	-2	-1	0	1	2	$2{,}5$
y	-4	-2	0	2	4	5

I punti si dispongono su una **retta passante per l'origine** (figura 5.5, a sinistra). Il numero k dice quanto è «ripida» la retta: ogni volta che x aumenta di 1, y aumenta di k. Se $k > 0$ la retta sale da sinistra verso destra e attraversa il I e il III quadrante; se $k < 0$ scende e attraversa il II e il IV quadrante. Per questo k si chiama anche **pendenza** o *coefficiente angolare* della retta.

5.5.2 La funzione lineare: $y = mx + q$

Spesso c'è una parte che cresce in proporzione e una parte fissa, come nel costo di un taxi: quota fissa più un tanto al chilometro. Si chiama **funzione lineare** una funzione del tipo $y = mx + q$, con m e q numeri fissati. Il suo grafico è una retta, e i due numeri hanno un significato che si legge direttamente sul disegno.

- q si chiama **ordinata all'origine**: per $x = 0$ si ha $y = q$, quindi la retta taglia l'asse y nel punto $(0; q)$.
- m è la **pendenza**: quando x aumenta di 1, y varia di m; più in generale, quando x aumenta di una quantità d, y varia di $m \cdot d$. Se $m > 0$ la funzione è crescente, se $m < 0$ è decrescente, se $m = 0$ è costante e il grafico è una retta orizzontale.

Per $q = 0$ ritroviamo la proporzionalità diretta. Consideriamo ora $y = -\frac{x}{2} + 3$. Conviene scegliere valori pari di x, così da evitare frazioni:

Tabella 5.3 Valori della funzione $y = -x/2 + 3$.

x	-2	0	2	4	6
y	4	3	2	1	0

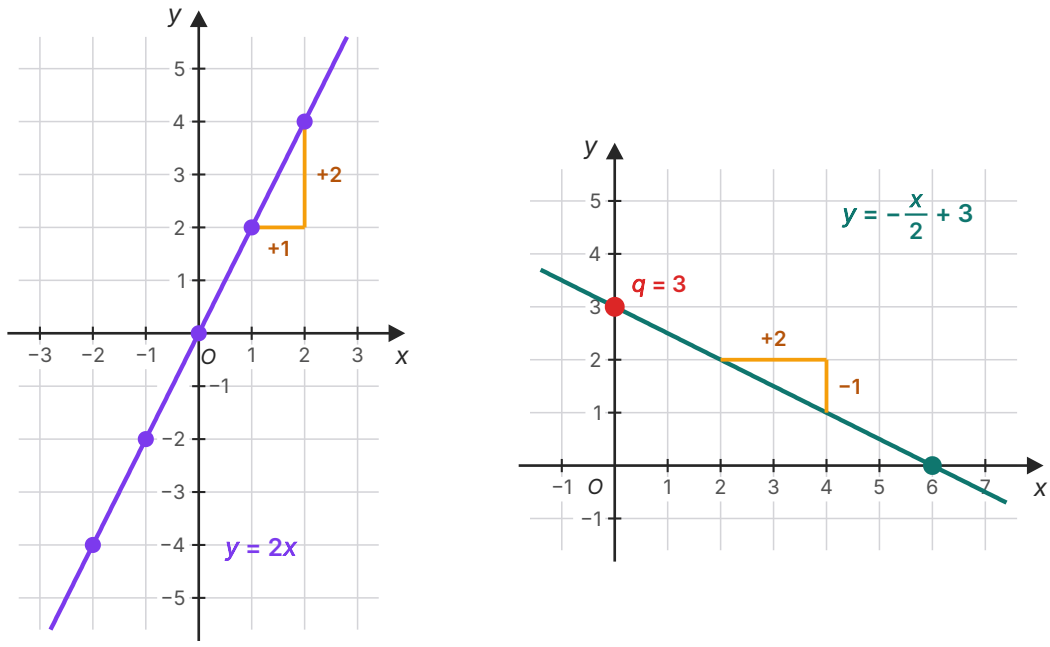

Figura 5.5 Grafici di due funzioni lineari, calcolati dalle equazioni. A sinistra $y = 2x$, proporzionalità diretta: la retta passa per O e, per ogni aumento di 1 della x, la y aumenta di 2. A destra $y = -x/2 + 3$: la retta taglia l'asse y in (0; 3), cioè nell'ordinata all'origine $q = 3$; per ogni aumento di 2 della x, la y diminuisce di 1 (pendenza $m = -1/2$). Incontra l'asse x in (6; 0).

Ogni volta che x aumenta di 2, y diminuisce di 1: la pendenza è $m = -\frac{1}{2}$, la funzione è decrescente, e la retta taglia l'asse y in (0; 3) e l'asse x in (6; 0) (figura 5.5, a destra). Nota che $y = -\frac{x}{2} + 3$ **non** è una proporzionalità: il rapporto $\frac{y}{x}$ non è costante (per $x = 2$ vale 1, per $x = 4$ vale $\frac{1}{4}$). Sono invece proporzionali le *variazioni*: la variazione di y è sempre $-\frac{1}{2}$ della variazione di x.

5.5.3 La proporzionalità inversa: $y = \frac{k}{x}$

Due grandezze sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante: $x \cdot y = k$, con $k \neq 0$. Ricavando y si ottiene la funzione di **proporzionalità inversa** $y = \frac{k}{x}$, il cui dominio naturale è $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Prendiamo $k = 6$:

Tabella 5.4 Valori della funzione $y = 6/x$. Il prodotto $x \cdot y$ vale sempre 6.

x	−6	−3	−2	−1	1	2	3	4	6
y	−1	−2	−3	−6	6	3	2	1,5	1

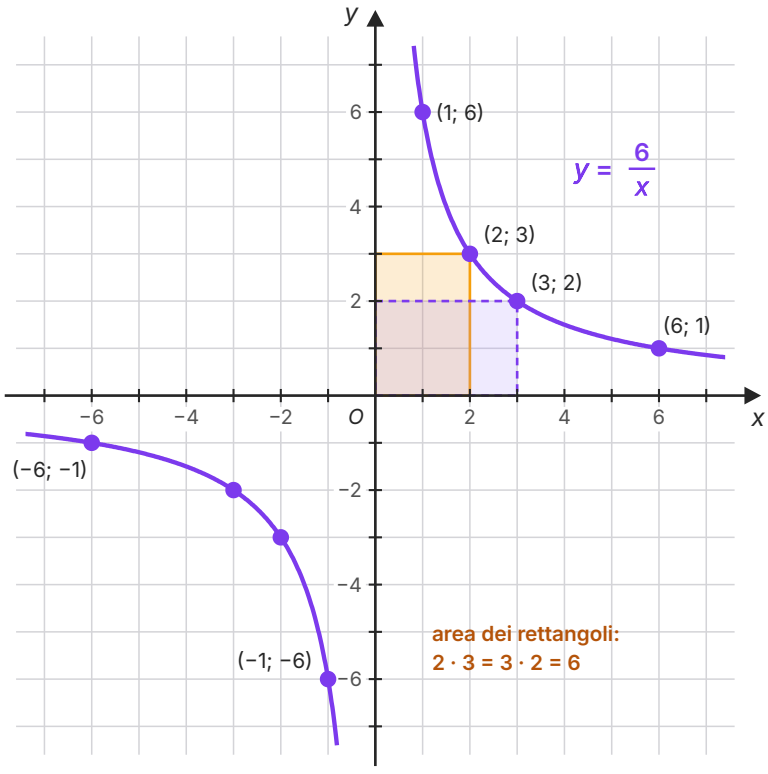

Figura 5.6 Grafico di $y = 6/x$, calcolato dall'equazione: un'iperbole equilatera con un ramo nel I quadrante e uno nel III. I due rettangoli con un vertice in O e il vertice opposto sulla curva, in (2; 3) e in (3; 2), hanno la stessa area, 6: è il significato geometrico di $x \cdot y = 6$. La curva si avvicina sempre più agli assi senza toccarli.

Il grafico (figura 5.6) è una curva detta **iperbole equilatera**, formata da due rami separati. Per $k > 0$ un ramo sta nel I quadrante (x e y positivi) e l'altro nel III (entrambi negativi). Quando x diventa molto grande, y si avvicina a 0 ma non è mai zero; quando x si avvicina a 0, y diventa grandissima in valore assoluto (positiva se $x > 0$, negativa se $x < 0$). Gli assi cartesiani si chiamano *asintoti* dell'iperbole: la curva si avvicina a essi quanto si vuole, senza mai toccarli. Se $k < 0$, i rami si trovano nel II e nel IV quadrante.

ERRORE FREQUENTE

«Quando x aumenta, y diminuisce: allora sono inversamente proporzionali». **Falso.** Anche $y = -x + 10$ è decrescente, ma non è una proporzionalità inversa: per $x = 1$ si ha $y = 9$ e il prodotto è 9; per $x = 2$ si ha $y = 8$ e il prodotto è 16. Il prodotto non è costante: è una retta, non un'iperbole. La prova è una sola: $x \cdot y$ deve essere sempre lo stesso numero.

5.5.4 La proporzionalità quadratica: $y = ax^2$

L'area di un quadrato dipende dal lato: se il lato raddoppia, l'area non raddoppia ma diventa quattro volte più grande. Si dice che y è **proporzionale al quadrato** di x se $y = ax^2$, con $a \neq 0$: il rapporto $\frac{y}{x^2}$ è costante (per $x \neq 0$). Per $y = \frac{x^2}{2}$:

Tabella 5.5 Valori della funzione $y = x^2/2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Il grafico è una curva chiamata **parabola** (figura 5.7, a sinistra). Ha il punto più basso, detto *vertice*, nell'origine, ed è simmetrica rispetto all'asse y: numeri opposti hanno lo stesso quadrato, quindi la stessa immagine. Per questo da un valore di y non si può risalire a un solo x: la funzione non ha inversa. Se $a > 0$ la parabola «guarda verso l'alto» e sta tutta nel semipiano delle $y \geq 0$; se $a < 0$ è rovesciata. Più a è grande in valore assoluto, più la parabola è stretta.

5.5.5 La funzione valore assoluto: $y = |x|$

Nel capitolo 1 abbiamo definito il valore assoluto di un numero come la sua distanza dall'origine sulla retta. In formule: $|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x < 0$ (per esempio $|-3| = -(-3) = 3$). La funzione $y = |x|$ ha come grafico due semirette che partono dall'origine (figura 5.7, a destra): per $x \geq 0$ coincide con la retta $y = x$, per $x < 0$ con la retta $y = -x$. Il grafico ha la forma di una «V», è simmetrico rispetto all'asse y e sta tutto nel semipiano delle $y \geq 0$, perché il valore assoluto non è mai negativo. Come per la parabola, numeri opposti hanno la stessa immagine.

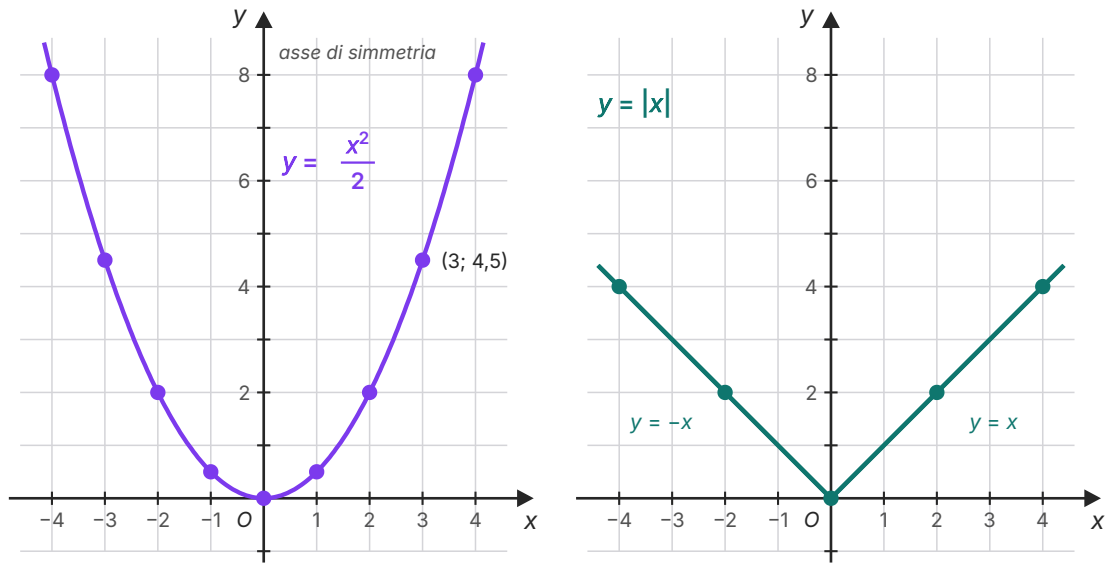

Figura 5.7 A sinistra la parabola $y = x^2/2$, simmetrica rispetto all'asse y, con vertice in O; i punti segnati sono quelli della tabella 5.5. A destra il grafico di $y = |x|$, formato da due semirette: coincide con $y = x$ per $x \geq 0$ e con $y = -x$ per $x < 0$. Entrambi i grafici sono calcolati dalle equazioni.

IN SINTESI

Funzione	Nome	Grafico	Proprietà caratteristica
$y = kx$	proporzionalità diretta	retta per O	$y/x = k$ costante
$y = mx + q$	funzione lineare	retta per $(0; q)$	variazioni di y proporzionali a quelle di x
$y = k/x$	proporzionalità inversa	iperbole equilatera	$x \cdot y = k$ costante
$y = ax^2$	proporzionalità quadratica	parabola con vertice in O	$y/x^2 = a$ costante
$y = \|x\|$	valore assoluto	«V» con vertice in O	$y \geq 0$, simmetria rispetto all'asse y

5.6 Funzioni e realtà

Le funzioni di riferimento sono *modelli*, cioè descrizioni matematiche semplificate di fenomeni reali, che permettono di calcolare, prevedere e confrontare.

5.6.1 Tariffe: quota fissa più consumo

Due offerte telefoniche (inventate per l'esempio) prevedono queste condizioni per le chiamate verso l'estero. **Piano A**: un canone di 6 € al mese più 0,05 € per ogni minuto. **Piano B**: nessun canone, 0,15 € al minuto. Se t sono i minuti di conversazione in un mese e C il costo in euro, i due piani sono descritti dalle funzioni

$$C_A = 0{,}05\,t + 6 \qquad C_B = 0{,}15\,t$$

La prima è una funzione lineare con ordinata all'origine 6 (il canone, che si paga anche se non si telefona) e pendenza 0,05 (il costo di un minuto in più). La seconda è una proporzionalità diretta. Il dominio, in questo contesto, è formato dai numeri $t \geq 0$: un tempo negativo non ha senso.

ESEMPIO SVOLTO

Quale dei due piani conviene?

Costruiamo una tabella di valori per entrambe le funzioni.

t (min)	0	30	60	90	120
C_A (€)	6,00	7,50	9,00	10,50	12,00
C_B (€)	0,00	4,50	9,00	13,50	18,00

Per 60 minuti i due piani costano uguale, 9 €. Sotto i 60 minuti conviene il piano B (per 30 minuti si spendono 4,50 € invece di 7,50 €), sopra i 60 minuti conviene il piano A (per 120 minuti 12 € invece di 18 €). Nel grafico (figura 5.8) le due rette si incontrano proprio nel punto (60; 9): a sinistra di quel punto la retta di B sta più in basso, a destra sta più in basso quella di A.

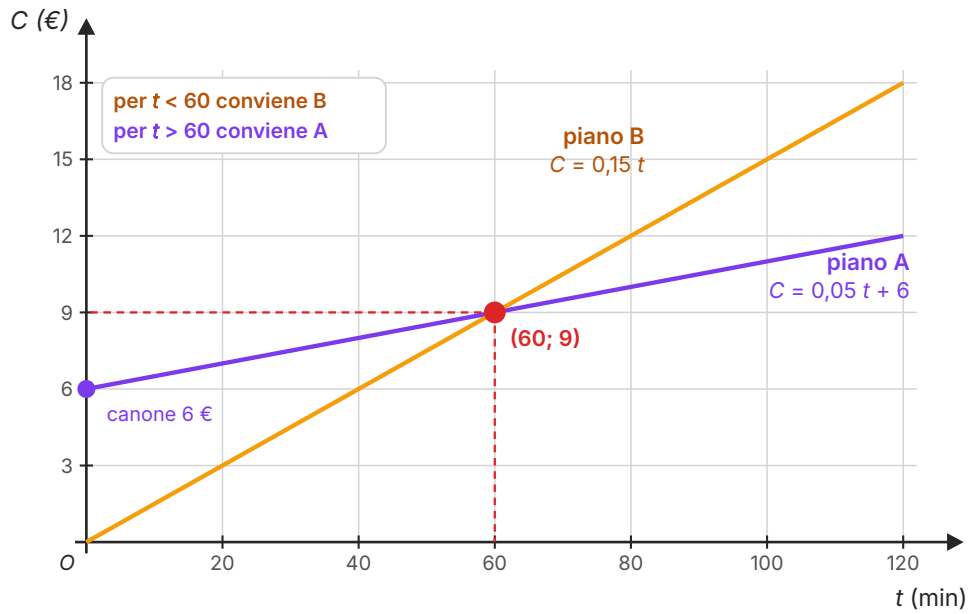

Figura 5.8 I costi mensili dei due piani tariffari, calcolati dalle equazioni $C_A = 0{,}05t + 6$ e $C_B = 0{,}15t$ per $0 \le t \le 120$. Le due rette si incontrano nel punto (60; 9): per 60 minuti i piani costano entrambi 9 €. La retta del piano A parte da 6 € (il canone) ed è meno ripida.

Nel capitolo sulle equazioni e disequazioni (capitolo 7) imparerai a trovare il punto di incontro con un'equazione e a dire «per quali t conviene A» con una disequazione. Il grafico, però, ti ha già dato la risposta.

5.6.2 Distanza e tempo a velocità costante

Un ciclista percorre una pista rettilinea a velocità costante di 5 m/s. Al momento in cui facciamo partire il cronometro si trova a 20 m dalla linea di partenza. Dopo t secondi avrà percorso altri $5t$ metri, quindi la sua posizione s (distanza dalla linea di partenza, in metri) è

$$s = 5t + 20$$

È una funzione lineare del tempo: la pendenza è la **velocità**, l'ordinata all'origine è la **posizione iniziale**. Dopo 4 s il ciclista è a $5 \cdot 4 + 20 = 40$ m; dopo 10 s a 70 m. Chi si muove così, sempre nella stessa direzione e alla stessa velocità, si dice in *moto uniforme*: la distanza dipende dal tempo in modo lineare.

5.6.3 Pressione e volume di un gas

COLLEGAMENTI

Scienze: pressione e volume di un gas. Se si comprime un gas mantenendone costante la temperatura (per esempio spingendo lentamente lo stantuffo di una siringa chiusa), il volume diminuisce e la pressione aumenta, in modo che il prodotto $p \cdot V$ resti costante. È la **legge di Boyle**, scoperta nel Seicento dallo scienziato irlandese Robert Boyle (1627–1691). Se, per esempio, un gas occupa 12 litri alla pressione di 1 atmosfera, il prodotto vale 12 atm · L; alla pressione di 2 atm il gas occupa 6 L, a 3 atm occupa 4 L, a 4 atm occupa 3 L. Il volume in funzione della pressione è $V = \frac{12}{p}$: una proporzionalità inversa, il cui grafico è il ramo di iperbole del I quadrante (pressioni e volumi sono positivi).

La proporzionalità quadratica descrive invece, come vedrai più avanti negli studi, la caduta libera di un sasso: trascurando la resistenza dell'aria, lo spazio percorso dopo t secondi è circa $4{,}9t^2$ metri (con l'accelerazione di gravità arrotondata a 9,8 m/s^2). In 1 s il sasso cade di circa 4,9 m, in 2 s di circa 19,6 m: il tempo raddoppia, lo spazio quadruplica.

DA RICORDARE

Davanti a una tabella di valori, per riconoscere il modello controlla nell'ordine: il rapporto $\frac{y}{x}$ è costante? (proporzionalità diretta); il prodotto $x \cdot y$ è costante? (inversa); il rapporto $\frac{y}{x^2}$ è costante? (quadratica); a variazioni uguali di x corrispondono variazioni uguali di y? (lineare).

SINTESI

- Una **relazione** da A a B è un sottoinsieme di A × B; si rappresenta per elencazione, con un diagramma a frecce, con una tabella a doppia entrata o con un grafico cartesiano.
- Il **dominio** è l'insieme degli elementi di A che hanno almeno un corrispondente; il **codominio** è l'insieme degli elementi di B che sono corrispondenti. La **relazione inversa** R^{-1} si ottiene scambiando gli elementi di ogni coppia.
- Una relazione in A può essere riflessiva, simmetrica, transitiva; il grafo permette di riconoscerlo a colpo d'occhio.
- Una **relazione di equivalenza** (riflessiva, simmetrica, transitiva) divide l'insieme in classi disgiunte, che formano una partizione; l'insieme delle classi è l'insieme quoziente. Relazioni come ≤, che esprimono una graduatoria, si chiamano relazioni d'ordine.
- Una **funzione** f: A → B associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B, la sua immagine $f(x)$.
- La **funzione inversa** f^{-1} «torna indietro» da ogni immagine al suo unico punto di partenza, quando questo è possibile; nella composta $g \circ f$ si applica prima f e poi g, e la composizione non è commutativa.
- Nel piano cartesiano ogni punto ha due coordinate $(x; y)$, in quest'ordine; il grafico di una funzione è l'insieme dei punti $(x; f(x))$, e ogni retta verticale lo incontra al massimo una volta.
- Funzioni di riferimento: $y = kx$ e $y = mx + q$ (rette), $y = k/x$ (iperbole), $y = ax^2$ (parabola), $y = |x|$ (a «V»).
- Le funzioni sono modelli della realtà: tariffe e distanza a velocità costante (lineare), pressione e volume di un gas (proporzionalità inversa), area di un quadrato e caduta di un sasso (quadratica).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Se A = {1, 2, 3} e B = {a, b}, quante coppie contiene il prodotto cartesiano A × B, e quindi quante sono al massimo le coppie di una relazione da A a B?

   A. 5
   B. 6
   C. 8
   D. 9

2. ● Quale delle seguenti relazioni in $\mathbb{N}$ è simmetrica?

   A. «$x < y$»

   B. «x è divisore di y»

   C. «$x + y$ è pari»

   D. «$x = 2y$»

3. ● Una relazione di equivalenza è una relazione:

   A. riflessiva, simmetrica e transitiva

   B. riflessiva e simmetrica, ma non transitiva

   C. simmetrica e transitiva, ma non riflessiva

   D. in cui ogni elemento ha uno e un solo corrispondente

4. ●● Data $f(x) = 3 - 2x$, quanto vale $f(-2)$?

   A. -1

   B. 1

   C. 7

   D. -7

5. ● Il punto P$(-3; 5)$ si trova:

   A. nel I quadrante

   B. nel II quadrante

   C. nel III quadrante

   D. nel IV quadrante

6. ●● Quale delle seguenti funzioni esprime una proporzionalità inversa?

   A. $y = 10 - x$

   B. $y = \frac{x}{4}$

   C. $y = 4x^2$

   D. $y = \frac{12}{x}$

7. ● Il grafico della funzione $y = -3x + 2$ taglia l'asse y nel punto:

   A. $(2; 0)$

   B. $(0; -3)$

   C. $(-3; 0)$

   D. $(0; 2)$

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni funzione è una relazione. b) Ogni relazione è una funzione. c) La relazione «$x < y$» in $\mathbb{N}$ è riflessiva. d) Il grafico di $y = 5x$ passa per l'origine. e) In una funzione f: A → B ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A. f) I punti $(2; 7)$ e $(7; 2)$ coincidono.

Calcolare

9. ● Siano A = {2, 3, 4, 5} e B = {4, 6, 7, 9, 10}, e sia R la relazione da A a B «x è divisore di y». a) Elenca le coppie di R e rappresentala con una tabella a doppia entrata. b) Trova dominio e codominio. c) Scrivi la relazione inversa e descrivila a parole.

10. ● Nell'insieme A = {1, 2, 3, 4} è data la relazione R = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 3), (3; 1), (2; 4), (4; 2)}. Disegnane il grafo, verifica che è una relazione di equivalenza e scrivi le classi e l'insieme quoziente. Quale proprietà dei numeri descrive R?

11. ● Data $f(x) = 2x - 3$, calcola $f(0), f(2), f(-1), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{3}{4})$.

12. ●● Determina il dominio naturale (in $\mathbb{Q}$) delle funzioni: a) $y = 3x - 7$; b) $y = \frac{5}{x-2}$; c) $y = \frac{x+1}{x(x+3)}$; d) $y = \frac{1}{x^2+1}$.

13. ●● Siano $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2$, funzioni da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$. a) Calcola $(g \circ f)(3)$ e $(f \circ g)(3)$. b) Scrivi le espressioni di $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ e $(f \circ f)(x)$. c) Calcola $(g \circ f)(-2)$ e $(f \circ g)(-2)$.

14. ● Disegna nel piano cartesiano i punti A(2; 5), B(−3; 1), C(−4; −2), D(0; −3), E(3; 0), F(1; −4) e indica per ciascuno il quadrante o l'asse a cui appartiene.

15. ●● Per la funzione $y = -2x + 1$: a) completa la tabella per $x = -2, -1, 0, 1, 2$ e disegna il grafico; b) indica pendenza e ordinata all'origine; c) la funzione è crescente o decrescente? d) In quale punto il grafico taglia l'asse x?

16. ●● Completa le tabelle e disegna i grafici. a) $y = \frac{8}{x}$ per $x = -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$. b) $y = -x^2$ per $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. c) $y = |x| - 2$ per gli stessi valori di b). Per ciascun grafico indica in quali quadranti si trova.

17. ● Per ciascuna funzione da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$ descrivi a parole le operazioni che esegue, poi scrivi la funzione inversa.

    a) $f(x) = x + 7$ b) $f(x) = 5x$ c) $f(x) = 2x - 3$ d) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$

Dimostrare e argomentare

18. ●● Dimostra che la relazione in $\mathbb{Z}$ «$x - y$ è multiplo di 3» è una relazione di equivalenza. Quante sono le classi? Scrivi tre elementi di ciascuna.

19. ●● Trova l'errore: «La funzione $y = 10 - x$ è una proporzionalità inversa, perché quando x aumenta y diminuisce». Spiega che cosa bisognerebbe verificare e mostra con un esempio che la verifica fallisce.

20. ●● Spiega, usando il criterio della retta verticale, perché la figura formata dai due assi cartesiani non è il grafico di una funzione di x. È invece il grafico di una funzione la retta orizzontale $y = 3$? E la retta verticale formata dai punti di ascissa 2?

21. ●● Nell'insieme degli studenti della tua scuola considera le relazioni: a) «x è nato nello stesso mese di y»; b) «x è più alto di y»; c) «x ha almeno un insegnante in comune con y». Quali sono relazioni di equivalenza? Per quella che lo è, descrivi le classi e di' quante possono essere al massimo; per le altre indica quale proprietà manca.

Problemi

22. ● Una corsa in taxi costa 4 € di quota fissa più 1,20 € per ogni chilometro. a) Scrivi il costo C in funzione dei chilometri d. b) Quanto costa una corsa di 5 km? E una di 12,5 km? c) Di che tipo di funzione si tratta? Indica pendenza e ordinata all'origine.

23. ●● Un treno si trova a 30 km dalla stazione di partenza e prosegue a velocità costante di 90 km/h, allontanandosi da essa. a) Scrivi la distanza s dalla stazione (in km) in funzione del tempo t (in ore). b) A che distanza si troverà dopo 2 ore? c) Dopo quanto tempo si troverà a 255 km dalla stazione?

24. ●● Un gas mantenuto a temperatura costante occupa 6 L alla pressione di 2 atm. a) Usando la legge di Boyle, completa la tabella dei volumi per le pressioni 1, 3, 4, 12 atm. b) Scrivi il volume V in funzione della pressione p. c) Di che tipo di funzione si tratta? In quale quadrante si trova il suo grafico?

25. ●● Per convertire una temperatura dalla scala Celsius (C) alla scala Fahrenheit (F) si usa la formula $F = 1{,}8\,C + 32$. a) Calcola F per $C = 0, 100, 37, -40$. b) È una proporzionalità diretta? Giustifica confrontando 10 °C e 20 °C. c) Quanto aumenta F se C aumenta di 5 gradi?

26. ●● Si vuole piastrellare un pavimento quadrato di lato l metri; le piastrelle costano 25 € al metro quadrato. a) Scrivi il costo C in funzione di l. b) Completa la tabella per $l = 1, 2, 3, 4$. c) Che cosa succede al costo se il lato raddoppia? Di che tipo di funzione si tratta?

27. ●● Due operatori offrono per le chiamate questi piani: piano X, 0,20 € al minuto senza canone; piano Y, 8 € fissi al mese più 0,04 € al minuto. a) Scrivi le due funzioni del costo in base ai minuti t. b) Completa una tabella per $t = 0, 25, 50, 75, 100$. c) Per quale durata i due piani costano uguale? d) Quale piano conviene a chi telefona 30 minuti al mese? E a chi telefona 90 minuti?

Verso la verifica

28. ●● Siano $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $f\colon A \to B$, $f(x) = x^2$. a) Rappresenta f con un diagramma a frecce e trova l'insieme immagine. b) Perché la relazione inversa di f non è una funzione da B ad A? c) Togliendo da A i numeri negativi e da B gli elementi che non sono immagini, si ottiene una funzione che ha l'inversa: scrivi l'inversa come insieme di coppie.

29. ●● Della funzione lineare $f(x) = mx + 3$ si sa che $f(2) = 7$. a) Ragionando sulla pendenza (di quanto aumenta y quando x passa da 0 a 2?), trova m. b) Calcola $f(-1)$ e $f(5)$. c) Trova il punto in cui il grafico taglia l'asse x.

30. ●●● Sfida. Sia $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 3x - 6$. a) Scrivi la funzione inversa f^{-1} e verifica che $f^{-1}(f(4)) = 4$. b) Data $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$, calcola l'espressione di $(g \circ f)(x)$ e quella di $(f \circ g)(x)$. Che cosa osservi? c) In un caso come questo la composizione è commutativa: è in contrasto con quanto hai studiato? Spiega.

PER APPROFONDIRE

- [CR] R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*: le pagine sul concetto di funzione e sulla corrispondenza biunivoca, per vedere che cosa succede confrontando insiemi infiniti.
- [BOY] C. B. Boyer, *Storia della matematica*: i capitoli su Descartes e Fermat, per la nascita della geometria delle coordinate nel Seicento.
- [LRA] L. Lombardo Radice, *L'infinito*: un'introduzione accessibile all'infinito matematico e alle idee di Cantor sulle corrispondenze biunivoche.

Glossario del capitolo

Classe di equivalenza
Insieme [a] degli elementi in relazione di equivalenza con a; le classi formano una partizione dell'insieme.

Codominio
Insieme degli elementi dell'insieme di arrivo che sono corrispondenti (immagini) di almeno un elemento; per una funzione f: A → B è l'insieme immagine f(A). Alcuni testi chiamano codominio l'intero insieme di arrivo B.

Dominio di una relazione
Insieme degli elementi dell'insieme di partenza che hanno almeno un corrispondente.

Funzione
Relazione da A a B che associa a ogni elemento x di A uno e un solo elemento y = f(x) di B, detto immagine di x.

Funzione composta
Data f: A → B e g: B → C, la funzione $g \circ f$: A → C definita da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; si applica prima f e poi g.

Funzione inversa
Funzione f^{-1} che a ogni immagine y di f associa l'unico x tale che $f(x) = y$; esiste solo se da ogni immagine si risale a un solo elemento.

Funzione lineare
Funzione y = mx + q; il grafico è una retta con pendenza m che taglia l'asse y nel punto (0; q).

Grafico di una funzione
Insieme dei punti (x; f(x)) del piano cartesiano al variare di x nel dominio; ogni retta verticale lo incontra al massimo in un punto.

Grafo
Rappresentazione di una relazione in un insieme: gli elementi sono nodi, ogni coppia è una freccia; una coppia (a; a) è un cappio.

Insieme quoziente
Insieme A/R che ha per elementi le classi di equivalenza di A rispetto alla relazione R.

Piano cartesiano
Piano con due rette orientate perpendicolari (asse x delle ascisse e asse y delle ordinate) in cui ogni punto è individuato da una coppia ordinata di coordinate (x; y).

Proporzionalità inversa
Funzione $y = k/x$ ($k \neq 0$, $x \neq 0$) in cui il prodotto $x \cdot y$ è costante; il grafico è un'iperbole equilatera.

Proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva
Riflessiva: a R a per ogni a. Simmetrica: se a R b allora b R a. Transitiva: se a R b e b R c allora a R c.

Relazione binaria
Sottoinsieme R del prodotto cartesiano A × B; se (a; b) ∈ R si scrive a R b.

Relazione di equivalenza
Relazione in un insieme che è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Relazione inversa
La relazione R^{-1} da B ad A che si ottiene scambiando gli elementi di ogni coppia di R: b R^{-1} a se e solo se a R b.

Soluzioni

1. B. $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$; una relazione è un sottoinsieme di $A \times B$, quindi ha al massimo 6 coppie.

2. C. Se $x + y$ è pari, anche $y + x$ lo è (l'addizione è commutativa). Le altre non sono simmetriche: $2 < 5$ ma non $5 < 2$; 2 divide 4 ma 4 non divide 2; $4 = 2 \cdot 2$ ma $2 \neq 2 \cdot 4$.

3. A. Riflessiva, simmetrica e transitiva. B e C mancano di una delle tre proprietà; D descrive una funzione.

4. C. $f(-2) = 3 - 2 \cdot (-2) = 3 + 4 = 7$.

5. B. Ascissa negativa e ordinata positiva: II quadrante.

6. D. Per $y = 12/x$ il prodotto $x \cdot y = 12$ è costante. A è lineare decrescente (non inversa), B è una proporzionalità diretta, C quadratica.

7. D. Per $x = 0$ si ha $y = 2$: il grafico taglia l'asse y nel punto $(0; 2)$, cioè nell'ordinata all'origine $q = 2$. Il -3 è la pendenza, non un'intersezione con gli assi.

8. a) V. b) F: una relazione è una funzione solo se ogni elemento di A ha uno e un solo corrispondente. c) F: nessun numero è minore di se stesso. d) V: per $x = 0$ si ha $y = 0$. e) F: è ogni elemento di A che deve avere un'immagine; in B possono restare elementi che non sono immagini (per $f(x) = 2x$ da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, il 3 non è immagine di nessun numero). f) F: le coordinate sono una coppia ordinata, i due punti sono diversi.

9. a) $R = \{(2; 4), (2; 6), (2; 10), (3; 6), (3; 9), (4; 4), (5; 10)\}$: 7 coppie; nella tabella (righe 2, 3, 4, 5; colonne 4, 6, 7, 9, 10) la colonna del 7 è vuota. b) Dominio $= \{2, 3, 4, 5\} = A$; codominio $= \{4, 6, 9, 10\}$ (il 7 non ha divisori in A). c) $R^{-1} = \{(4; 2), (6; 2), (10; 2), (6; 3), (9; 3), (4; 4), (10; 5)\}$: «$y$ è multiplo di x».

10. Ogni nodo ha il cappio (riflessiva); le frecce tra nodi distinti sono $1 \rightleftarrows 3$ e $2 \rightleftarrows 4$ (simmetrica); i percorsi in due passi, come (1; 3), (3; 1), portano a coppie presenti, qui (1; 1) (transitiva). Classi: $[1] = \{1, 3\}$, $[2] = \{2, 4\}$; insieme quoziente $\{[1], [2]\}$. R è la relazione «x e y hanno la stessa parità».

11. $f(0) = -3$; $f(2) = 1$; $f(-1) = -5$; $f(1/2) = 1 - 3 = -2$; $f(-3/4) = -3/2 - 3 = -9/2$.

12. a) $\mathbb{Q}$. b) $x \neq 2$: $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$. c) Il denominatore si annulla per $x = 0$ e per $x = -3$: $\mathbb{Q} \setminus \{-3, 0\}$. d) $\mathbb{Q}$: $x^2 + 1 \geq 1$, non si annulla mai.

13. a) $(g \circ f)(3) = g(2) = 4$; $(f \circ g)(3) = f(9) = 8$. b) $(g \circ f)(x) = (x - 1)^2$; $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$; $(f \circ f)(x) = (x - 1) - 1 = x - 2$. c) $(g \circ f)(-2) = g(-3) = 9$; $(f \circ g)(-2) = f(4) = 3$.

14. A(2; 5): I quadrante; B(−3; 1): II; C(−4; −2): III; D(0; −3): asse y; E(3; 0): asse x; F(1; −4): IV.

15. a) Per $x = -2, -1, 0, 1, 2$: $y = 5, 3, 1, -1, -3$; i punti stanno su una retta. b) $m = -2$, $q = 1$. c) Decrescente ($m < 0$): quando x aumenta di 1, y diminuisce di 2. d) In (1/2; 0): partendo da (0; 1), la y scende di 1 quando la x aumenta di 1/2.

16. a) $y = -2, -4, -8, 8, 4, 2, 1$: iperbole nel I e nel III quadrante. b) $y = -9, -4, -1, 0, -1, -4, -9$: parabola rivolta verso il basso con vertice in O, nel III e nel IV quadrante. c) $y = 1, 0, -1, -2, -1, 0, 1$: una «V» con vertice in $(0; -2)$, che taglia l'asse x in $(-2; 0)$ e $(2; 0)$ e attraversa tutti e quattro i quadranti.

17. a) «Aggiungi 7»; inversa «togli 7»: $f^{-1}(y) = y - 7$. b) «Moltiplica per 5»; inversa $y/5$. c) «Raddoppia e togli 3»; inversa «aggiungi 3 e dimezza»: $(y + 3)/2$. d) «Dividi per 4 e aggiungi 1»; inversa «togli 1 e moltiplica per 4»: $4(y - 1)$.

18. Riflessiva: $x - x = 0 = 3 \cdot 0$. Simmetrica: se $x - y = 3k$, allora $y - x = 3 \cdot (-k)$. Transitiva: se $x - y = 3h$ e $y - z = 3k$, sommando $x - z = 3(h + k)$. Le classi sono 3, una per ogni resto della divisione per 3: per esempio {..., −3, 0, 3, 6, ...}, {..., −2, 1, 4, 7, ...}, {..., −1, 2, 5, 8, ...}.

19. Il fatto che y diminuisca quando x aumenta non basta: per la proporzionalità inversa il prodotto $x \cdot y$

deve essere costante. Con $y = 10 - x$: per $x = 1$ il prodotto è $1 \cdot 9 = 9$, per $x = 2$ è $2 \cdot 8 = 16$. Non è costante: la funzione è lineare (grafico rettilineo, $m = -1$, $q = 10$).

20. La retta verticale $x = 0$ contiene tutto l'asse y, cioè infiniti punti della figura: a $x = 0$ corrisponderebbero infiniti valori di y. La retta $y = 3$ è il grafico della funzione costante: ogni retta verticale la incontra in un solo punto. La retta verticale dei punti di ascissa 2 non è un grafico di funzione: a $x = 2$ corrispondono infiniti valori di y, e agli altri valori di x nessuno.

21. a) È di equivalenza: ognuno è nato nel suo stesso mese (riflessiva), la relazione si può leggere nei due versi (simmetrica), e se x e y sono nati nello stesso mese e così y e z, anche x e z (transitiva). Le classi sono gli studenti nati in ciascun mese: al massimo 12. b) No: non è riflessiva (nessuno è più alto di se stesso) e non è simmetrica. c) No: è riflessiva e simmetrica ma non transitiva; x e y possono avere in comune l'insegnante di latino, y e z quello di inglese, senza che x e z abbiano insegnanti in comune.

22. a) $C = 1{,}20\,d + 4$. b) 5 km: $1{,}20 \cdot 5 + 4 = 10$ €; 12,5 km: $15 + 4 = 19$ €. c) Funzione lineare con pendenza 1,20 (€ al km) e ordinata all'origine 4 (quota fissa); non è una proporzionalità diretta.

23. a) $s = 90\,t + 30$. b) $90 \cdot 2 + 30 = 210$ km. c) Deve percorrere altri $255 - 30 = 225$ km a 90 km/h: $225 : 90 = 2{,}5$ h, cioè 2 ore e 30 minuti.

24. a) $p \cdot V = 2 \cdot 6 = 12$ atm · L. Per $p = 1, 3, 4, 12$ atm: $V = 12, 4, 3, 1$ L. b) $V = 12/p$. c) Proporzionalità inversa; il grafico è il ramo di iperbole equilatera nel I quadrante (pressione e volume positivi).

25. a) 0 °C → 32 °F; 100 °C → 212 °F; 37 °C → 98,6 °F; −40 °C → −40 °F. b) No: 10 °C → 50 °F e 20 °C → 68 °F; la temperatura Celsius raddoppia ma quella Fahrenheit no ($68 \neq 100$), perché c'è il termine 32 ($q \neq 0$). È una funzione lineare. c) Di $1{,}8 \cdot 5 = 9$ gradi Fahrenheit.

26. a) $C = 25\,l^2$. b) $l = 1, 2, 3, 4$ m → $C = 25, 100, 225, 400$ €. c) Se il lato raddoppia, il costo quadruplica (da 25 a 100 €, da 100 a 400 €): proporzionalità quadratica.

27. a) $C_X = 0{,}20\,t$; $C_Y = 0{,}04\,t + 8$. b) Per $t = 0, 25, 50, 75, 100$: X costa 0, 5, 10, 15, 20 €; Y costa 8, 9, 10, 11, 12 €. c) Per 50 minuti (10 € con entrambi). d) 30 minuti: X costa 6 €, Y 9,20 €: conviene X. 90 minuti: X costa 18 €, Y 11,60 €: conviene Y.

28. a) $-2 \to 4$, $-1 \to 1$, $0 \to 0$, $1 \to 1$, $2 \to 4$; insieme immagine $\{0, 1, 4\}$. b) Il 4 corrisponderebbe sia a 2 sia a −2 (e l'1 sia a 1 sia a −1), mentre 2 e 3 non avrebbero alcun corrispondente. c) $A' = \{0, 1, 2\}$, $B' = \{0, 1, 4\}$: $f = \{(0; 0), (1; 1), (2; 4)\}$ e la sua inversa è $\{(0; 0), (1; 1), (4; 2)\}$.

29. a) $f(0) = 3$ e $f(2) = 7$: quando x aumenta di 2, y aumenta di 4, quindi di 2 per ogni unità: $m = 2$. b) $f(-1) = -2 + 3 = 1$; $f(5) = 10 + 3 = 13$. c) Da (0; 3), per scendere di 3 la x deve diminuire di 3/2: il grafico taglia l'asse x in $(-3/2; 0)$. Verifica: $2 \cdot (-3/2) + 3 = 0$.

30. a) f «moltiplica per 3 e toglie 6»; l'inversa «aggiunge 6 e divide per 3»: $f^{-1}(y) = (y + 6)/3 = y/3 + 2$. $f(4) = 6$ e $f^{-1}(6) = 2 + 2 = 4$. b) $(g \circ f)(x) = (3x - 6)/3 + 2 = x$; $(f \circ g)(x) = 3(x/3 + 2) - 6 = x$. Entrambe le composte lasciano ogni numero invariato: g è proprio l'inversa di f. c) No: dire che la composizione non è commutativa significa che in generale $g \circ f \neq f \circ g$, cioè che basta un controesempio; ci sono però coppie particolari di funzioni, come una funzione e la sua inversa, per cui l'ordine non conta.