CAPITOLO

2

I numeri razionali

Dividere una pizza in parti uguali è facile. Capire che tra due fette, per quanto vicine, c'è sempre posto per un'altra fetta: questo è l'inizio della matematica dei razionali.

OBIETTIVI

1. Riconoscere frazioni proprie, improprie, apparenti ed equivalenti; semplificarle e confrontarle.
2. Definire l'insieme $\mathbb{Q}$, rappresentarlo sulla retta e spiegare perché è denso.
3. Eseguire le quattro operazioni e le potenze, anche con esponente negativo, e risolvere espressioni in $\mathbb{Q}$.
4. Passare da una frazione al numero decimale e viceversa, con la frazione generatrice.
5. Usare la notazione scientifica, l'ordine di grandezza e le approssimazioni, stimando l'errore.
6. Capire perché esistono numeri che non sono razionali, come $\sqrt{2}$, e che cosa significò la scoperta delle grandezze incommensurabili per la matematica e la filosofia greca.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Le frazioni 2
2.2 L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali 4
2.3 Le operazioni in $\mathbb{Q}$ 7
2.4 Le potenze in $\mathbb{Q}$ 11
2.5 Numeri decimali e frazioni 12
2.6 Notazione scientifica e approssimazioni 15
2.7 Oltre i razionali: $\sqrt{2}$ 17

Matematica 1 · Parte I · I numeri · versione 1.0
Capitolo 2: I numeri razionali · pagine 49–74 del volume completo · estratto per lo studio

Nei capitoli precedenti abbiamo costruito due insiemi numerici. In $\mathbb{N}$ possiamo contare; in $\mathbb{Z}$ possiamo anche sottrarre sempre, perché ogni numero ha il suo opposto. Ma c'è un'operazione che in $\mathbb{Z}$ continua a «incepparsi»: la divisione. Quanto fa $7 : 2$? In $\mathbb{Z}$ non esiste un numero intero che moltiplicato per 2 dia 7. Eppure nella vita di tutti i giorni dividiamo continuamente in parti uguali: tre amici che si spartiscono due pizze, un nastro tagliato in cinque pezzi, mezzo litro di latte, un quarto d'ora di ritardo.

Per descrivere queste situazioni serve un nuovo insieme di numeri, quello dei **numeri razionali**, indicato con $\mathbb{Q}$ (dall'iniziale di *quoziente*). In $\mathbb{Q}$ la divisione per un numero diverso da zero è sempre possibile. In questo capitolo partiremo dalle frazioni, che già conosci dalle scuole medie, e arriveremo a capire che cosa sono davvero i numeri razionali, come si scrivono in forma decimale e perché, sorprendentemente, non bastano a misurare la diagonale di un quadrato.

2.1 Le frazioni

2.1.1 Che cos'è una frazione

Una **frazione** è una scrittura del tipo $\frac{a}{b}$ in cui a e b sono numeri interi e $b \neq 0$. Il numero a, scritto sopra la linea di frazione, è il **numeratore**; il numero b, scritto sotto, è il **denominatore**. Il denominatore dice in quante parti uguali si divide l'intero; il numeratore dice quante di queste parti si prendono. Così $\frac{3}{4}$ di una tavoletta di cioccolato significa: dividi la tavoletta in 4 parti uguali e prendine 3.

La frazione si può leggere anche come una divisione: $\frac{3}{4} = 3 : 4$. Le due letture sono la stessa cosa. Proprio perché è una divisione, il denominatore non può essere zero: dividere per zero, lo sappiamo dal capitolo 1, è impossibile.

Limitiamoci per ora a frazioni con numeratore e denominatore positivi. Si chiamano:

- **frazioni proprie** quelle con numeratore minore del denominatore, come $\frac{2}{5}$ o $\frac{7}{9}$: rappresentano una parte dell'intero, cioè un numero minore di 1;
- **frazioni apparenti** quelle in cui il numeratore è un multiplo del denominatore, come $\frac{12}{4} = 3$ o $\frac{5}{5} = 1$: sembrano frazioni, ma in realtà rappresentano numeri interi;

- **frazioni improprie** quelle con numeratore maggiore del denominatore e non multiplo di esso, come $\frac{7}{3}$: rappresentano un numero maggiore di 1 ma non intero. Infatti $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$: due interi e un terzo.

2.1.2 Frazioni equivalenti e proprietà invariantiva

Prendi un rettangolo e dividilo in 4 parti uguali; colorane 3. Ora dividi un rettangolo identico in 8 parti e colorane 6, e un terzo in 12 parti colorandone 9. Come mostra la figura 2.1, le tre parti colorate sono esattamente uguali: $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{9}{12}$ sono scritture diverse della stessa quantità.

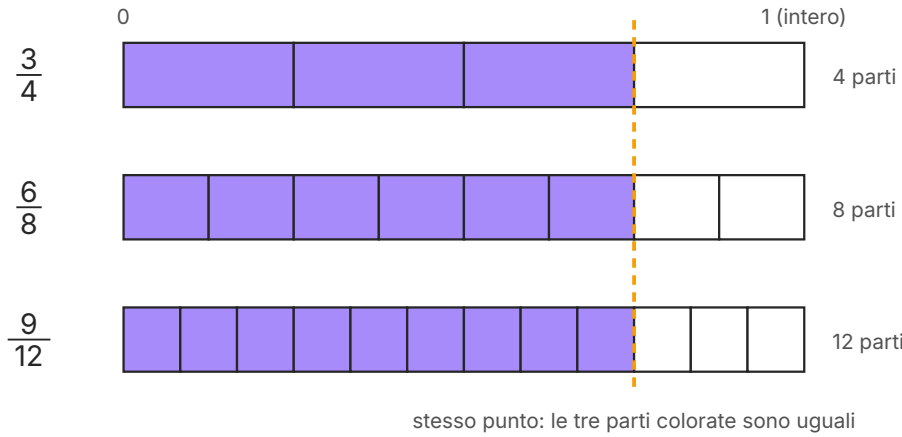

Figura 2.1 Frazioni equivalenti. Lo stesso intero diviso in 4, 8 e 12 parti uguali: prendendo 3, 6 e 9 parti si colora sempre la stessa porzione, perciò 3/4, 6/8 e 9/12 sono equivalenti.

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono **frazioni equivalenti** se $a \cdot d = b \cdot c$, cioè se i «prodotti in croce» sono uguali. Per esempio $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ sono equivalenti perché $3 \cdot 12 = 36$ e $4 \cdot 9 = 36$. Invece $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$ non lo sono: $2 \cdot 5 = 10$, mentre $3 \cdot 3 = 9$.

Come si ottengono frazioni equivalenti? La risposta è una proprietà che conosci già dalla divisione in $\mathbb{N}$.

Vale infatti la **proprietà invariantiva**: se si moltiplicano oppure si dividono il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una frazione equivalente.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (k \neq 0)$$

È la stessa proprietà invariantiva della divisione: $3 : 4 = 6 : 8 = 9 : 12$. La proprietà funziona nei due sensi. Moltiplicando si «complica» la frazione (utile per ridurre più frazioni allo stesso denominatore); dividendo la si **semplifica**.

Quando numeratore e denominatore non hanno divisori comuni diversi da 1, cioè sono *primi tra loro*, la frazione non si può semplificare ulteriormente e si dice **ridotta ai minimi termini**. Ogni frazione ha una sola forma ridotta ai minimi termini con denominatore positivo: per trovarla basta dividere numeratore e denominatore per il loro MCD.

ERRORE FREQUENTE

Si semplificano i fattori, mai gli addendi. È sbagliato scrivere $\frac{2+3}{2+5} = \frac{3}{5}$ «cancellando» il 2. Infatti $\frac{2+3}{2+5} = \frac{5}{7}$, e $\frac{5}{7} \neq \frac{3}{5}$ (prodotti in croce: 25 e 21). La proprietà invariantiva parla di *dividere* numeratore e denominatore per lo stesso numero: si può fare solo quando numeratore e denominatore sono scritti come prodotti. Corretto: $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$.

2.1.3 Riduzione allo stesso denominatore e confronto

Per confrontare, sommare o sottrarre frazioni conviene scriverle con lo stesso denominatore. Il denominatore più piccolo possibile è il minimo comune multiplo dei denominatori, chiamato **minimo comune denominatore**. Ecco il procedimento:

1. riduci ogni frazione ai minimi termini;
2. calcola il mcm dei denominatori;
3. per ogni frazione, dividi il mcm per il denominatore e moltiplica il risultato per il numeratore (è la proprietà invariantiva).

Fra due frazioni con lo stesso denominatore positivo, è maggiore quella con il numeratore maggiore: $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$, perché 5 parti su 9 sono più di 4 parti su 9. Se invece hanno lo stesso numeratore positivo, è maggiore quella con il denominatore minore: $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, perché dividendo in meno parti ogni parte è più grande.

2.2 L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali

2.2.1 Un numero, tante frazioni

Le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$ sono scritture diverse, ma indicano tutte la stessa quantità: la metà. Conviene allora pensare a un unico numero rappresentato da tutte queste frazioni. Un

numero razionale è proprio questo: l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a una frazione data. Ogni frazione dell'insieme è un *rappresentante* del numero; di solito si sceglie come rappresentante la frazione ridotta ai minimi termini con denominatore positivo. In linguaggio più tecnico, che approfondirai nel capitolo 5, si dice che un numero razionale è una *classe di equivalenza* di frazioni.

Anche i numeri negativi entrano in gioco: le frazioni possono avere numeratore o denominatore negativo. Valgono le regole dei segni della divisione in $\mathbb{Z}$:

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \qquad \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Si preferisce scrivere il segno davanti alla frazione e tenere il denominatore positivo. L'insieme di tutti i numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$; con $\mathbb{Q}^+$ si indicano i razionali positivi e con $\mathbb{Q}^-$ i razionali negativi (lo 0 non appartiene a nessuno dei due).

2.2.2 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Ogni numero intero è anche razionale: basta scriverlo come frazione con denominatore 1. Per esempio $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$ e $-3 = \frac{-3}{1}$. Le frazioni apparenti sono proprio i rappresentanti dei numeri interi. Perciò gli insiemi numerici che abbiamo costruito finora sono uno dentro l'altro (figura 2.2):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

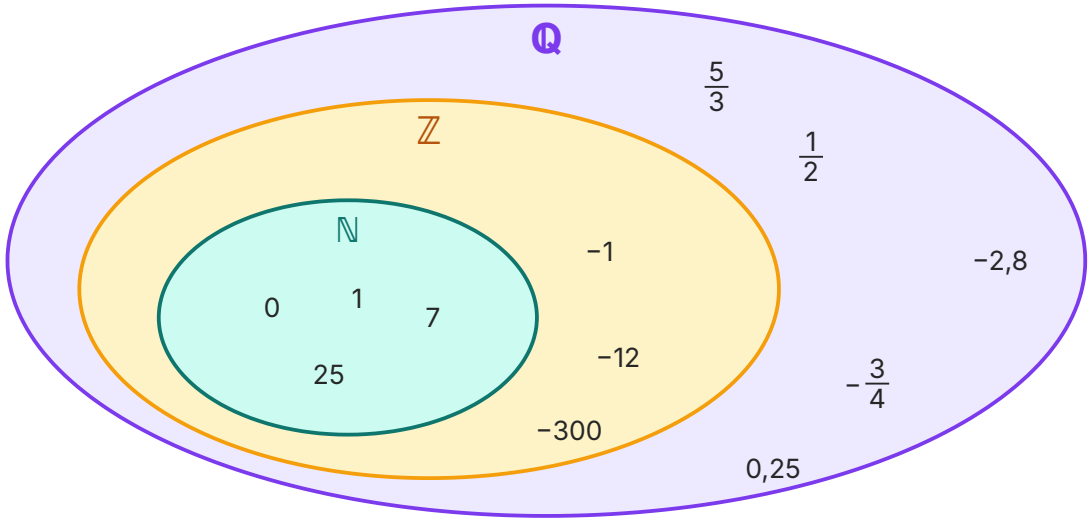

Figura 2.2 Gli insiemi numerici annidati. Ogni naturale è un intero e ogni intero è un razionale; ma −1 e −12 sono interi non naturali, mentre 1/2, −3/4, 0,25 e 5/3 sono razionali non interi.

2.2.3 I razionali sulla retta e il confronto

Ogni numero razionale si può rappresentare con un punto della retta orientata. Per collocare $\frac{a}{b}$ con $b > 0$ si divide il segmento unitario (da 0 a 1) in b parti uguali e si contano a di queste parti a partire da 0: verso destra se $a > 0$, verso sinistra se $a < 0$.

Come per gli interi, un numero è maggiore di un altro se sulla retta si trova alla sua destra. Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo; tra due negativi è maggiore quello con valore assoluto minore. Per esempio $-\frac{5}{8} > -\frac{2}{3}$, perché $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ è minore di $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$.

2.2.4 $\mathbb{Q}$ è denso

Fra due numeri interi consecutivi, come 3 e 4, non c'è nessun altro intero: per questo diciamo che $\mathbb{Z}$ è *discreto*, e che ogni intero ha un successivo. In $\mathbb{Q}$ le cose cambiano radicalmente. Prendi due razionali qualsiasi $a < b$. La loro media

$$m = \frac{a + b}{2}$$

è ancora un numero razionale ed è compresa tra loro. Infatti la sua distanza da a è $m - a = \frac{b - a}{2}$ e la sua distanza da b è $b - m = \frac{b - a}{2}$: entrambe positive, e uguali. La media sta esattamente a metà strada.

Ma allora possiamo ripetere: tra a e m c'è la loro media, tra questa e a un'altra ancora, e così via, senza mai fermarci. Tra due razionali distinti, per quanto vicini, ci sono infiniti razionali. Si dice che $\mathbb{Q}$ è un insieme **denso**. La figura 2.3 mostra come, ingrandendo un tratto della retta, compaiano sempre nuovi razionali.

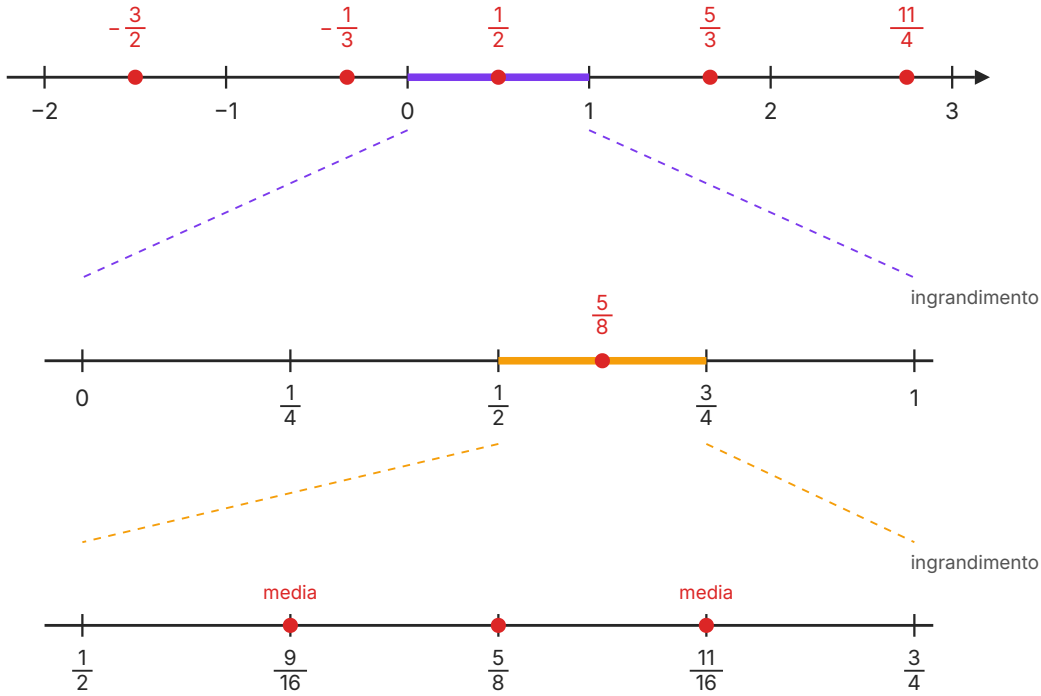

Figura 2.3 La densità di $\mathbb{Q}$. In alto alcuni razionali sulla retta. Ingrandendo il segmento da 0 a 1 troviamo 5/8, media di 1/2 e 3/4; ingrandendo ancora il tratto da 1/2 a 3/4 troviamo 9/16 e 11/16, medie dei tratti successivi. Il procedimento non si ferma mai.

2.3 Le operazioni in $\mathbb{Q}$

2.3.1 Addizione e sottrazione

Sommare frazioni con lo stesso denominatore è naturale: 2 quinti più 1 quinto fanno 3 quinti, cioè $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Si sommano i numeratori e si lascia il denominatore. Con denominatori diversi, prima si riducono le frazioni allo stesso denominatore:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

La sottrazione si tratta come in $\mathbb{Z}$: sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto, e quindi anche in $\mathbb{Q}$ si parla di *somma algebrica*. Per esempio $\frac{7}{10} - \frac{4}{15} = \frac{21}{30} - \frac{8}{30} = \frac{13}{30}$. Valgono le proprietà commutativa e associativa; lo 0 è l'elemento neutro e ogni razionale ha il suo opposto.

ERRORE FREQUENTE

Non si sommano numeratori con numeratori e denominatori con denominatori. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ non fa $\frac{2}{5}$! Basta una stima per accorgersene: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ è più di $\frac{1}{2}$, mentre $\frac{2}{5}$ è meno di $\frac{1}{2}$. Il risultato corretto è $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Pensa a mezza pizza più un terzo di pizza: si sommano «pezzi» solo se sono della stessa misura.

2.3.2 Moltiplicazione

Il prodotto di due frazioni è la frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Perché proprio così? Calcolare $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ significa prendere i $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$. La figura 2.4 lo mostra con le aree: in un quadrato di lato 1 coloriamo i $\frac{2}{3}$ delle colonne e i $\frac{3}{4}$ delle righe. La zona colorata due volte è un rettangolo di dimensioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, e contiene $2 \cdot 3 = 6$ dei $3 \cdot 4 = 12$ rettangolini uguali in cui è diviso il quadrato. La sua area è quindi $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

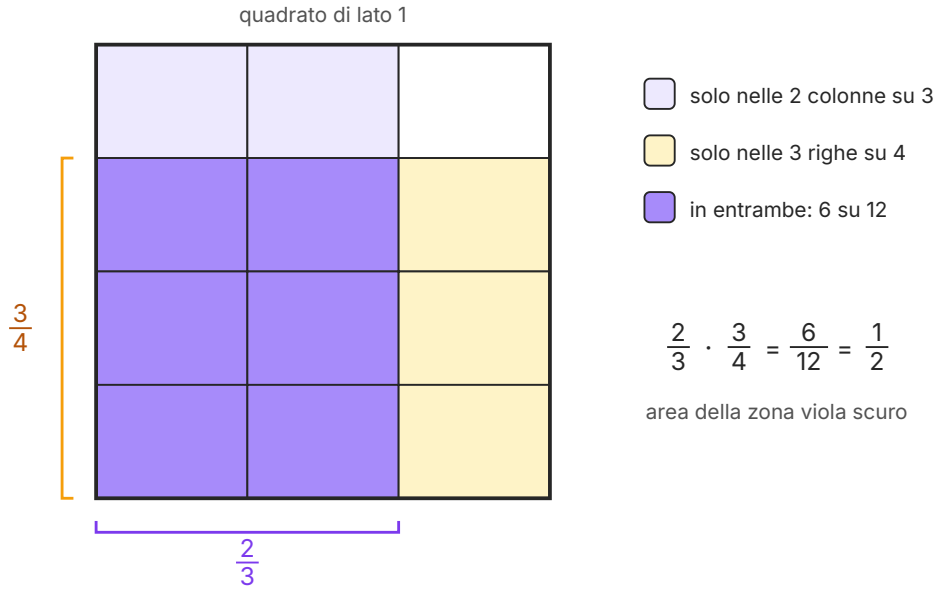

Figura 2.4 Il prodotto di frazioni come area. Il quadrato di lato 1 è diviso in 3 colonne e 4 righe, cioè in 12 rettangoli uguali; il rettangolo di lati 2/3 e 3/4 ne contiene 6, quindi 2/3 · 3/4 = 6/12 = 1/2.

Prima di moltiplicare conviene semplificare «in croce»: un fattore del numeratore di una frazione si può semplificare con un fattore del denominatore dell'altra. Per esempio

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{25}{28} = \frac{14 \cdot 25}{15 \cdot 28} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

dove abbiamo diviso 14 e 28 per 14, e 25 e 15 per 5. Il segno del prodotto segue la regola dei segni di $\mathbb{Z}$. La moltiplicazione in $\mathbb{Q}$ è commutativa e associativa, distributiva rispetto all'addizione, ha elemento neutro 1 ed elemento assorbente 0.

2.3.3 Reciproco e divisione

In $\mathbb{Q}$ c'è una novità rispetto a $\mathbb{Z}$. Due numeri si dicono **reciproci** (o *inversi*) se il loro prodotto è 1. Il reciproco di $\frac{a}{b}$, con $a \neq 0$, è $\frac{b}{a}$: basta «capovolgere» la frazione. Il reciproco di $\frac{3}{5}$ è $\frac{5}{3}$, quello di -4 è $-\frac{1}{4}$ (il segno resta lo stesso!), quello di $-\frac{2}{7}$ è $-\frac{7}{2}$. Lo 0 è l'unico razionale senza reciproco: nessun numero moltiplicato per 0 dà 1.

Grazie al reciproco, la divisione diventa una moltiplicazione:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (c \neq 0)$$

Dividere per $\frac{c}{d}$ significa moltiplicare per il suo reciproco. Ha senso: quante volte $\frac{1}{4}$ di litro sta in 3 litri? $3 : \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 = 12$ volte.

Tabella 2.1 Le operazioni in $\mathbb{Q}$ (denominatori diversi da zero).

Operazione	Regola	Esempio
Addizione	stesso denominatore, poi somma dei numeratori	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$
Sottrazione	somma con l'opposto	$\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{3}$
Moltiplicazione	numeratori per numeratori, denominatori per denominatori	$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$
Reciproco	si scambiano numeratore e denominatore ($a \neq 0$)	reciproco di $-\frac{4}{7} : -\frac{7}{4}$
Divisione	moltiplicazione per il reciproco del divisore	$\frac{3}{8} : \frac{9}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$

2.3.4 Espressioni in $\mathbb{Q}$

Le espressioni con le frazioni si risolvono con le stesse regole già viste in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$: prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni nell'ordine in cui compaiono, infine addizioni e sottrazioni; le parentesi tonde, quadre e graffe si eliminano dall'interno verso l'esterno. Conviene semplificare appena possibile, così i numeri restano piccoli.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $\left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{10} - \frac{2}{3}\right] \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$.

Parentesi tonda: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$.

Divisione: $\frac{1}{10} : \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$.

Parentesi quadra: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Ultimo prodotto: $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Risultato: $-\frac{1}{2}$. Nota che la divisione si esegue *prima* della sottrazione di $\frac{2}{3}$, perché ha la precedenza.

2.4 Le potenze in $\mathbb{Q}$

2.4.1 Potenze con esponente naturale

La potenza di una frazione con esponente naturale si definisce come in $\mathbb{N}$, come prodotto ripetuto. Ne segue che si elevano numeratore e denominatore:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{per esempio} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

Per il segno valgono le regole viste in $\mathbb{Z}$: base negativa con esponente pari dà risultato positivo, con esponente dispari dà risultato negativo. Attenzione alle parentesi: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, mentre $\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$. Ricorda anche che $a^0 = 1$ per ogni $a \neq 0$, mentre 0^0 non ha significato.

2.4.2 Esponente intero negativo

In $\mathbb{Q}$ possiamo dare significato anche alle potenze con esponente negativo. L'idea viene dalle proprietà delle potenze. Sappiamo che $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$. Che cosa succede con $2^3 : 2^5$? Facendo il calcolo, $8 : 32 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$. Se vogliamo che la regola della differenza degli esponenti continui a valere, deve essere $2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$. Questo suggerisce la definizione.

IN SINTESI

Potenza con esponente intero negativo. Per ogni razionale $a \neq 0$ e ogni naturale n:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Una potenza con esponente negativo è la potenza del reciproco della base, con esponente positivo. Le cinque proprietà delle potenze (prodotto e quoziente di potenze con la stessa base, potenza di potenza, prodotto e quoziente di potenze con lo stesso esponente) valgono per tutti gli esponenti interi, con basi diverse da zero.

Ecco qualche esempio: $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 = -8$. L'esponente negativo *non* rende negativo il risultato: decide solo che si deve passare al reciproco. Infine 0^{-n} non ha significato, perché 0 non ha reciproco.

2.5 Numeri decimali e frazioni

2.5.1 Dalla frazione al numero decimale

Ogni frazione è una divisione, quindi possiamo eseguirla «in colonna» e ottenere un numero decimale. Le frazioni con denominatore 10, 100, 1000, … si chiamano **frazioni decimali** e si trasformano subito: $\frac{7}{10} = 0{,}7$ e $\frac{235}{100} = 2{,}35$. Per le altre si esegue la divisione. Possono capitare due casi.

Dividendo 3 per 8 si ottiene 0,375 e la divisione finisce, perché a un certo punto il resto diventa 0. Si dice che $\frac{3}{8}$ è un **numero decimale limitato**: ha un numero finito di cifre dopo la virgola.

Dividendo 1 per 7, invece, il resto non diventa mai zero. Ma i resti possibili nella divisione per 7 sono solo 1, 2, 3, 4, 5, 6: dopo al massimo sei passi un resto deve ripresentarsi, e da quel momento le cifre del quoziente si ripetono identiche, all'infinito (figura 2.5). Si ottiene così

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$$

Un numero come questo è un **numero decimale periodico**. Il gruppo di cifre che si ripete si chiama **periodo** e si scrive con una lineetta sopra. Il ragionamento sui resti vale per ogni frazione: dividendo per b i resti possibili sono al massimo b, quindi prima o poi o il resto è 0 (decimale limitato) o un resto si ripete (decimale periodico). **Una frazione dà sempre un decimale limitato o periodico**: non può dare un decimale «disordinato», che non finisce e non si ripete mai.

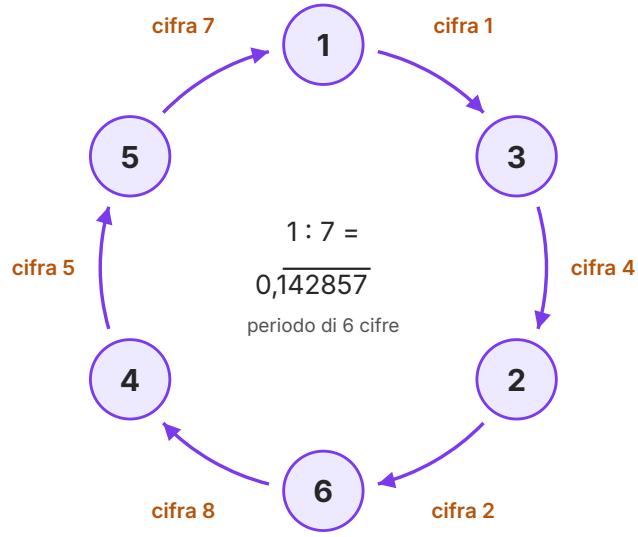

Figura 2.5 Perché 1/7 è periodico. Nella divisione 1 : 7 i resti si susseguono nell'ordine 1, 3, 2, 6, 4, 5 e poi torna 1; ogni passo produce una cifra del quoziente, quindi le cifre 142857 si ripetono all'infinito.

Tra i decimali periodici distinguiamo:

- i **periodici semplici**, in cui il periodo comincia subito dopo la virgola: $\frac{5}{11} = 0{,}\overline{45}$;
- i **periodici misti**, in cui tra la virgola e il periodo c'è un gruppo di cifre che non si ripete, detto **antiperiodo**: $\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$, con antiperiodo 58 e periodo 3.

2.5.2 Limitato o periodico? Basta guardare il denominatore

Si può prevedere che tipo di decimale darà una frazione senza fare la divisione. Un decimale limitato con k cifre dopo la virgola è una frazione con denominatore $10^k = 2^k \cdot 5^k$; viceversa, se il denominatore è del tipo $2^m \cdot 5^n$, basta moltiplicare per potenze di 2 o di 5 per arrivare a una potenza di 10: $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$.

DA RICORDARE

Riduci la frazione ai minimi termini e scomponi il denominatore in fattori primi.

- Solo fattori 2 e/o 5 → **decimale limitato** ($\frac{9}{40} = \frac{9}{2^3 \cdot 5} = 0{,}225$).
- Nessun fattore 2 o 5 → **periodico semplice** ($\frac{5}{11} = 0{,}\overline{45}$).
- Fattori 2 o 5 insieme ad altri fattori → **periodico misto** ($\frac{13}{6} = \frac{13}{2 \cdot 3} = 2{,}1\overline{6}$).

Prima riduci: $\frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ è limitato, anche se 6 contiene il fattore 3.

2.5.3 Dal numero decimale alla frazione: la frazione generatrice

Ora il percorso inverso. Ogni decimale limitato o periodico è un numero razionale, e la frazione da cui proviene si chiama **frazione generatrice**.

Decimali limitati. Si scrive al numeratore il numero senza virgola e al denominatore 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali; poi si semplifica: $0{,}36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$.

Periodici semplici. Prendiamo $x = 0{,}\overline{36} = 0{,}363636\ldots$ Il periodo ha due cifre: moltiplichiamo per 100, che sposta la virgola di due posti.

$$100x = 36{,}363636\ldots \qquad x = 0{,}363636\ldots$$

Sottraendo membro a membro, le infinite cifre dopo la virgola, identiche, si cancellano: $100x - x = 36$, cioè $99x = 36$ e $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$. Lo stesso ragionamento dà la regola generale: al numeratore il numero scritto senza virgola e senza lineetta, meno la parte intera; al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo. Per esempio $3{,}\overline{2} = \frac{32 - 3}{9} = \frac{29}{9}$.

Periodici misti. Si aggiunge un passaggio per «spostare» l'antiperiodo prima della virgola. Il risultato è la regola riassunta nel riquadro, che giustifichiamo nell'esempio svolto.

IN SINTESI

Frazione generatrice di un decimale periodico.

- *Numeratore:* il numero scritto senza virgola (e senza lineetta) meno il numero formato dalle cifre che precedono il periodo (parte intera e antiperiodo).
- *Denominatore:* tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempi: $1{,}2\overline{3} = \frac{123 - 12}{90} = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$; $0{,}0\overline{12} = \frac{12 - 0}{990} = \frac{2}{165}$.

ESEMPIO SVOLTO

Trova la frazione generatrice di $x = 2{,}41\overline{8} = 2{,}41818\ldots$

L'antiperiodo (4) ha una cifra: moltiplichiamo per 10 e otteniamo un periodico semplice, $10x = 24{,}\overline{18}$. Il periodo ha due cifre: moltiplichiamo ancora per 100, $1000x = 2418{,}\overline{18}$.

Sottraiamo: $1000x - 10x = 2418{,}\overline{18} - 24{,}\overline{18} = 2418 - 24$, cioè $990x = 2394$.

Quindi $x = \frac{2394}{990} = \frac{133}{55}$ (abbiamo diviso per il MCD 18). È proprio la regola: numeratore 2418 − 24, denominatore 990 (due 9 per il periodo, uno 0 per l'antiperiodo).

Applicando la regola a $0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots$ si ottiene $\frac{9}{9} = 1$: $0{,}999\ldots$ è *uguale* a 1, non «quasi» 1. Lo conferma anche il calcolo $3 \cdot 0{,}\overline{3} = 0{,}\overline{9}$, mentre $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Per convenzione non si scrivono decimali con periodo 9.

2.6 Notazione scientifica e approssimazioni

2.6.1 La notazione scientifica

Nelle scienze si incontrano numeri molto grandi e molto piccoli. La distanza media tra la Terra e il Sole è di circa 150 000 000 000 m; il diametro di un globulo rosso è di circa 0,000 007 m. Le potenze di 10, anche con esponente negativo, risolvono il problema.

Un numero è scritto in **notazione scientifica** quando ha la forma

$$a \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \le a < 10 \text{ e } n \text{ intero.}$$

Così $150\,000\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ e $0{,}000\,007 = 7 \cdot 10^{-6}$. Per passare alla notazione scientifica si sposta la virgola fino ad avere una sola cifra diversa da zero prima di essa; l'esponente conta di quanti posti si è spostata: positivo se si è spostata verso sinistra (numero grande), negativo se verso destra (numero piccolo).

Le proprietà delle potenze rendono i calcoli molto rapidi: si opera separatamente sulle parti numeriche e sulle potenze di 10, poi si riporta il risultato in notazione scientifica.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $\dfrac{(2{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{7})}{4 \cdot 10^{2}}$.

Parti numeriche: $2{,}5 \cdot 8 : 4 = 20 : 4 = 5$.

Potenze di 10: $10^{-3} \cdot 10^{7} : 10^{2} = 10^{-3+7-2} = 10^{2}$.

Risultato: $5 \cdot 10^{2} = 500$. Se la parte numerica fosse uscita, per esempio, 12, avremmo scritto $12 \cdot 10^{2} = 1{,}2 \cdot 10^{3}$, per rispettare la condizione $1 \le a < 10$.

2.6.2 Ordine di grandezza

Spesso non serve conoscere un numero con precisione: basta sapere «quanto è grande». L'**ordine di grandezza** di un numero è la potenza di 10 che meglio lo rappresenta. Per sceglierla si usa una regola pratica, molto diffusa a scuola: scritto il numero come $a \cdot 10^{n}$, se $a < 5$ l'ordine di grandezza è 10^{n}, se $a \ge 5$ è 10^{n+1}. Così il diametro della Terra, circa $1{,}27 \cdot 10^{7}$ m, ha ordine di grandezza 10^{7} m; il globulo rosso, $7 \cdot 10^{-6}$ m, ha ordine di grandezza 10^{-5} m. La figura 2.6 colloca alcune lunghezze su una scala in cui ogni tacca vale 10 volte la precedente.

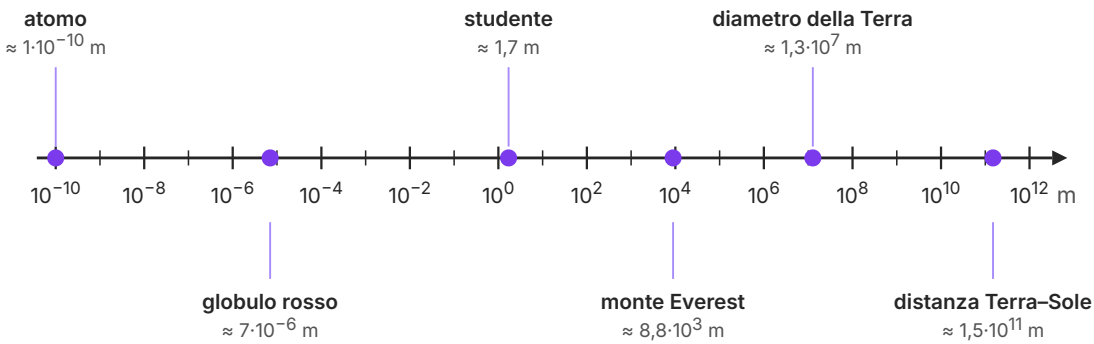

Figura 2.6 Lunghezze su una scala di potenze di 10. Ogni tacca vale dieci volte la precedente: in poco più di venti passi di questo tipo si va dalle dimensioni di un atomo alla distanza tra la Terra e il Sole. I valori sono approssimati.

COLLEGAMENTI

Scienze, greco e latino. Nel laboratorio di scienze ogni misura si scrive con la sua unità e, spesso, in notazione scientifica: la massa di un globulo rosso, il diametro di un atomo, la distanza di una stella. Anche i prefissi delle unità di misura sono un piccolo ripasso di lingue antiche: *kilo-* viene dal greco χίλιοι («mille»), *mega-* da μέγας («grande»), *giga-* da γίγας («gigante»), e indicano 10^3, 10^6, 10^9; *milli-* viene dal latino *mille*, *micro-* da μικρός («piccolo»), *nano-* da νᾶνος («nano»), e indicano 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}.

2.6.3 Approssimare: troncamento e arrotondamento

Un numero come $\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$ ha infinite cifre: per usarlo in pratica (per tagliare un nastro, per esempio) dobbiamo approssimarlo. Ci sono due modi principali.

- Il **troncamento** consiste nel cancellare tutte le cifre dopo una certa posizione: troncato ai centesimi, 1,666... diventa 1,66.
- L'**arrotondamento** sceglie il valore più vicino: si guarda la prima cifra che si elimina; se è minore di 5 si lascia invariata l'ultima cifra tenuta, se è maggiore o uguale a 5 la si aumenta di 1. Arrotondato ai centesimi, 1,666... diventa 1,67; arrotondato ai decimi, 2,678 diventa 2,7, mentre 3,14159 arrotondato ai centesimi diventa 3,14.

2.6.4 Errore assoluto ed errore relativo

Quando sostituiamo un numero con una sua approssimazione commettiamo un errore. L'**errore assoluto** è il valore assoluto della differenza tra il valore approssimato e il valore esatto: approssimando $\frac{5}{3}$ con 1,67 si commette un errore di $\left|\frac{167}{100} - \frac{5}{3}\right| = \frac{1}{300} \approx 0{,}003$. Per giudicare un'approssimazione, però, conta il confronto con la grandezza: sbagliare di 1 cm la lunghezza di una matita è grave, sbagliare di 1 cm quella di un campo da calcio no. Per questo si usa l'**errore relativo**, il rapporto tra l'errore assoluto e il valore, spesso espresso in percentuale:

$$\text{errore relativo} = \frac{\text{errore assoluto}}{\text{valore}}$$

Sulla matita di 15 cm l'errore relativo è $\frac{1}{15} \approx 7\%$; sul campo di 100 m = 10 000 cm è $\frac{1}{10\,000} = 0{,}01\%$. Sulle percentuali torneremo nel capitolo 3.

2.7 Oltre i razionali: √2

Con i razionali possiamo dividere per ogni numero diverso da zero, e tra due razionali ce n'è sempre un altro. Sembra che non manchi più nulla: ogni lunghezza, si potrebbe pensare, si mi-

sura con una frazione dell'unità, se scegliamo un'unità abbastanza piccola. Probabilmente lo pensavano anche i primi matematici greci, e fu una sorpresa scoprire che non è così. Il controesempio più semplice è la diagonale di un quadrato.

2.7.1 La diagonale del quadrato

Disegna un quadrato di lato 1 e la sua diagonale d. Il quadrato costruito sulla diagonale è formato da quattro metà del quadrato di partenza, quindi ha area 2 (figura 2.7). La lunghezza d è dunque il numero positivo il cui quadrato è 2: lo chiamiamo radice quadrata di 2 e lo scriviamo $\sqrt{2}$. Con la calcolatrice si trova $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, ma la calcolatrice mostra solo un numero finito di cifre e non può dirci se quelle cifre, prima o poi, diventano periodiche. Per saperlo serve un ragionamento.

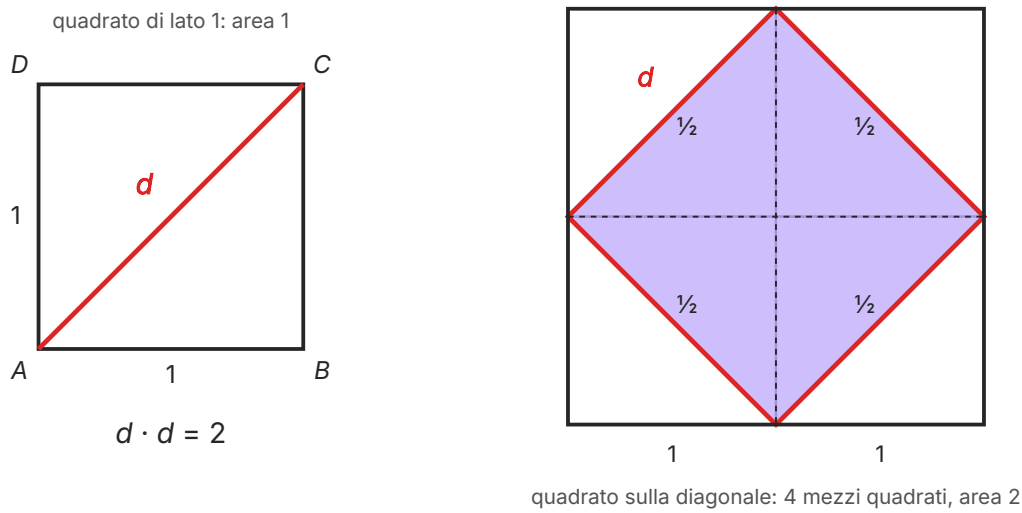

Figura 2.7 La diagonale del quadrato di lato 1. Quattro quadrati unitari formano un quadrato di area 4; il quadrato inclinato, che ha per lato la diagonale d, è formato da quattro mezzi quadrati unitari e ha quindi area 2: d · d = 2.

2.7.2 √2 non è un numero razionale

IN SINTESI

Teorema. Non esiste nessuna frazione il cui quadrato sia 2: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Lo dimostriamo *per assurdo*: supponiamo che la tesi sia falsa e mostriamo che si arriva a una contraddizione. Supponiamo dunque che sia $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con p e q naturali diversi da zero e la frazione ridotta ai minimi termini (possiamo sempre ridurla). Elevando al quadrato si ottiene $2 = \frac{p^2}{q^2}$, cioè

$$p^2 = 2q^2.$$

Il numero p^2 è quindi pari. Ma allora anche p è pari: se p fosse dispari, nella sua scomposizione in fattori primi non comparirebbe il 2, e non comparirebbe nemmeno in $p^2 = p \cdot p$, che sarebbe dispari (è il teorema fondamentale dell'aritmetica del capitolo 1). Scriviamo allora $p = 2k$. Sostituendo, $4k^2 = 2q^2$, cioè $q^2 = 2k^2$: anche q^2 è pari, e per lo stesso motivo è pari q. Ma allora p e q hanno il fattore comune 2, contro l'ipotesi che la frazione fosse ridotta ai minimi termini. La supposizione iniziale porta a una contraddizione, quindi è falsa: $\sqrt{2}$ non è razionale. *c.v.d.*

Lo stesso fatto si vede anche contando i fattori 2. In p^2 ogni fattore primo di p compare due volte, quindi il fattore 2 compare un numero *pari* di volte (eventualmente zero). In $2q^2$, invece, il fattore 2 compare un numero pari di volte in q^2, più una: un numero *dispari* di volte. Per l'unicità della scomposizione, i due numeri non possono essere uguali.

Un numero che non è razionale si dice **irrazionale**. Poiché ogni frazione dà un decimale limitato o periodico, la scrittura decimale di un numero irrazionale non è né limitata né periodica: le cifre di $\sqrt{2}$ continuano senza fine e senza mai ripetersi a gruppi.

> **ERRORE FREQUENTE**
> «La calcolatrice dà $\sqrt{2} = 1{,}414213562$, quindi $\sqrt{2}$ è un decimale limitato.» No: quello è un *arrotondamento*. Infatti $1{,}414213562^2$ non vale esattamente 2. Allo stesso modo 1,41 o 1,4142 sono approssimazioni utili per i calcoli, ma nessun decimale limitato o periodico ha per quadrato esattamente 2.

2.7.3 Uno sguardo alla retta dei numeri

Ribaltiamo la diagonale del quadrato sulla retta orientata con il compasso, puntando nell'origine (figura 2.8). L'arco incontra la retta in un punto ben preciso, a distanza $\sqrt{2}$ da 0. Quel punto non corrisponde a nessun numero razionale. Dunque i razionali, pur essendo densi, non «riempiono» la retta: tra di essi restano dei punti senza nome razionale, come $\sqrt{2}$ e, vedremo, moltissimi altri.

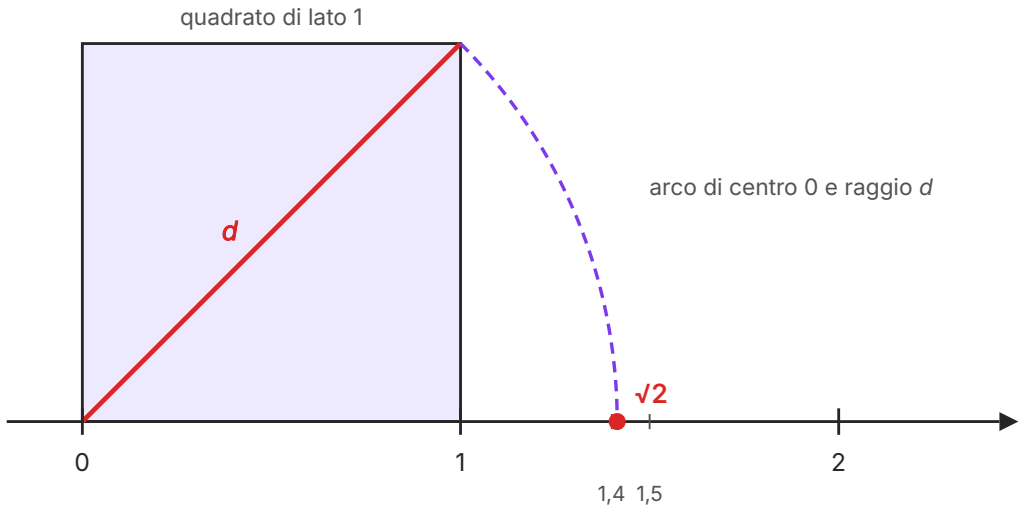

Figura 2.8 √2 sulla retta. Con il compasso puntato in 0 si riporta la diagonale *d* del quadrato di lato 1 sulla retta: il punto ottenuto sta tra 1,4 e 1,5 ma non corrisponde a nessun numero razionale.

Possiamo però intrappolare √2 tra razionali sempre più vicini, confrontando i quadrati: $1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2{,}25$, quindi $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; $1{,}41^2 = 1{,}9881$ e $1{,}42^2 = 2{,}0164$, quindi $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; e così via, guadagnando una cifra a ogni passo. È un *algoritmo*, e nel capitolo 13 vedremo come farlo eseguire a un foglio di calcolo.

I numeri razionali e irrazionali insieme formano l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}$, che corrisponde a tutti i punti della retta. Lo studierai nel secondo volume, insieme ai radicali; per ora ci basta sapere che $\mathbb{Q}$ non è l'ultimo «piano» dell'edificio dei numeri.

2.7.4 I Greci e l'incommensurabile

Per i Greci due segmenti erano **commensurabili** se esisteva un segmento più piccolo, una «misura comune», contenuto un numero intero di volte in entrambi: in termini moderni, se il loro rapporto è un numero razionale. Ai pitagorici, la scuola fondata da Pitagora a Crotone nel VI secolo a.C., sembrava naturale che fosse sempre così. Aristotele riferisce che per loro i princìpi dei numeri erano i princìpi di tutte le cose: la formula «tutto è numero», con cui di solito li si riassume, è più tarda, ma rende l'idea. Una ragione di questa fiducia veniva dalla musica: le consonanze fondamentali corrispondono a rapporti tra numeri interi piccoli, 2 : 1 per l'ottava, 3 : 2 per la quinta, 4 : 3 per la quarta.

La scoperta che il lato e la diagonale del quadrato sono **incommensurabili**, cioè che nessun segmento, per quanto piccolo, li misura entrambi un numero intero di volte, è esattamente il teorema che abbiamo dimostrato. La tradizione antica la attribuisce alla scuola pitagorica, ma

non sappiamo con certezza né chi la fece né quando (probabilmente nel V secolo a.C.). Una *leggenda*, raccontata da autori di molti secoli dopo e in versioni discordanti, narra che il pitagorico che per primo divulgò il segreto morì in mare, come per una punizione divina; i moderni lo identificano spesso con Ippaso di Metaponto, che però le fonti antiche fanno morire in mare per aver svelato un altro segreto (la costruzione del dodecaedro regolare). Non è una notizia storica, ma dice quanto la scoperta apparisse scandalosa. I Greci chiamavano queste grandezze ἀσύμμετρα (*asýmmetra*, «senza misura comune»); nel libro X degli *Elementi* Euclide chiama ἄλογα (*áloga*, letteralmente «senza *lógos*», cioè senza un rapporto esprimibile) una particolare classe di grandezze, che non coincide con quella degli incommensurabili: per lui, fissato un segmento come unità, è ancora ῥητή («esprimibile») anche una linea incommensurabile con essa ma il cui quadrato è commensurabile con il quadrato dell'unità, come la diagonale del quadrato di lato unitario. Il latino *irrationalis*, da cui viene il nostro *irrazionale*, esprime la stessa idea.

La diagonale del quadrato è protagonista di una pagina famosa di Platone, nel dialogo *Menone*. Socrate interroga un giovane schiavo che non ha mai studiato geometria: dato un quadrato di lato 2 piedi, e quindi di area 4, come si costruisce un quadrato di area doppia? Lo schiavo propone prima di raddoppiare il lato, ma ottiene un quadrato di area 16, quattro volte più grande; poi prova con il lato 3, che dà area 9, troppo. Guidato dalle domande di Socrate, scopre infine che il quadrato cercato è quello costruito sulla diagonale: è la costruzione della figura 2.7, con il lato raddoppiato. Il lato giusto non si può dire con un numero, e infatti Socrate chiede al ragazzo, se non vuole calcolarlo, di indicarlo sulla figura. Platone usa l'episodio per sostenere che conoscere è *ricordare* (la dottrina della reminiscenza, in greco ἀνάμνησις). In un altro dialogo, il *Teeteto*, racconta che il matematico Teodoro di Cirene aveva mostrato che anche i lati dei quadrati di area 3, 5 e così via fino a 17 (esclusi i quadrati perfetti 4, 9, 16) sono incommensurabili con il lato del quadrato di area 1, e che il giovane Teeteto aveva cercato una teoria generale.

Aristotele, nei *Primi analitici* (I, 23), sceglie proprio questa dimostrazione come esempio tipico di ragionamento *per assurdo*: la diagonale è incommensurabile con il lato perché, se fosse commensurabile, i numeri dispari risulterebbero uguali ai pari. È la contraddizione a cui siamo arrivati anche noi: p e q dovrebbero essere primi tra loro ed entrambi pari. Della forma logica di questo ragionamento ci occuperemo nel capitolo dedicato a insiemi e logica.

La scoperta ebbe conseguenze profonde. I matematici greci smisero di identificare le grandezze geometriche con i numeri; Eudosso di Cnido (IV secolo a.C.), secondo la tradizione antica, costruì una teoria dei rapporti valida anche per le grandezze incommensurabili, quella esposta nel libro V degli *Elementi* di Euclide, e il libro X degli *Elementi* è interamente dedicato agli incommensurabili. Ci sarebbero voluti più di duemila anni perché i numeri reali dessero un nome a ogni punto della retta.

SINTESI

- Una frazione $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) è una divisione; può essere propria, impropria o apparente.
- $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono equivalenti se $ad = bc$; la proprietà invariantiva permette di semplificare e di ridurre allo stesso denominatore.
- Si semplificano solo fattori comuni, mai addendi.
- Un numero razionale è la classe di tutte le frazioni equivalenti a una data; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q}$ è denso: tra due razionali c'è sempre la loro media, e quindi infiniti altri razionali.
- Ogni razionale diverso da 0 ha un reciproco; dividere equivale a moltiplicare per il reciproco del divisore.
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ per $a \neq 0$; le proprietà delle potenze valgono per tutti gli esponenti interi.
- Una frazione dà un decimale limitato o periodico; ridotta ai minimi termini, è limitata se e solo se il denominatore ha come fattori primi solo 2 e 5.
- La frazione generatrice si ottiene con la regola dei 9 (periodo) e degli 0 (antiperiodo); $0{,}\overline{9} = 1$.
- Notazione scientifica: $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$; l'ordine di grandezza è la potenza di 10 che meglio rappresenta il numero (regola pratica: soglia 5).
- Approssimazioni per troncamento o arrotondamento; l'errore relativo misura la precisione meglio dell'errore assoluto.
- $\sqrt{2}$ non è razionale: esistono numeri non razionali.
- Lato e diagonale del quadrato sono **incommensurabili**: la scoperta, attribuita ai pitagorici, è discussa da Platone (*Menone*, *Teeteto*) e citata da Aristotele come modello di dimostrazione per assurdo.

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale delle seguenti frazioni è apparente?

   A. $\frac{6}{4}$

   B. $\frac{12}{4}$

   C. $\frac{4}{12}$

   D. $\frac{7}{3}$

2. ● Quale frazione è equivalente a $\frac{18}{24}$?

   A. $\frac{9}{16}$
   B. $\frac{6}{9}$
   C. $\frac{15}{20}$
   D. $\frac{3}{8}$

3. ● Quale numero è compreso tra $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{2}$?

   A. $\frac{9}{20}$
   B. $\frac{3}{5}$
   C. $\frac{1}{3}$
   D. $\frac{11}{20}$

4. ● La frazione $\frac{7}{12}$, trasformata in numero decimale, è un decimale:

   A. limitato
   B. periodico semplice
   C. periodico misto
   D. né limitato né periodico

5. ● $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ è uguale a:

   A. $-\frac{4}{9}$
   B. $\frac{4}{9}$
   C. $-\frac{9}{4}$
   D. $\frac{9}{4}$

6. ●● La frazione generatrice di $1{,}2\overline{3}$ è:
   - **A.** $\frac{37}{30}$
   - **B.** $\frac{123}{90}$
   - **C.** $\frac{111}{99}$
   - **D.** $\frac{37}{3}$

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false. a) Ogni numero intero è un numero razionale. b) Tra 0 e 1 c'è soltanto un numero finito di razionali. c) Il reciproco di 0 è 0. d) $0{,}\overline{9} = 1$. e) $\frac{3}{8}$ dà un decimale limitato.

8. ● Completa. a) $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono equivalenti se _____ = _____. b) Il reciproco di $-\frac{3}{5}$ è _____. c) Una frazione ridotta ai minimi termini dà un decimale limitato se e solo se il denominatore ha come fattori primi solo _____ e _____. d) In notazione scientifica $a \cdot 10^n$ deve essere _____ $\le a <$ _____.

Calcolare

9. ● Riduci ai minimi termini: a) $\frac{84}{126}$; b) $\frac{150}{360}$; c) $\frac{231}{385}$; d) $-\frac{98}{56}$.

10. ● Riduci allo stesso denominatore (il minimo possibile) le frazioni $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{10}$ e ordinale in senso crescente.

11. ● Calcola: a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$; b) $\frac{7}{10} - \frac{4}{15}$; c) $-\frac{2}{9} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$; d) $2 - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$.

12. ● Calcola, semplificando prima quando possibile: a) $\frac{14}{15} \cdot \frac{25}{28}$; b) $\left(-\frac{9}{16}\right) : \frac{3}{8}$; c) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right)$; d) $\frac{7}{12} : 14$.

13. ● Calcola: a) 2^{-3}; b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; d) $\left(\frac{5}{3}\right)^{0}$; e) 10^{-2}.

14. ● Senza eseguire la divisione, prevedi se le frazioni danno un decimale limitato, periodico semplice o periodico misto; poi verifica: a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{5}{11}$; c) $\frac{13}{6}$; d) $\frac{9}{40}$; e) $\frac{4}{15}$.

15. ●● Trova la frazione generatrice: a) 0,36; b) $0{,}\overline{36}$; c) $2{,}1\overline{5}$; d) $3{,}\overline{2}$; e) $0{,}\overline{012}$.

16. ●● Scrivi in notazione scientifica: a) 0,000 072; b) 45 600 000. Poi calcola, dando il risultato in notazione scientifica: c) $(3 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^{-8})$; d) $(8{,}4 \cdot 10^6) : (2{,}1 \cdot 10^{-3})$.

Dimostrare e argomentare

17. ● Trova l'errore: «$\frac{2+3}{2+5} = \frac{3}{5}$, perché ho semplificato il 2». Qual è il risultato corretto?

18. ●● Dimostra che, se $a < b$ sono razionali, la media $\frac{a+b}{2}$ è compresa tra a e b. Spiega perché da questo segue che tra a e b ci sono infiniti razionali.

19. ●● Spiega in due modi diversi perché $0{,}\overline{9} = 1$.

20. ●● Con la calcolatrice calcola $1{,}41^2$, $1{,}42^2$, $1{,}414^2$ e $1{,}415^2$. Tra quali numeri con tre cifre decimali è compreso $\sqrt{2}$? Perché, per quante cifre tu calcoli, non troverai mai un periodo?

21. ●● Dimostra, ragionando come per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è un numero razionale. *(Suggerimento: scrivi $\sqrt{3} = p/q$ e conta quante volte compare il fattore primo 3 nei due membri di $p^2 = 3q^2$.)*

22. ●●● Se si prova a ripetere la dimostrazione per $\sqrt{4}$, dove si interrompe? E per $\sqrt{8}$: il ragionamento funziona? Che cosa concludi?

23. ●● Nel *Menone* di Platone il quadrato di partenza ha lato 2 piedi. a) Calcola l'area dei quadrati di lato 2, 3 e 4 piedi e spiega perché le prime due proposte dello schiavo (lato 4, poi lato 3) sono sbagliate. b) Il quadrato costruito sulla diagonale del quadrato di lato 2 è formato da quattro metà del quadrato di partenza: qual è la sua area? c) Il lato d di questo quadrato è un numero razionale di piedi? Giustifica la risposta con il teorema su $\sqrt{2}$. (Suggerimento: quanto vale l'area del quadrato di lato $\frac{d}{2}$?)

Problemi

24. ● In una classe di 28 studenti, $\frac{3}{7}$ vanno a scuola a piedi, $\frac{1}{4}$ in bicicletta e gli altri in autobus. Quanti studenti prendono l'autobus? Che frazione della classe rappresentano?

25. ●● La luce viaggia a circa $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s e la distanza media Terra–Sole è di circa $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Quanti secondi impiega la luce del Sole a raggiungerci? Esprimi il risultato anche in minuti e secondi.

26. ●● Un nastro di 5 m viene diviso in 3 parti uguali. Scrivi la lunghezza di ogni parte come frazione e come numero decimale periodico; arrotondala al centimetro e calcola l'errore assoluto commesso.

27. ●● Una ricetta per 4 persone richiede $\frac{3}{4}$ di kg di farina e $\frac{2}{3}$ di litro di latte. Quanta farina e quanto latte servono per 6 persone? Esprimi la farina anche in grammi.

28. ●● Marta misura la lunghezza di un quaderno, 29,7 cm, con un errore assoluto di 0,1 cm; un geometra misura un terreno lungo 250 m con un errore assoluto di 0,5 m. Calcola i due errori relativi in percentuale: quale misura è più precisa?

Verso la verifica

29. ●● Calcola $\{ [(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}) : (\frac{1}{3})^{-1} + \frac{1}{36}] \cdot (-3)^2 - (\frac{2}{3})^{-1} \}$.

30. ●● Scrivi i numeri in notazione scientifica e calcola, dando il risultato in notazione scientifica: $(0{,}0006 \cdot 4\,500\,000) : 0{,}009$.

31. ●●● Sfida. a) Trova tutte le frazioni con denominatore 12 comprese strettamente tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$; riducile ai minimi termini e indica per ciascuna il tipo di decimale. b) Siano $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ con $b, d > 0$. Dimostra che la frazione $\frac{a+c}{b+d}$ (detta *mediante*) è compresa tra le due.

PER APPROFONDIRE

- [CR] Courant e Robbins, *Che cos'è la matematica?*: il capitolo sul sistema dei numeri, con i razionali, la densità e l'irrazionalità di √2.
- [ENZ] Enzensberger, *Il mago dei numeri*: un racconto in cui compaiono anche i numeri «irragionevoli» e i decimali che non finiscono mai.
- [BOY] Boyer, *Storia della matematica*: le frazioni egizie e la scoperta greca delle grandezze incommensurabili.
- [LRA] Lombardo Radice, *L'infinito*: per chi vuole riflettere su che cosa significhi «infiniti razionali tra due numeri».

Glossario del capitolo

Arrotondamento
Approssimazione che sceglie il valore più vicino: si aumenta di 1 l'ultima cifra tenuta se la prima cifra eliminata è maggiore o uguale a 5.

Decimale limitato
Numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola; deriva da una frazione ridotta il cui denominatore ha solo i fattori primi 2 e 5.

Decimale periodico
Numero decimale in cui, da un certo punto in poi, un gruppo di cifre (il periodo) si ripete all'infinito; è periodico semplice se il periodo inizia subito dopo la virgola, misto se c'è un antiperiodo.

Densità
Proprietà di $\mathbb{Q}$: tra due razionali distinti esiste sempre un altro razionale (per esempio la loro media), e quindi infiniti.

Errore relativo
Rapporto tra l'errore assoluto e il valore della grandezza; spesso espresso in percentuale, misura la precisione di un'approssimazione.

Frazione
Scrittura a/b con a e b interi e $b \neq 0$; indica la divisione $a : b$, cioè a parti di un intero diviso in b parti uguali.

Frazione apparente
Frazione il cui numeratore è multiplo del denominatore: rappresenta un numero intero, come $12/4 = 3$.

Frazione generatrice
La frazione ridotta che, divisa, produce un dato numero decimale limitato o periodico.

Frazione impropria
Frazione con numeratore maggiore del denominatore e non multiplo di esso: rappresenta un numero maggiore di 1 ma non intero.

Frazione propria
Frazione con numeratore minore del denominatore (entrambi positivi): rappresenta un numero minore di 1.

Frazioni equivalenti
Frazioni a/b e c/d tali che $a \cdot d = b \cdot c$; rappresentano lo stesso numero razionale.

Grandezze incommensurabili
Due grandezze omogenee (per esempio due segmenti) che non hanno una misura comune contenuta un numero intero di volte in entrambe; il loro rapporto non è un numero razionale. Sono incommensurabili il lato e la diagonale di un quadrato.

Minimi termini
Una frazione è ridotta ai minimi termini quando numeratore e denominatore sono primi tra loro.

Notazione scientifica
Scrittura di un numero nella forma $a \cdot 10^n$ con $1 \leq a < 10$ e n intero.

Numeri reali
L'insieme $\mathbb{R}$ formato dai numeri razionali e dai numeri irrazionali; corrisponde a tutti i punti della retta. Sarà studiato nel secondo volume.

Numero irrazionale
Numero che non si può scrivere come frazione, come $\sqrt{2}$; la sua scrittura decimale non è né limitata né periodica.

Numero razionale
Classe di tutte le frazioni equivalenti a una frazione data; l'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$.

Ordine di grandezza
La potenza di 10 che meglio rappresenta un numero; con la regola pratica, $a \cdot 10^n$ $(1 \leq a < 10)$ ha ordine 10^n se $a < 5$, 10^{n+1} se $a \geq 5$.

Proprietà invariantiva delle frazioni
Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente.

Reciproco
Il reciproco (o inverso) di un razionale $a \neq 0$ è il numero che moltiplicato per a dà 1; il reciproco di a/b è b/a.

Soluzioni

1. B. 12 è multiplo di 4: $\frac{12}{4} = 3$.

2. C. $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ (prodotti in croce: $18 \cdot 20 = 24 \cdot 15 = 360$).

3. A. $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{9}{20} = 0{,}45$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

4. C. $12 = 2^2 \cdot 3$ contiene il fattore 2 e il fattore 3: $\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$.

5. D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

6. A. $\frac{123 - 12}{90} = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$.

7. a) V. b) F: tra 0 e 1 ci sono infiniti razionali ($\mathbb{Q}$ è denso). c) F: 0 non ha reciproco. d) V. e) V: $\frac{3}{8} = 0{,}375$ ($8 = 2^3$).

8. a) $a \cdot d = b \cdot c$. b) $-\frac{5}{3}$. c) 2 e 5. d) $1 \le a < 10$.

9. a) $\frac{2}{3}$ (MCD 42); b) $\frac{5}{12}$ (MCD 30); c) $\frac{3}{5}$ (MCD 77); d) $-\frac{7}{4}$ (MCD 14).

10. mcm(6, 15, 10) = 30: $\frac{25}{30}$, $\frac{14}{30}$, $\frac{9}{30}$. Ordine crescente: $\frac{3}{10} < \frac{7}{15} < \frac{5}{6}$.

11. a) $\frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$; b) $\frac{21}{30} - \frac{8}{30} = \frac{13}{30}$; c) $\frac{-4 + 15 - 9}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; d) $\frac{16 - 3 + 2}{8} = \frac{15}{8}$.

12. a) $\frac{5}{6}$; b) $-\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{3} = -\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{2} : \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$; d) $\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{24}$.

13. a) $\frac{1}{8}$; b) $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; c) $(-2)^3 = -8$; d) 1; e) $\frac{1}{100} = 0{,}01$.

14. a) $\underline{8} = 2^3$: limitato, 0,875; b) 11: periodico semplice, $0{,}\overline{45}$; c) $6 = 2 \cdot 3$: periodico misto, $2{,}1\overline{6}$; d) $40 = 2^3 \cdot 5$: limitato, 0,225; e) $15 = 3 \cdot 5$: periodico misto, $0{,}2\overline{6}$.

15. a) $\frac{36}{100} = \frac{9}{25}$; b) $\frac{36}{99} = \frac{4}{11}$; c) $\frac{215 - 21}{90} = \frac{194}{90} = \frac{97}{45}$; d) $\frac{32 - 3}{9} = \frac{29}{9}$; e) $\frac{12}{990} = \frac{2}{165}$.

16. a) $7{,}2 \cdot 10^{-5}$; b) $4{,}56 \cdot 10^7$; c) $12 \cdot 10^{-3} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$; d) $4 \cdot 10^9$.

17. Si è semplificato un addendo, non un fattore: la proprietà invariantiva permette solo di dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero. Corretto: $\frac{2 + 3}{2 + 5} = \frac{5}{7}$, diverso da $\frac{3}{5}$ ($5 \cdot 5 = 25 \neq 21 = 7 \cdot 3$).

18. $\frac{a + b}{2} - a = \frac{b - a}{2} > 0$ e $b - \frac{a + b}{2} = \frac{b - a}{2} > 0$, perché $b - a > 0$; inoltre la media è razionale (somma e quoziente di razionali). Ripetendo il ragionamento fra a e la media, poi fra a e la nuova media, e così via, si ottengono infiniti razionali distinti, tutti compresi tra a e b.

19. Traccia: 1) con la regola, $0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$; 2) $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$, quindi $0{,}\overline{9} = 3 \cdot 0{,}\overline{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. (Si può anche usare la densità: fra $0{,}\overline{9}$ e 1 non c'è alcun numero.)

20. $1{,}41^2 = 1{,}9881$; $1{,}42^2 = 2{,}0164$; $1{,}414^2 = 1{,}999396$; $1{,}415^2 = 2{,}002225$. Quindi $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$. Un periodo non comparirà mai: un decimale periodico è un numero razionale, e $\sqrt{2}$ non lo è.

21. Se $\sqrt{3} = p/q$, allora $p^2 = 3q^2$. Nel primo membro il fattore 3 compare un numero pari di volte (ogni fattore di p compare due volte); nel secondo compare un numero pari di volte in q^2, più una: un numero dispari di volte. Per l'unicità della scomposizione in fattori primi è impossibile, quindi $\sqrt{3}$ non è razionale.

22. Per $\sqrt{4}$: da $p^2 = 4q^2$ il fattore 2 compare un numero pari di volte in entrambi i membri ($4 = 2^2$), quindi non c'è contraddizione: infatti $\sqrt{4} = 2$ è razionale ($p = 2$, $q = 1$). Per $\sqrt{8}$: $p^2 = 8q^2$ e $8 = 2^3$, quindi a destra il fattore 2 compare 3 volte più un numero pari, cioè un numero dispari di volte, a sinistra un numero pari: contraddizione, $\sqrt{8}$ è irrazionale. Il ragionamento funziona quando nel numero sotto radice qualche fattore primo compare con esponente dispari.

23. a) Le aree sono 4, 9 e 16 piedi quadrati. Il quadrato doppio deve avere area 8: con lato 4 l'area è 16, quattro volte (non due) quella iniziale; con lato 3 è 9, più di 8. b) $4 \cdot (4 : 2) = 8$ piedi quadrati, il doppio di 4. c) No. Il quadrato di lato $\frac{d}{2}$ ha area $8 : 4 = 2$, quindi $\frac{d}{2} = \sqrt{2}$. Se d fosse razionale, lo sarebbe anche il quoziente $\frac{d}{2} = \sqrt{2}$, contro il teorema. Dunque $d = 2\sqrt{2}$ è irrazionale: nessuna frazione di piede misura il lato cercato.

24. A piedi $\frac{3}{7} \cdot 28 = 12$, in bicicletta $\frac{1}{4} \cdot 28 = 7$; in autobus $28 - 12 - 7 = 9$ studenti, cioè $\frac{9}{28}$ della classe.

25. $t = (1{,}5 \cdot 10^{11}) : (3{,}0 \cdot 10^8) = 0{,}5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^2$ s = 500 s, cioè 8 min 20 s.

26. $\frac{5}{3}$ m $= 1{,}\overline{6}$ m; arrotondato al centimetro 1,67 m; errore assoluto $|1{,}67 - \frac{5}{3}| = \frac{1}{300}$ m $\approx 0{,}0033$ m, cioè circa 0,33 cm.

27. Il fattore è $6 : 4 = \frac{3}{2}$. Farina: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ kg = 1125 g; latte: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ litro.

28. Quaderno: $\frac{0{,}1}{29{,}7} \approx 0{,}0034 \approx 0{,}34\%$; terreno: $\frac{0{,}5}{250} = 0{,}002 = 0{,}2\%$. È più precisa la misura del terreno, anche se il suo errore assoluto è maggiore.

29. $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$; $\frac{1}{12} : 3 = \frac{1}{36}$; $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$; $\frac{1}{18} \cdot 9 = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

30. $0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$, $4\,500\,000 = 4{,}5 \cdot 10^6$, $0{,}009 = 9 \cdot 10^{-3}$. Prodotto: $27 \cdot 10^2$; diviso per $9 \cdot 10^{-3}$: $3 \cdot 10^5$.

31. a) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$: le frazioni sono $\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$ (periodico misto), $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (limitato), $\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$ (periodico misto), $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ (periodico semplice). b) Da $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ con $b, d > 0$ segue $ad < bc$. Allora $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$ e $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0$: numeratori e denominatori sono positivi. Esempio: tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$ la mediante è $\frac{4}{7}$.