CAPITOLO

1

I numeri naturali e i numeri interi

Contare è il primo gesto matematico: lo facciamo da bambini con le dita, ma dietro quel gesto c'è una struttura che non smette di sorprendere.

OBIETTIVI

1. Descrivere gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, rappresentarli sulla retta e confrontarne gli elementi.
2. Eseguire le operazioni e la divisione con resto, sapendo quando un'operazione è possibile e qual è il ruolo dello zero.
3. Usare le proprietà delle operazioni e delle potenze per calcolare in modo rapido e corretto, anche con i numeri negativi.
4. Riconoscere multipli, divisori e numeri primi; calcolare MCD e mcm, anche con l'algoritmo di Euclide.
5. Passare dalla base dieci alla base due e viceversa.
6. Spiegare perché la regola dei segni è l'unica compatibile con le proprietà delle operazioni.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 I numeri naturali e le operazioni 2
1.2 Proprietà, potenze ed espressioni 5
1.3 Divisibilità, numeri primi, MCD e mcm 8
1.4 I sistemi di numerazione 13
1.5 L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi 14
1.6 Addizione e sottrazione in $\mathbb{Z}$ 17
1.7 Moltiplicazione, divisione e potenze in $\mathbb{Z}$ 20

Matematica 1 · Parte I · I numeri · versione 1.0
Capitolo 1: I numeri naturali e i numeri interi · pagine 21–48 del volume completo · estratto per lo studio

Quanti studenti ci sono nella tua classe? Quante pagine ha questo libro? Si risponde con un numero «da contare»: 0, 1, 2, 3, … Sono i numeri più familiari, eppure nascondono domande che hanno impegnato i matematici per più di duemila anni: quanti sono i numeri primi? Come si trova in fretta il massimo comune divisore di due numeri enormi? Perché il computer «pensa» con due sole cifre?

In questo capitolo riprendiamo i numeri naturali e gli interi con uno sguardo nuovo: non ci basterà calcolare, vorremo capire perché le regole funzionano. La parola *aritmetica* viene dal greco ἀριθμός, «numero», e i Greci distinguevano l'ἀριθμητική, lo studio delle proprietà dei numeri, dalla λογιστική, l'arte pratica del calcolo: qui vogliamo tenere insieme le due cose.

1.1 I numeri naturali e le operazioni

1.1.1 L'insieme $\mathbb{N}$

I **numeri naturali** sono i numeri 0, 1, 2, 3, 4, …: quelli che servono a contare gli oggetti di una collezione finita, compresa la collezione vuota, che ha zero oggetti. Il loro insieme si indica con il simbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

I puntini indicano che l'elenco non finisce mai. In questo libro lo zero è considerato un numero naturale; quando vogliamo escluderlo scriviamo $\mathbb{N}^*$. Per dire che un numero appartiene a $\mathbb{N}$ usiamo il simbolo $\in$: $7 \in \mathbb{N}$, mentre $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Ogni numero naturale n ha un *successivo*, che è $n + 1$. Ogni numero naturale diverso da 0 ha anche un precedente, che è $n - 1$; lo zero invece non ha precedente in $\mathbb{N}$. Due numeri come 6 e 7, uno successivo dell'altro, si dicono consecutivi.

Questa costruzione «un passo alla volta» suggerisce di rappresentare i naturali su una *semiretta orientata*: si fissa un punto di partenza, l'origine, a cui si associa lo 0; si sceglie un verso (di solito verso destra) e un'unità di misura, cioè un segmento che si riporta più volte. A ogni numero corrisponde così un punto (Figura 1.1). Non tutti i punti della semiretta corrispondono però a numeri naturali: quelli tra 6 e 7, per esempio, restano «scoperti».

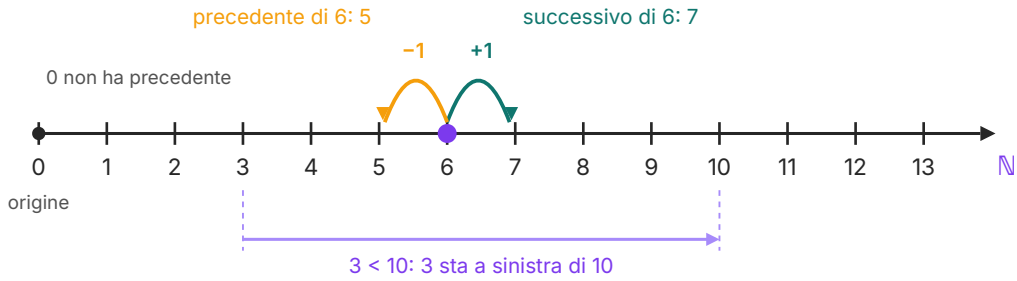


Figura 1.1 La semiretta dei numeri naturali. Ogni numero ha un successivo (+1); ogni numero tranne 0 ha un precedente (−1). Il numero minore sta sempre a sinistra del maggiore.

Dati due numeri naturali diversi, uno dei due è sempre minore dell'altro: diciamo che $\mathbb{N}$ è un insieme *totalmente ordinato*. Per confrontare i numeri usiamo i simboli

$$< \text{(minore)},\ > \text{(maggiore)},\ \leq \text{(minore o uguale)},\ \geq \text{(maggiore o uguale)}.$$

- $\mathbb{N}$ **ha un minimo**, lo 0: nessun naturale è minore di 0.
- $\mathbb{N}$ **non ha un massimo**: qualunque numero tu scelga, il suo successivo è più grande. Per questo $\mathbb{N}$ è un insieme infinito.
- $\mathbb{N}$ **è discreto**: tra due numeri consecutivi non c'è nessun altro numero naturale; per questo si dice che $\mathbb{N}$ è un insieme **discreto**. Nel capitolo 2 incontrerai i numeri razionali, che si comportano in modo opposto.

1.1.2 Le quattro operazioni

Un'operazione associa a due numeri, presi in un certo ordine, un terzo numero, il *risultato*. Nell'addizione $8 + 5 = 13$ i numeri 8 e 5 sono gli *addendi* e 13 la *somma*; nella moltiplicazione $8 \cdot 5 = 40$ sono i *fattori* e 40 il *prodotto*, che abbrevia l'addizione ripetuta $8 + 8 + 8 + 8 + 8$.

Sommando o moltiplicando due numeri naturali si ottiene sempre un numero naturale. Si dice che addizione e moltiplicazione sono **operazioni interne** a $\mathbb{N}$: non «fanno uscire» dall'insieme.

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione: $13 - 5 = 8$ (*minuendo* 13, *sottraendo* 5, *differenza* 8) perché $8 + 5 = 13$. Ma $5 - 13$? Nessun naturale sommato a 13 dà 5: in $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ si può eseguire solo se $a \geq b$, quindi la sottrazione **non** è un'operazione interna a $\mathbb{N}$.

Allo stesso modo la divisione esatta è l'inversa della moltiplicazione: $40 : 5 = 8$ (*dividendo* 40, *divisore* 5, *quoziente* 8) perché $8 \cdot 5 = 40$. E $7 : 2$? Nessun naturale moltiplicato per 2 dà 7: anche la divisione esatta non è interna a $\mathbb{N}$. Per allargare le possibilità di calcolo serviranno nuovi nume-

ri: gli interi relativi, che costruiremo più avanti in questo capitolo, per la sottrazione, i razionali (capitolo 2) per la divisione.

1.1.3 La divisione con resto e il ruolo dello zero

Quando la divisione esatta non è possibile, possiamo comunque chiederci quante volte il divisore «sta» nel dividendo e che cosa avanza. Se dividiamo 17 caramelle tra 5 amici, ciascuno ne riceve 3 e ne avanzano 2 (Figura 1.2).

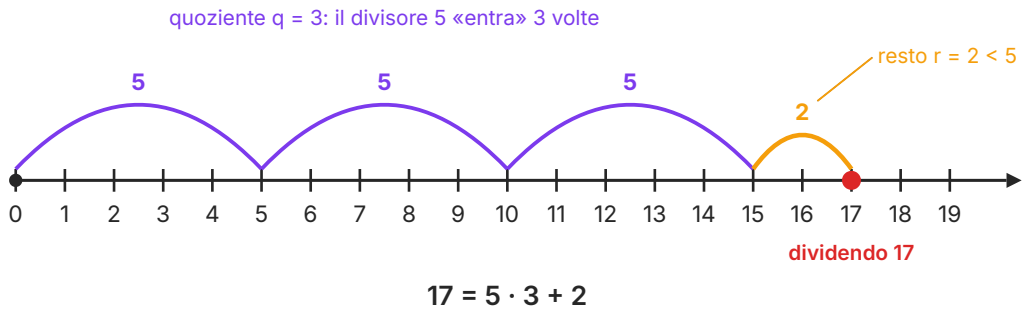


Figura 1.2 La divisione con resto 17 : 5. A partire da 0 si fanno salti di 5 finché si resta entro 17: i salti sono 3 (il quoziente) e ciò che manca per arrivare a 17 è 2 (il resto).

IN SINTESI

Divisione con resto

Dati due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, esistono e sono unici due numeri naturali q (il quoziente) e r (il resto) tali che

$$a = b \cdot q + r \text{ con } 0 \leq r < b.$$

La divisione è esatta quando $r = 0$.

Lo zero ha un comportamento speciale in tutte le operazioni. Nell'addizione non cambia nulla: $a + 0 = a$. Nella moltiplicazione «annulla» tutto: $a \cdot 0 = 0$. E nella divisione?

- **$0 : a = 0$** se $a \neq 0$, perché $0 \cdot a = 0$.
- ***a* : 0 è impossibile** se $a \neq 0$. Per esempio $6 : 0$ dovrebbe essere un numero che, moltiplicato per 0, dà 6; ma qualunque numero moltiplicato per 0 dà 0. Non esiste alcun risultato: la divisione si dice **impossibile**.
- **0 : 0 è indeterminata**. Il risultato dovrebbe essere un numero che, moltiplicato per 0, dà 0: ma questo è vero per *tutti* i numeri. Non c'è un unico risultato, e la divisione si dice **indeterminata**.

1.2 Proprietà, potenze ed espressioni

1.2.1 Le proprietà delle operazioni

La **proprietà commutativa** dice che in un'addizione o in una moltiplicazione l'ordine dei termini non conta: $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$. La **proprietà associativa** dice che si possono raggruppare i termini come si vuole: $(a + b) + c = a + (b + c)$, e lo stesso per il prodotto. Sottrazione e divisione non godono di queste proprietà: $(24 : 6) : 2 = 2$, mentre $24 : (6 : 2) = 8$.

La **proprietà distributiva** lega due operazioni diverse. La moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot ca \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Per esempio $7 \cdot 12 = 7 \cdot (10 + 2) = 70 + 14 = 84$. La divisione è distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione **solo a destra**, cioè quando la somma è il dividendo (e le divisioni sono tutte esatte):

$$(a + b) : c = a : c + b : c \text{ ad esempio } (40 + 12) : 4 = 10 + 3 = 13.$$

La **proprietà invariantiva** dice che una differenza non cambia se si aggiunge o si toglie lo stesso numero a entrambi i termini ($83 - 29 = 84 - 30 = 54$), e che un quoziente esatto non cambia se si moltiplicano o dividono dividendo e divisore per lo stesso numero diverso da zero ($1400 : 25 = 5600 : 100 = 56$).

Un **elemento neutro** lascia invariato l'altro termine: 0 è neutro per l'addizione ($a + 0 = a$), 1 per la moltiplicazione ($a \cdot 1 = a$). Lo 0 è invece l'*elemento assorbente* della moltiplicazione: $a \cdot 0 = 0$. Ne segue la legge di annullamento del prodotto: un prodotto è zero se e solo se almeno uno dei fattori è zero.

Tabella 1.1 Le proprietà delle operazioni in $\mathbb{N}$ (✓ = vale; – = non vale).

Proprietà	Addizione	Sottrazione	Moltiplicazione	Divisione
Interna a $\mathbb{N}$	✓	–	✓	–
Commutativa	✓	–	✓	–
Associativa	✓	–	✓	–
Distributiva	–	–	✓ rispetto a + e –	✓ solo a destra, rispetto a + e –
Invariantiva	–	✓ (± stesso numero)	–	✓ (· o : stesso numero ≠ 0)
Elemento neutro	0	0 solo a destra ($a - 0 = a$)	1	1 solo a destra ($a : 1 = a$)
Elemento assorbente	–	–	0	–

1.2.2 Le potenze

Come la moltiplicazione abbrevia un'addizione ripetuta, così la potenza abbrevia una moltiplicazione ripetuta. Se a e n sono numeri naturali e $n \geq 2$, la **potenza** a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n \text{ fattori}) \text{ per esempio } 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

Il numero a si chiama *base*, il numero n esponente. Si legge «a elevato alla n»; a^2 si legge anche «a al quadrato» e a^3 «a al cubo». La definizione si completa con due casi particolari, scelti in modo che le proprietà che vedremo restino sempre valide:

- $a^1 = a$ per ogni a;
- $a^0 = 1$ per ogni $a \neq 0$;
- 0^0 **non è definita**: è un'espressione priva di significato.

Perché $a^0 = 1$? Pensa al quoziente $2^5 : 2^5$, che vale $32 : 32 = 1$. Se vogliamo che valga la regola «quoziente di potenze di uguale base: si sottraggono gli esponenti», deve essere anche $2^5 : 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$. Quindi $2^0 = 1$. Con base 0 questo ragionamento non funziona, perché $0^5 : 0^5 = 0 : 0$, che è indeterminata.

IN SINTESI

Le cinque proprietà delle potenze

Per basi e esponenti naturali (con le basi diverse da 0 dove compaiono esponenti nulli o divisioni):

1. **Prodotto di potenze di uguale base:** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ($2^3 \cdot 2^4 = 2^7$)
2. **Quoziente di potenze di uguale base:** $a^m : a^n = a^{m-n}$, con $m \geq n$ ($5^8 : 5^6 = 5^2$)
3. **Potenza di una potenza:** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ($(3^2)^4 = 3^8$)
4. **Prodotto di potenze di uguale esponente:** $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ ($4^3 \cdot 5^3 = 20^3$)
5. **Quoziente di potenze di uguale esponente:** $a^n : b^n = (a : b)^n$, se la divisione $a : b$ è esatta ($12^5 : 4^5 = 3^5$)

ERRORE FREQUENTE

La potenza non si distribuisce su una somma. $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$, mentre $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$: la quarta proprietà vale per il *prodotto*, non per la somma.

Potenza di potenza e «esponente potenza» sono cose diverse. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$, mentre $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

1.2.3 Le espressioni e l'ordine delle operazioni

Un'*espressione* aritmetica è una sequenza di numeri legati da segni di operazione ed eventualmente da parentesi. Per evitare ambiguità, tutti seguono le stesse convenzioni.

DA RICORDARE

L'ordine delle operazioni

1. Si eseguono prima le operazioni dentro le parentesi: prima le tonde ( ), poi le quadre [ ], infine le graffe { }.
2. All'interno di ciascuna parentesi (e alla fine fuori da tutte) si calcolano prima le **potenze**, poi **moltiplicazioni e divisioni** nell'ordine in cui compaiono da sinistra a destra, infine **addizioni e sottrazioni**, anch'esse da sinistra a destra.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $2 \cdot [3^2 + (18 - 2 \cdot 5) : 4] - 5^2 : 5$.

Parentesi tonde. Prima la moltiplicazione, poi la sottrazione: $18 - 2 \cdot 5 = 18 - 10 = 8$.

Parentesi quadre. Prima la potenza, poi la divisione, infine l'addizione: $3^2 + 8 : 4 = 9 + 2 = 11$.

Fuori dalle parentesi. Prima la potenza, poi moltiplicazione e divisione, infine la sottrazione: $2 \cdot 11 - 25 : 5 = 22 - 5 = 17$.

1.3 Divisibilità, numeri primi, MCD e mcm

1.3.1 Multipli, divisori e criteri di divisibilità

Se la divisione $a : b$ è esatta, cioè se esiste un naturale k tale che $a = b \cdot k$, diciamo che a è un **multiplo** di b, e che b è un **divisore** di a (o che b divide a, o che a è divisibile per b). Per esempio $42 = 6 \cdot 7$: 42 è multiplo di 6 e di 7, che sono suoi divisori.

Per sapere se un numero è divisibile per un altro non sempre serve eseguire la divisione: per alcuni divisori basta guardare le cifre. La Tabella 1.2 riassume i criteri di divisibilità più usati.

Tabella 1.2 Criteri di divisibilità, con un esempio per ciascuno.

Per	Un numero è divisibile se…	Esempio
2	l'ultima cifra è pari (0, 2, 4, 6, 8)	3578: ultima cifra 8
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	4125: 4 + 1 + 2 + 5 = 12
4	le ultime due cifre formano un numero divisibile per 4 (oppure sono 00)	7316: 16 = 4 · 4
5	l'ultima cifra è 0 o 5	2035
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	5841: 5 + 8 + 4 + 1 = 18
10	l'ultima cifra è 0	6490
11	la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari (contando da destra) è 0 o un multiplo di 11	8371: posti dispari 1 + 3 = 4, posti pari 7 + 8 = 15; 15 − 4 = 11
25	le ultime due cifre sono 00, 25, 50 o 75	3475

1.3.2 Numeri primi e numeri composti

Un numero naturale maggiore di 1 si dice **numero primo** se ha esattamente due divisori, 1 e sé stesso; *numero composto* se ne ha di più. Così 2, 3, 5, 7, 11, 13 sono primi e 4, 6, 8, 9, 10, 12 com-

posti; 2 è l'unico primo pari. **1 non è né primo né composto** (ha un solo divisore), e nemmeno 0 è primo.

Per trovare tutti i primi fino a 100 si usa il **crivello di Eratostene**, dal nome del matematico greco Eratostene di Cirene (III secolo a.C.); *crivello* viene dal latino *cribellum*, diminutivo di *cribrum*, «setaccio». Si scrivono i numeri da 2 a 100; si cerchia il 2 e si cancellano i suoi multipli; il primo numero non cancellato, il 3, è primo: lo si cerchia e si cancellano i suoi multipli; poi si fa lo stesso con 5 e con 7. Ci si può fermare qui, perché un numero composto fino a 100 ha sempre un fattore primo non maggiore di 10. I numeri rimasti sono i 25 primi minori di 100 (Figura 1.3).

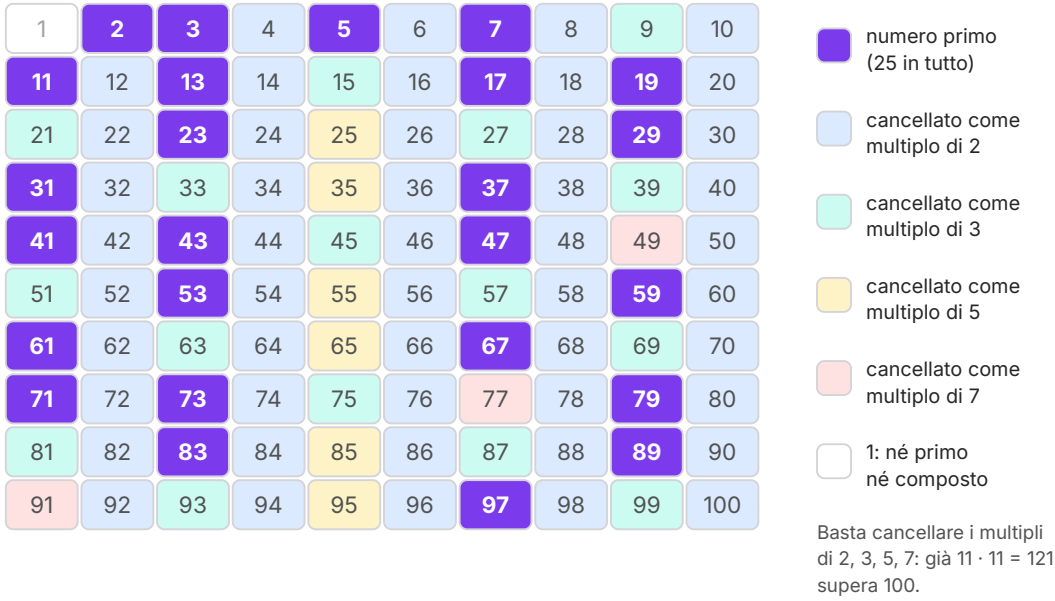


Figura 1.3 Il crivello di Eratostene da 1 a 100. Ogni numero composto è colorato secondo il più piccolo primo che lo divide, cioè secondo il passaggio in cui viene cancellato. Le caselle viola sono i 25 numeri primi minori di 100.

APPROFONDIMENTO

I numeri primi sono infiniti

Negli *Elementi*, l'opera scritta da Euclide ad Alessandria intorno al 300 a.C., si trova (nel libro IX) una delle dimostrazioni più celebri di tutta la matematica: i numeri primi sono più di qualunque quantità finita assegnata. L'idea, in linguaggio moderno, è questa. Supponiamo di avere un elenco finito di primi, per esempio 2, 3, 5. Costruiamo il numero $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$. Diviso per 2, per 3 o per 5, N dà sempre resto 1: nessun primo dell'elenco lo divide. Allora o N stesso è primo, oppure ha un fattore primo che non è nell'elenco. In ogni caso l'elenco era incompleto. Poiché il ragionamento vale per qualunque elenco finito, i primi non possono finire.

Attenzione: N non è sempre primo. Con 2, 3, 5, 7, 11, 13 si ottiene $30\,031 = 59 \cdot 509$: un numero composto, ma i suoi fattori 59 e 509 sono primi nuovi, che non erano nell'elenco.

1.3.3 La scomposizione in fattori primi

I numeri primi sono i «mattoni» con cui si costruiscono, per moltiplicazione, tutti gli altri numeri. Questo fatto è così importante da avere un nome solenne.

È il **teorema fondamentale dell'aritmetica**: ogni numero naturale maggiore di 1 si può scrivere come prodotto di numeri primi, e questa scrittura è **unica**, a meno dell'ordine dei fattori.

Non dimostreremo il teorema, ma lo useremo spesso. Per ottenere la **scomposizione in fattori primi** (o fattorizzazione) di un numero si divide ripetutamente per i primi 2, 3, 5, 7, 11, ..., aiutandosi con i criteri di divisibilità, finché si arriva a 1. Si possono disporre i calcoli «ad albero» oppure in colonna (Figura 1.4). Alla fine i fattori uguali si raccolgono in potenze.

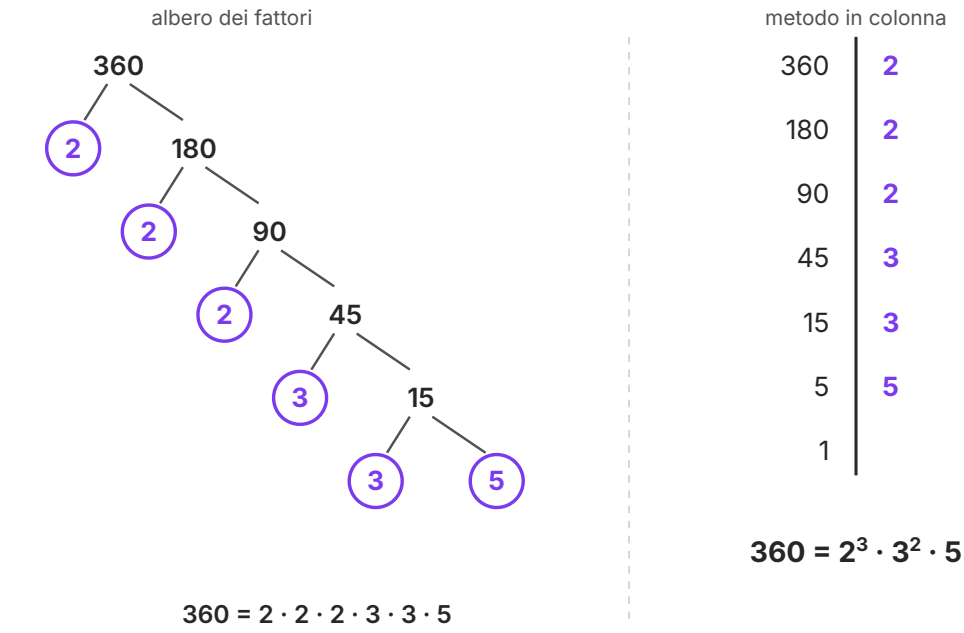


Figura 1.4 Due modi di scomporre 360 in fattori primi: l'albero dei fattori (a sinistra) e il metodo in colonna (a destra). I primi trovati sono cerchiati; in entrambi i casi si ottiene $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

1.3.4 Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Il **massimo comune divisore** (MCD) di due o più numeri è il più grande dei loro divisori comuni; il **minimo comune multiplo** (mcm) è il più piccolo dei loro multipli comuni diversi da zero. I divisori comuni di 12 e 18 sono 1, 2, 3, 6, quindi MCD(12, 18) = 6; i multipli di 12 sono 12, 24, 36, … e quelli di 18 sono 18, 36, …, quindi mcm(12, 18) = 36.

Due numeri il cui MCD è 1 si dicono **primi tra loro** (o coprimi): per esempio 8 e 15, che non sono primi ma non hanno fattori in comune. Elencare divisori e multipli diventa presto scomodo; con la scomposizione in fattori primi il calcolo è rapido.

IN SINTESI

MCD e mcm con la scomposizione in fattori primi

MCD: prodotto dei soli fattori primi **comuni**, ciascuno preso una sola volta con l'esponente **minore**.

mcm: prodotto dei fattori primi **comuni e non comuni**, ciascuno preso una sola volta con l'esponente **maggiore**.

Per **due** numeri vale $\text{MCD}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b) = a \cdot b$.

ESEMPIO SVOLTO

Problema. Con 120 penne e 84 matite si vogliono preparare confezioni tutte uguali, senza che avanzi nulla. Qual è il numero massimo di confezioni? Che cosa contiene ciascuna?

Che cosa si cerca. Il numero di confezioni deve dividere sia 120 sia 84, e deve essere il più grande possibile: è MCD(120, 84).

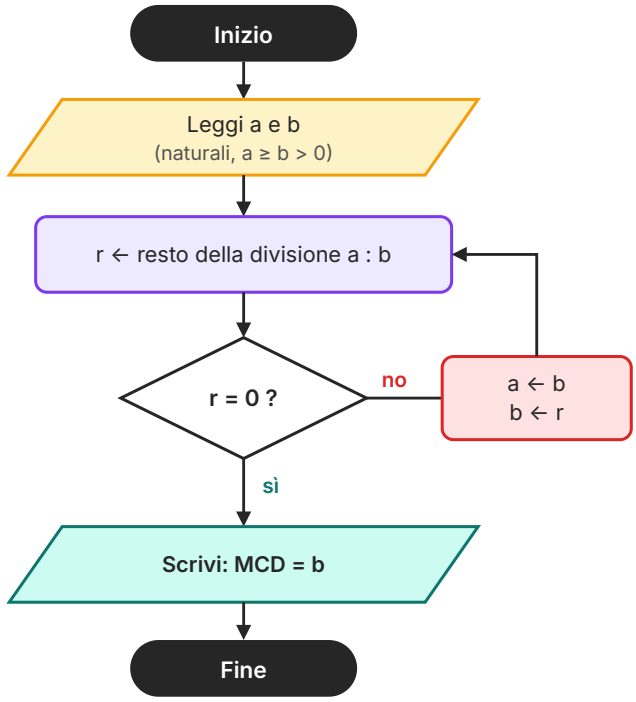
Calcolo. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Fattori comuni con l'esponente minore: $\text{MCD} = 2^2 \cdot 3 = 12$. Si preparano 12 confezioni, ciascuna con $120 : 12 = 10$ penne e $84 : 12 = 7$ matite.

Controllo con il mcm. $\text{mcm}(120, 84) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$, e infatti $12 \cdot 840 = 10\,080 = 120 \cdot 84$.

1.3.5 L'algoritmo di Euclide

Per numeri grandi anche la scomposizione diventa faticosa: prova a scomporre 30 031 a mano! Esiste però un metodo per trovare il MCD senza scomporre nulla, descritto già negli *Elementi* di Euclide (libro VII). Si basa su un'osservazione semplice: se $a = b \cdot q + r$, i divisori comuni di a e b sono esattamente i divisori comuni di b e r. Infatti un numero che divide a e b divide anche $r = a - b \cdot q$; e uno che divide b e r divide anche $a = b \cdot q + r$. Quindi $\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(b, r)$: si sostituisce la coppia di partenza con una coppia di numeri più piccoli, e si ripete finché il resto è 0. L'ultimo divisore usato è il MCD.

Questa procedura è un esempio di **algoritmo**: una sequenza finita di istruzioni precise che, eseguite in ordine, risolvono un problema in un numero finito di passi. Un algoritmo si può descrivere con un diagramma di flusso, in cui gli ovali indicano inizio e fine, i parallelogrammi i dati in ingresso e in uscita, i rettangoli le istruzioni e i rombi le domande (Figura 1.5).



Esempio: MCD(252, 198)

a	*b*	*r*
252	198	54
198	54	36
54	36	18
36	**18**	0

$252 = 198 \cdot 1 + 54$
$198 = 54 \cdot 3 + 36$
$54 = 36 \cdot 1 + 18$
$36 = 18 \cdot 2 + 0$

MCD(252, 198) = 18

Figura 1.5 Diagramma di flusso dell'algoritmo di Euclide e sua esecuzione per MCD(252, 198). La freccia «a ← b» significa «a prende il valore di b». Il ciclo si ripete finché il resto non diventa 0.

L'algoritmo di Euclide è il primo di una lunga serie: anche la conversione in base due che vedremo tra poco, e perfino il crivello di Eratostene, sono algoritmi. Nel capitolo 13 studieremo gli algoritmi in sé: come si descrivono, come si controlla che funzionino e come un computer li esegue.

1.4 I sistemi di numerazione

1.4.1 La notazione posizionale in base dieci

Un numero e il modo in cui lo scriviamo non sono la stessa cosa: «dodici», 12, XII e 1100_2 sono quattro scritture dello stesso numero. Noi usiamo un **sistema di numerazione posizionale** in base dieci: dieci cifre (0, 1, ..., 9), il cui valore dipende dalla *posizione*. In 3507 la cifra 3 vale 3 migliaia, la 5 vale 5 centinaia, e lo 0 segnala che le decine mancano:

$$3507 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Questa è la forma polinomiale del numero. L'idea decisiva è lo zero come cifra «segnaposto»: senza di esso non si distinguerebbe 357 da 3507.

Non tutti i sistemi sono posizionali: nei numeri romani, che ritrovi nelle epigrafi latine, un simbolo vale sempre lo stesso dovunque si trovi (XVII = 10 + 5 + 1 + 1 = 17), e, senza notazione posizionale né zero, i calcoli scritti erano così scomodi che i Romani contavano con l'abaco.

1.4.2 Il sistema binario

Nulla obbliga a usare dieci cifre. Nel **sistema binario**, o in base due, le cifre sono solo 0 e 1 e ogni posizione vale il doppio della precedente: 1, 2, 4, 8, 16, 32, … cioè le potenze di 2. Per indicare la base si scrive un piccolo indice: 1101_2 significa

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13.$$

Questo è anche il metodo per passare **dalla base 2 alla base 10**. Per il passaggio inverso, **dalla base 10 alla base 2**, si usano le divisioni successive: si divide il numero per 2, poi il quoziente per 2, e così via finché il quoziente è 0; i resti, letti dall'ultimo al primo, sono le cifre binarie (Figura 1.6). I circuiti di un computer distinguono bene due soli stati, «passa corrente» e «non passa corrente»: per questo i computer rappresentano i dati in base due, e una cifra binaria si chiama bit (da *binary digit*).



Figura 1.6 Conversione di 45 in base 2 con il metodo delle divisioni successive. I resti, letti dal basso verso l'alto, danno 101101_2; la tabella a destra verifica il risultato sommando le potenze di 2 corrispondenti alle cifre 1.

1.5 L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi

Con i numeri naturali possiamo sempre addizionare e moltiplicare, ma non sempre sottrarre: 3 − 5 non ha risultato in $\mathbb{N}$. Per secoli sembrò una limitazione innocua («non si tolgono cinque

mele da un cesto che ne contiene tre»). Eppure il mondo è pieno di grandezze che scendono sotto lo zero: il termometro in una mattina d'inverno, un conto in banca «in rosso», il piano interrato di un garage.

1.5.1 Grandezze con un «sopra» e un «sotto»

In tutti questi esempi ci sono tre ingredienti comuni: un **livello di riferimento**, che chiamiamo zero; una **quantità**, cioè la distanza da quel livello; un **verso**, cioè l'informazione «sopra o sotto», «avere o dovere», «avanti o indietro». La Figura 1.7 mostra due di queste situazioni: il termometro e la scala delle quote sono, a tutti gli effetti, due rette numeriche disposte in verticale.

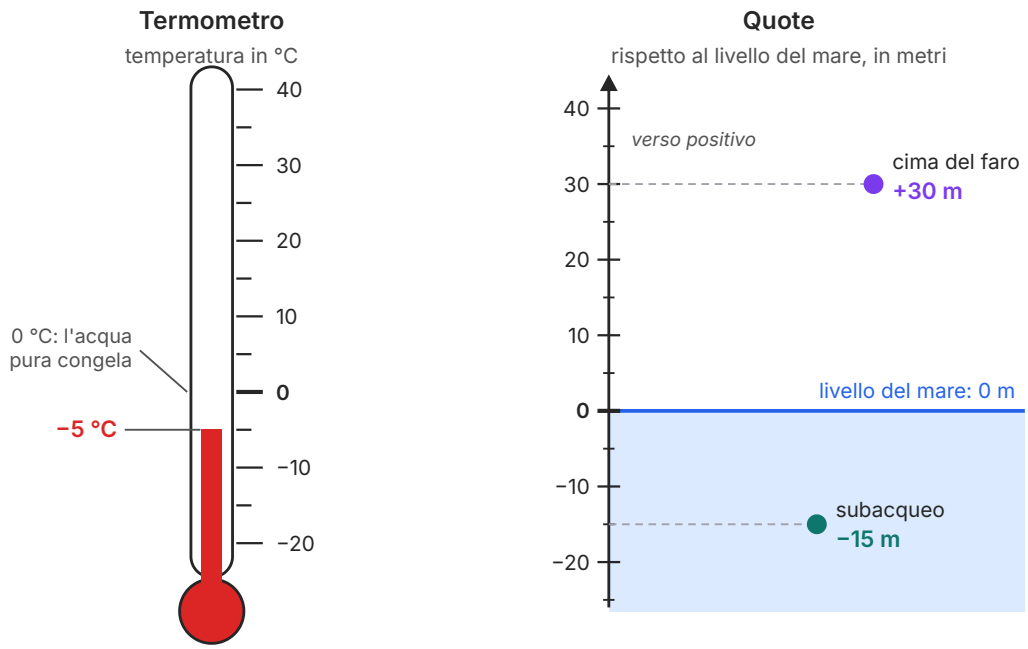


Figura 1.7 Il termometro e la scala delle quote sono due rette orientate verticali: lo zero è il livello di riferimento, i valori positivi stanno sopra e quelli negativi sotto. Il termometro segna −5 °C; il subacqueo si trova a quota −15 m.

1.5.2 I numeri interi relativi

Per descrivere queste situazioni con la matematica facciamo precedere i numeri naturali diversi da zero da un *segno*: il segno + (più) oppure il segno − (meno). Otteniamo così i **numeri interi relativi**, detti più brevemente *numeri interi*:

- i *numeri interi positivi* +1, +2, +3, +4, ..., che formano l'insieme $\mathbb{Z}^+$;
- i *numeri interi negativi* −1, −2, −3, −4, ..., che formano l'insieme $\mathbb{Z}^-$;

- lo **zero**, 0, che non è né positivo né negativo e quindi **non ha segno**.

L'insieme di tutti i numeri interi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$ (dalla parola tedesca *Zahl*, «numero»):

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$$

Il numero intero +3 si comporta in tutti i calcoli esattamente come il naturale 3: (+3) + (+4) = +7, proprio come 3 + 4 = 7. Per questo si *identificano* i naturali con gli interi positivi e lo zero, si scrive 3 al posto di +3 e si può dire che $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Ogni numero naturale è un intero, ma non viceversa: −7 è un intero che non è naturale. Il segno + dei positivi si può omettere, il segno − dei negativi mai.

1.5.3 La retta orientata e il valore assoluto

All'inizio del capitolo abbiamo rappresentato i naturali su una semiretta; per gli interi serve una retta intera, su cui fissiamo tre cose:

- un punto *O*, detto *origine*, che rappresenta lo zero;
- un **verso** di percorrenza, indicato da una freccia, che per convenzione va da sinistra verso destra;
- un segmento *u* scelto come **unità di misura**.

Una retta su cui sono stati fissati origine, verso e unità di misura si chiama **retta orientata**. Riportando l'unità a partire da *O* verso destra si ottengono i punti +1, +2, +3, ..., verso sinistra i punti −1, −2, −3, ... (Figura 1.8). I punti tra due interi consecutivi, come quello a metà strada tra 0 e +1, non rappresentano interi: li incontreremo nel prossimo capitolo, con i numeri razionali.

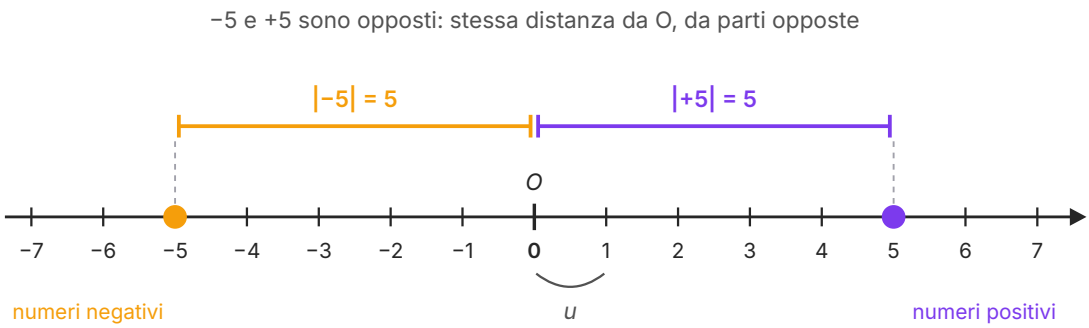


Figura 1.8 La retta orientata: l'origine O rappresenta lo 0, il verso positivo è indicato dalla freccia e u è l'unità di misura. I numeri opposti −5 e +5 si trovano alla stessa distanza da O, da parti opposte: il loro valore assoluto è 5.

Il **valore assoluto** (o *modulo*) di un numero intero a è la distanza del punto che lo rappresenta dall'origine. Si indica con $|a|$. In pratica, il valore assoluto si ottiene togliendo il segno:

$$|+7| = 7 \quad |-7| = 7 \quad |0| = 0$$

1.5.4 Opposti, concordi e discordi; l'ordine in $\mathbb{Z}$

Due numeri interi si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso, come +5 e −5. Sulla retta orientata due opposti sono simmetrici rispetto all'origine: stanno alla stessa distanza da O, uno a destra e uno a sinistra (Figura 1.8). Lo zero è considerato l'opposto di se stesso. L'opposto di un numero a si indica con $-a$; quindi l'opposto di +4 è −4, e l'opposto di −4 è $-(-4) = +4$.

Due numeri interi diversi da zero si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno, **discordi** se hanno segno diverso. Sono concordi +3 e +8, e anche −2 e −9; sono discordi +6 e −1. Lo zero, che non ha segno, non è né concorde né discorde con alcun numero.

Sulla retta orientata, tra due numeri interi è **minore** quello che sta più a sinistra. Così $-3 < +2$, perché −3 sta a sinistra di +2; e anche $-8 < -3$, perché −8 sta più a sinistra di −3. Le regole pratiche per confrontare due interi sono le seguenti:

- ogni numero positivo è maggiore di 0, e 0 è maggiore di ogni numero negativo;
- tra due numeri positivi è maggiore quello con valore assoluto maggiore: $+9 > +4$;
- tra due numeri negativi è maggiore quello con valore assoluto **minore**: $-4 > -9$.

In $\mathbb{N}$ lo 0 non ha un precedente ed è il minimo; in $\mathbb{Z}$ **ogni** numero ha sia un successivo sia un precedente, e quindi $\mathbb{Z}$ non ha né minimo né massimo. Come $\mathbb{N}$, anche $\mathbb{Z}$ è un *insieme discreto*: tra due interi consecutivi, come −4 e −3, non c'è nessun altro intero.

1.6 Addizione e sottrazione in $\mathbb{Z}$

1.6.1 L'addizione come spostamento

Un modo concreto per pensare all'addizione tra interi è immaginare spostamenti lungo la retta orientata: un positivo indica passi verso destra, un negativo passi verso sinistra. Calcolare $(+5) + (-8)$ significa partire da 0, fare 5 passi a destra e poi 8 a sinistra: si arriva in −3 (Figura 1.9), perché gli 8 passi a sinistra annullano i 5 a destra e ne avanzano 3.

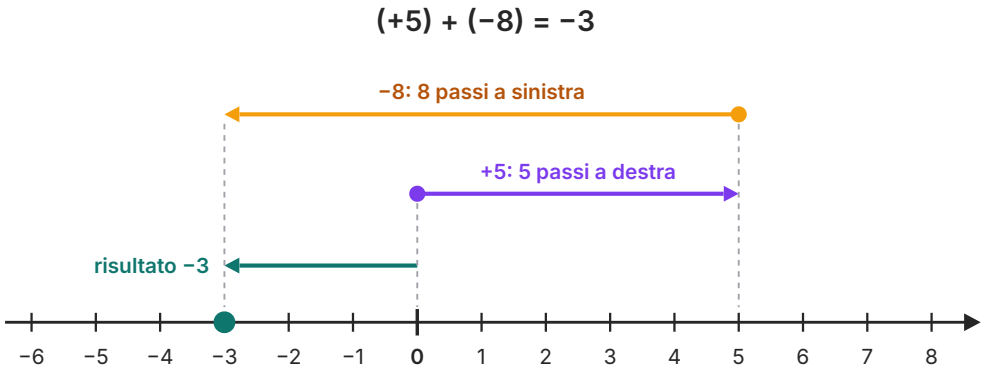


Figura 1.9 L'addizione (+5) + (−8) come successione di spostamenti: 5 passi verso destra a partire da 0, poi 8 passi verso sinistra. Lo spostamento complessivo porta da 0 a −3.

IN SINTESI

Somma di due numeri concordi. Ha lo stesso segno degli addendi e per valore assoluto la somma dei valori assoluti: (+6) + (+9) = +15; (−6) + (−9) = −15.

Somma di due numeri discordi. Ha il segno dell'addendo con valore assoluto maggiore e per valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e quello minore: (+6) + (−9) = −3; (−6) + (+9) = +3.

Somma di due numeri opposti. È zero: (−11) + (+11) = 0.

Zero. Aggiungere 0 non cambia un numero: $a + 0 = a$.

1.6.2 La sottrazione: addizionare l'opposto

In $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ chiede «quale numero devo aggiungere a b per ottenere a?». La stessa domanda ha senso in $\mathbb{Z}$, e ora ha sempre una risposta: il numero cercato è $a + (-b)$. Infatti, aggiungendo b a questo numero si ottiene $a + (-b) + b = a + 0 = a$. Abbiamo così trovato la regola fondamentale:

$$a - b = a + (-b)$$

cioè **sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto**. Qualche esempio:

$$(+4) - (+9) = (+4) + (-9) = -5 \qquad (-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -4$$

La Figura 1.10 mostra altre due sottrazioni come spostamenti sulla retta. Ora la sottrazione è sempre possibile: la differenza di due interi è ancora un intero, cioè la sottrazione è un'**operazione interna** a $\mathbb{Z}$. È proprio per questo che abbiamo costruito i numeri interi.

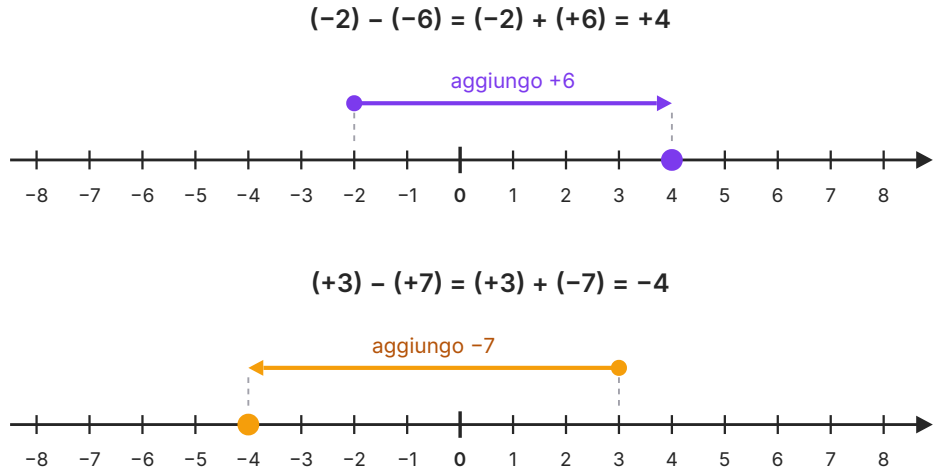


Figura 1.10 Sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto. In alto: togliere −6 equivale ad aggiungere +6, e da −2 si arriva a +4. In basso: togliere +7 equivale ad aggiungere −7, e da +3 si arriva a −4.

1.6.3 La somma algebrica e le parentesi

Poiché ogni sottrazione si può trasformare in un'addizione, in $\mathbb{Z}$ addizioni e sottrazioni si possono trattare come un'unica operazione, detta **somma algebrica**. Per scriverla in modo compatto si eliminano le parentesi che racchiudono i singoli numeri, applicando queste due regole:

- un segno + davanti alla parentesi lascia invariato il segno del numero: $+(+3) = +3$, $+(-3) = -3$;
- un segno − davanti alla parentesi cambia il segno del numero: $-(+3) = -3$, $-(-3) = +3$.

Per esempio:

$$(+7) + (-3) - (+5) - (-2) = 7 - 3 - 5 + 2 = 1$$

Nella scrittura $7 - 3 - 5 + 2$ i numeri $+7$, -3, -5, $+2$ sono i *termini* della somma algebrica. Poiché in $\mathbb{Z}$ addizione commutativa e associativa continuano a valere, conviene raccogliere da una parte i termini positivi e dall'altra i negativi: $15 - 8 - 12 + 3 - 4 + 9 = (15 + 3 + 9) - (8 + 12 + 4) = 27 - 24 = 3$.

Le regole precedenti si estendono alle parentesi che contengono più termini:

- se una parentesi è preceduta dal segno +, si può eliminare lasciando invariati i segni di tutti i termini che contiene: $10 + (4 - 6 + 1) = 10 + 4 - 6 + 1$;
- se una parentesi è preceduta dal segno −, si può eliminare **cambiando il segno di tutti i termini** che contiene: $10 - (4 - 6 + 1) = 10 - 4 + 6 - 1$.

ESEMPIO SVOLTO

Calcola $10 - [4 - (6 - 9) + (-2 + 5)] - (-7 + 3)$.

Dall'interno verso l'esterno. Le parentesi tonde valgono $6 - 9 = -3$, $-2 + 5 = 3$, $-7 + 3 = -4$. L'espressione diventa $10 - [4 - (-3) + 3] - (-4) = 10 - [4 + 3 + 3] + 4 = 10 - 10 + 4 = 4$.

Controllo, eliminando le parentesi. $10 - 4 + 6 - 9 + 2 - 5 + 7 - 3$: positivi $10 + 6 + 2 + 7 = 25$, negativi $4 + 9 + 5 + 3 = 21$, risultato $25 - 21 = 4$.

1.7 Moltiplicazione, divisione e potenze in $\mathbb{Z}$

1.7.1 La regola dei segni

Il prodotto di due numeri interi ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e per segno quello dato dalla **regola dei segni**: il prodotto (e il quoziente) di due numeri concordi è positivo, di due discordi è negativo. Se un fattore è 0, il prodotto è 0.

Tabella 1.3 La regola dei segni per la moltiplicazione (e per la divisione).

Primo fattore	Secondo fattore	Prodotto	Esempio
+	+	+	$(+3) \cdot (+4) = +12$
+	−	−	$(+3) \cdot (-4) = -12$
−	+	−	$(-3) \cdot (+4) = -12$
−	−	+	$(-3) \cdot (-4) = +12$

Che $(+3) \cdot (+4) = +12$ lo sappiamo dai naturali. Il prodotto $(+3) \cdot (-4)$ si legge «tre volte -4»: $(-4) + (-4) + (-4) = -12$, come tre debiti da 4 euro fanno un debito di 12. Il prodotto $(-3) \cdot (+4)$ deve dare lo stesso risultato, se vogliamo che la moltiplicazione resti commutativa. Più delicata è l'ultima riga: perché «meno per meno» dovrebbe fare «più»?

1.7.2 Perché meno per meno fa più

Primo argomento: la regolarità. Nella sequenza $3 \cdot (-2) = -6$, $2 \cdot (-2) = -4$, $1 \cdot (-2) = -2$, $0 \cdot (-2) = 0$ il prodotto aumenta di 2 a ogni passo: continuando, $(-1) \cdot (-2)$ dovrebbe valere $+2$.

Secondo argomento: la proprietà distributiva. La regolarità suggerisce la risposta; la deduzione la dimostra. Vogliamo che in $\mathbb{Z}$ continuino a valere la proprietà distributiva e il fatto che ogni numero moltiplicato per 0 dà 0. Allora

$$(-1) \cdot [(+1) + (-1)] = (-1) \cdot 0 = 0$$

ma, applicando la proprietà distributiva,

$$(-1)\cdot[(+1)+(-1)] = (-1)\cdot(+1)+(-1)\cdot(-1) = -1+(-1)\cdot(-1)$$

Dunque $-1+(-1)\cdot(-1)=0$, e il numero $(-1)\cdot(-1)$ è quello che, sommato a -1, dà zero: è l'opposto di -1, cioè $+1$. Se avessimo scelto $(-1)\cdot(-1)=-1$, la proprietà distributiva non sarebbe più valida. In questo senso la regola dei segni non è una convenzione arbitraria: è l'unica scelta che conserva le proprietà delle operazioni.

Con più di due fattori conviene stabilire prima il segno, contando i fattori negativi, e poi calcolare il valore assoluto: in $(-2)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(-5)$ i fattori negativi sono tre, un numero dispari, quindi il prodotto è -30; in $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$ sono quattro, e il prodotto è $+16$.

APPROFONDIMENTO

Una lunga strada verso i numeri negativi. I matematici greci non li consideravano numeri: per Euclide un numero (ἀριθμός) era una «moltitudine di unità», e una moltitudine non può essere minore di niente. In Cina, nei *Nove capitoli sull'arte matematica* (intorno al I secolo d.C.), quantità positive e negative si sommano e si sottraggono già con regole precise; in India, nel 628 d.C., Brahmagupta enuncia regole che parlano di «beni» e «debiti» e corrispondono alla nostra regola dei segni. In Europa l'accettazione fu lentissima: ancora nel 1545 Gerolamo Cardano chiama «fittizie» le soluzioni negative di un'equazione.

1.7.3 La divisione in $\mathbb{Z}$

Dati due interi a e b, con $b\neq 0$, il **quoziente** $a:b$ è, se esiste, il numero intero q tale che $q\cdot b=a$. Per il segno vale la stessa regola della moltiplicazione, e il valore assoluto è il quoziente dei valori assoluti:

$$(-36):(+9)=-4 \qquad (-36):(-4)=+9 \qquad (+36):(-12)=-3$$

Si può sempre controllare il risultato con la moltiplicazione: $(-4)\cdot(+9)=-36$. Il quoziente esiste in $\mathbb{Z}$ solo se $|b|$ divide $|a|$: $(+20):(-6)$ **non** è un intero. Come in $\mathbb{N}$, la divisione **non** è interna a $\mathbb{Z}$: per renderla sempre possibile (con divisore diverso da zero) servono i numeri razionali del capitolo 2.

1.7.4 Le potenze in $\mathbb{Z}$

Per le potenze con base intera valgono la definizione e le convenzioni viste in $\mathbb{N}$: $a^1=a$, $a^0=1$ se $a\neq 0$, e 0^0 non ha significato. Per esempio

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9 \qquad (-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27 \qquad (-3)^0=1$$

Il segno di una potenza si ricava dalla regola dei segni con più fattori: tutti i fattori sono uguali alla base, quindi se la base è negativa il numero di fattori negativi è proprio l'esponente.

Tabella 1.4 Il segno di una potenza a^n con base diversa da zero.

Base	Esponente	Segno della potenza	Esempio
positiva	qualsiasi	positivo	$(+2)^5 = +32$
negativa	pari	positivo	$(-2)^4 = +16$
negativa	dispari	negativo	$(-2)^5 = -32$

Le parentesi, nelle potenze, sono essenziali. In $(-3)^2$ l'esponente si riferisce a tutto il numero -3: $(-3)^2 = 9$. In -3^2 si riferisce solo a 3: $-3^2 = -9$, perché la potenza ha la precedenza sul cambio di segno. In generale $(-a)^n = a^n$ se n è pari e $(-a)^n = -a^n$ se è dispari. Quando sostituisci un numero negativo a una lettera, scrivilo sempre tra parentesi.

Le cinque proprietà delle potenze viste in $\mathbb{N}$ valgono anche per basi intere (diverse da zero dove compare un quoziente o un esponente nullo), perché derivano soltanto dalle proprietà della moltiplicazione: $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^5 = -32$, $[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$, $(+2)^3 \cdot (-5)^3 = (-10)^3 = -1000$.

1.7.5 Proprietà delle operazioni ed espressioni in $\mathbb{Z}$

Riassumiamo le proprietà di cui godono le operazioni in $\mathbb{Z}$. Rispetto a $\mathbb{N}$ c'è una novità fondamentale: ogni numero intero a ha un **elemento opposto** $-a$, tale che $a + (-a) = 0$. Lo zero, che è l'**elemento neutro** dell'addizione, si può quindi sempre «raggiungere» partendo da qualunque numero.

Tabella 1.5 Proprietà delle operazioni in $\mathbb{Z}$ (a, b, c interi qualsiasi).

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Operazione interna	sì	sì
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	0: $a + 0 = a$	1: $a \cdot 1 = a$
Elemento opposto	$a + (-a) = 0$	—
Elemento assorbente	—	0: $a \cdot 0 = 0$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	

APPROFONDIMENTO

Una struttura: il gruppo. Un insieme dotato di un'operazione interna associativa, con un elemento neutro e in cui ogni elemento ha un opposto (più in generale, un «simmetrico») si chiama **gruppo**; se l'operazione è anche commutativa il gruppo si dice *abeliano*, in onore del norvegese Niels Henrik Abel (1802–1829). $\mathbb{Z}$ con l'addizione è un gruppo abeliano; $\mathbb{N}$ con l'addizione no, perché nessun naturale diverso da zero ha l'opposto in $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ con la moltiplicazione nemmeno, perché 2 non ha un inverso in $\mathbb{Z}$. Riconoscere la stessa struttura in oggetti diversi, numeri, rotazioni, simmetrie, è una delle idee più potenti della matematica moderna: è il passaggio dallo studio delle *cose* allo studio delle *relazioni* tra le cose.

SINTESI

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ è totalmente ordinato, discreto, ha minimo 0 e non ha massimo; ogni numero ha un successivo, ogni numero tranne 0 un precedente.
- Addizione e moltiplicazione sono interne a $\mathbb{N}$; sottrazione e divisione esatta no.
- Divisione con resto: $a = b \cdot q + r$ con $0 \le r < b$ ($b \neq 0$).
- Proprietà commutativa e associativa per + e ·; distributiva di · rispetto a + e −; la divisione è distributiva solo a destra; invariantiva per − e :.
- $a^1 = a$; $a^0 = 1$ se $a \neq 0$; 0^0 non è definita. Le cinque proprietà valgono per prodotti e quozienti, mai per somme.
- Un primo ha esattamente due divisori; 1 non è né primo né composto; i primi sono infiniti (Euclide).
- MCD: fattori comuni con l'esponente minore; mcm: comuni e non comuni con l'esponente maggiore; per due numeri MCD · mcm = $a \cdot b$. L'algoritmo di Euclide trova il MCD con divisioni successive.
- Nei sistemi posizionali il valore di una cifra dipende dalla posizione; in base 2 le posizioni valgono 1, 2, 4, 8, ...
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$; lo 0 non ha segno; identificando $+n$ con n si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Sulla retta orientata ogni intero è un punto; il valore assoluto $|a|$ è la distanza dall'origine e non è mai negativo.
- Sottrarre equivale ad addizionare l'opposto: $a - b = a + (-b)$; in $\mathbb{Z}$ la sottrazione è un'operazione interna.
- Regola dei segni: concordi danno prodotto (e quoziente) positivo, discordi negativo; è l'unica scelta compatibile con la proprietà distributiva.
- Una potenza con base negativa è positiva se l'esponente è pari, negativa se è dispari; se n è pari, $(-a)^n = a^n$ è l'opposto di $-a^n$ (quindi diverso, se $a \neq 0$).

ESERCIZI

Comprendere

1. ● Quale affermazione sull'insieme $\mathbb{N}$ è vera?
   - **A.** $\mathbb{N}$ ha un massimo.
   - **B.** Ogni numero naturale ha un precedente in $\mathbb{N}$.
   - **C.** Tra due numeri naturali consecutivi non ci sono altri numeri naturali.
   - **D.** Lo 0 non appartiene a $\mathbb{N}$.

2. ● Nella divisione con resto $47 : 6$ il quoziente e il resto sono:
   - **A.** $q = 7, r = 5$
   - **B.** $q = 6, r = 11$
   - **C.** $q = 8, r = 1$
   - **D.** $q = 7, r = 4$

3. ● $(2^3)^2$ è uguale a:
   - **A.** 2^5
   - **B.** 2^6
   - **C.** 2^9
   - **D.** 4^5

4. ●● Il numero binario 11010_2 in base dieci vale:
   - **A.** 13
   - **B.** 52
   - **C.** 24
   - **D.** 26

5. ● Il valore assoluto di -7 è:
   - **A.** -7
   - **B.** 7
   - **C.** 1
   - **D.** 0

6. ●● Quanto vale -3^2?
   - **A.** 9
   - **B.** -9
   - **C.** -6
   - **D.** 6

7. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
a) 1 è un numero primo. b) La sottrazione è un'operazione interna a $\mathbb{N}$. c) 0 è multiplo di ogni numero naturale. d) Se un numero è divisibile per 9, allora è divisibile per 3. e) Per tre numeri qualsiasi MCD · mcm è uguale al prodotto dei tre numeri.

8. ● Vero o falso? Correggi le affermazioni false.
a) Ogni numero naturale è un numero intero.
b) Lo 0 è un intero positivo.
c) Due numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto.
d) Il prodotto di due numeri negativi è negativo.
e) In $\mathbb{Z}$ esiste un numero minore di tutti gli altri.

Calcolare

9. ● Calcola a mente, indicando la proprietà che usi: a) $25 \cdot 37 \cdot 4$; b) $99 \cdot 23$; c) $46 + 27 + 54$; d) $1400 : 25$; e) $83 - 29$.

10. ● Applica le proprietà delle potenze e scrivi il risultato come un'unica potenza: a) $3^4 \cdot 3^5$; b) $7^{12} : 7^4$; c) $(5^2)^3$; d) $6^7 : 2^7$; e) $4^3 \cdot 25^3$ (come potenza di 10); f) $(2^3 \cdot 2^4)^2 : 2^{10}$.

11. ● Scomponi in fattori primi: a) 84; b) 252; c) 1125; d) 2310; e) 4096.

12. ●● Calcola MCD e mcm con la scomposizione in fattori primi: a) 36 e 60; b) 84, 126 e 210; c) 35 e 48.

13. ●● Calcola il MCD con l'algoritmo di Euclide, scrivendo tutte le divisioni: a) MCD(1071, 462); b) MCD(377, 233).

14. ●● Converti: a) 37 in base 2; b) 100 in base 2; c) 1011011_2 in base 10.

15. ● Calcola le sottrazioni trasformandole in addizioni.
a) $(+4) - (+11)$ b) $(-6) - (-10)$ c) $(-8) - (+5)$ d) $0 - (-17)$

16. ●● Elimina le parentesi e calcola.
a) $12 - (5 - 9) + (-3 + 2)$
b) $-(7 - 10) - (-4 + 6 - 1)$
c) $5 - [3 - (8 - 11) + 2]$

17. ●● Stabilisci il segno senza calcolare, poi calcola il valore.
a) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$
b) $(-3)^4 \cdot (-2)^3$
c) $(-7)^0 \cdot (-1)^{11}$

18. ●● Calcola: $-2^2 + (-2)^2 - (-1)^5 \cdot 3 + (-6) : (+3)$.

Dimostrare e argomentare

19. ●● Dimostra che la somma di tre numeri naturali consecutivi è sempre un multiplo di 3. (Suggerimento: chiama n il più piccolo dei tre.)

20. ●● Spiega perché per stabilire se un numero è divisibile per 4 basta guardare le sue ultime due cifre.

21. ●● Spiega, usando la proprietà distributiva e il fatto che $a \cdot 0 = 0$, perché $(-1) \cdot (-1) = +1$.

22. ●● Trova l'errore e correggilo: «$-(4 - 9) + 3 = -4 - 9 + 3 = -10$».

Problemi

23. ● Un pavimento rettangolare misura 360 cm per 504 cm. Si vuole coprirlo con piastrelle quadrate uguali, intere, con il lato (in centimetri interi) più grande possibile. Quanto misura il lato? Quante piastrelle servono?

24. ●● Da una piazza partono tre linee di autobus: la A ogni 12 minuti, la B ogni 18, la C ogni 30. Alle 7:00 partono tutte insieme. A che ora ripartiranno di nuovo tutte e tre insieme?

25. ● Oggi è martedì. Che giorno della settimana sarà fra 100 giorni? (Suggerimento: usa la divisione con resto per 7.)

26. ●● Un subacqueo si trova a quota −18 m. Risale di 7 m, poi scende di 11 m. A quale quota si trova alla fine? In quel momento un gabbiano vola a quota +25 m proprio sopra di lui: quanti metri separano il gabbiano dal subacqueo?

27. ●● Nel calendario che usiamo dopo l'anno 1 a.C. viene direttamente l'anno 1 d.C.: l'anno zero non esiste. L'imperatore Augusto nacque nel 63 a.C. e morì nel 14 d.C. Rappresenta gli anni a.C. con numeri negativi e calcola quanti anni separano l'anno della nascita da quello della morte. Perché la semplice differenza $14 - (-63)$ dà un risultato sbagliato di 1?

Con il computer

28. ●● *Euclide nel foglio di calcolo.* In un foglio di calcolo scrivi 2730 in A1 e 1430 in B1; in C1 scrivi =RESTO(A1;B1). Nella riga 2 scrivi =B1 in A2, =C1 in B2 e copia C1 in C2. Trascina la riga 2 verso il basso finché nella colonna C compare 0. a) Quali coppie compaiono nelle righe? b) Qual è il MCD(2730, 1430)? c) Verifica il risultato con la scomposizione in fattori primi.

Verso la verifica

29. ●● Di due numeri si sa che il MCD è 6, il mcm è 72 e uno dei due è 18. Trova l'altro. È possibile che due numeri abbiano MCD = 5 e mcm = 72? Motiva la risposta.

30. ●● Calcola: $\{-[(-2)^2 - 3 \cdot (-1)]^2 : (-7) + (-4)^3 : (-2)^4\} - |-5 + 2|$.

31. ●●● **Sfida.** a) Calcola, senza svolgere tutte le operazioni una per una, la somma algebrica $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$.
b) Calcola $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{2025}$.
c) Quante sono le coppie ordinate di interi $(a; b)$ tali che $a \cdot b = -6$? Elencale.

PER APPROFONDIRE

- [ENZ] Un romanzo in dodici «notti» in cui un ragazzo scopre, giocando, numeri primi, potenze e molto altro.
- [DUS] La storia dei numeri primi e delle domande ancora aperte su di essi, raccontata per un pubblico non specialista.
- [CR] Il primo capitolo tratta i numeri naturali, l'induzione e la teoria dei numeri primi a un livello più avanzato.
- [EUC] I libri VII e IX degli *Elementi*: l'algoritmo per il massimo comune divisore e l'infinità dei primi.
- [BOY] Per la storia dei numeri negativi in Cina, in India e in Europa.

Glossario del capitolo

Algoritmo di Euclide
Metodo per calcolare il MCD di due numeri sostituendo la coppia (a, b) con (b, r), dove r è il resto di a : b, finché il resto è 0.

Divisione con resto
Dati a e b ≠ 0, la ricerca dei naturali unici q e r con a = b · q + r e 0 ≤ r < b.

Divisione impossibile
La divisione a : 0 con a ≠ 0: nessun numero può esserne il risultato.

Divisione indeterminata
La divisione 0 : 0: qualunque numero andrebbe bene come risultato, quindi non ce n'è uno solo.

Elemento neutro
Numero che in un'operazione lascia invariato l'altro termine: 0 per l'addizione, 1 per la moltiplicazione.

Gruppo
Insieme con un'operazione interna associativa, dotata di elemento neutro, in cui ogni elemento ha il simmetrico. $\mathbb{Z}$ con l'addizione è un gruppo abeliano (commutativo).

Insieme discreto
Insieme in cui tra due elementi consecutivi non ce ne sono altri, come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Massimo comune divisore (MCD)
Il più grande divisore comune a due o più numeri; si ottiene dai fattori primi comuni con l'esponente minore.

Minimo comune multiplo (mcm)
Il più piccolo multiplo comune, diverso da 0, di due o più numeri; si ottiene dai fattori primi comuni e non comuni con l'esponente maggiore.

Numeri interi relativi
I numeri ..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, ...: i naturali diversi da zero preceduti da un segno, più lo zero. Il loro insieme si indica con $\mathbb{Z}$.

Numeri naturali
I numeri 0, 1, 2, 3, ... usati per contare; il loro insieme si indica con $\mathbb{N}$.

Numeri opposti
Due interi con lo stesso valore assoluto e segno diverso, come +5 e −5; la loro somma è 0. Lo 0 è opposto di se stesso.

Numero primo
Numero naturale maggiore di 1 che ha esattamente due divisori, 1 e sé stesso.

Operazione interna
Operazione che, applicata a elementi di un insieme, dà sempre un risultato nello stesso insieme: in $\mathbb{N}$ addizione e moltiplicazione, in $\mathbb{Z}$ anche la sottrazione.

Potenza
Prodotto di n fattori uguali alla base a, scritto a^n; $a^1 = a$, $a^0 = 1$ se $a \neq 0$, 0^0 non è definita.

Proprietà distributiva
a · (b + c) = a · b + a · c; per la divisione vale solo a destra: (a + b) : c = a : c + b : c.

Regola dei segni
Il prodotto e il quoziente di due interi non nulli sono positivi se i numeri sono concordi, negativi se sono discordi.

Sistema posizionale
Sistema di numerazione in cui il valore di una cifra dipende dalla posizione che occupa; in base 2 le posizioni valgono 1, 2, 4, 8, ...

Teorema fondamentale dell'aritmetica
Ogni naturale maggiore di 1 si scrive come prodotto di numeri primi in modo unico, a meno dell'ordine dei fattori.

Valore assoluto
Distanza dall'origine del punto che rappresenta un intero a; si indica con |a|. È sempre ≥ 0: |−7| = |+7| = 7.

Soluzioni

1. C. $\mathbb{N}$ non ha massimo, 0 non ha precedente e $0 \in \mathbb{N}$; tra due naturali consecutivi non ci sono altri naturali ($\mathbb{N}$ è discreto).

2. A. $47 = 6 \cdot 7 + 5$, con $0 \le 5 < 6$. (In B il resto è ≥ 6; C e D non rispettano l'uguaglianza: $6 \cdot 8 + 1 = 49$ e $6 \cdot 7 + 4 = 46$.)

3. B. Potenza di potenza: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$.

4. D. $11010_2 = 16 + 8 + 0 + 2 + 0 = 26$.

5. B. $|-7| = 7$: il valore assoluto è la distanza dall'origine.

6. B. $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$: la base della potenza è 3, non -3.

7. a) F: 1 non è né primo né composto (ha un solo divisore). b) F: per esempio $3 - 5$ non ha risultato in $\mathbb{N}$. c) V: $0 = n \cdot 0$. d) V: $9 = 3 \cdot 3$, quindi ogni multiplo di 9 è multiplo di 3. e) F: vale solo per due numeri; per 2, 4, 8 si ha $\text{MCD} \cdot \text{mcm} = 2 \cdot 8 = 16 \neq 64$.

8. a) V. b) F: lo 0 non ha segno, non è né positivo né negativo. c) V. d) F: il prodotto di due negativi è positivo, es. $(-2) \cdot (-3) = +6$. e) F: $\mathbb{Z}$ non ha minimo, ogni intero ha un precedente.

9. a) $(25 \cdot 4) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3700$ (commutativa e associativa). b) $(100 - 1) \cdot 23 = 2300 - 23 = 2277$ (distributiva). c) $(46 + 54) + 27 = 100 + 27 = 127$ (commutativa e associativa). d) $5600 : 100 = 56$ (invariantiva, $\cdot 4$). e) $84 - 30 = 54$ (invariantiva, $+1$).

10. a) 3^9. b) 7^8. c) 5^6. d) $(6 : 2)^7 = 3^7$. e) $(4 \cdot 25)^3 = 100^3 = (10^2)^3 = 10^6$. f) $(2^7)^2 : 2^{10} = 2^{14} : 2^{10} = 2^4$.

11. a) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. b) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. c) $1125 = 3^2 \cdot 5^3$. d) $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. e) $4096 = 2^{12}$.

12. a) $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$: $\text{MCD} = 2^2 \cdot 3 = 12$, $\text{mcm} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. b) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$: $\text{MCD} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $\text{mcm} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. c) $35 = 5 \cdot 7$, $48 = 2^4 \cdot 3$: $\text{MCD} = 1$ (primi tra loro), $\text{mcm} = 35 \cdot 48 = 1680$.

13. a) $1071 = 462 \cdot 2 + 147$; $462 = 147 \cdot 3 + 21$; $147 = 21 \cdot 7 + 0$: $\text{MCD} = 21$. b) $377 = 233 \cdot 1 + 144$; $233 = 144 \cdot 1 + 89$; $144 = 89 \cdot 1 + 55$; $89 = 55 \cdot 1 + 34$; $55 = 34 \cdot 1 + 21$; $34 = 21 \cdot 1 + 13$; $21 = 13 \cdot 1 + 8$; $13 = 8 \cdot 1 + 5$; $8 = 5 \cdot 1 + 3$; $5 = 3 \cdot 1 + 2$; $3 = 2 \cdot 1 + 1$; $2 = 1 \cdot 2 + 0$: $\text{MCD} = 1$ (377 e 233 sono primi tra loro).

14. a) $37 = 100101_2$ $(32 + 4 + 1)$. b) $100 = 1100100_2$ $(64 + 32 + 4)$. c) $64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91$.

15. a) $(+4) + (-11) = -7$ b) $(-6) + (+10) = +4$ c) $(-8) + (-5) = -13$ d) $0 + (+17) = +17$.

16. a) $12 - (-4) + (-1) = 12 + 4 - 1 = 15$. b) $+3 - (+1) = 2$ (oppure $-7 + 10 + 4 - 6 + 1 = 2$). c) $5 - [3 + 3 + 2] = 5 - 8 = -3$.

17. a) 5 fattori negativi: negativo; -120. b) $(-3)^4 = +81$ positivo, $(-2)^3 = -8$ negativo: prodotto negativo, -648. c) $(-7)^0 = 1$, $(-1)^{11} = -1$: negativo, -1.

18. $-4 + 4 - (-1) \cdot 3 + (-2) = -4 + 4 + 3 - 2 = 1$.

19. I tre numeri sono n, $n + 1$, $n + 2$. La somma è $n + n + 1 + n + 2 = 3 \cdot n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$ per la proprietà distributiva: è un multiplo di 3 (il triplo del numero centrale). Es.: $7 + 8 + 9 = 24 = 3 \cdot 8$.

20. Ogni numero si scrive come (numero delle centinaia) $\cdot$ 100 + (numero formato dalle ultime due cifre). Poiché $100 = 4 \cdot 25$ è multiplo di 4, il primo addendo è sempre multiplo di 4; quindi il numero è divisibile per 4 se e solo se lo è il secondo addendo, cioè il numero formato dalle ultime due cifre.

21. Traccia: $(-1) \cdot [1 + (-1)] = (-1) \cdot 0 = 0$. Per la proprietà distributiva lo stesso prodotto vale $(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$. Quindi $-1 + (-1) \cdot (-1) = 0$: il numero $(-1) \cdot (-1)$ sommato a -1 dà 0, perciò è l'opposto di -1, cioè $+1$.

22. Il segno $-$ davanti alla parentesi deve cambiare il segno di tutti i termini, anche di -9. Corretto: $-(4 - 9) + 3 = -4 + 9 + 3 = 8$ (controllo: $4 - 9 = -5$, $-(-5) + 3 = 8$).

23. Il lato è MCD(360, 504): $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, MCD = 72 cm. Piastrelle: $(360 : 72) \cdot (504 : 72) = 5 \cdot 7 = 35$.

24. mcm(12, 18, 30): $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; mcm $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ minuti = 3 ore. Ripartono insieme alle 10:00.

25. $100 = 7 \cdot 14 + 2$: dopo 14 settimane complete è di nuovo martedì, poi altri 2 giorni. Sarà giovedì.

26. $-18 + 7 - 11 = -22$ m. Distanza: $(+25) - (-22) = 47$ m.

27. 63 a.C. → −63, 14 d.C. → +14. Gli anni trascorsi sono 76. La differenza $14 - (-63) = 77$ conterebbe anche un «anno zero» che non è mai esistito: tra il 1 a.C. e il 1 d.C. passa 1 anno, non 2. Bisogna quindi togliere 1: $77 - 1 = 76$. (Poiché Augusto nacque a settembre e morì ad agosto, morì a 75 anni, poco prima di compierne 76.)

28. a) (2730, 1430) con resto 1300; (1430, 1300) con resto 130; (1300, 130) con resto 0. b) MCD = 130. c) $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ e $1430 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, fattori comuni $2 \cdot 5 \cdot 13 = 130$.

29. Per due numeri MCD · mcm = $a \cdot b$: $6 \cdot 72 = 18 \cdot b$, quindi $b = 432 : 18 = 24$ (controllo: MCD(18, 24) = 6, mcm(18, 24) = 72). MCD = 5 e mcm = 72 non è possibile: il MCD divide entrambi i numeri, che a loro volta dividono il mcm, quindi il MCD deve dividere il mcm; ma 5 non divide 72.

30. $(-2)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7$; $-[7]^2 = -49$; $(-49) : (-7) = +7$; $(-4)^3 : (-2)^4 = (-64) : 16 = -4$; graffa: $7 - 4 = 3$; $|-5 + 2| = |-3| = 3$. Risultato: $3 - 3 = 0$.

31. a) Si raggruppano i termini a coppie: $(1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (99 - 100)$; ci sono 50 coppie e ciascuna vale −1: la somma è −50. b) I termini valgono alternativamente −1 (esponente dispari) e +1 (esponente pari); da 1 a 2024 ci sono 1012 coppie $(-1 + 1) = 0$, resta $(-1)^{2025} = -1$. Somma: −1. c) Sono 8: (1; −6), (−1; 6), (2; −3), (−2; 3), (3; −2), (−3; 2), (6; −1), (−6; 1).