CAPITOLO

4

Insiemi e logica

Prima di calcolare bisogna sapere di che cosa si parla e che cosa si sta affermando.

OBIETTIVI

1. Rappresentare un insieme per elencazione, per proprietà caratteristica e con un diagramma di Eulero-Venn.
2. Eseguire intersezione, unione, differenza, complementare e prodotto cartesiano, e usarne le proprietà.
3. Risolvere problemi di conteggio con i diagrammi di Venn.
4. Riconoscere le proposizioni, usare i connettivi logici e costruire tavole di verità.
5. Usare e negare correttamente i quantificatori «per ogni» ed «esiste».
6. Distinguere condizione necessaria e sufficiente, implicazione inversa e contronominale, e leggere la struttura di un teorema.
7. Riconoscere un sillogismo valido e collegare i principi della logica alla filosofia greca.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Gli insiemi 2
4.2 Le operazioni con gli insiemi 4
4.3 La logica delle proposizioni 8
4.4 Enunciati aperti e quantificatori 11
4.5 Condizioni, teoremi e dimostrazioni 12
4.6 Logica e filosofia: da Aristotele a Boole 15

Matematica 1 · Parte II · Insiemi, logica e funzioni · versione 1.0
Capitolo 4: Insiemi e logica · pagine 99–120 del volume completo · estratto per lo studio

«Gli studenti che hanno la sufficienza in latino *o* in greco possono partecipare alla gara.» Chi ha la sufficienza in tutte e due le materie può partecipare? E chi non ce l'ha in nessuna delle due? Sembrano domande banali, eppure nel linguaggio di tutti i giorni la parola «o» a volte significa «uno dei due, ma non tutti e due», altre volte «almeno uno dei due». Un regolamento, un contratto, un programma per computer e, soprattutto, un ragionamento matematico non possono permettersi ambiguità di questo genere.

In questo capitolo costruiremo due strumenti che accompagnano tutta la matematica: il linguaggio degli **insiemi**, per dire di quali oggetti si parla, e la **logica**, per dire con precisione che cosa si afferma. I due linguaggi sono imparentati («e» corrisponde all'intersezione, «o» all'unione, «non» al complementare) e insieme preparano a capire che cos'è un teorema, in vista della geometria della Parte V.

4.1 Gli insiemi

4.1.1 Il concetto di insieme

In matematica la parola **insieme** è un *concetto primitivo*, che non si definisce ma si chiarisce con esempi: un insieme è una raccolta di oggetti, detti elementi, per la quale si può stabilire *in modo oggettivo* se un oggetto le appartiene o no. «I divisori di 18» e «le vocali dell'alfabeto italiano» sono insiemi; «i numeri grandi» o «le canzoni più belle dell'anno» no, perché l'appartenenza dipende dal giudizio di chi parla.

Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole e i loro elementi con lettere minuscole o con i simboli degli oggetti. Si scrive $a \in A$ («a appartiene ad A») e $a \notin A$ nel caso contrario: per esempio $-3 \in \mathbb{Z}$, ma $-3 \notin \mathbb{N}$.

4.1.2 Tre modi per rappresentare un insieme

Per elencazione. Si scrivono tutti gli elementi tra parentesi graffe, separati da virgole: $V = \{a, e, i, o, u\}$. In un insieme l'ordine non conta e ogni elemento compare una sola volta: {1, 2, 3}, {3, 1, 2} e {1, 1, 2, 3} indicano lo stesso insieme. L'elencazione è comoda quando gli elementi sono pochi; per insiemi grandi si usano i puntini solo se la regola è chiara senza ambiguità, come in {0, 2, 4, 6, …}.

Per proprietà caratteristica. Si indica una proprietà che hanno tutti e soli gli elementi dell'insieme. Si scrive

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$$

e si legge «A è l'insieme degli x appartenenti a $\mathbb{N}$ tali che x è minore di 4», cioè $A = \{0, 1, 2, 3\}$. È il modo indispensabile per descrivere gli insiemi infiniti.

Con un diagramma di Eulero-Venn. Si disegna una linea chiusa e si mettono all'interno, come punti, gli elementi dell'insieme; gli oggetti che non appartengono all'insieme stanno fuori. Il diagramma rende visibili a colpo d'occhio i rapporti fra più insiemi, come nella figura 4.1.

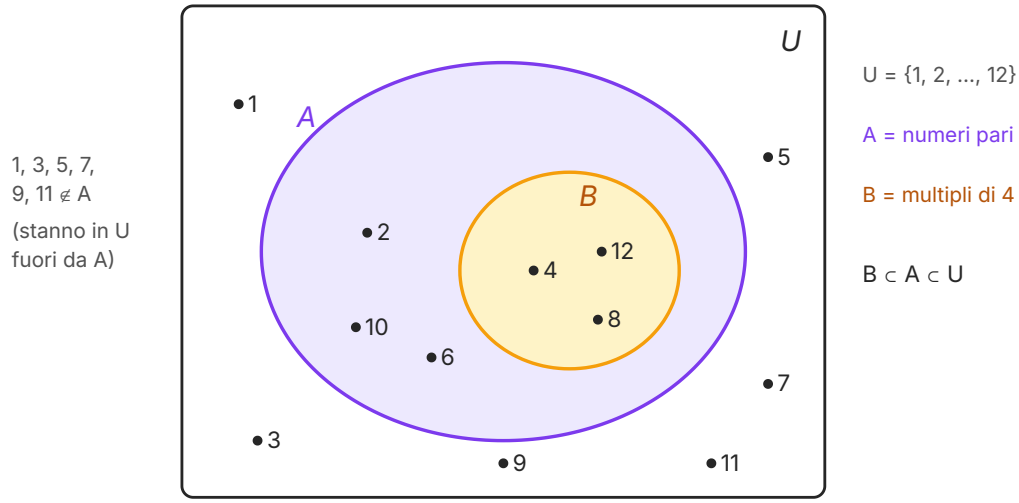


Figura 4.1 Diagramma di Eulero-Venn. Nell'universo U dei numeri da 1 a 12, l'insieme B dei multipli di 4 è contenuto nell'insieme A dei numeri pari: $B \subset A \subset U$.

Due insiemi sono **uguali** se hanno esattamente gli stessi elementi, comunque li si scriva: $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 6\} = \{1, 2, 3, 6\} = \{6, 3, 2, 1\}$.

4.1.3 Insieme vuoto, insieme universo, insiemi finiti e infiniti

L'insieme che non ha elementi, come quello dei numeri naturali x con $x + 5 = 2$, si chiama **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing$ (da non confondere con $\{0\}$, che ha un elemento). Quando si studiano più insiemi conviene fissare un **insieme universo** U che li contenga tutti: nei diagrammi è il rettangolo esterno.

Un insieme è finito se il conteggio dei suoi elementi termina; il numero degli elementi è la **cardinalità**, $|A|$ (per esempio $|\varnothing| = 0$). Altrimenti è infinito, come $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e l'insieme dei numeri primi (capitolo 1).

4.1.4 Sottoinsiemi e insieme delle parti

Un insieme B è un **sottoinsieme** di A, e si scrive $B \subseteq A$, se ogni elemento di B è anche elemento di A. Nella figura 4.1 i multipli di 4 sono contenuti nei numeri pari. Se inoltre A ha qualche elemento che non sta in B si parla di inclusione stretta, $B \subset A$: per esempio $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (capitolo 2).

Ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso ($A \subseteq A$), e l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme ($\varnothing \subseteq A$), perché non ha elementi che possano «uscire» da A: sono i **sottoinsiemi impropri** di A; tutti gli altri si dicono sottoinsiemi propri. Infine, $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$: è il modo standard per dimostrare che due insiemi sono uguali.

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di A si chiama **insieme delle parti** di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$. Se $A = \{r, s, t\}$, i sottoinsiemi sono $\varnothing$, $\{r\}$, $\{s\}$, $\{t\}$, $\{r, s\}$, $\{r, t\}$, $\{s, t\}$ e $\{r, s, t\}$: $8 = 2^3$. Non è un caso: per costruire un sottoinsieme si decide, elemento per elemento, se prenderlo o lasciarlo, e con n elementi le scelte possibili sono 2^n. Quindi, se $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

> **ERRORE FREQUENTE**
> Non confondere $\in$ con $\subseteq$. Il simbolo $\in$ lega un *elemento* a un insieme, $\subseteq$ lega due *insiemi*. Se $A = \{1, 2, 3\}$, sono corrette $2 \in A$ e $\{2\} \subseteq A$; sono sbagliate $\{2\} \in A$ e $2 \subseteq A$.

4.2 Le operazioni con gli insiemi

Come con i numeri si costruiscono nuovi numeri con le operazioni, così con gli insiemi si costruiscono nuovi insiemi. In tutto il paragrafo A e B sono sottoinsiemi di un universo U; la figura 4.2 mostra in viola il risultato di ciascuna operazione.

4.2.1 Intersezione e unione

L'**intersezione** di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono *sia* ad A *sia* a B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, allora $A \cap B = \{3, 4\}$. Quando due insiemi non hanno elementi in comune, cioè $A \cap B = \varnothing$, si dicono insiemi disgiunti: tali sono, in $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri pari e quello dei dispari.

L'**unione** di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad *almeno uno* dei due insiemi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Con gli insiemi di prima, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: gli elementi comuni si scrivono una volta sola, perché la «o» della definizione è inclusiva. Se $B \subseteq A$, allora $A \cap B = B$ e $A \cup B = A$.

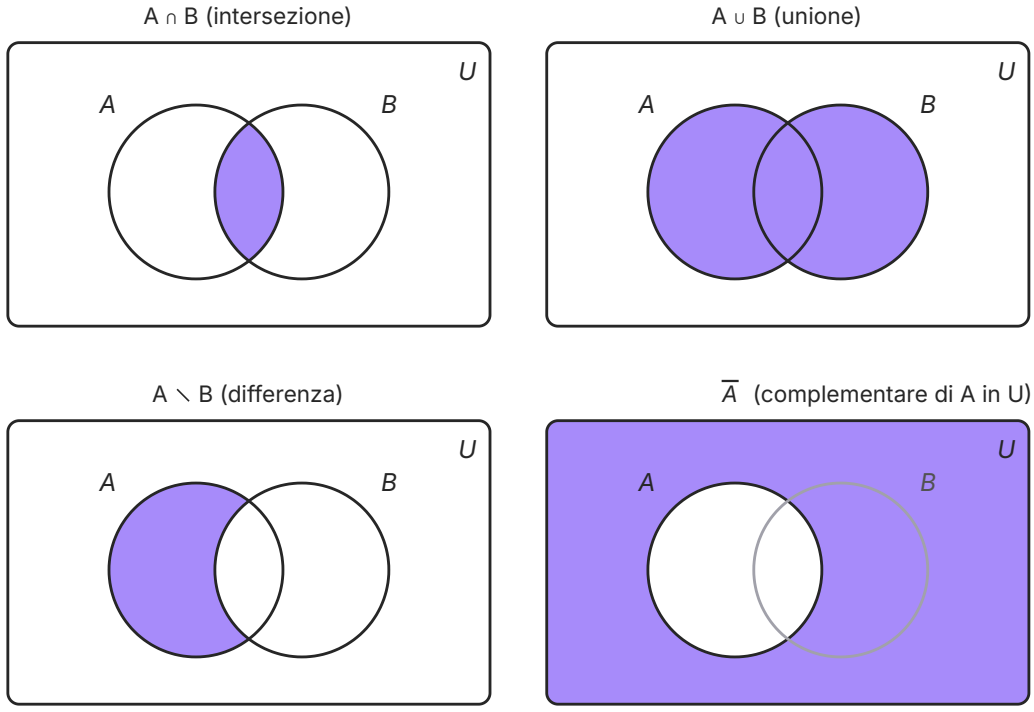


Figura 4.2 Le operazioni fra due insiemi A e B dell'universo U: in viola il risultato di intersezione, unione, differenza e complementare.

4.2.2 Differenza e complementare

La **differenza** tra A e B è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ si ottiene $A \setminus B = \{1, 2\}$, mentre $B \setminus A = \{5\}$: la differenza, come la sottrazione fra numeri, non è commutativa.

Se $A \subseteq U$, la differenza $U \setminus A$ si chiama **complementare** di A e si indica con $\overline{A}$: se $U = \mathbb{N}$, il complementare dei pari è l'insieme dei dispari. Valgono sempre

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad \text{il complementare di } \overline{A} \text{ è } A.$$

4.2.3 Le proprietà delle operazioni

Intersezione e unione hanno proprietà molto simili a quelle della moltiplicazione e dell'addizione fra numeri, ma con qualche sorpresa. Si possono verificare tutte disegnando i diagrammi di Venn dei due membri e controllando che le zone colorate coincidano.

IN SINTESI

Proprietà di intersezione, unione e complementare

Commutativa: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$.

Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Distributive: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Elementi particolari: $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap A = A \cup A = A$.

Leggi di De Morgan: il complementare di $A \cup B$ è $\overline{A} \cap \overline{B}$; il complementare di $A \cap B$ è $\overline{A} \cup \overline{B}$.

A differenza dei numeri, fra gli insiemi ciascuna delle due operazioni si distribuisce rispetto all'altra. Le leggi di De Morgan dicono che il complementare «scambia» unione e intersezione: non stare in $A \cup B$ significa non stare né in A né in B (figura 4.3).

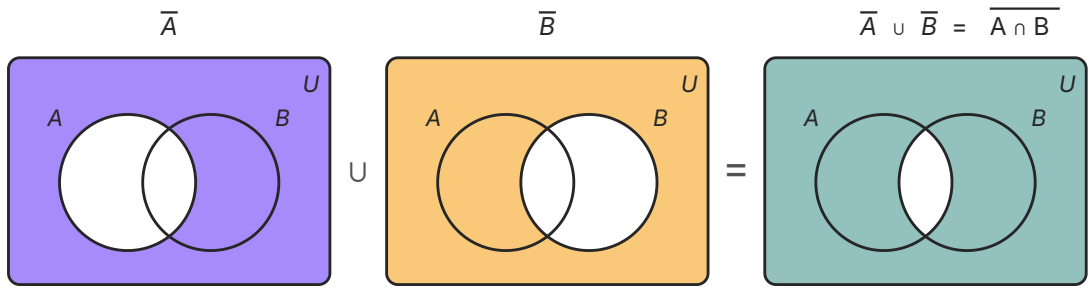


Figura 4.3 Seconda legge di De Morgan: l'unione dei complementari di A e di B è il complementare di $A \cap B$.

4.2.4 Partizione di un insieme

Una **partizione** di A è una suddivisione di A in sottoinsiemi non vuoti, a due a due disgiunti, la cui unione è tutto A: ogni elemento finisce in uno e un solo «cassetto». Gli studenti ripartiti nelle classi formano una partizione della scuola, i pari e i dispari una partizione di $\mathbb{N}$. Ritroverai le partizioni nel capitolo 5, studiando le relazioni di equivalenza.

4.2.5 Il prodotto cartesiano

Il prodotto cartesiano crea oggetti nuovi: le coppie. Una coppia ordinata $(a; b)$ è formata da due elementi presi in un ordine preciso: $(1; 2) \neq (2; 1)$, mentre $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Il **prodotto cartesiano** di A e B è l'insieme di tutte le coppie ordinate con il primo elemento in A e il secondo in B:

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, si ha $A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$. Lo si rappresenta con una tabella a doppia entrata o con una griglia di punti (figura 4.4), che mostra anche perché

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|:$$

le righe sono $|B|$ e le colonne $|A|$. In generale $A \times B \neq B \times A$. Il nome viene da René Descartes (1596–1650), in latino *Cartesius*: la griglia della figura è un pezzo del *piano cartesiano* del prossimo capitolo.

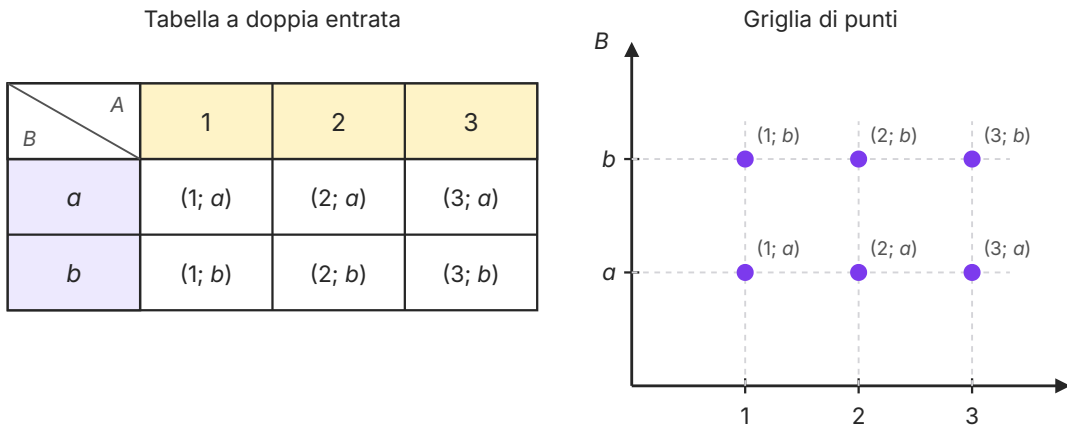


Figura 4.4 Il prodotto cartesiano $A \times B$ con $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, rappresentato con una tabella a doppia entrata e con una griglia di punti.

4.2.6 Contare con i diagrammi di Venn

Per contare gli elementi di insiemi che si sovrappongono si usa il diagramma di Venn, con una regola: **in ogni regione si scrive il numero di elementi che stanno *solo* in quella regione**, partendo da quella comune.

Se sommiamo $|A|$ e $|B|$, gli elementi dell'intersezione vengono contati due volte, una come elementi di A e una come elementi di B. Per ottenere $|A \cup B|$ bisogna toglierli una volta:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

La formula si chiama principio di inclusione-esclusione. Se A e B sono disgiunti, si riduce a $|A \cup B| = |A| + |B|$.

ESEMPIO SVOLTO

Una classe e due attività

In una classe di 27 studenti, 16 frequentano il corso di teatro, 12 il corso di scacchi e 5 frequentano entrambi. Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi? Quanti frequentano solo teatro?

1. Dati. U = studenti della classe, $|U| = 27$; T = teatro, $|T| = 16$; S = scacchi, $|S| = 12$; $|T \cap S| = 5$.

2. Dall'interno verso l'esterno. Nella zona comune scriviamo 5. Solo teatro: $16 - 5 = 11$. Solo scacchi: $12 - 5 = 7$.

3. Unione e complementare. $|T \cup S| = 11 + 5 + 7 = 23$, oppure con la formula $16 + 12 - 5 = 23$. Non frequentano nessun corso $27 - 23 = 4$ studenti.

Risposta: 4 studenti non frequentano corsi; 11 frequentano solo teatro. **Controllo:** $11 + 5 + 7 + 4 = 27$.

4.3 La logica delle proposizioni

4.3.1 Proposizioni

In logica si chiama **proposizione** (o enunciato) un'affermazione di cui si può stabilire in modo oggettivo se è vera o falsa: «Roma è la capitale d'Italia» è vera, «7 è un numero pari» è falsa. Non sono proposizioni le domande, gli ordini, i giudizi personali e le frasi con una variabile di valore ignoto, come «x è maggiore di 3», di cui ci occuperemo nel paragrafo 4.4.

La logica che studiamo, detta *bivalente*, si fonda su due principi. Per il principio di non contraddizione una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa; per il principio del terzo escluso una proposizione è vera oppure falsa, e non c'è una terza possibilità. I due valori di verità si indicano con V (vero) e F (falso), le proposizioni con lettere minuscole p, q, r…

Con le parole «non», «e», «o», «se… allora» si costruiscono, da proposizioni *semplici*, proposizioni *composte*, il cui valore di verità dipende solo da quello delle componenti. Tradotte in simboli, queste parole sono i connettivi logici, e ciascuno è descritto da una **tavola di verità**, che elenca tutte le combinazioni di valori delle componenti (con due proposizioni, 4 righe).

4.3.2 Negazione, congiunzione e disgiunzione

La **negazione** di p, indicata con $\neg p$ («non p»), è vera quando p è falsa e falsa quando p è vera. La negazione di «7 è pari» è «7 non è pari», che è vera. Negare due volte riporta al punto di partenza: $\neg(\neg p)$ ha lo stesso valore di p.

La **congiunzione** $p \wedge q$ («p e q») è vera solo quando p e q sono entrambe vere. «15 è dispari e 15 è multiplo di 5» è vera; «15 è dispari e 15 è primo» è falsa, perché la seconda parte è falsa.

La **disgiunzione** $p \vee q$ («p o q») è falsa solo se p e q sono false entrambe: in matematica la «o» è **inclusiva**. Per «o l'uno o l'altro, ma non tutti e due» si usa la **disgiunzione esclusiva** $p \veebar q$. I logici chiamano spesso le due «o» con nomi latini, *vel* (inclusiva) e *aut* (esclusiva), anche se in latino la distinzione fra le due parole non è così rigida.

Il problema dell'inizio del capitolo si risolve così: nel regolamento della gara la «o» è inclusiva, quindi chi ha la sufficienza in entrambe le materie può partecipare. Al ristorante, invece, «menù con primo o secondo» di solito significa «aut»: un piatto solo.

4.3.3 Implicazione e doppia implicazione

L'**implicazione** $p \Rightarrow q$ («se p, allora q», oppure «p implica q») è falsa in un solo caso: quando p è vera e q è falsa. La proposizione p si chiama antecedente (o premessa), q si chiama conseguente (o conclusione).

Per capire perché la tavola è fatta così, pensa a una promessa: «Se domani c'è il sole, andiamo al mare». Domani c'è il sole e andiamo al mare: promessa mantenuta (V). C'è il sole e non andiamo: promessa tradita (F). Se domani piove, qualunque cosa facciamo la promessa non è stata violata, perché non diceva nulla sui giorni di pioggia: in entrambi i casi l'implicazione è vera. In particolare, **un'implicazione con antecedente falso è sempre vera**: «Se 2 + 2 = 5, allora la Luna è di formaggio» è, dal punto di vista logico, una proposizione vera. Questo significato si chiama *implicazione materiale*: non richiede che fra p e q ci sia un legame di causa ed effetto, ma riguarda solo i valori di verità.

La doppia implicazione $p \Leftrightarrow q$ («p se e solo se q») è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità; equivale a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Per esempio: «un numero naturale è divisibile per 6 se e solo se è divisibile sia per 2 sia per 3». La tabella 4.1 riassume i sei connettivi.

Tabella 4.1 Tavola di verità dei connettivi logici.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

COLLEGAMENTI

Informatica: i connettivi «al lavoro»

Nei linguaggi di programmazione gli operatori AND, OR e NOT corrispondono a $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ e seguono le tavole di verità della tabella 4.1: «se il voto è almeno 6 AND le assenze sono meno di 10, allora promuovi» è una congiunzione. Anche i motori di ricerca e i cataloghi delle biblioteche accettano ricerche con AND, OR e NOT, e i circuiti dei computer realizzano i connettivi con minuscoli interruttori elettronici.

4.3.4 Tautologie, contraddizioni ed equivalenze

Una **tautologia** è una proposizione composta vera per qualunque valore delle componenti, come $p \vee \neg p$; una **contraddizione** è sempre falsa, come $p \wedge \neg p$. Due proposizioni sono logicamente equivalenti quando hanno la stessa tavola di verità.

ESEMPIO SVOLTO

Tre modi di dire la stessa implicazione

Dimostra con una tavola di verità che $p \Rightarrow q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$ e $\neg p \vee q$ sono equivalenti, mentre $q \Rightarrow p$ non lo è.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p \vee q$	$q \Rightarrow p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V

Nella colonna $\neg q \Rightarrow \neg p$, per esempio nella seconda riga, l'antecedente $\neg q$ è V e il conseguente $\neg p$ è F: l'implicazione è falsa. Le colonne 5, 6 e 7 sono identiche: le tre proposizioni sono equivalenti. L'ultima colonna differisce nella seconda e nella terza riga: $q \Rightarrow p$ **non** equivale a $p \Rightarrow q$.

Anche in logica valgono le leggi di De Morgan, e sono la chiave per **negare correttamente una proposizione composta**:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Le prime due si verificano con una tavola di verità (esercizio 18); la terza si ottiene negando $\neg p \vee q$, che per l'esempio svolto equivale a $p \Rightarrow q$. Così la negazione di «stasera vado al cinema o a

teatro» è «stasera non vado né al cinema né a teatro», e la negazione di «se piove, prendo l'ombrello» è «piove e non prendo l'ombrello»: è l'unico caso in cui chi ha parlato ha detto il falso.

> **ERRORE FREQUENTE**
> La negazione di «p e q» **non** è «non p e non q». Se l'insegnante dice «Marco ha studiato storia e geografia» e la frase è falsa, non è detto che Marco non abbia studiato nessuna delle due materie: basta che ne abbia trascurata una. La negazione corretta è «Marco non ha studiato storia *o* non ha studiato geografia». Allo stesso modo, negare un'implicazione non significa negarne le due parti.

4.4 Enunciati aperti e quantificatori

4.4.1 Predicati e insieme di verità

La frase «x è un numero pari» diventa una proposizione solo quando a x si sostituisce un valore: con $x = 4$ è vera, con $x = 7$ è falsa. Una frase così si chiama **enunciato aperto** (o predicato), $p(x)$, e l'insieme U in cui varia x è il suo universo.

L'insieme dei valori di U che rendono vero $p(x)$ è l'**insieme di verità** del predicato, cioè $\{x \in U \mid p(x)\}$. Per «$x + 3 < 7$» in $\mathbb{N}$ è $\{0, 1, 2, 3\}$; per «$x^2 = 4$» è $\{2\}$ in $\mathbb{N}$ e $\{-2, 2\}$ in $\mathbb{Z}$. Nelle equazioni (capitolo 7) l'insieme delle soluzioni sarà proprio un insieme di verità.

4.4.2 Logica e insiemi

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati sullo stesso universo U, con insiemi di verità P e Q. Un elemento rende vero $p(x) \wedge q(x)$ se e solo se sta sia in P sia in Q: l'insieme di verità della congiunzione è $P \cap Q$. Con lo stesso ragionamento si ottiene il dizionario della tabella 4.2, che spiega perché le proprietà degli insiemi e quelle dei connettivi si somigliano tanto: sono la stessa cosa vista da due lati.

Tabella 4.2 Corrispondenza fra connettivi logici e operazioni con gli insiemi di verità (P e Q sono gli insiemi di verità di $p(x)$ e $q(x)$ in U).

Logica	Insiemi	Esempio in $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$, p: «x è pari», q: «$x > 6$»
$\neg p(x)$	$\overline{P}$	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$p(x) \wedge q(x)$	$P \cap Q$	$\{8, 10\}$
$p(x) \vee q(x)$	$P \cup Q$	$\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$p(x) \wedge \neg q(x)$	$P \setminus Q$	$\{2, 4, 6\}$
$p(x) \Rightarrow q(x)$ vera per ogni x	$P \subseteq Q$	falso: $2 \in P$ ma $2 \notin Q$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$ vera per ogni x	$P = Q$	falso

4.4.3 I quantificatori

Un enunciato aperto diventa una proposizione anche dicendo per *quanti* elementi è vero. $\forall x \in U$, $p(x)$ (**quantificatore universale**, «per ogni») è vera se l'insieme di verità è tutto U; $\exists x \in U \mid p(x)$ (**quantificatore esistenziale**, «esiste almeno un») è vera se l'insieme di verità non è vuoto. Per esempio:

- «$\forall x \in \mathbb{N}$, $x + 1 > x$» è vera;
- «$\forall x \in \mathbb{N}$, x è pari» è falsa: basta l'esempio $x = 3$;
- «$\exists x \in \mathbb{N} \mid x + 3 = 1$» è falsa, mentre «$\exists x \in \mathbb{Z} \mid x + 3 = 1$» è vera ($x = -2$).

Per smentire una proposizione universale basta un controesempio; per dimostrarla non bastano mille esempi, serve un ragionamento valido per tutti i casi. Di qui le regole per la **negazione dei quantificatori**:

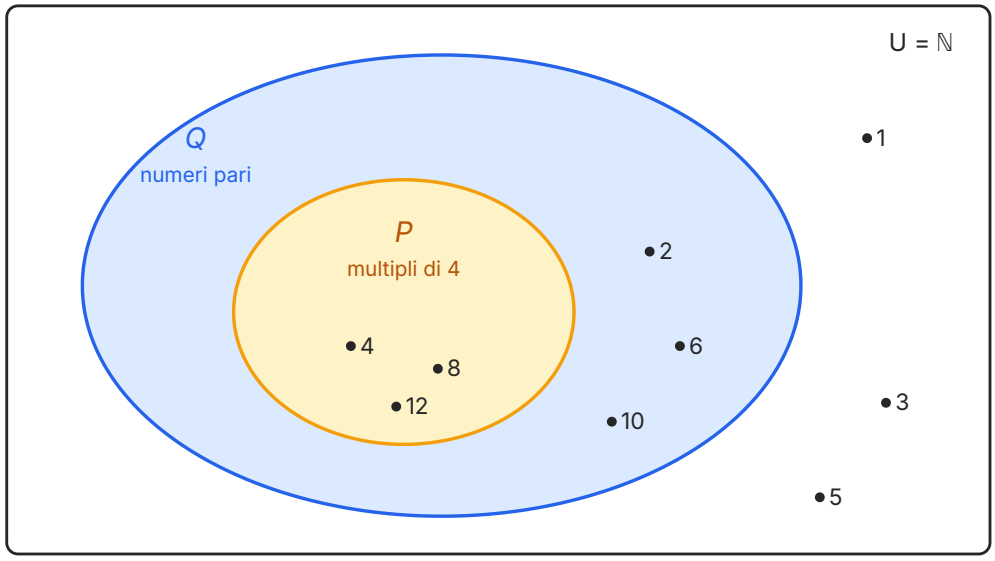
$$\neg(\forall x,\, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \mid \neg p(x) \qquad \neg(\exists x \mid p(x)) \Leftrightarrow \forall x,\, \neg p(x)$$

La negazione di «tutti i numeri primi sono dispari» è «esiste almeno un numero primo che non è dispari» (ed è vera: 2). La negazione di «tutti gli studenti hanno consegnato» **non** è «nessuno studente ha consegnato», ma «almeno uno studente non ha consegnato».

4.5 Condizioni, teoremi e dimostrazioni

4.5.1 Condizione necessaria e condizione sufficiente

Consideriamo in $\mathbb{N}$ i predicati $p(x)$: «x è multiplo di 4» e $q(x)$: «x è pari». Per ogni numero naturale vale $p(x) \Rightarrow q(x)$: ogni multiplo di 4 è pari. Come mostra la figura 4.5, ciò significa che l'insieme di verità P è contenuto in Q.



$P \subseteq Q$ significa $p(x) \Rightarrow q(x)$

p è condizione sufficiente per *q*; *q* è condizione necessaria per *p*

Figura 4.5 L'implicazione come inclusione: l'insieme di verità *P* di «*x* è multiplo di 4» è contenuto nell'insieme di verità *Q* di «*x* è pari».

Quando $p \Rightarrow q$ è vera si dice che:

- p è **condizione sufficiente** per q: *basta* sapere che un numero è multiplo di 4 per essere sicuri che sia pari;
- q è **condizione necessaria** per p: un numero *deve* essere pari per poter essere multiplo di 4; se non è pari, non può esserlo.

Essere multiplo di 4 non è però *necessario* per essere pari (6 è pari ma non è multiplo di 4). Quando valgono sia $p \Rightarrow q$ sia $q \Rightarrow p$, p è condizione necessaria e sufficiente per q e si scrive $p \Leftrightarrow q$: per esempio, in $\mathbb{N}$, «x è divisibile per 10» $\Leftrightarrow$ «l'ultima cifra di x è 0». Nella lingua di tutti i giorni le due condizioni si confondono spesso: avere 18 anni è necessario per prendere la patente dell'automobile, ma non sufficiente.

4.5.2 Implicazione inversa, contraria e contronominale

A partire da un'implicazione $p \Rightarrow q$, detta implicazione diretta, se ne possono costruire altre tre scambiando o negando antecedente e conseguente. La tabella 4.3 le mette a confronto su un esempio.

Tabella 4.3 Le quattro implicazioni costruite a partire da p: «x è multiplo di 4», q: «x è pari» (in $\mathbb{N}$).

Nome	Forma	Esempio	Vera?
diretta	$p \Rightarrow q$	se x è multiplo di 4, allora è pari	sì
inversa	$q \Rightarrow p$	se x è pari, allora è multiplo di 4	no ($x = 6$)
contraria	$\neg p \Rightarrow \neg q$	se x non è multiplo di 4, allora non è pari	no ($x = 6$)
contronominale	$\neg q \Rightarrow \neg p$	se x non è pari, allora non è multiplo di 4	sì

La implicazione inversa $q \Rightarrow p$ scambia antecedente e conseguente; la contraria $\neg p \Rightarrow \neg q$ li nega; la **contronominale** $\neg q \Rightarrow \neg p$ li scambia e li nega. Per la tavola di verità del paragrafo 4.3.4, **un'implicazione e la sua contronominale sono equivalenti**; l'inversa invece può essere falsa: da «se piove la strada è bagnata» non segue «se la strada è bagnata, piove».

4.5.3 Che cos'è un teorema

Un **teorema** è una proposizione di cui si dimostra la verità a partire da definizioni, da risultati già dimostrati e da proposizioni accettate senza dimostrazione (gli *assiomi* o *postulati*, di cui parleremo nel capitolo 8). Di solito ha la forma $I \Rightarrow T$: I è l'ipotesi, T la tesi, e la dimostrazione è una catena di passaggi giustificati che porta dall'una all'altra. Se anche $T \Rightarrow I$ è dimostrata, si ha il teorema inverso. Vediamo tre modi di dimostrare.

Dimostrazione diretta. Si parte dall'ipotesi e si arriva alla tesi. *Teorema:* se a e b sono naturali pari, $a + b$ è pari. Da $a = 2m$ e $b = 2n$ segue $a + b = 2(m + n)$, che è pari. Nessun numero di esempi avrebbe potuto sostituire questo ragionamento, che vale per *tutte* le coppie di numeri pari.

Dimostrazione per contronominale. Poiché $I \Rightarrow T$ equivale a $\neg T \Rightarrow \neg I$, a volte è più comodo dimostrare quest'ultima.

> **IN SINTESI**
>
> **Teorema.** Se il quadrato di un numero naturale n è dispari, allora n è dispari.
>
> **Ipotesi:** n^2 è dispari. **Tesi:** n è dispari.

Dimostrazione. Dimostriamo la contronominale: «se n è pari, allora n^2 è pari». Se n è pari, $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Per le proprietà delle potenze $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$, che è il doppio di un numero naturale, quindi pari. Poiché la contronominale è vera, è vero anche il teorema. c.v.d.

Dimostrazione per assurdo. Si suppone che la tesi sia falsa e si mostra che da questa supposizione, insieme all'ipotesi, discende una contraddizione, cioè una proposizione del tipo $r \wedge \neg r$; poiché una contraddizione non può essere vera, la supposizione era sbagliata e la tesi è vera. *Teorema:* non esiste un numero naturale più grande di tutti gli altri. *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista un numero naturale M maggiore o uguale a ogni numero naturale.

Anche $M + 1$ è un numero naturale, e $M + 1 > M$: allora M è maggiore o uguale a ogni naturale e, insieme, esiste un naturale maggiore di M. È una contraddizione; quindi il numero M non esiste. c.v.d. Su questo metodo, e sulla sua lunga storia, torneremo nel prossimo paragrafo.

ESEMPIO SVOLTO

Riconoscere la struttura di un enunciato

Considera l'enunciato: «Ogni numero naturale divisibile per 9 è divisibile per 3». Individua ipotesi e tesi, scrivi l'inversa e la contronominale e stabilisci quali sono vere.

1. Forma «se… allora». «Se $n \in \mathbb{N}$ è divisibile per 9, allora n è divisibile per 3.» Ipotesi: n divisibile per 9. Tesi: n divisibile per 3.

2. È vera? Se $n = 9k$, allora $n = 3 \cdot (3k)$: sì, la diretta è vera.

3. Inversa: «se n è divisibile per 3, allora è divisibile per 9». Falsa: controesempio $n = 6$.

4. Contronominale: «se n non è divisibile per 3, allora non è divisibile per 9». Vera, perché equivalente alla diretta.

Conclusione: la divisibilità per 9 è condizione sufficiente, ma non necessaria, per la divisibilità per 3.

APPROFONDIMENTO · IL PARADOSSO DI RUSSELL

Georg Cantor (1845–1918), che fondò la teoria degli insiemi, scoprì che gli insiemi infiniti non sono tutti «grandi uguali». Nel 1901 Bertrand Russell mostrò che l'idea «ogni proprietà definisce un insieme» porta a una contraddizione: l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso? Se sì, non dovrebbe; se no, dovrebbe. Fissare un universo U, come facciamo noi, basta a evitare il problema.

4.6 Logica e filosofia: da Aristotele a Boole

Per oltre due millenni la logica è stata una parte della filosofia, e il suo nome lo ricorda: viene dal greco λόγος, «parola, discorso, ragione». Anche altre parole del ragionamento matematico vengono dal greco: un *assioma* (ἀξίωμα) è «ciò che si ritiene degno» di essere accettato; un *teorema* (θεώρημα, da θεωρέω, «osservo») è «ciò che si contempla».

4.6.1 Il sillogismo di Aristotele

Aristotele (384–322 a.C.), allievo di Platone, è il primo autore di cui ci sia rimasta una teoria sistematica del ragionamento corretto, esposta nei *Primi analitici*. Il suo strumento è il **sillogismo** (συλλογισμός, da un verbo che significa «calcolare insieme», «trarre una conclusione»): un ragionamento formato da due premesse e una conclusione, in cui compaiono tre termini. Il più famoso schema è quello che i logici medievali chiamarono *Barbara*:

Tutti gli M sono P; tutti gli S sono M; dunque tutti gli S sono P.

Il termine M, presente nelle premesse ma non nella conclusione, è il *termine medio*, il «ponte» fra S e P. Le vocali a-a-a di *Barbara* ricordano che le tre proposizioni sono *universali affermative* («tutti… sono…»).

Con il linguaggio degli insiemi il sillogismo si legge in un attimo: le premesse dicono $M \subseteq P$ e $S \subseteq M$, e la conclusione $S \subseteq P$ segue perché l'inclusione è transitiva.

ESEMPIO SVOLTO

Valido o no?

Stabilisci se sono corretti i ragionamenti: a) «Tutti i numeri multipli di 6 sono pari; tutti i multipli di 12 sono multipli di 6; dunque tutti i multipli di 12 sono pari»; b) «Tutti i gatti sono mammiferi; tutti i cani sono mammiferi; dunque tutti i cani sono gatti».

a) È un sillogismo in *Barbara*, con termine medio «multiplo di 6»: in simboli $D \subseteq S \subseteq P$, dove D, S, P sono i multipli di 12, i multipli di 6 e i pari. Il ragionamento è **valido**.

b) Le premesse dicono soltanto che gatti e cani stanno entrambi dentro l'insieme dei mammiferi: in un diagramma di Venn i due insiemi possono stare uno accanto all'altro senza toccarsi. Il ragionamento **non è valido**, anche se le premesse sono vere: il termine comune non fa da ponte.

Osservazione. La *validità* riguarda la forma, non la verità delle premesse: «tutti i pesci volano; tutti i gatti sono pesci; dunque tutti i gatti volano» è valido, con premesse false.

4.6.2 I principi della logica e la dimostrazione per assurdo

Nel libro Γ della *Metafisica* Aristotele indica il principio di non contraddizione come il più saldo di tutti i principi: è impossibile che la stessa cosa, nello stesso tempo e sotto lo stesso rispetto, appartenga e non appartenga a un medesimo soggetto. Nello stesso libro afferma che tra due contraddittorie non c'è nulla di intermedio: è il principio del terzo escluso. Le tavole di verità li traducono in calcolo: $p \wedge \neg p$ è sempre falsa, $p \vee \neg p$ sempre vera.

Su questi due principi si regge la dimostrazione per assurdo, la «riduzione all'impossibile» dei Greci (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή, in latino *reductio ad absurdum*): se la negazione della tesi porta a una contraddizione, è falsa, e allora la tesi è vera. Già Zenone di Elea (V secolo a.C.), per difendere le tesi di Parmenide, assumeva le ipotesi degli avversari e ne ricavava conseguenze assurde. Euclide usa spesso questo metodo negli *Elementi*, e per assurdo si dimostra che $\sqrt{2}$ non è il rapporto di due interi (capitolo 2).

APPROFONDIMENTO · ACHILLE E LA TARTARUGA

Il più celebre argomento di Zenone ci è noto soprattutto dalla *Fisica* di Aristotele (libro VI), che lo riferisce più o meno così: il corridore più veloce non raggiungerà mai il più lento, perché prima deve arrivare al punto da cui l'altro è partito, e intanto l'altro è andato un poco più avanti, e così all'infinito. Il veloce è Achille; la tartaruga, che in Aristotele non compare, è entrata nel racconto più tardi. Il punto debole è l'idea che infiniti intervalli di tempo diano per forza un tempo infinito: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ minuti, sommati all'infinito, fanno esattamente 2 minuti, e le somme parziali non superano mai questo valore. Rendere preciso questo fatto ha richiesto più di duemila anni: è una delle radici dell'analisi matematica.

4.6.3 Dagli Stoici a Boole

Il sillogismo di Aristotele lavora con i *termini* («uomo», «mortale») e con parole come «tutti» e «alcuni». I filosofi stoici, e in particolare Crisippo di Soli (III secolo a.C.), studiarono invece il modo in cui si combinano proposizioni intere con «se… allora», «e», «o», «non»: è l'antenato della logica delle proposizioni di questo capitolo. Fra gli schemi che gli Stoici consideravano evidenti, e chiamavano «indimostrabili», ci sono questi due:

- «Se è giorno, c'è luce; ma è giorno; dunque c'è luce.» In simboli: da $p \Rightarrow q$ e p si ricava q. I logici medievali lo chiamarono *modus ponens*.
- «Se è giorno, c'è luce; ma non c'è luce; dunque non è giorno.» Da $p \Rightarrow q$ e $\neg q$ si ricava $\neg p$: è il *modus tollens*, la stessa idea della contronominale.

Invece da $p \Rightarrow q$ e q *non* si può ricavare p («se è giorno c'è luce; c'è luce; dunque è giorno» è falso in una stanza illuminata di notte): è proprio l'errore di confondere un'implicazione con la sua inversa.

Nel 1847, e poi nelle *Leggi del pensiero* del 1854, il matematico inglese George Boole trattò le proposizioni con un'algebra simile a quella dei numeri, con operazioni corrispondenti a «e», «o» e «non»: per questo i linguaggi di programmazione parlano di variabili «booleane». I diagrammi per i ragionamenti, già usati da Euler, furono sistematizzati da John Venn nel 1880.

SINTESI

- Un insieme è una raccolta di oggetti per cui si può stabilire in modo oggettivo l'appartenenza ($\in$, $\notin$); si rappresenta per elencazione, per proprietà caratteristica o con un diagramma di Eulero-Venn.
- $\varnothing$ non ha elementi ed è sottoinsieme di ogni insieme; $B \subseteq A$ se ogni elemento di B sta in A; un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.
- Intersezione: elementi comuni; unione: elementi di almeno uno; differenza $A \setminus B$: elementi di A che non stanno in B; complementare: $U \setminus A$.
- Intersezione e unione sono commutative, associative e ciascuna distributiva rispetto all'altra; le leggi di De Morgan scambiano $\cap$ e $\cup$ passando ai complementari.
- Una partizione divide un insieme in parti non vuote, a due a due disgiunte, la cui unione è l'insieme.
- Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a; b)$; $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$: nei problemi di conteggio si riempie il diagramma di Venn partendo dalla regione comune.
- Una proposizione è vera o falsa; i connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (inclusivo), $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sono definiti dalle tavole di verità; $p \Rightarrow q$ è falsa solo se p è V e q è F.
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.
- La negazione di «$\forall x,\ p(x)$» è «$\exists x \mid \neg p(x)$»; per smentire un'affermazione universale basta un controesempio.
- Se $p \Rightarrow q$, p è condizione sufficiente per q e q è necessaria per p; l'implicazione equivale alla contronominale, non all'inversa.
- Un teorema collega un'ipotesi a una tesi; si dimostra in modo diretto, per contronominale o per assurdo.
- Il sillogismo di Aristotele (*Barbara*: tutti gli M sono P, tutti gli S sono M, dunque tutti gli S sono P) corrisponde alla transitività dell'inclusione; un ragionamento è valido per la sua forma, non per la verità delle premesse.
- I principi di non contraddizione e del terzo escluso (Aristotele, *Metafisica* Γ) fondano la logica bivalente e la dimostrazione per assurdo; *modus ponens* e *modus tollens* compaiono fra gli «indimostrabili» degli Stoici.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti raccolte è un insieme in senso matematico?
   A. I numeri molto grandi.
   B. Le città più belle d'Italia.
   C. I divisori di 18.
   D. Gli studenti simpatici della classe.

2. ● Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$. Quale scrittura è corretta?
   A. $0 \in A$
   B. $4 \in A$
   C. $\{0\} \in A$
   D. $A = \{1, 2, 3\}$

3. ●● Un insieme ha 5 elementi. Quanti sono i suoi sottoinsiemi?
   A. 10
   B. 25
   C. 31
   D. 32

4. ●● Quale delle seguenti proposizioni è vera?
   A. $3 > 5$ e 3 è dispari.
   B. Se $2 + 2 = 5$, allora 7 è pari.
   C. 4 è primo o 4 è dispari.
   D. 9 è pari se e solo se 9 è divisibile per 3.

5. ●● La negazione di «Tutti i ragazzi della 1ª B hanno un cellulare» è:
   A. Nessun ragazzo della 1ª B ha un cellulare.
   B. Tutti i ragazzi della 1ª B non hanno un cellulare.
   C. Almeno un ragazzo della 1ª B ha un cellulare.
   D. Almeno un ragazzo della 1ª B non ha un cellulare.

6. ●● L'implicazione $p \Rightarrow q$ è logicamente equivalente a:
   A. $q \Rightarrow p$
   B. $\neg p \Rightarrow \neg q$
   C. $\neg q \Rightarrow \neg p$
   D. $p \wedge q$

7. ●● Per un numero naturale, «essere divisibile per 4» è, rispetto a «essere pari», una condizione:
   A. sufficiente ma non necessaria
   B. necessaria ma non sufficiente
   C. necessaria e sufficiente
   D. né necessaria né sufficiente

8. ●● **Vero o falso?** Correggi le affermazioni false.
   a) $\varnothing \subseteq A$ per ogni insieme A.
   b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$.
   c) $A \setminus B = B \setminus A$ per ogni coppia di insiemi.
   d) La negazione di $p \wedge q$ è $\neg p \wedge \neg q$.
   e) Se p è falsa, $p \Rightarrow q$ è vera qualunque sia q.
   f) Per ogni coppia di insiemi finiti, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

9. ●● Dalle premesse «Tutti i poeti latini scrivono in latino» e «Catullo è un poeta latino» si può concludere che:
   A. chi scrive in latino è un poeta latino.
   B. Catullo scrive in latino.
   C. Catullo non scrive in greco.
   D. non si può concludere nulla.

Calcolare

10. ● Rappresenta per elencazione.
    a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 20\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 8\}$
    c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 2\}$ d) $D = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}, n < 5\}$

11. ●● Sia $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 12\}$, A l'insieme dei divisori di 12 e B l'insieme dei numeri pari di U. Calcola: a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$ e) $\overline{A}$ f) il complementare di $A \cup B$.

12. ● Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. a) Scrivi $A \times B$ e $B \times A$. b) Sono uguali? c) Quanti elementi ha $A \times A$?

13. ● Stabilisci il valore di verità.
    a) 15 è multiplo di 3 e di 5. b) 8 è primo o 8 è pari. c) 6 è dispari aut 6 è divisibile per 3.
    d) Se 10 è divisibile per 4, allora 10 è pari. e) 12 è divisibile per 6 $\Leftrightarrow$ 12 è divisibile per 2 e per 3.
    f) Se $3 < 5$, allora $5 < 3$.

14. ●● Costruisci le tavole di verità di: a) $\neg p \vee q$ b) $p \wedge \neg q$ c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ d) $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$, e confrontale.

15. ●● Stabilisci se ciascuna proposizione è una tautologia, una contraddizione o nessuna delle due.
    a) $p \vee \neg p$ b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ c) $p \wedge \neg p$ d) $p \Rightarrow (p \wedge q)$ e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

16. ●● Determina l'insieme di verità nell'universo indicato.
a) «x è un divisore di 18», in $\mathbb{N}$ b) «$x + 3 < 7$», in $\mathbb{N}$ c) «$x^2 = 4$», in $\mathbb{Z}$
d) «$x^2 = 4$», in $\mathbb{N}$ e) «$2x = 5$», in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Q}$

17. ●● Scrivi la negazione di ciascuna proposizione e stabilisci se è vera la proposizione o la sua negazione.
a) $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > x$ b) $\exists x \in \mathbb{N} \mid 2x = 7$ c) Tutti i numeri primi sono dispari.
d) 9 è dispari e 9 non è primo. e) Se 7 è primo, allora 7 è dispari.

Dimostrare e argomentare

18. ●● Dimostra con le tavole di verità le leggi di De Morgan $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ e $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$. Poi disegna i diagrammi di Venn che illustrano le corrispondenti leggi per gli insiemi.

19. ●● **Trova l'errore.** «Se un numero è divisibile per 6, allora è pari. 14 è pari. Quindi 14 è divisibile per 6.» Spiega quale regola logica è stata violata.

20. ●● Considera l'implicazione «Se un numero naturale termina con la cifra 0, allora è divisibile per 5». Scrivi l'inversa, la contraria e la contronominale, e stabilisci quali delle quattro sono vere, giustificando con un ragionamento o un controesempio.

21. ●● Dimostra in modo diretto che il prodotto di due numeri naturali pari è un multiplo di 4. Individua ipotesi e tesi.

22. ●●● Dimostra che, se il prodotto $a \cdot b$ di due numeri naturali è dispari, allora a e b sono entrambi dispari. (Suggerimento: scrivi la contronominale e usa la legge di De Morgan per negare «a e b sono dispari».)

23. ●● Stabilisci se ciascun ragionamento è valido, rappresentando le premesse con diagrammi di Eulero-Venn o con i simboli della logica.
a) Tutti i filosofi greci conoscono il greco; tutti gli allievi di Platone sono filosofi greci; dunque tutti gli allievi di Platone conoscono il greco.
b) Tutti i triangoli equilateri sono isosceli; tutti i triangoli equilateri sono acutangoli; dunque tutti i triangoli isosceli sono acutangoli.
c) Se è giorno, c'è luce; non c'è luce; dunque non è giorno.

24. ●● a) Dimostra per assurdo che non esiste un numero razionale positivo più piccolo di tutti gli altri razionali positivi. b) Su quali principi logici si appoggia l'ultimo passo della dimostrazione?

Problemi

25. ● In una classe di 26 studenti, 15 giocano a pallavolo, 9 suonano uno strumento e 4 fanno entrambe le cose. Quanti studenti non fanno nessuna delle due attività? Quanti giocano solo a pallavolo?

26. ●● In un piccolo archivio digitale (dati inventati), 900 documenti contengono la parola «Dante», 600 la parola «Petrarca» e 250 entrambe. Quanti documenti restituisce la ricerca: a) Dante OR Petrarca; b) Dante AND NOT Petrarca; c) Petrarca AND NOT Dante; d) Dante XOR Petrarca (cioè «aut»)?

27. ●● Nella prima classe di un liceo (dati inventati) ci sono 30 studenti, e ciascuno partecipa ad almeno uno dei due laboratori proposti: teatro greco e certamen di latino. Il laboratorio di teatro ha 18 iscritti, il certamen 17. Quanti studenti partecipano a entrambi i laboratori? Quanti soltanto al certamen?

28. ●● Il regolamento di una biblioteca dice: «Il prestito è concesso se e solo se la tessera è valida e non ci sono libri da restituire in ritardo». Siano p: «la tessera è valida» e q: «ci sono libri in ritardo». a) Scrivi in simboli la condizione per ottenere il prestito. b) Laura ha la tessera valida ma un libro in ritardo: ottiene il prestito? c) Con le leggi di De Morgan scrivi la negazione della condizione e spiega a parole in quali casi il prestito è negato.

Verso la verifica

29. ●● Sia $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 15\}$, A l'insieme dei multipli di 3 e B l'insieme dei numeri dispari di U. a) Elenca A, B, $A \cap B$, $A \setminus B$ e il complementare di $A \cup B$. b) Verifica la formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. c) Quale predicato ha come insieme di verità $A \setminus B$? Scrivilo usando i connettivi.

30. ●● a) Costruisci la tavola di verità di $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ e confrontala con quella di $p \Leftrightarrow q$. b) Scrivi la negazione di «Se studio, allora supero la verifica» e quella di «Esiste uno studente che ha preso 10».

31. ●●● Con le tavole di verità verifica che $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ è una tautologia (corrisponde al *modus ponens*, il primo «indimostrabile» degli Stoici), mentre $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$ non lo è. Trova la riga in cui la seconda è falsa e inventa una frase della lingua di tutti i giorni che corrisponda a quella riga.

PER APPROFONDIRE

- [SMU] R. M. Smullyan, *Qual è il titolo di questo libro?*: indovinelli logici su cavalieri che dicono sempre il vero e furfanti che mentono sempre, per allenarsi con negazioni e implicazioni.
- [LRA] L. Lombardo Radice, *L'infinito*: gli insiemi infiniti e le idee di Cantor raccontate in modo accessibile.
- [BOY] C. B. Boyer, *Storia della matematica*: la nascita della logica simbolica con Boole e della teoria degli insiemi con Cantor.
- [CR] R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sull'algebra degli insiemi e le sue applicazioni alla logica.

Glossario del capitolo

Complementare
Insieme degli elementi dell'universo U che non appartengono ad A; si indica con A sopralineato o con $C_U A$.

Condizione necessaria e condizione sufficiente
Se $p \Rightarrow q$ è vera, p è condizione sufficiente per q e q è condizione necessaria per p; se valgono $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, p è condizione necessaria e sufficiente per q.

Contronominale
Data l'implicazione $p \Rightarrow q$, la contronominale è $\neg q \Rightarrow \neg p$; le due sono logicamente equivalenti.

Dimostrazione per assurdo
Dimostrazione in cui si nega la tesi e si ricava una contraddizione, concludendo che la tesi è vera.

Enunciato aperto
Frase che contiene una variabile e diventa una proposizione quando alla variabile si attribuisce un valore; detto anche predicato.

Implicazione materiale
$p \Rightarrow q$: falsa solo quando p è vera e q è falsa.

Insieme
Raccolta di oggetti (elementi) per la quale si può stabilire in modo oggettivo se un oggetto vi appartiene o no; concetto primitivo.

Insieme delle parti
Insieme $\mathcal{P}(A)$ di tutti i sottoinsiemi di A; se A ha n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne ha 2^n.

Insieme vuoto
Insieme privo di elementi, indicato con $\varnothing$; è sottoinsieme di ogni insieme.

Intersezione
$A \cap B$: insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B.

Partizione
Suddivisione di un insieme in sottoinsiemi non vuoti, a due a due disgiunti, la cui unione è l'insieme stesso.

Principio di non contraddizione
Una proposizione non può essere insieme vera e falsa; con il principio del terzo escluso è alla base della logica bivalente.

Prodotto cartesiano
$A \times B$: insieme delle coppie ordinate (a; b) con $a \in A$ e $b \in B$; ha $|A| \cdot |B|$ elementi.

Proposizione
Affermazione di cui si può stabilire in modo oggettivo se è vera o falsa.

Quantificatore
Simbolo che indica per quanti elementi vale un predicato: $\forall$ (per ogni) o $\exists$ (esiste almeno un).

Sillogismo
Ragionamento, studiato da Aristotele, formato da due premesse e una conclusione con tre termini; per esempio: tutti gli M sono P, tutti gli S sono M, dunque tutti gli S sono P.

Sottoinsieme
B è sottoinsieme di A ($B \subseteq A$) se ogni elemento di B appartiene ad A. $\varnothing$ e A sono i sottoinsiemi impropri di A.

Tautologia
Proposizione composta vera per qualunque valore di verità delle componenti, come $p \vee \neg p$.

Tavola di verità
Tabella che dà il valore di verità di una proposizione composta per ogni combinazione di valori delle componenti.

Unione
$A \cup B$: insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi.

Soluzioni

1. C. L'appartenenza ai divisori di 18 si stabilisce in modo oggettivo; nelle altre raccolte dipende da un giudizio personale.

2. A. $A = \{0, 1, 2, 3\}$: $0 \in A$. $4 \notin A$; $\{0\}$ è un sottoinsieme, non un elemento ($\{0\} \subseteq A$); nell'elenco D manca lo 0.

3. D. $2^5 = 32$ (compresi $\varnothing$ e l'insieme stesso).

4. B. L'antecedente «2 + 2 = 5» è falso, quindi l'implicazione è vera. A: F $\wedge$ V = F; C: F $\vee$ F = F; D: F $\Leftrightarrow$ V = F.

5. D. La negazione di «per ogni ragazzo vale...» è «esiste almeno un ragazzo per cui non vale...».

6. C. Un'implicazione equivale alla sua contronominale; A è l'inversa, B la contraria.

7. A. Ogni multiplo di 4 è pari (sufficiente), ma 6 è pari e non è multiplo di 4 (non necessaria).

8. a) V. b) F: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ (è un sottoinsieme, non un elemento). c) F: con $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{1\}$ e $B \setminus A = \{3\}$. d) F: è $\neg p \vee \neg q$. e) V. f) F: vale solo se $A \cap B = \varnothing$; in generale $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

9. B. È un sillogismo valido: Catullo appartiene all'insieme dei poeti latini, che è contenuto in quello di chi scrive in latino. A scambia le premesse (è l'inversa); C non segue dalle premesse.

10. a) {1, 2, 4, 5, 10, 20}. b) {3, 4, 5, 6, 7}. c) {−1, 0, 1, 2}. d) {0, 3, 6, 9, 12}.

11. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. a) {2, 4, 6, 12}. b) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12}. c) {1, 3}. d) {8, 10}. e) {5, 7, 8, 9, 10, 11}. f) {5, 7, 9, 11}.

12. a) $A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$; $B \times A = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$. b) No: per esempio $(1; a) \neq (a; 1)$. c) $3 \cdot 3 = 9$.

13. a) V $\wedge$ V = V. b) F $\vee$ V = V. c) F $\veebar$ V = V. d) F $\Rightarrow$ V = V. e) V $\Leftrightarrow$ V = V. f) V $\Rightarrow$ F = F.

14. Righe nell'ordine (p, q) = (V, V), (V, F), (F, V), (F, F). a) V, F, V, V. b) F, V, F, F. c) V, F, F, V (è $p \Leftrightarrow q$). d) Entrambe F, F, F, V: sono equivalenti (legge di De Morgan).

15. a) Tautologia. b) Tautologia (V, V, V, V). c) Contraddizione. d) Nessuna delle due: V, F, V, V. e) Tautologia (un'implicazione equivale alla contronominale).

16. a) {1, 2, 3, 6, 9, 18}. b) {0, 1, 2, 3}. c) {−2, 2}. d) {2}. e) $\varnothing$ in $\mathbb{N}$; {5/2} in $\mathbb{Q}$.

17. a) $\exists x \in \mathbb{N} \mid x + 1 \leq x$: è vera la proposizione data. b) $\forall x \in \mathbb{N}$, $2x \neq 7$: è vera la negazione ($2x$ è sempre pari). c) «Esiste un numero primo che non è dispari»: è vera la negazione (2). d) «9 non è dispari o 9 è primo»: è vera la proposizione data ($9 = 3 \cdot 3$ non è primo). e) «7 è primo e 7 non è dispari»: è vera la proposizione data.

18. $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ hanno entrambe la colonna F, F, F, V; $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ hanno entrambe F, V, V, V. Venn: il complementare di $\underline{A} \cup \underline{B}$ è la zona esterna a entrambi i cerchi, uguale a $\overline{A} \cap \overline{B}$; il complementare di $A \cap B$ è tutto tranne la zona comune, uguale a $\overline{A} \cup \overline{B}$ (figura 4.3).

19. Dalla verità di $p \Rightarrow q$ e di q si è dedotta p: è come usare l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$ («ogni pari è divisibile per 6»), che è falsa. Infatti $14 = 6 \cdot 2 + 2$ non è divisibile per 6. Da $p \Rightarrow q$ e q vera non si può concludere nulla su p.

20. Diretta: vera (se termina con 0 è multiplo di 10 = $2 \cdot 5$, quindi di 5). Inversa «se è divisibile per 5, termina con 0»: falsa (15). Contraria «se non termina con 0, non è divisibile per 5»: falsa (15). Contronominale «se non è divisibile per 5, non termina con 0»: vera, perché equivalente alla diretta.

21. Ipotesi: a e b pari. Tesi: $a \cdot b$ multiplo di 4. Da $a = 2m$ e $b = 2n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) segue $a \cdot b = 2m \cdot 2n = 4 \cdot (mn)$, multiplo di 4. c.v.d.

22. Contronominale: «se non è vero che a e b sono entrambi dispari, allora $a \cdot b$ è pari». Per De Morgan

l'antecedente è «a è pari o b è pari». Se a è pari, $a = 2k$ e $a \cdot b = 2 \cdot (kb)$ è pari; se b è pari si ragiona allo stesso modo. La contronominale è vera, quindi lo è il teorema. c.v.d.

23. a) Valido: è un sillogismo in *Barbara* (allievi di Platone $\subseteq$ filosofi greci $\subseteq$ chi conosce il greco). b) Non valido: le premesse dicono che gli equilateri stanno sia fra gli isosceli sia fra gli acutangoli, ma non che gli isosceli stanno fra gli acutangoli; controesempio: un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 120° è ottusangolo. c) Valido: è il *modus tollens* degli Stoici (da $p \Rightarrow q$ e $\neg q$ segue $\neg p$), cioè l'uso della contronominale.

24. a) Supponiamo per assurdo che esista un razionale positivo q minore o uguale a ogni razionale positivo. Anche $q/2$ è un razionale positivo, e $q/2 < q$: allora q sarebbe insieme il più piccolo e non il più piccolo, una contraddizione. Quindi un tale q non esiste. b) Sul principio di non contraddizione (la supposizione porta a una proposizione insieme vera e falsa, quindi è falsa) e sul principio del terzo escluso (se la negazione della tesi è falsa, la tesi è vera).

25. Almeno un'attività: $15 + 9 - 4 = 20$; nessuna: $26 - 20 = 6$. Solo pallavolo: $15 - 4 = 11$.

26. a) $900 + 600 - 250 = 1250$. b) $900 - 250 = 650$. c) $600 - 250 = 350$. d) $650 + 350 = 1000$.

27. Tutti partecipano ad almeno un laboratorio, quindi $|T \cup C| = 30$. Da $30 = 18 + 17 - |T \cap C|$ si ricava $|T \cap C| = 35 - 30 = 5$. Soltanto certamen: $17 - 5 = 12$ (soltanto teatro: $18 - 5 = 13$; controllo: $13 + 5 + 12 = 30$).

28. a) Prestito $\Leftrightarrow p \wedge \neg q$. b) p è V e q è V, quindi $p \wedge \neg q = \text{V} \wedge \text{F} = \text{F}$: Laura non ottiene il prestito. c) $\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$: il prestito è negato se la tessera non è valida *oppure* ci sono libri in ritardo (anche se accadono tutte e due le cose, perché la «o» è inclusiva).

29. a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$; $A \cap B = \{3, 9, 15\}$; $A \setminus B = \{0, 6, 12\}$; complementare di $A \cup B = \{2, 4, 8, 10, 14\}$. b) $6 + 8 - 3 = 11$, e infatti $A \cup B$ ha $16 - 5 = 11$ elementi. c) «x è multiplo di 3 $\wedge$ $\neg$(x è dispari)», cioè x è un multiplo di 3 pari (multiplo di 6).

30. a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$: V, F, F, V, identica a $p \Leftrightarrow q$: le due proposizioni sono equivalenti. b) «Studio e non supero la verifica»; «Nessuno studente ha preso 10» (cioè: ogni studente ha preso un voto diverso da 10).

31. Righe nell'ordine (p, q) = (V, V), (V, F), (F, V), (F, F). Prima: $(p \Rightarrow q) \wedge p$ vale V, F, F, F, e l'implicazione verso q vale V, V, V, V: tautologia. Seconda: $(p \Rightarrow q) \wedge q$ vale V, F, V, F, e l'implicazione verso p vale V, V, F, V: è falsa per p falsa e q vera. Esempio: «Se piove, la strada è bagnata; la strada è bagnata; dunque piove» fallisce quando la strada è stata lavata senza che piovesse.