CAPITOLO

11

La relatività ristretta: spazio e tempo

«D'ora in poi lo spazio per sé e il tempo per sé sono destinati a dissolversi in pure ombre, e solo una sorta di unione dei due conserverà un'esistenza indipendente.» — Hermann Minkowski, Raum und Zeit, conferenza del 1908 (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Spiegare perché la velocità della luce prevista da Maxwell metteva in crisi la relatività galileiana e descrivere l'esperimento di Michelson e Morley.
2. Enunciare i due postulati della relatività ristretta e ricavarne la relatività della simultaneità.
3. Ricavare con l'orologio a luce la dilatazione dei tempi $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ e calcolare il fattore di Lorentz.
4. Applicare la contrazione delle lunghezze e descrivere il viaggio di un muone in due sistemi di riferimento.
5. Riconoscere la velocità della luce come velocità limite e leggere un diagramma spaziotempo con il cono di luce.
6. Risolvere il paradosso dei gemelli e distinguere la relatività dal relativismo.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 La velocità della luce e il problema dell'etere 2

11.2 I postulati di Einstein e la simultaneità 5

11.3 La dilatazione dei tempi 9

11.4 La contrazione delle lunghezze e il limite di velocità 15

11.5 Lo spaziotempo 17

Fisica 5 · Parte V · La fisica del Novecento · versione 1.0
Capitolo 11: La relatività ristretta: spazio e tempo · pagine 315–340 del volume completo · estratto per lo studio

Un muone è una particella elementare, una specie di elettrone circa duecento volte più pesante, che vive in media due milionesimi di secondo e poi si trasforma in altre particelle. I muoni nascono a molti chilometri di quota, quando i raggi cosmici urtano gli atomi dell'alta atmosfera, e scendono verso il suolo quasi alla velocità della luce. In due milionesimi di secondo, anche alla velocità della luce, si percorrono poco più di 600 metri: quasi nessun muone dovrebbe arrivare fino a noi. Eppure un piccolo rivelatore sul tavolo di un'aula ne conta di continuo, circa uno al minuto per ogni centimetro quadrato di superficie. Qualcosa, nel nostro modo di misurare il tempo e lo spazio, non funziona.

Con questo capitolo comincia la quinta parte del volume, dedicata alla fisica del Novecento e ai problemi che hanno portato a nuovi concetti di spazio e tempo, massa ed energia. La parte si può studiare tutta, oppure seguendo, dopo questo capitolo, la strada del macrocosmo (capitolo 12) o quella del microcosmo (capitoli 13 e 14). Qui partiamo da una domanda lasciata aperta nel capitolo 10: se la luce è un'onda elettromagnetica che viaggia alla velocità c, rispetto a che cosa si misura quella velocità? La risposta, data da Albert Einstein nel 1905, ha cambiato il significato delle parole «contemporaneamente», «durata» e «lunghezza».

11.1 La velocità della luce e il problema dell'etere

11.1.1 La nave di Galileo

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632) Galileo chiude il lettore nella stiva di una grande nave, con mosche, farfalle, pesci in un vaso e un secchiello che gocciola. Finché la nave è ferma tutto si svolge in un certo modo; poi Salviati, il portavoce di Galileo, conclude: «Fate muover la nave con quanta si voglia velocità; chè (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma» (G. Galilei, *Dialogo*, Giornata seconda; Edizione Nazionale, vol. VII, pp. 212–213).

11.1.2 Rispetto a che cosa viaggia la luce?

Nel capitolo 10 hai visto che dalle leggi dell'elettromagnetismo, sintetizzate da Maxwell nel 1865, si ricava che le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con una velocità ben determinata, $c = 1/\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)} \approx 3{,}00 \times 10^8$ m/s, che è la velocità della luce. Le leggi di Maxwell non dicono però *rispetto a che cosa*. Per la meccanica di Galileo e di Newton la domanda era inevitabile: se un treno corre a 30 m/s e il suo faro emette luce in avanti, per chi sta a terra la luce dovrebbe viaggiare a $c + 30$ m/s, e per chi viaggia con la luce dovrebbe sembrare ferma.

DA RICORDARE

Dal volume del terzo anno: la relatività galileiana

Un sistema di riferimento inerziale è un sistema in cui vale il principio d'inerzia; ogni sistema in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale è anch'esso inerziale. Il principio di relatività galileiana afferma che le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali: nessun esperimento di meccanica, fatto dentro la nave, rivela se la nave è ferma o in moto uniforme (Fisica 3, capitolo 13).

Le trasformazioni di Galileo collegano le misure di due sistemi inerziali in moto relativo con velocità V lungo l'asse x: $x' = x - V\,t$ e $t' = t$. Ne segue la composizione delle velocità $v' = v - V$: una palla lanciata in avanti a 10 m/s su un treno che va a 30 m/s si muove, rispetto al suolo, a 40 m/s. La seconda relazione, $t' = t$, dice che il tempo è lo stesso per tutti: è l'ipotesi che questo capitolo metterà in discussione.

I fisici dell'Ottocento risposero con un'ipotesi naturale: come il suono si propaga nell'aria, la luce si propaga in un mezzo che riempie tutto l'universo, l'etere (Fisica 4, capitolo 16), e c è la sua velocità rispetto all'etere. Le equazioni di Maxwell, allora, valevano esattamente solo in un sistema privilegiato, quello fermo rispetto all'etere: sarebbe bastato un esperimento di ottica o di elettromagnetismo per scoprire il proprio moto «assoluto». Il principio di relatività avrebbe riguardato la meccanica, non la luce.

La Terra gira intorno al Sole a circa 30 km/s, e quindi doveva muoversi attraverso l'etere. Per un osservatore terrestre questo moto equivaleva a un **vento d'etere** che soffia in senso contrario, come chi pedala in un giorno senza vento sente l'aria venirgli incontro. La luce, trascinata da questo vento, avrebbe dovuto avere velocità un poco diverse nelle varie direzioni: un po' minore controvento, un po' maggiore a favore di vento. L'effetto è piccolissimo, perché 30 km/s è un diecimillesimo di c; serviva uno strumento capace di confrontare due tempi di volo della luce con una precisione mai raggiunta.

11.1.3 L'esperimento di Michelson e Morley

Lo strumento fu ideato da Albert A. Michelson e perfezionato con Edward W. Morley a Cleveland, negli Stati Uniti, nel 1887. Nell'**interferometro di Michelson** (Figura 11.1) un fascio di luce incontra uno specchio semiriflettente, una lastra di vetro con un velo d'argento sottilissimo, che ne lascia passare metà e ne riflette metà: i due fasci percorrono due bracci perpendicolari, vengono rimandati indietro da due specchi e si ricombinano nel rivelatore, dove interferiscono. Sullo schermo compaiono frange chiare e scure, come nell'esperimento di Young (Fisica 4, capitolo 16): la loro posizione dipende dalla differenza fra i tempi impiegati dalla luce nei due bracci, e basta che uno dei due tempi cambi di una frazione del periodo della luce perché le frange si spostino.

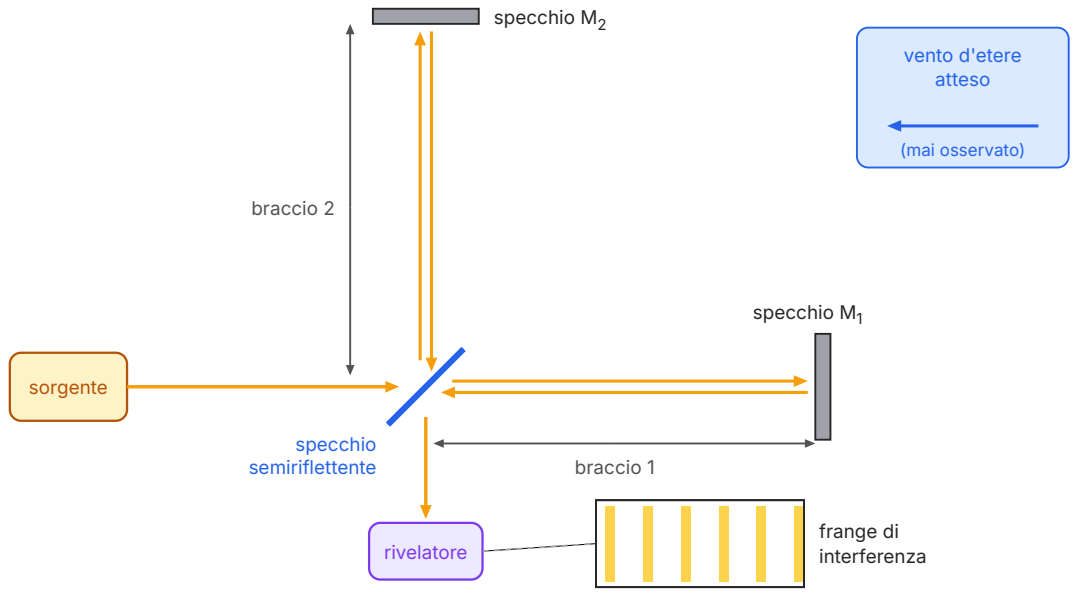


Figura 11.1 L'interferometro di Michelson (schema, non in scala). Lo specchio semiriflettente divide il fascio in due; dopo aver percorso i due bracci perpendicolari, i due fasci si ricombinano nel rivelatore e, interferendo, producono frange. Se la luce viaggiasse a velocità diverse lungo i due bracci a causa del moto della Terra nell'etere, ruotando lo strumento le frange dovrebbero spostarsi.

L'idea era questa: se un braccio è parallelo al vento d'etere e l'altro perpendicolare, la luce impiega tempi leggermente diversi nei due bracci; ruotando di 90° tutto l'apparato i ruoli si scambiano, e le frange devono spostarsi. Per rendere l'effetto misurabile Michelson e Morley montarono gli specchi su una pesante lastra di pietra che galleggiava su un bagno di mercurio, così da poterla ruotare lentamente senza vibrazioni, e allungarono il cammino della luce a circa 11 m con riflessioni multiple. Il calcolo prevedeva uno spostamento di circa quattro decimi di frangia: piccolo, ma ben visibile.

Il risultato fu nullo. Lo spostamento osservato era, scrissero i due autori, certamente minore di un ventesimo di quello atteso, e probabilmente minore di un quarantesimo; ripetuto poi da molti altri, in stagioni diverse, quando la Terra si muove in direzioni diverse, e con strumenti sempre più sensibili, l'esperimento non ha mai rivelato alcun vento d'etere. Nel 1907 Michelson ricevette il premio Nobel per la fisica, per i suoi strumenti ottici di precisione e le misure fatte con essi.

Per quasi vent'anni i fisici cercarono di salvare l'etere con ipotesi aggiuntive. La più famosa, avanzata da George FitzGerald e da Hendrik Lorentz, era che i corpi in moto nell'etere si accorciassero nella direzione del moto, proprio della quantità necessaria a compensare l'effetto (vedi l'Approfondimento alla fine del paragrafo). Era un'ipotesi costruita per spiegare un solo risulta-

to negativo, e lasciava un sospetto: forse la natura stava dicendo che il moto «assoluto» rispetto all'etere non si può rivelare in nessun modo.

APPROFONDIMENTO

Lorentz, FitzGerald e Poincaré prima del 1905

L'irlandese George FitzGerald propose nel 1889, in una breve lettera alla rivista *Science*, che la lunghezza dei corpi dipendesse dal loro moto nell'etere. L'olandese Hendrik Antoon Lorentz arrivò alla stessa ipotesi in modo indipendente nel 1892, e la inserì in una teoria degli elettroni sempre più completa: nel 1904 scrisse le formule che collegano le coordinate e i tempi di due sistemi in moto relativo, con un «tempo locale» diverso da sistema a sistema, che per lui era però solo un artificio di calcolo.

Il matematico francese Henri Poincaré discusse a lungo questi temi. Parlò di un «principio di relatività» che dovrebbe valere per tutti i fenomeni, osservò che la simultaneità di due eventi lontani richiede una convenzione per sincronizzare gli orologi e, nel 1905, diede alle formule di Lorentz il nome di **trasformazioni di Lorentz**, con cui sono note ancora oggi.

Che cosa aggiunse allora Einstein? Lorentz e Poincaré tenevano l'etere e cercavano di spiegare perché non si vedesse; Einstein, nel 1905, lo dichiarò superfluo e ricavò tutto da due principi, facendo del tempo misurato dagli orologi in moto il tempo vero di quel sistema, non un artificio. Le stesse formule acquistavano un significato nuovo: non descrivevano più una deformazione prodotta dall'etere, ma la struttura dello spazio e del tempo. In questo capitolo useremo soltanto due conseguenze di quelle trasformazioni, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze.

11.2 I postulati di Einstein e la simultaneità

11.2.1 Il lavoro del 1905

Nel 1905 Albert Einstein aveva ventisei anni e lavorava come esperto tecnico all'Ufficio federale dei brevetti di Berna. In quell'anno pubblicò sulla rivista tedesca *Annalen der Physik* quattro lavori che cambiarono la fisica: uno sui quanti di luce (capitolo 13), uno sul moto browniano, che diede una prova dell'esistenza degli atomi, e due sulla relatività. Il primo di questi, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* («Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento»), non parte dall'esperimento di Michelson e Morley, che non vi è neppure nominato: vi si accenna soltanto, in generale, ai «tentativi falliti» di rivelare un moto della Terra rispetto al «mezzo luminoso». Parte invece da un'asimmetria dell'elettromagnetismo. Un magnete che si muove vicino a una spira ferma e una spira che si muove vicino a un magnete fermo producono la stessa corrente indotta (capitolo 8), ma la teoria dell'epoca descriveva i due casi in modi diversi, come se contasse chi si muove «davvero». Per Einstein contava solo il moto relativo.

Nell'introduzione Einstein enuncia così le due ipotesi su cui costruisce tutto il lavoro (traduzione della redazione): «per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica valgono anche le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica [...]. Vogliamo elevare questa congettura (il cui contenuto sarà chiamato nel seguito "principio di relatività") a postulato, e introdurre inoltre il postulato, solo apparentemente incompatibile con esso, che la luce si propaghi sempre nello spazio vuoto con una velocità determinata V, indipendente dallo stato di moto del corpo che la emette». E poco più avanti: «L'introduzione di un "etere luminifero" si rivelerà superflua».

11.2.2 Due postulati

La teoria che ne nacque si chiama **relatività ristretta**: «ristretta» perché riguarda soltanto i sistemi di riferimento inerziali, in moto rettilineo uniforme gli uni rispetto agli altri (la relatività generale, del 1915, estenderà il discorso ai sistemi accelerati e alla gravità, capitolo 12). I suoi due postulati, nella forma che useremo, sono:

1. **principio di relatività:** tutte le leggi della fisica, della meccanica, dell'elettromagnetismo e dell'ottica, hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali; non esiste un sistema privilegiato, e nessun esperimento permette di stabilire se un sistema inerziale è «fermo» o «in moto»;
2. **costanza della velocità della luce:** la luce si propaga nel vuoto con la stessa velocità c in tutti i sistemi inerziali, qualunque sia il moto della sorgente e dell'osservatore.

Il primo è il **principio di relatività** di Galileo esteso a tutta la fisica: la nave di Galileo, con un laboratorio di elettromagnetismo nella stiva, resta indistinguibile da una nave ferma. Il secondo è il **postulato della costanza della velocità della luce**. Presi uno per uno sembrano innocui; insieme sono esplosivi. Se un'astronave che si allontana dalla Terra a metà della velocità della luce accende un faro in avanti, chi è a bordo misura per la luce del faro la velocità c, e chi è sulla Terra misura per la stessa luce ancora c, non 1,5 c. La composizione galileiana delle velocità, $v' = v - V$, non può valere per la luce, e quindi non può essere esatta: e poiché discende da $t' = t$, è l'idea di un tempo uguale per tutti che deve cadere.

Il secondo postulato spiega da solo il risultato di Michelson e Morley: la luce ha la stessa velocità in tutte le direzioni rispetto all'interferometro, cioè si propaga in modo isotropo, comunque si muova la Terra, e le frange non hanno ragione di spostarsi. Ma Einstein lo pose come principio, non come generalizzazione di quell'esperimento: la conferma più diretta, la misura della velocità della luce emessa da sorgenti in moto rapidissimo, è venuta molto più tardi, con le particelle prodotte negli acceleratori.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Relatività viene da «relativo», dal latino tardo *relativus*, a sua volta da *relatio*, «il riportare, il riferire» (da *referre*, participio *relatus*). Relativo è ciò che si definisce riferendolo ad altro: la velocità di un corpo, e con Einstein anche la durata di un fenomeno e la lunghezza di un oggetto, sono relative al sistema di riferimento. Lo stesso sistema di riferimento contiene la stessa radice.

Simultaneità è costruita su *simul*, avverbio latino che significa «insieme, nello stesso tempo»; l'aggettivo *simultaneus* è del latino medievale. Sono simultanei gli eventi che accadono «insieme»: questo capitolo mostra che «insieme» ha bisogno di un osservatore.

Etere viene dal greco αἰθήρ, «aria luminosa, cielo»: per Aristotele era il quinto elemento, la sostanza dei cieli, diversa dai quattro elementi del mondo sublunare (Fisica 4, capitolo 3). Il nome passò al mezzo ipotetico della luce, che come l'etere aristotelico doveva riempire i cieli senza opporre resistenza al moto degli astri.

Isotropo è un composto moderno dal greco ἴσος, «uguale», e τρόπος, «modo, maniera» (da τρέπω, «volgere»): è isotropo ciò che si comporta allo stesso modo in tutte le direzioni, come la propagazione della luce nel vuoto per ogni osservatore inerziale.

11.2.3 La relatività della simultaneità

La prima vittima è la simultaneità. In fisica un **evento** è qualcosa che accade in un punto preciso dello spazio in un istante preciso: un lampo, lo scoccare di un orologio, l'arrivo di un treno. Due eventi lontani si dicono **simultanei** per un osservatore se, misurati con orologi fermi rispetto a lui e sincronizzati, avvengono allo stesso istante. Il metodo più semplice per sincronizzare è di Einstein: un osservatore a metà strada fra due punti A e B riceve la luce di due lampi; se la riceve nello stesso istante, i lampi erano simultanei, perché la luce ha percorso distanze uguali alla stessa velocità.

Immaginiamo ora, con un esempio simile a quello che Einstein stesso rese celebre, un treno che corre lungo un binario rettilineo, e due fulmini che colpiscono le due estremità A e B del treno, lasciando un segno sul treno e sul binario (Figura 11.2). L'osservatore O è fermo sulla massicciata, a metà fra i due segni; l'osservatore O′ è seduto al centro del treno. Supponiamo che per O i due lampi siano simultanei: la luce di A e quella di B arrivano a O nello stesso istante. Nel frattempo, però, O′ si è mosso verso B, andando incontro alla luce che viene da B e allontanandosi da quella che viene da A: la luce di B lo raggiunge prima.

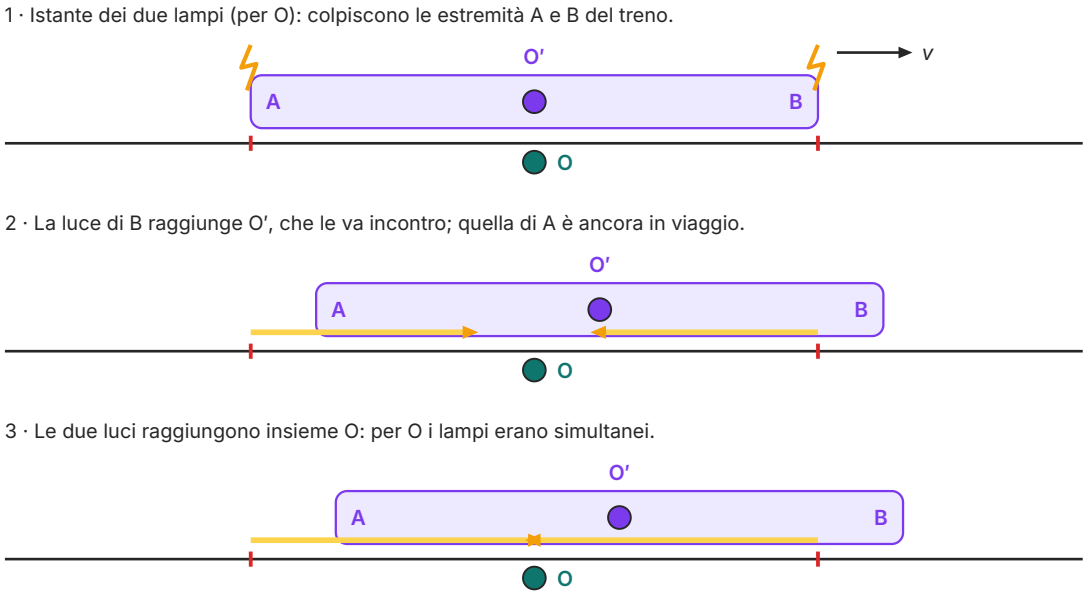


Figura 11.2 La relatività della simultaneità, descritta nel sistema del binario (tre istanti successivi; velocità del treno 0,3 *c*). Per l'osservatore O, fermo a terra a metà fra i punti colpiti, i due lampi sono simultanei: la loro luce gli arriva insieme. L'osservatore O′, al centro del treno, va incontro alla luce di B e riceve prima quella: nel sistema del treno, dove la luce ha la stessa velocità *c* nei due versi e O′ è equidistante da A e B, il lampo in B è avvenuto prima.

Che cosa ne conclude O′? Per lui il treno è fermo, ed egli è esattamente a metà fra A e B. Per il secondo postulato la luce viaggia anche nel suo sistema alla velocità *c* in entrambi i versi. Se la luce di B arriva prima, il lampo in B è avvenuto prima. Per O i lampi sono simultanei, per O′ no, e nessuno dei due sbaglia: è la **relatività della simultaneità**. Due eventi lontani, simultanei in un sistema inerziale, non sono simultanei in un altro sistema in moto rispetto al primo lungo la retta che li congiunge. Non è un difetto delle misure né un ritardo dovuto al tempo di viaggio della luce, che ciascun osservatore ha già messo in conto: è una proprietà del tempo.

L'effetto è minuscolo alle velocità di tutti i giorni, ed è per questo che non ce ne accorgiamo: per un treno lungo 200 m che corre a 300 km/h la differenza fra i due istanti, nel sistema del treno, è di circa due decimillesimi di miliardesimo di secondo (2×10^{-13} s). Ma il principio è stabilito, e ha una conseguenza diretta: se gli osservatori non concordano su che cosa accade «nello stesso istante», non possono concordare neppure sulle durate e sulle lunghezze, perché misurare la lunghezza di un oggetto in moto significa segnare le posizioni dei suoi due estremi nello stesso istante.

11.3 La dilatazione dei tempi

11.3.1 L'orologio a luce

Per confrontare i tempi di due osservatori useremo l'orologio più semplice che si possa immaginare, e il più adatto, perché il suo funzionamento si basa solo sul secondo postulato. Un **orologio a luce** è formato da due specchi paralleli, a distanza d, fra i quali un impulso di luce rimbalza avanti e indietro; ogni andata e ritorno è un «tic» (Figura 11.3a). Nel sistema in cui l'orologio è fermo, la luce percorre $2d$ alla velocità c, e la durata di un tic è

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$$

Con $d = 1{,}5$ m, per esempio, $\Delta t_0 = 3{,}0\ \text{m}/(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s}) = 1{,}0 \times 10^{-8}$ s: cento milioni di tic al secondo. Un orologio a luce non si costruisce in pratica, ma qualunque orologio reale, a pendolo, al quarzo o atomico, deve andare d'accordo con esso, se fermo accanto a esso: altrimenti un osservatore potrebbe confrontare i due orologi e scoprire il proprio stato di moto, contro il principio di relatività.

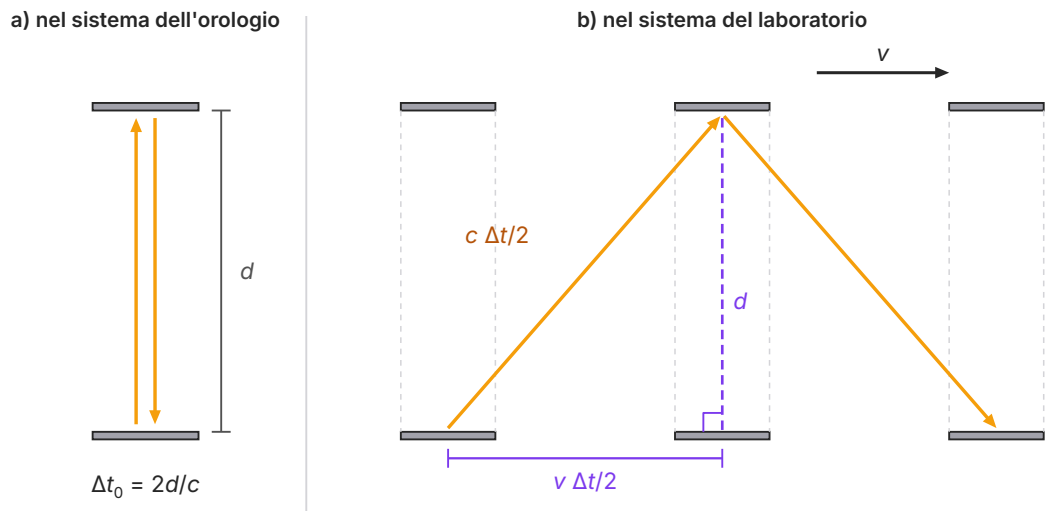


Figura 11.3 L'orologio a luce. a) Nel sistema in cui l'orologio è fermo la luce va dallo specchio in basso a quello in alto e torna indietro: un tic dura $\Delta t_0 = 2d/c$. b) Nel sistema del laboratorio, in cui l'orologio si muove verso destra con velocità v, la luce percorre i lati obliqui di un triangolo. Nel triangolo rettangolo evidenziato il cateto verticale è d, quello orizzontale $v\,\Delta t/2$ e l'ipotenusa $c\,\Delta t/2$.

11.3.2 Lo stesso orologio visto in moto

Ora l'orologio viaggia con velocità v verso destra rispetto al laboratorio (Figura 11.3b). Per gli osservatori del laboratorio, mentre la luce sale, lo specchio superiore si sposta, e la luce deve percorrere un tratto obliquo, più lungo di d; lo stesso al ritorno. Sia Δt la durata di un tic misurata nel laboratorio. In mezzo tic l'orologio avanza di $v\,\Delta t/2$, mentre la luce percorre, alla stessa velocità c (secondo postulato!), il tratto obliquo $c\,\Delta t/2$. Per il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo della figura:

$$(c\,\Delta t/2)^2 = d^2 + (v\,\Delta t/2)^2$$

Moltiplichiamo per 4 e portiamo a sinistra il termine con v: $\Delta t^2\,(c^2 - v^2) = 4d^2$. Dividendo per c^2 e ricordando che $2d/c = \Delta t_0$, si ottiene $\Delta t^2\,(1 - v^2/c^2) = {\Delta t_0}^2$, e infine, estraendo la radice:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \qquad \text{con} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

Il numero γ si chiama **fattore di Lorentz**. Non va confuso con il coefficiente γ delle trasformazioni adiabatiche dei gas (Fisica 4, capitolo 10): è un altro numero, che per tradizione porta la stessa lettera. Il fattore di Lorentz è un numero puro, vale 1 per $v = 0$ e cresce con la velocità, senza limite quando v si avvicina a c. Poiché $\gamma \geq 1$, la relazione dice che il tic dell'orologio in moto, misurato nel laboratorio, è *più lungo* del tic dello stesso orologio misurato nel suo sistema: l'orologio in moto rimane indietro. È la **dilatazione dei tempi**.

L'intervallo Δt_0 ha un nome. Si chiama **tempo proprio** di un fenomeno l'intervallo di tempo fra due eventi che avvengono *nello stesso luogo*, misurato da un orologio fermo in quel luogo: per l'orologio a luce, la partenza e il ritorno dell'impulso sullo specchio inferiore; per una persona, due battiti del suo cuore misurati con il suo orologio da polso. Il tempo proprio è il più breve fra tutti quelli che diversi osservatori inerziali possono misurare per gli stessi due eventi: per ogni altro osservatore, che vede i due eventi in luoghi diversi, l'intervallo è γ volte più lungo.

La dilatazione vale per ogni orologio e per ogni processo, non solo per gli orologi a luce: il ritmo del cuore di un astronauta, il decadimento di una particella, l'invecchiamento delle cellule. Se l'orologio a luce rallentasse e il cuore no, l'astronauta, confrontandoli a bordo, potrebbe scoprire il proprio moto, e il principio di relatività sarebbe violato. Per lo stesso motivo l'astronauta non si accorge di nulla: nel suo sistema il suo orologio e il suo cuore vanno al ritmo di sempre.

11.3.3 Quanto vale il fattore di Lorentz

La Tabella 11.1 e la Figura 11.4 mostrano come cresce γ. Fino a un decimo della velocità della luce, cioè 30 000 km/s, il fattore di Lorentz differisce da 1 per meno dell'uno per cento; un aereo di linea viaggia a circa un milionesimo di c, e per esso $\gamma - 1$ vale circa 5×10^{-13}. Per questo la fisica di Newton e di Galileo funziona così bene nella vita quotidiana e nel sistema solare: la relati-

vità ristretta non la smentisce, la contiene come caso limite per v molto minore di c. Le cose cambiano vicino alla velocità della luce: a 0,866 c il tempo dell'orologio in moto scorre a metà, a 0,99 c circa sette volte più lentamente.

Tabella 11.1 Il fattore di Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ per alcune velocità (calcolato). L'ultima colonna dice quanto dura, nel laboratorio, un'ora segnata da un orologio in moto.

v/c	v (km/s)	γ	un'ora dell'orologio in moto dura, nel laboratorio
0,01	3000	1,000 05	1 h e 0,18 s
0,1	30 000	1,005	1 h e 18 s
0,5	150 000	1,155	1 h 9 min
0,6	180 000	1,25	1 h 15 min
0,8	240 000	1,667	1 h 40 min
0,866	259 800	2,00	2 h
0,99	297 000	7,09	7 h 5 min
0,995	298 500	10,0	10 h

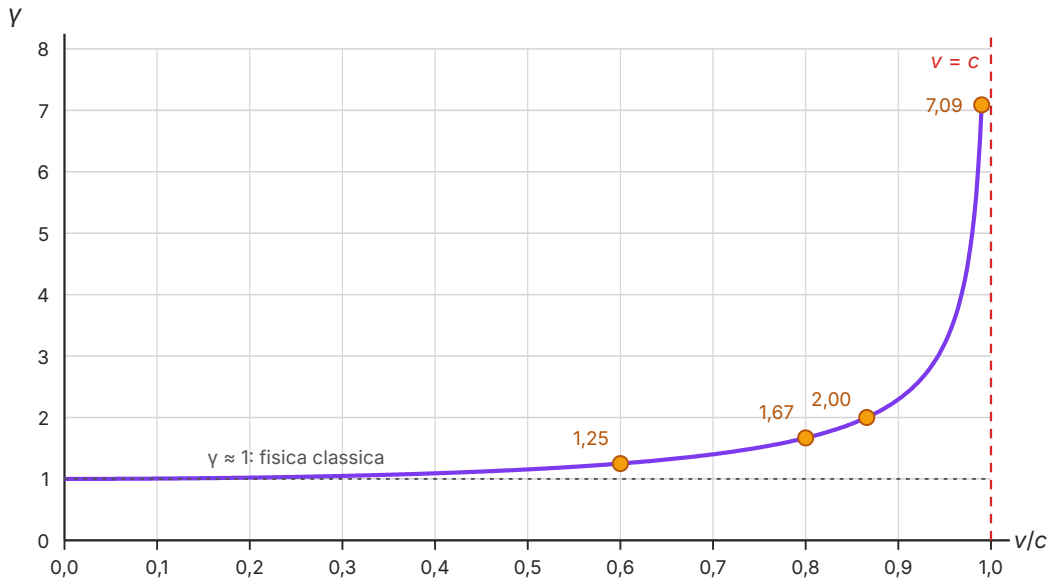


Figura 11.4 Il fattore di Lorentz γ in funzione di v/c (calcolato). Fino a circa 0,3 c la curva è quasi orizzontale e γ è vicino a 1; poi cresce sempre più rapidamente, e tende all'infinito quando v si avvicina a c (retta tratteggiata). Sono segnati i valori per 0,6 c, 0,8 c, 0,866 c e 0,99 c.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico del fattore di Lorentz

Problema. Usa la Figura 11.4. a) A quale velocità un orologio in moto segna, nel laboratorio, metà del tempo? b) Di quanto è più lungo un intervallo per un orologio che viaggia a 0,6 c? c) Perché il grafico non contiene punti con $v \geq c$?

a) L'orologio segna metà del tempo quando $\Delta t = 2\,\Delta t_0$, cioè $\gamma = 2$. Sulla curva $\gamma = 2$ cade a $v/c \approx 0{,}87$. Il calcolo lo conferma: $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2 = 0{,}25$, quindi $v/c = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$.

b) Per 0,6 c il grafico dà $\gamma = 1{,}25$: ogni intervallo è più lungo del 25%. Infatti $1 - 0{,}36 = 0{,}64$, $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ e $1/0{,}8 = 1{,}25$.

c) Per $v = c$ la radice al denominatore si annulla, e per $v > c$ diventa la radice di un numero negativo: γ non è definito. La teoria indica già qui che c è un limite, come vedremo nel paragrafo successivo.

Osservazione. Nella prima parte del grafico conviene leggere sulla tabella, non sulla curva: fra $\gamma = 1{,}000\,05$ e $\gamma = 1{,}005$ la differenza è invisibile sul disegno, ma non per un orologio atomico.

DA RICORDARE

Strumenti matematici: il fattore di Lorentz per velocità piccole

Per $v = 30$ m/s (un treno veloce) $v^2/c^2 = 10^{-14}$, e la calcolatrice, che lavora con una decina di cifre, dà $\gamma = 1$ esattamente. Per le velocità piccole rispetto a c si usa allora l'approssimazione

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad (v \ll c)$$

che si verifica con un caso in cui la calcolatrice basta: per $v = 0{,}1\,c$ la formula esatta dà 1,005 04, quella approssimata $1 + 0{,}005 = 1{,}005$. Per il treno, $\gamma - 1 \approx 5 \times 10^{-15}$: in un anno, circa $3{,}2 \times 10^7$ s, il suo orologio rimane indietro di circa $1{,}6 \times 10^{-7}$ s rispetto a quello della stazione, meno di due decimi di milionesimo di secondo.

11.3.4 I muoni dei raggi cosmici

La dilatazione dei tempi si osserva ogni giorno nei raggi cosmici. Un **muone** è una particella elementare con la carica dell'elettrone e una massa circa 207 volte maggiore; è instabile e decade in un elettrone e due neutrini. Misurata da un orologio fermo rispetto al muone, la sua vita media è di 2,2 μs: è un tempo proprio. Come per i nuclei radioattivi (capitolo 14), il decadimento è casuale: la vita media è la durata media della vita di molti muoni, e in 1,5 μs ne decade la metà.

ESEMPIO SVOLTO

Un muone che attraversa l'atmosfera

Problema. Un muone nasce a 10 km di quota e scende verticalmente con velocità $v = 0{,}995\,c$. a) Quanta strada percorrerebbe in una vita media, se il tempo fosse lo stesso per tutti? b) Quanto dura, per un osservatore a terra, una vita media del muone in moto, e quanta strada percorre in quel tempo? c) Quanto tempo impiega il muone, nel sistema della Terra, a raggiungere il suolo, e quanto tempo passa per il suo orologio?

a) $v = 0{,}995 \cdot 3{,}00 \times 10^8$ m/s $= 2{,}985 \times 10^8$ m/s. In $2{,}2 \times 10^{-6}$ s: $s = 2{,}985 \times 10^8$ m/s $\cdot\, 2{,}2 \times 10^{-6}$ s ≈ 660 m. Il muone scomparirebbe molto prima di arrivare al suolo.

b) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}995^2)} = 1/\sqrt{0{,}009\,975} \approx 10{,}0$. La vita media nel sistema della Terra è $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \approx 10{,}0 \cdot 2{,}2\ \mu\text{s} = 22\ \mu\text{s}$, e in questo tempo il muone percorre circa $2{,}985 \times 10^8$ m/s $\cdot\, 2{,}2 \times 10^{-5}$ s $\approx 6{,}6$ km.

c) Nel sistema della Terra il viaggio dura $t = 1{,}00 \times 10^4\ \text{m}/(2{,}985 \times 10^8\ \text{m/s}) = 3{,}35 \times 10^{-5}$ s $= 33{,}5\ \mu$s, cioè circa 15 vite medie: senza dilatazione dei tempi non ne arriverebbe praticamente nessuno. L'orologio del muone segna invece $33{,}5\ \mu\text{s}/10{,}0 = 3{,}35\ \mu$s, appena una vita media e mezza: una frazione apprezzabile dei muoni, circa uno su cinque, arriva al suolo.

Controllo. I conteggi dei rivelatori al suolo e in quota confermano la previsione relativistica, non quella classica (vedi il laboratorio di questo capitolo). Il tempo di 3,35 μs è il tempo proprio del viaggio, perché la partenza e l'arrivo avvengono nello stesso punto del sistema del muone: dove si trova il muone.

Il muone non è l'unica prova. Nel 1971 i fisici americani Joseph Hafele e Richard Keating caricarono orologi atomici al cesio su aerei di linea e fecero il giro del mondo, una volta verso est e una verso ovest; al ritorno gli orologi viaggiatori e quelli rimasti a terra non segnavano più la stessa ora, e le differenze, di decine o centinaia di miliardesimi di secondo, erano in accordo con le previsioni, che combinano la dilatazione dei tempi della relatività ristretta con un effetto della gravità previsto dalla relatività generale. Ancora più quotidiano è il sistema GPS: i suoi satelliti portano orologi atomici e girano intorno alla Terra a quasi 4 km/s, e senza le correzioni relativistiche le posizioni calcolate dai navigatori sbaglierebbero di chilometri in un giorno (il conto completo, che richiede anche la relatività generale, è nel capitolo 12).

COLLEGAMENTI

In laboratorio: i muoni in montagna e al mare (laboratorio virtuale)

Materiali. Un rivelatore di muoni trasportabile, formato da due piastre di materiale scintillante sovrapposte collegate a un contatore, che segnala un muone solo quando attraversa entrambe le piastre; un cronometro. Il laboratorio è virtuale: i dati della tabella sono simulati, ma con valori realistici. Si suppone, per semplicità, che il rivelatore conti soltanto muoni con velocità 0,995 c che scendono in verticale.

Procedimento. Si conta il numero di muoni che attraversano il rivelatore in un'ora, per tre ore, prima a 2000 m di quota, poi al livello del mare. In 2000 m di caduta, nel sistema della Terra, i muoni impiegano $t = 2000\ \text{m}/(2{,}985 \times 10^8\ \text{m/s}) = 6{,}70\ \mu\text{s}$. Si confronta la frazione di muoni sopravvissuti con le due previsioni, ricordando che in un tempo proprio di 1,52 µs (il tempo di dimezzamento, corrispondente alla vita media di 2,2 µs) ne decade la metà: la frazione sopravvissuta dopo un tempo proprio τ è $2^{-\tau/(1{,}52\ \mu\text{s})}$.

Tabella 11.2 Conteggi di muoni in un'ora a due quote (dati simulati realistici). L'incertezza su un conteggio N è stimata come $\sqrt{N}$.

Misura	a 2000 m (muoni/h)	a livello del mare (muoni/h)
1ª ora	612	437
2ª ora	589	452
3ª ora	597	431
totale in 3 h	1798 ± 42	1320 ± 36
frazione sopravvissuta misurata	—	0,73 ± 0,04
previsione classica (6,70 µs per il muone)	—	0,047
previsione relativistica (0,670 µs per il muone)	—	0,74

Che cosa concludere. La frazione misurata, 1320/1798 = 0,73, con un'incertezza relativa di circa il 5% (la somma di 42/1798 e 36/1320), è compatibile con la previsione relativistica, $2^{-0{,}670/1{,}52} \approx 0{,}74$, e lontanissima da quella classica, $2^{-6{,}70/1{,}52} \approx 0{,}047$: senza la dilatazione dei tempi al mare dovremmo contare circa 28 muoni all'ora, non 440. Esperimenti di questo tipo, con rivelatori portati in montagna o su un aereo, sono stati fatti davvero, e sono oggi attività comuni nei laboratori didattici di università ed enti di ricerca.

Per la relazione. Segui lo schema di Fisica 3, capitolo 4. Calcola la frazione sopravvissuta con la sua incertezza, scrivi le due previsioni con tutti i passaggi e discuti le ipotesi semplificatrici: nella realtà i muoni hanno velocità diverse, arrivano da direzioni diverse e possono essere frenati dall'aria; come cambierebbe il confronto se il rivelatore contasse anche muoni più lenti?

11.4 La contrazione delle lunghezze e il limite di velocità

11.4.1 Il viaggio visto dal muone

Torniamo al muone, ma descriviamo il suo viaggio nel *suo* sistema, in cui è fermo (Figura 11.5). Qui il suo orologio va al ritmo normale, e il muone vive in media 2,2 µs come sempre. È la Terra, con la sua atmosfera, che gli viene incontro a 0,995 c. Se l'atmosfera fosse spessa 10 km anche per lui, il suolo impiegherebbe 33,5 µs ad arrivare, e il muone sarebbe quasi certamente già decaduto. Ma i due osservatori devono essere d'accordo su un fatto: il muone arriva o non arriva al suolo. Nel sistema del muone, allora, lo strato d'aria fra il punto di nascita e il suolo dev'essere più sottile: circa 1 km, attraversato dal suolo in movimento in 3,35 µs, lo stesso tempo proprio trovato prima.

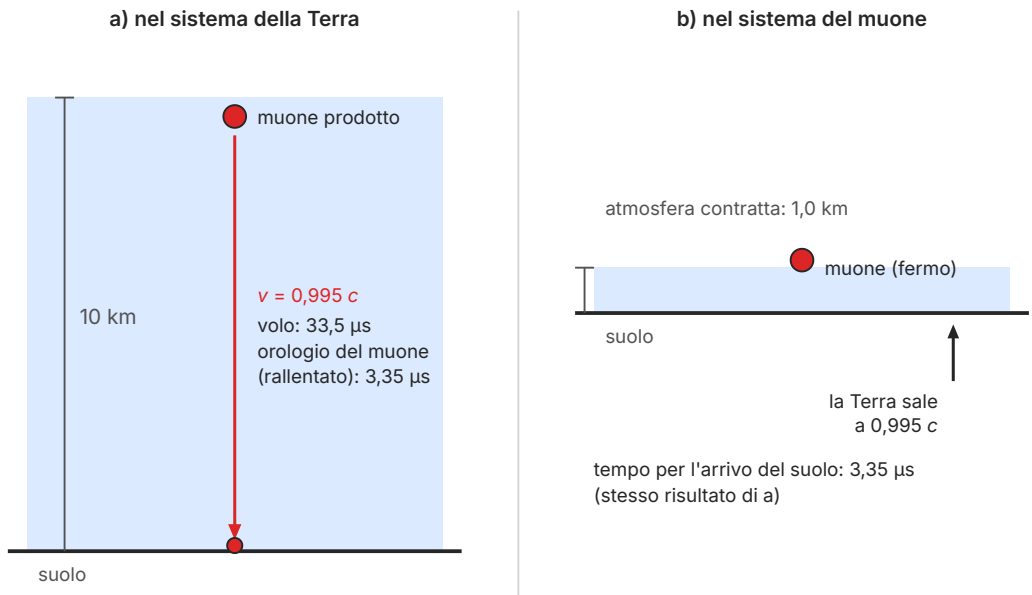


Figura 11.5 Lo stesso viaggio di un muone (v = 0,995 c, γ = 10,0) descritto in due sistemi di riferimento, con la stessa scala verticale. a) Nel sistema della Terra lo strato d'aria è spesso 10 km e il volo dura 33,5 µs, ma l'orologio del muone, in moto, è rallentato e segna 3,35 µs. b) Nel sistema del muone il suo orologio va al ritmo normale, ma lo strato d'aria, in moto, è contratto a 1,0 km, e il suolo lo attraversa in 3,35 µs. Le due descrizioni prevedono la stessa cosa: il muone arriva al suolo.

È la **contrazione delle lunghezze**. Si chiama **lunghezza propria** L_0 di un oggetto la lunghezza misurata nel sistema in cui l'oggetto è fermo: per lo strato d'atmosfera, i 10 km misurati da terra. In un sistema in cui l'oggetto si muove con velocità v parallela alla lunghezza da misurare, la sua lunghezza è

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

cioè più corta, in proporzione $1/\gamma$. Il ragionamento sul muone mostra perché il fattore è proprio γ: nel sistema della Terra il viaggio dura L_0/v e il tempo proprio del muone è $L_0/(\gamma v)$; nel sistema del muone, in cui il suolo si avvicina con velocità v, lo stesso tempo proprio dev'essere L/v, e quindi $L = L_0/\gamma$.

Due precisazioni sono essenziali. La prima: la contrazione riguarda soltanto le dimensioni *parallele* alla velocità; quelle perpendicolari non cambiano. Nel nostro orologio a luce, infatti, abbiamo usato la stessa distanza d fra gli specchi nei due sistemi, e a ragione: se un'asta perpendicolare al moto si accorciasse, due aste uguali che si incrociano in moto relativo dovrebbero essere ciascuna più corta dell'altra, nello stesso punto e nello stesso istante, e questo è impossibile. La seconda: la contrazione è reciproca. Per il muone è l'atmosfera a essere contratta, ma per un fisico a terra sarebbe il muone, se fosse un oggetto esteso, a essere più corto nella direzione del moto. Nessuno dei due sistemi è quello «vero».

ERRORE FREQUENTE

Ma chi ha l'orologio davvero lento?

La dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze sono *reciproche*. Due astronavi che si incrociano a 0,8 c trovano ciascuna che l'orologio dell'altra va più lento e che l'altra astronave è più corta, e hanno ragione entrambe. Non è una contraddizione, perché per confrontare un orologio in moto con orologi «fermi» bisogna sincronizzare orologi lontani, e la sincronizzazione, come la simultaneità, dipende dal sistema. Domandare quale orologio è lento «davvero» è come domandare se la nave di Galileo è ferma «davvero».

Un secondo errore è pensare che gli effetti siano illusioni ottiche, dovute al tempo che la luce impiega ad arrivare all'osservatore. Non lo sono: gli osservatori della relatività tolgono già quel ritardo dalle loro misure, come O e O′ nell'esempio del treno. Il muone arriva davvero al suolo, e gli orologi di Hafele e Keating, riportati uno accanto all'altro, segnano davvero ore diverse.

Un terzo errore è scambiare i ruoli: il tempo proprio è quello dell'orologio per cui i due eventi accadono nello stesso luogo (ed è il più breve); la lunghezza propria è quella misurata dove l'oggetto è fermo (ed è la più lunga).

11.4.2 Una velocità che non si può superare

Il fattore di Lorentz suggerisce già che un corpo dotato di massa non può raggiungere la velocità della luce: per v che si avvicina a c, γ cresce senza limite. Nel capitolo 12 vedremo il motivo fisico: l'energia necessaria per accelerare un corpo cresce anch'essa con γ, e servirebbe un'energia infinita per portarlo a c. Negli acceleratori di particelle gli elettroni e i protoni raggiungono velocità come 0,999 999 c, ma mai c. La velocità della luce è una **velocità limite**: nessun corpo

materiale, e nessun segnale capace di trasmettere informazione, si propaga più veloce della luce nel vuoto.

Il limite rende coerente la teoria: se un segnale potesse andare più veloce della luce, in qualche sistema inerziale l'effetto arriverebbe prima della causa, e l'ordine fra un evento e le sue conseguenze, che tutti gli osservatori devono riconoscere, sarebbe rovesciato. E dice anche perché le velocità non si possono comporre come in Galileo: due velocità minori di c, composte, devono dare una velocità ancora minore di c.

APPROFONDIMENTO

Come si compongono le velocità

Un'astronave si allontana dalla Terra con velocità V, e lancia in avanti una sonda che, rispetto all'astronave, ha velocità u'. Con le trasformazioni di Galileo la velocità della sonda rispetto alla Terra sarebbe $u' + V$. Dalle trasformazioni di Lorentz si ricava invece (non lo dimostriamo) la regola relativistica di composizione delle velocità:

$$u = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2}$$

Una verifica. Con $V = 0{,}5\,c$ e $u' = 0{,}5\,c$ Galileo darebbe c; la formula dà $u = (0{,}5 + 0{,}5)\,c/(1 + 0{,}25) = 0{,}8\,c$. Con $u' = c$, cioè un impulso di luce lanciato dall'astronave, si ottiene $u = (c + V)/(1 + V/c) = c$ qualunque sia V: è il secondo postulato. Quando u' e V sono piccole rispetto a c, il denominatore è quasi 1 e si ritrova la regola di Galileo: per la palla lanciata a 10 m/s sul treno che va a 30 m/s la correzione è di circa tre parti su un milione di miliardi.

11.5 Lo spaziotempo

11.5.1 Minkowski: lo spazio e il tempo insieme

Il 21 settembre 1908, a Colonia, il matematico Hermann Minkowski, che era stato professore di Einstein al Politecnico di Zurigo, tenne una conferenza intitolata *Raum und Zeit*, «Spazio e tempo», pubblicata l'anno seguente. Cominciava così: «Le concezioni di spazio e di tempo che desidero esporvi sono sorte sul terreno della fisica sperimentale. In questo sta la loro forza. La loro tendenza è radicale» (traduzione della redazione). Subito dopo viene la frase che apre questo capitolo, il cui inizio nell'originale tedesco suona «*Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken*».

Minkowski propose di descrivere gli eventi in un unico **spaziotempo** a quattro dimensioni, tre di spazio e una di tempo. Un evento è un punto dello spaziotempo, individuato da dove e quando accade. Diversi osservatori inerziali dividono lo spaziotempo in «spazio» e «tempo» in modi diversi, come due persone che guardano la stessa collina da lati diversi vedono profili diversi; ma lo spaziotempo, come la collina, è lo stesso per tutti.

11.5.2 Diagrammi spaziotempo e cono di luce

Per i moti lungo una retta basta un piano: un **diagramma spaziotempo** riporta la posizione x in orizzontale e il tempo in verticale, ma moltiplicato per c, così che anche il tempo si misuri in metri, o in anni luce se il tempo è in anni. Con questa scelta la luce, che percorre un anno luce in un anno, è rappresentata da rette inclinate di 45° (Figura 11.6a). La storia di un corpo, l'insieme degli eventi che attraversa, è una linea del diagramma, la sua **linea d'universo**: verticale per un corpo fermo, inclinata per un corpo in moto uniforme, tanto più vicina ai 45° quanto più la sua velocità si avvicina a c. Poiché nessun corpo raggiunge c, nessuna linea d'universo può essere inclinata più della luce.

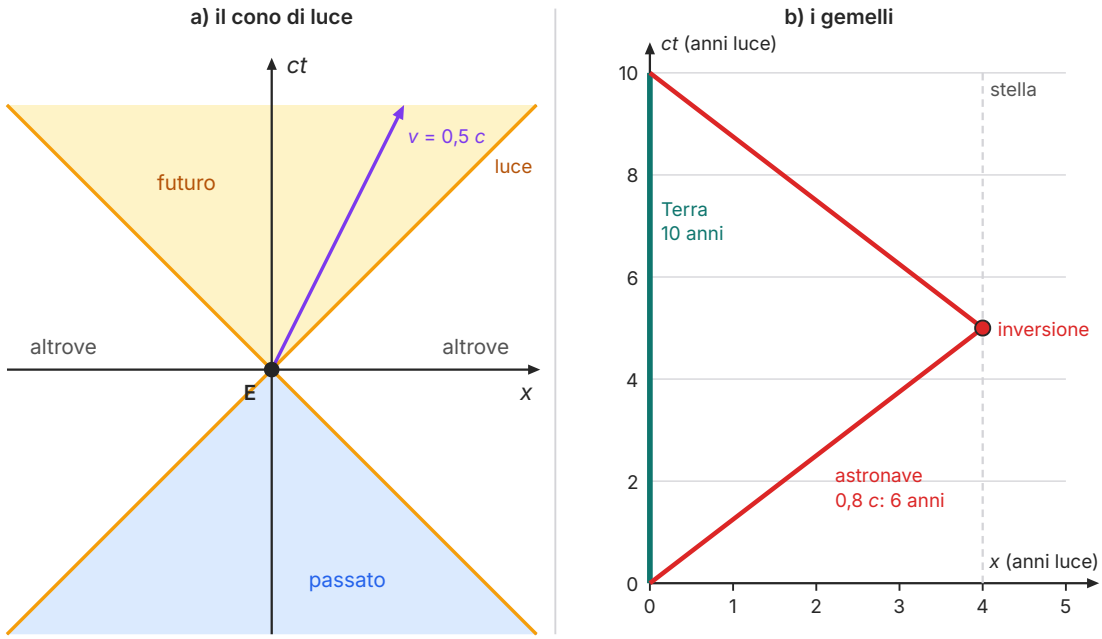


Figura 11.6 Diagrammi spaziotempo, con ct in verticale e x in orizzontale. a) Le rette della luce passanti per l'evento E formano il suo cono di luce: l'evento può influenzare soltanto gli eventi nella regione del futuro, ed essere influenzato soltanto da quelli nella regione del passato; gli eventi «altrove» non hanno con E alcun legame di causa ed effetto. La linea d'universo di un corpo che si muove a 0,5 c resta dentro il cono. b) Il viaggio dei due gemelli: la Terra rimane ferma, l'astronave va a 0,8 c fino a una stella distante 4 anni luce e torna; sulla Terra passano 10 anni, sull'astronave 6.

Le due rette della luce che passano per un evento E, nello spaziotempo a quattro dimensioni, formano un cono, il **cono di luce** di E. Gli eventi dentro la metà superiore del cono formano il futuro di E: E può influire su di essi, con segnali più lenti della luce o con la luce stessa. Quelli nella metà inferiore formano il passato di E. Gli eventi fuori dal cono, l'«altrove», sono troppo lontani perché anche la luce possa collegarli a E: per essi l'ordine temporale rispetto a E dipen-

de dall'osservatore, come per i lampi del treno, ma nessuno può influenzare l'altro. Così la relatività della simultaneità non mette mai in pericolo il rapporto fra causa ed effetto: l'ordine fra un evento e quelli del suo cono è lo stesso per tutti.

C'è anche una grandezza su cui tutti concordano. Per due eventi separati, in un certo sistema, dall'intervallo di tempo Δt e dalla distanza Δx, la quantità $(c\Delta t)^2 - \Delta x^2$ ha lo stesso valore per tutti gli osservatori inerziali: si chiama **intervallo spaziotemporale** (al quadrato) ed è un **invariante**. Nel sistema in cui i due eventi avvengono nello stesso luogo $\Delta x = 0$ e il tempo misurato è il tempo proprio: l'intervallo è $(c\Delta t_0)^2$. Per il muone dell'esempio: $c\Delta t = 10{,}05$ km (cioè $c \cdot 33{,}5$ μs) e $\Delta x = 10{,}0$ km, quindi $(c\Delta t_0)^2 = 10{,}05^2 - 10{,}0^2 \approx 1{,}00$ km^2 e $c\Delta t_0 \approx 1{,}0$ km, cioè $\Delta t_0 \approx 3{,}3$ μs, come avevamo trovato.

COLLEGAMENTI

Filosofia: relatività non è relativismo

Il nome «teoria della relatività» ha fatto pensare a molti, nel Novecento, che la fisica avesse dimostrato che «tutto è relativo», e la formula è passata nel linguaggio comune, applicata perfino ai valori morali. È un fraintendimento. La teoria dice che alcune grandezze, che si credevano assolute, dipendono dal sistema di riferimento: la simultaneità, le durate, le lunghezze. Ma lo fa proprio perché altre cose sono uguali per tutti: le leggi della fisica, la velocità della luce nel vuoto, l'intervallo spaziotemporale, l'ordine fra una causa e il suo effetto.

Nel corso di filosofia di quest'anno incontrerai la crisi del positivismo e il dibattito sul metodo della scienza. La relatività vi ebbe un ruolo importante: mostrò che concetti che sembravano evidenti, come il tempo uguale per tutti, erano ipotesi, e che una teoria fisica di grande successo, la meccanica di Newton, poteva essere corretta e superata. Ernst Mach, nella sua *Meccanica* (1883), aveva criticato lo spazio e il tempo assoluti di Newton come concetti privi di riscontro nell'esperienza, ed Einstein riconobbe in più occasioni l'influenza di quelle critiche. Più tardi Karl Popper avrebbe fatto della relatività un esempio di teoria che rischia: fa previsioni precise che un esperimento potrebbe smentire.

11.5.3 Il paradosso dei gemelli

Due gemelle si salutano sulla Terra: una resta a casa, l'altra parte con un'astronave velocissima, raggiunge una stella e torna indietro. Per la gemella rimasta a terra l'orologio della viaggiatrice va più lento, e quando si riabbracciano la viaggiatrice deve essere più giovane. Ma, per la reciprocità della dilatazione, la viaggiatrice potrebbe ragionare allo stesso modo: «per me è la Terra che si allontana e torna; è mia sorella che deve essere più giovane». Non possono essere entrambe più giovani dell'altra: è il **paradosso dei gemelli**.

Il paradosso si scioglie osservando che le due gemelle *non* sono in situazioni simmetriche. La gemella rimasta a casa sta sempre nello stesso sistema inerziale (trascuriamo il moto della Terra, che qui non conta). La viaggiatrice, invece, cambia sistema: all'andata è in un sistema inerziale, al ritorno in un altro, e in mezzo deve frenare e ripartire in senso opposto, sentendo

l'accelerazione, come chi sta in un'auto che inverte la marcia. Il ragionamento «per me è la Terra che si muove» usa un unico sistema inerziale per tutto il viaggio, e questo sistema non esiste. Nel diagramma spaziotempo (Figura 11.6b) la differenza si vede: la linea d'universo della Terra è una retta, quella dell'astronave è spezzata.

ESEMPIO SVOLTO

Il viaggio di Marta

Problema. Marta parte dalla Terra verso una stella distante 4,0 anni luce (misurati dalla Terra), viaggia a 0,80 c, inverte la rotta e torna alla stessa velocità; la sua gemella Livia resta a casa. Trascura le durate delle accelerazioni. a) Quanto dura il viaggio per Livia? b) Quanto per Marta? c) Quanto è lunga la distanza Terra–stella per Marta, durante l'andata?

a) Nel sistema della Terra la distanza totale è 8,0 anni luce, percorsa a 0,80 c: t = 8,0 anni luce/(0,80 anni luce all'anno) = 10 anni.

b) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 1/0{,}60 = 5/3$. Per ciascun tratto il tempo proprio di Marta è 5,0 anni/(5/3) = 3,0 anni; in tutto 6,0 anni. Al ritorno Marta ha quattro anni meno di Livia.

c) Per Marta la Terra e la stella si muovono a 0,80 c, e la loro distanza è contratta: L = 4,0 anni luce/(5/3) = 2,4 anni luce. A 0,80 c la percorre in 2,4/0,80 = 3,0 anni: lo stesso tempo trovato in b), da un altro punto di vista.

Controllo con l'invariante. Per l'andata, nel sistema della Terra, $c\Delta t$ = 5,0 anni luce e Δx = 4,0 anni luce: $(c\Delta t_0)^2 = 25 - 16 = 9{,}0$, e Δt_0 = 3,0 anni. Tre metodi, un solo risultato.

Nessun essere umano ha mai fatto un viaggio simile, ma il fenomeno è stato misurato: muoni che girano in un anello di accumulazione, più volte avanti e indietro, vivono più a lungo di quelli fermi, e gli orologi di Hafele e Keating, dopo il giro del mondo, erano «più giovani» o «più vecchi» di quelli rimasti a terra secondo le previsioni. La gemella che viaggia invecchia meno, ma non vive più a lungo nel suo sistema: il suo cuore batte lo stesso numero di volte per ogni anno del suo orologio.

IN SINTESI

Le formule del capitolo e il loro significato

Postulati della relatività ristretta: le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali; la luce si propaga nel vuoto con la stessa velocità $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s in tutti i sistemi inerziali.

Fattore di Lorentz: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$, numero puro, uguale a 1 per $v = 0$ e sempre maggiore di 1 per $v > 0$; tende all'infinito per v che tende a c. Per $v \ll c$, $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\, v^2/c^2$.

Dilatazione dei tempi: $\Delta t = \gamma\, \Delta t_0$. Δt_0 è il tempo proprio (s), misurato da un orologio per cui i due eventi accadono nello stesso luogo; Δt è l'intervallo fra gli stessi eventi in un sistema in cui l'orologio si muove con velocità v: più lungo.

Contrazione delle lunghezze: $L = L_0/\gamma$. L_0 è la lunghezza propria (m), misurata dove l'oggetto è fermo; L è la lunghezza nella direzione del moto in un sistema in cui l'oggetto si muove: più corta. Le dimensioni perpendicolari al moto non cambiano.

Intervallo spaziotemporale: $(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 = (c\Delta t_0)^2$, uguale per tutti gli osservatori inerziali.

Velocità limite: nessun corpo con massa raggiunge c; nessun segnale si propaga più veloce della luce nel vuoto.

La relatività ristretta ha cambiato lo spazio e il tempo, ma non ha ancora detto nulla sulla massa e sull'energia, né sulla gravità, che agisce fra corpi lontani istantaneamente, come voleva Newton, e quindi più veloce della luce. Da queste due domande partono il capitolo 12, con la formula più famosa della fisica e la relatività generale, e, per la strada del microcosmo, il capitolo 13, che riprende un altro lavoro del 1905.

SINTESI

- Per la relatività galileiana le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali (la nave di Galileo), e il tempo è uguale per tutti ($t' = t$); ne segue la composizione delle velocità $v' = v - V$.
- Le equazioni di Maxwell danno per la luce la velocità $c \approx 3{,}00 \times 10^8$ m/s senza dire rispetto a che cosa; l'Ottocento rispose con l'etere, che avrebbe fatto della luce uno strumento per rivelare il moto assoluto.
- L'esperimento di Michelson e Morley (1887), con un interferometro capace di rivelare lo spostamento atteso di circa 0,4 frange, non trovò alcun vento d'etere.
- Einstein (1905) fondò la relatività ristretta su due postulati: tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali; la luce ha nel vuoto la stessa velocità c in tutti i sistemi inerziali. L'etere diventa superfluo.
- Due eventi lontani simultanei per un osservatore non lo sono, in generale, per un altro osservatore in moto rispetto al primo: la simultaneità è relativa (il treno e i lampi).
- Con l'orologio a luce e il teorema di Pitagora si ricava la dilatazione dei tempi: $\Delta t = \gamma\, \Delta t_0$, con $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \geq 1$. Il tempo proprio Δt_0 è il più breve.
- Per $v \ll c$ il fattore di Lorentz è quasi 1 e la fisica classica è un'ottima approssimazione; a 0,866 c si ha $\gamma = 2$, a 0,99 c $\gamma \approx 7{,}09$.
- I muoni dei raggi cosmici (vita media 2,2 μs) arrivano al suolo grazie alla dilatazione dei tempi; anche gli orologi di Hafele e Keating (1971) e quelli del GPS confermano la teoria.
- Nella direzione del moto un oggetto è più corto della sua lunghezza propria: $L = L_0/\gamma$. Nel sistema del muone è l'atmosfera a essere contratta: le due descrizioni prevedono gli stessi fatti.
- Dilatazione e contrazione sono reciproche: nessun sistema inerziale è privilegiato. La velocità della luce è un limite che nessun corpo e nessun segnale possono superare; le velocità si compongono in modo da non superarla mai.
- Minkowski (1908) unì spazio e tempo nello spaziotempo. In un diagramma spaziotempo la luce è inclinata di 45°, i corpi hanno linee d'universo più ripide, e il cono di luce di un evento separa il suo futuro e il suo passato dall'«altrove».
- Nel paradosso dei gemelli la gemella che viaggia torna più giovane, perché cambia sistema inerziale all'inversione di rotta: le due situazioni non sono simmetriche.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'esperimento di Michelson e Morley (1887):
   - **A.** misurò con grande precisione la velocità della luce rispetto all'etere
   - **B.** non rivelò alcuno spostamento apprezzabile delle frange, cioè nessun vento d'etere
   - **C.** dimostrò che la Terra è ferma rispetto all'etere
   - **D.** fu progettato da Einstein per verificare i suoi due postulati

2. ● Il secondo postulato della relatività ristretta afferma che:
   - **A.** la luce è un'onda elettromagnetica
   - **B.** nessun corpo può superare la velocità della luce
   - **C.** la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi inerziali, qualunque sia il moto della sorgente
   - **D.** le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali

3. ● Il tempo proprio fra due eventi è l'intervallo misurato:
   - **A.** da un orologio per il quale i due eventi avvengono nello stesso luogo
   - **B.** da un orologio fermo rispetto alla Terra
   - **C.** da un orologio che si muove alla velocità della luce
   - **D.** dall'osservatore che misura l'intervallo più lungo

4. ●● Per $v = 0{,}6\,c$ il fattore di Lorentz vale:
   - **A.** 0,8
   - **B.** 1,6
   - **C.** 1,67
   - **D.** 1,25

5. ●● Un'astronave lunga 100 m a riposo passa davanti alla Terra a $0{,}8\,c$. Per gli osservatori a terra:
   - **A.** la sua lunghezza è 167 m e la sua larghezza non cambia
   - **B.** la sua lunghezza è 60 m e anche la larghezza si riduce allo stesso modo
   - **C.** la sua lunghezza è 60 m e la sua larghezza non cambia
   - **D.** la sua lunghezza è ancora 100 m, perché le lunghezze sono invarianti

6. ● Nel paradosso dei gemelli, la gemella che viaggia torna più giovane perché:
   - **A.** cambia sistema inerziale all'inversione di rotta, e le due situazioni non sono simmetriche
   - **B.** l'accelerazione dell'astronave rallenta il suo metabolismo
   - **C.** la luce che parte dalla Terra le arriva in ritardo
   - **D.** gli orologi dell'astronave si guastano durante il viaggio

7. ● In un diagramma spaziotempo, con ct in verticale e x in orizzontale, la linea d'universo di un corpo fermo è:
   A. una retta inclinata di 45°
   B. una retta orizzontale
   C. un ramo di iperbole
   D. una retta verticale

Vero o falso

8. ● Due eventi simultanei per un osservatore inerziale sono simultanei per tutti gli osservatori inerziali. V / F

9. ● Il fattore di Lorentz γ è sempre maggiore o uguale a 1. V / F

10. ●● Un oggetto in moto si contrae in tutte le direzioni, non solo in quella del moto. V / F

11. ● Il γ della relatività è lo stesso coefficiente che compare nelle trasformazioni adiabatiche dei gas. V / F

12. ●● Un astronauta che viaggia a 0,9 c vede il proprio orologio da polso e il proprio battito cardiaco rallentati. V / F

Applicare

13. ● Calcola il fattore di Lorentz per $v = 0{,}50\,c$ e per $v = 0{,}95\,c$.

14. ● Un orologio a luce ha gli specchi a 0,90 m di distanza. Quanto dura un tic (andata e ritorno della luce) nel sistema dell'orologio?

15. ●● Le particelle chiamate pioni carichi hanno una vita media (tempo proprio) di 26 ns. In un acceleratore viaggiano a 0,99 c. Calcola la loro vita media nel sistema del laboratorio e la distanza che percorrono in quel tempo. Quanto percorrerebbero senza dilatazione dei tempi?

16. ● Un'asta lunga 2,00 m nel suo sistema di riposo si muove lungo la propria direzione a 0,866 c. Quanto è lunga per un osservatore che la vede passare?

17. ●● Completa. Un'astronave lunga 50 m nel suo sistema di riposo, misurata da terra mentre passa, è lunga 30 m. Il suo fattore di Lorentz è $\gamma =$ _____ e la sua velocità è $v =$ _____ c.

18. ●● Leggi la Figura 11.4 e la Tabella 11.1. a) Per quale valore di v/c il fattore di Lorentz vale 1,25? b) Quanto vale circa γ per $v = 0{,}95\,c$? c) Perché nel grafico la curva è quasi orizzontale fino a 0,3 c?

19. ● Una sonda viaggia a 0,60 c verso una stella distante 3,0 anni luce dalla Terra. Quanto dura il viaggio per gli orologi della Terra e per quelli della sonda?

Problemi

20. ●● Un muone nasce a 8,9 km di quota e scende verticalmente a 0,98 c. Il suo tempo di dimezzamento (tempo proprio) è 1,5 μs. a) Quanto dura il viaggio fino al suolo nel sistema della Terra? b) Quanto tempo segna l'orologio del muone? c) Quale frazione di muoni come questo arriva al suolo? d) Quanto è spesso lo strato d'aria attraversato, nel sistema del muone?

21. ●●● Un'astronauta parte verso una stella distante 6,0 anni luce dalla Terra, viaggiando a 0,60 c, e appena arrivata torna indietro alla stessa velocità (trascura le accelerazioni). a) Quanto dura il viaggio per chi resta sulla Terra? b) Quanto per l'astronauta? c) Quanto è lunga la distanza Terra–stella nel sistema dell'astronauta, all'andata? d) Disegna il viaggio in un diagramma spaziotempo, come nella Figura 11.6b, e verifica il risultato di b) con l'intervallo spaziotemporale.

22. ●● Un interferometro di Michelson è illuminato con la luce rossa di un laser ($\lambda = 633$ nm). Spostando lentamente uno dei due specchi lungo il suo braccio, si contano 200 frange chiare che passano davanti al rivelatore. a) Di quanto cambia la lunghezza del cammino della luce in quel braccio per ogni frangia, sapendo che la luce percorre il braccio due volte (andata e ritorno)? b) Di quanto si è spostato lo specchio? c) Michelson e Morley si aspettavano uno spostamento di circa 0,4 frange. Se lo strumento poteva rivelare spostamenti di 0,01 frange, quante volte l'effetto atteso superava il minimo rivelabile? (Ricorda l'interferenza di Fisica 4, capitolo 16.)

23. ●●● Un satellite del sistema GPS percorre un'orbita circolare di raggio $2{,}66 \times 10^7$ m intorno alla Terra (massa $5{,}97 \times 10^{24}$ kg). a) Calcola la sua velocità orbitale con la legge di gravitazione universale (Fisica 4, capitolo 5). b) Usa l'approssimazione $\gamma - 1 \approx v^2/(2c^2)$ per calcolare di quanto il suo orologio rimane indietro in un giorno, per la sola relatività ristretta, rispetto a un orologio a terra (trascura la rotazione della Terra). c) Quanta strada percorre la luce in quel tempo? Commenta il risultato per un navigatore che calcola la posizione dai tempi di arrivo dei segnali.

24. ●●● Un'astronave lunga 120 m nel suo sistema di riposo passa a 0,60 c lungo una stazione spaziale lunga 100 m (lunghezza propria). a) Quanto è lunga l'astronave per gli astronauti della stazione? b) Quanto è lunga la stazione per gli astronauti dell'astronave? c) Per la stazione c'è un istante in cui l'astronave è tutta affiancata alla stazione; per l'astronave no. Chi ha ragione?

Ragionare e argomentare

25. ●● Commenta la fonte. Nel *Dialogo* (1632) Salviati afferma che nella stiva di una nave in moto uniforme «voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma». Che cosa afferma Galileo? Quali «effetti» aveva in mente, e quali vi aggiunge il primo postulato di Einstein? Come metteresti alla prova l'affermazione, nella versione di Einstein, con un esperimento di ottica?

26. ●● Commenta la fonte. Nel 1905 Einstein scrive che «l'introduzione di un “etere luminifero” si rivelerà superflua» (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, introduzione; traduzione della redazione). Che cosa vuol dire «superflua»: che l'etere è stato dimostrato inesistente, o qualcos'altro? Quale risultato sperimentale si accorda con questa affermazione, e perché Einstein non aveva bisogno di partire da esso?

27. ●●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Nel sistema del muone, per la dilatazione dei tempi, la sua vita media diventa 22 μs, e così il muone ha il tempo di attraversare tutti i 10 km dell'atmosfera». Trova i due errori e riscrivi il ragionamento corretto nel sistema del muone.

28. ●● Stima di Fermi. Un macchinista guida treni ad alta velocità per 35 anni, circa 1500 ore all'anno, a una velocità media di circa 70 m/s (250 km/h). Stima di quanto è rimasto indietro, alla fine della sua carriera, il suo orologio da polso rispetto a uno rimasto fermo in stazione (per la sola relatività ristretta). Usa il risultato per spiegare perché nessuno se ne era accorto prima del Novecento.

Verso l'esame

29. ● **Dal documento.** Osserva la Figura 11.5, che descrive lo stesso viaggio di un muone dei raggi cosmici in due sistemi di riferimento. a) Quale fenomeno spiega l'arrivo del muone al suolo nella descrizione a) e quale nella descrizione b)? b) Quali leggi del capitolo usi, e perché le due descrizioni non sono in contraddizione? c) Collega il documento a un argomento di Scienze naturali: l'atmosfera terrestre e i raggi cosmici che vi arrivano.

30. ●● **Trattazione sintetica.** In 10–15 righe enuncia i due postulati della relatività ristretta e spiega, con l'orologio a luce, perché da essi segue che un orologio in moto rimane indietro.

31. ●●● **Collegamento.** Collega la critica di Ernst Mach allo spazio e al tempo assoluti di Newton, e la crisi del positivismo che studi in Filosofia, con la relatività ristretta. Quali concetti «evidenti» della meccanica classica la relatività ha trasformato in ipotesi, e quali grandezze sono rimaste uguali per tutti gli osservatori?

PER APPROFONDIRE

- [EIR] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*: Einstein stesso spiega, quasi senza formule, i due postulati, il treno e i lampi, la relatività della simultaneità; la prima parte si legge come un dialogo con il lettore.
- [DIA] G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*: nella Giornata seconda la pagina della nave, da leggere per intero, mostra come il principio di relatività nasca da una discussione sul moto della Terra.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: i capitoli sull'etere e sulla relatività ricostruiscono il percorso dalle difficoltà dell'Ottocento ai nuovi concetti di spazio e tempo.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla relatività offre molti esercizi graduati su dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze.

Glossario del capitolo

Cono di luce
L'insieme delle rette della luce che passano per un evento; separa il suo futuro e il suo passato dagli eventi con cui non può avere rapporti di causa ed effetto.

Contrazione delle lunghezze
Un oggetto di lunghezza propria L_0 ha, nella direzione del moto, lunghezza $L = L_0/\gamma$ in un sistema in cui si muove con velocità v.

Dilatazione dei tempi
Un intervallo che ha durata propria Δt_0 dura $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ in un sistema in cui l'orologio si muove con velocità v.

Evento
Ciò che accade in un punto dello spazio in un istante determinato; è un punto dello spaziotempo.

Fattore di Lorentz
Il numero $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$, uguale a 1 per $v = 0$ e crescente senza limite per v che tende a c.

Interferometro di Michelson
Strumento che divide un fascio di luce in due fasci che percorrono bracci diversi e poi li fa interferire; rivela piccolissime differenze fra i tempi di percorrenza.

Linea d'universo
La linea che rappresenta in un diagramma spaziotempo la successione degli eventi della storia di un corpo.

Lunghezza propria
Lunghezza di un oggetto misurata nel sistema in cui l'oggetto è fermo.

Muone
Particella elementare con la carica dell'elettrone e massa circa 207 volte maggiore, instabile, con vita media di 2,2 μs; è prodotta dai raggi cosmici nell'alta atmosfera.

Orologio a luce
Orologio ideale in cui un impulso di luce rimbalza fra due specchi paralleli; ogni andata e ritorno è un tic.

Paradosso dei gemelli
Il ritorno più giovane della gemella che viaggia, apparentemente in contrasto con la reciprocità della dilatazione; si risolve perché la viaggiatrice cambia sistema inerziale.

Postulato della costanza della velocità della luce
Secondo postulato di Einstein: la luce si propaga nel vuoto con la stessa velocità c in tutti i sistemi inerziali, qualunque sia il moto della sorgente.

Principio di relatività
Primo postulato di Einstein: tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Relatività della simultaneità
Due eventi lontani simultanei in un sistema inerziale non sono, in generale, simultanei in un altro sistema in moto rispetto al primo.

Relatività ristretta
Teoria di Einstein (1905) dello spazio e del tempo per i sistemi di riferimento inerziali, fondata sul principio di relatività e sulla costanza della velocità della luce.

Spaziotempo
L'insieme a quattro dimensioni di tutti gli eventi, introdotto da Minkowski (1908), che unisce le tre dimensioni dello spazio e quella del tempo.

Tempo proprio
Intervallo di tempo fra due eventi misurato da un orologio per il quale avvengono nello stesso luogo; è il più breve fra quelli misurati da osservatori inerziali.

Velocità limite
La velocità della luce nel vuoto, che nessun corpo dotato di massa può raggiungere e nessun segnale può superare.

Vento d'etere
Il moto apparente dell'etere che un osservatore sulla Terra avrebbe dovuto rivelare a causa del moto della Terra; non è mai stato osservato.

Soluzioni

1. B. Lo spostamento osservato era minore di un ventesimo di quello atteso (circa 0,4 frange): nessun vento d'etere fu rivelato.

2. C. È la costanza di c in tutti i sistemi inerziali; D è il principio di relatività galileiana, B una conseguenza della teoria, A un risultato di Maxwell.

3. A. Il tempo proprio è misurato da un orologio presente in entrambi gli eventi (stesso luogo nel suo sistema); è il più breve, non il più lungo.

4. D. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}36)} = 1/\sqrt{0{,}64} = 1/0{,}8 = 1{,}25$.

5. C. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 5/3$; $L = 100$ m$/(5/3) = 60$ m. La contrazione riguarda solo la direzione del moto.

6. A. La gemella a casa resta in un solo sistema inerziale; la viaggiatrice cambia sistema all'inversione di rotta (e sente l'accelerazione), quindi le due situazioni non sono simmetriche.

7. D. La posizione x non cambia mentre ct cresce: la linea è verticale. A 45° si muove la luce.

8. F. La simultaneità di eventi lontani è relativa: lampi simultanei per l'osservatore sul binario non lo sono per quello sul treno.

9. V. $1 - v^2/c^2$ è compreso fra 0 e 1, la sua radice anche, e il reciproco è ≥ 1 (= 1 solo per $v = 0$).

10. F. Si contraggono solo le dimensioni parallele alla velocità; quelle perpendicolari non cambiano.

11. F. Sono due grandezze diverse che per tradizione hanno la stessa lettera: quello dei gas è il rapporto fra i calori specifici, quello della relatività è $1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$.

12. F. Nel suo sistema l'astronauta è fermo: orologio e cuore vanno al ritmo normale. Sono gli osservatori rispetto ai quali si muove a misurarli rallentati.

13. $\gamma(0{,}50) = 1/\sqrt{(1 - 0{,}25)} = 1/\sqrt{0{,}75} \approx 1{,}15$; $\gamma(0{,}95) = 1/\sqrt{(1 - 0{,}9025)} = 1/\sqrt{0{,}0975} \approx 3{,}20$.

14. $\Delta t_0 = 2d/c = 2 \cdot 0{,}90$ m$/(3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 6{,}0 \times 10^{-9}$ s $= 6{,}0$ ns.

15. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}99^2)} = 1/\sqrt{0{,}0199} \approx 7{,}09$. $\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 = 7{,}09 \cdot 26$ ns $\approx 1{,}8 \times 10^{-7}$ s. Distanza: $0{,}99 \cdot 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\cdot\, 1{,}84 \times 10^{-7}$ s ≈ 55 m. Senza dilatazione: $0{,}99 \cdot 3{,}00 \times 10^8$ m/s $\cdot\, 2{,}6 \times 10^{-8}$ s $\approx 7{,}7$ m.

16. $\gamma(0{,}866) = 2{,}00$; $L = L_0/\gamma = 2{,}00$ m$/2{,}00 = 1{,}00$ m.

17. $5/3 \approx 1{,}67$; 0,80. $\gamma = L_0/L = 50$ m$/30$ m $= 5/3$; $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2 = 9/25 = 0{,}36$, quindi $v/c = \sqrt{0{,}64} = 0{,}80$.

18. a) Dalla figura (e dalla tabella) $\gamma = 1{,}25$ per $v/c = 0{,}6$. b) Circa 3,2 (il calcolo dà 3,20). c) Per $v \ll c$ il termine v^2/c^2 è piccolo: per 0,3 c vale 0,09 e $\gamma \approx 1{,}05$, quindi la curva si discosta appena da 1.

19. Per la Terra: $t = 3{,}0$ anni luce$/(0{,}60$ anni luce all'anno$) = 5{,}0$ anni. $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}36)} = 1{,}25$; per la sonda: 5,0 anni$/1{,}25 = 4{,}0$ anni.

20. a) $t = 8{,}9 \times 10^3$ m$/(0{,}98 \cdot 3{,}00 \times 10^8$ m/s$) = 3{,}03 \times 10^{-5}$ s ≈ 30 µs. b) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}9604)} = 1/\sqrt{0{,}0396} \approx 5{,}03$; $\tau = 30{,}3$ µs$/5{,}03 \approx 6{,}0$ µs. c) 6,0 µs sono 4,0 tempi di dimezzamento: arriva $2^{-4} = 1/16 \approx 6\%$ dei muoni (senza dilatazione 30,3 µs sarebbero circa 20 tempi di dimezzamento, e arriverebbe circa un muone su un milione). d) $L = 8{,}9$ km$/5{,}03 \approx 1{,}8$ km.

21. a) Distanza totale 12 anni luce a 0,60 anni luce all'anno: 20 anni. b) $\gamma = 1{,}25$; per l'astronauta 20 anni$/1{,}25 = 16$ anni. c) $L = 6{,}0$ anni luce$/1{,}25 = 4{,}8$ anni luce (percorsi in $4{,}8/0{,}60 = 8{,}0$ anni, metà dei 16). d) Linea della Terra verticale fino a $ct = 20$ anni luce; astronave da (0; 0) a (6,0; 10) e ritorno a (0; 20). Intervallo per l'andata: $(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 = 10^2 - 6{,}0^2 = 64$, quindi $c\Delta t_0 = 8{,}0$ anni luce, cioè 8,0 anni per tratto e 16 anni in tutto.

22. a) Una frangia passa quando la differenza di cammino cambia di una lunghezza d'onda: 633 nm. b) Il cammino cambia del doppio dello spostamento dello specchio, quindi ogni frangia corrisponde a $\lambda/2$: $200 \cdot 633$ nm$/2 = 6{,}33 \times 10^{-5}$ m $\approx 63{,}3$ µm. c) $0{,}4/0{,}01 = 40$ volte: l'effetto atteso era quaranta volte più grande del minimo rivelabile, e non fu visto.

23. a) $v = \sqrt{(GM/r)} = \sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24}/2{,}66 \times 10^{7})}$ m/s $\approx 3{,}87 \times 10^{3}$ m/s. b) $\gamma - 1 \approx v^2/(2c^2) = (3{,}87 \times 10^{3})^2/(2 \cdot 9{,}00 \times 10^{16}) \approx 8{,}3 \times 10^{-11}$; in un giorno (86 400 s) il ritardo è $8{,}3 \times 10^{-11} \cdot 86\,400$ s $\approx 7{,}2 \times 10^{-6}$ s = 7,2 μs. c) $c \cdot 7{,}2$ μs $\approx 3{,}00 \times 10^{8}$ m/s $\cdot\, 7{,}2 \times 10^{-6}$ s $\approx 2{,}2 \times 10^{3}$ m. Commento: il navigatore ricava le distanze dai satelliti moltiplicando per c i tempi di volo dei segnali; un errore di pochi microsecondi negli orologi diventa un errore di chilometri nella posizione, ogni giorno di più. Il ritardo è piccolissimo in termini relativi, ma la luce è velocissima. Il conto completo include anche un effetto, opposto e più grande, della relatività generale (capitolo 12).

24. a) $\gamma = 1{,}25$; 120 m/1,25 = 96 m. b) 100 m/1,25 = 80 m. c) Per la stazione l'astronave (96 m) è più corta della stazione (100 m), e c'è un istante in cui i due estremi dell'astronave sono entrambi affiancati alla stazione; per l'astronave la stazione (80 m) è più corta dell'astronave (120 m), e l'affiancamento completo non avviene mai. Hanno ragione entrambi: «i due estremi sono affiancati nello stesso istante» è un'affermazione sulla simultaneità di due eventi lontani, che è relativa. Nessun fatto locale (un urto, un segnale) distingue le due descrizioni.

25. Traccia di risposta. Galileo afferma che nessun fenomeno osservato dentro una nave in moto rettilineo uniforme ne rivela il moto: è il principio di relatività della meccanica. Gli «effetti» sono meccanici (il volo degli insetti, le gocce, il salto, il lancio di oggetti). Einstein estende il principio a tutta la fisica, comprese l'elettromagnetismo e l'ottica: neppure un esperimento con la luce rivela il moto uniforme. Per metterlo alla prova si può misurare la velocità della luce in direzioni diverse su un laboratorio in moto, o confrontare tempi di volo in bracci perpendicolari che ruotano, come nell'interferometro di Michelson: il risultato nullo concorda con il principio.

26. Traccia di risposta. «Superflua» non vuol dire «dimostrata inesistente»: vuol dire che la teoria non ne ha bisogno, perché non attribuisce alcuno stato di moto privilegiato allo spazio vuoto e ricava i fenomeni dai due postulati; un etere che non si può rivelare in nessun modo non ha più alcun ruolo in fisica. Il risultato nullo di Michelson e Morley si accorda con questa conclusione. Einstein non ne aveva bisogno come punto di partenza, perché ragionava sull'elettrodinamica: un magnete e una spira in moto relativo producono la stessa corrente indotta, e quindi conta solo il moto relativo; i «tentativi falliti» di rivelare il moto rispetto all'etere sono citati solo come conferma.

27. Traccia di risposta. Primo errore: nel sistema del muone il suo orologio va al ritmo normale, e la sua vita media è il tempo proprio di 2,2 μs; i 22 μs sono la vita media misurata nel sistema della Terra. Secondo errore: nel sistema del muone lo strato d'aria non è spesso 10 km, perché è in moto: è contratto a 10 km/10,0 = 1,0 km. Ragionamento corretto: il suolo, che si avvicina a 0,995 c, attraversa 1,0 km in 3,35 μs, circa una vita media e mezza, e una frazione apprezzabile dei muoni arriva al suolo. Le due descrizioni (tempo dilatato nel sistema della Terra, lunghezza contratta nel sistema del muone) prevedono lo stesso fatto.

28. Tempo di guida: $35 \cdot 1500$ h $\cdot\, 3600$ s/h $\approx 1{,}9 \times 10^{8}$ s. $\gamma - 1 \approx v^2/(2c^2) = (70 \text{ m/s})^2/(2 \cdot 9{,}00 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2) \approx 2{,}7 \times 10^{-14}$. Ritardo: $2{,}7 \times 10^{-14} \cdot 1{,}9 \times 10^{8}$ s $\approx 5 \times 10^{-6}$ s: in una vita di lavoro il macchinista «ringiovanisce» di circa cinque milionesimi di secondo. Nessun orologio prima degli orologi atomici della metà del Novecento poteva rivelare differenze del genere, e alle velocità quotidiane la meccanica di Newton è un'approssimazione eccellente.

29. Traccia di risposta. a) Nel sistema della Terra il muone arriva grazie alla dilatazione dei tempi (il suo orologio segna 3,35 μs invece di 33,5 μs); nel sistema del muone grazie alla contrazione delle lunghezze (lo strato d'aria in moto è spesso 1,0 km invece di 10 km). b) $\Delta t = \gamma\, \Delta t_0$ e $L = L_0/\gamma$ con $\gamma = 10{,}0$; i due osservatori misurano durate e lunghezze diverse, ma concordano sul fatto fisico, l'arrivo del muone, e sul tempo proprio del viaggio. Nessuno dei due sistemi è privilegiato. c) I raggi cosmici sono particelle di alta energia, soprattutto protoni, che arrivano dallo spazio e urtano i nuclei dell'alta atmosfera, producendo sciami di particelle secondarie fra cui i muoni; l'atmosfera fa da schermo, e

per questo a quote elevate il flusso di radiazione cosmica è maggiore che al livello del mare.

30. Traccia di risposta (10–15 righe). Primo postulato: tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali. Secondo: la luce si propaga nel vuoto con la stessa velocità c in tutti i sistemi inerziali. L'orologio a luce è formato da due specchi a distanza d: nel suo sistema un tic dura $\Delta t_0 = 2d/c$. Visto da un sistema in cui l'orologio si muove con velocità v, la luce percorre un cammino obliquo, ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti d e $v\Delta t/2$; per il secondo postulato la sua velocità è ancora c, quindi il tic dura di più. Il teorema di Pitagora dà $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ con $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \geq 1$. Per il primo postulato tutti gli orologi e tutti i processi fisici devono rallentare allo stesso modo, altrimenti un confronto a bordo rivelerebbe il moto. L'effetto è reciproco, trascurabile alle velocità comuni e confermato dai muoni dei raggi cosmici e dagli orologi atomici in volo.

31. Traccia di risposta. Newton aveva postulato uno spazio e un tempo assoluti, indipendenti da ogni osservatore; Mach, nella *Meccanica* (1883), li criticò come concetti metafisici, perché nell'esperienza si misurano solo posizioni e durate relative a corpi e orologi; Einstein riconobbe l'influenza di quella critica. La relatività mostra che il tempo uguale per tutti e la simultaneità assoluta erano ipotesi, non verità evidenti: durata, lunghezza e simultaneità dipendono dal sistema di riferimento. La crisi del positivismo, che aveva visto nella meccanica classica un sapere definitivo, trova qui un esempio: una teoria confermata per due secoli si rivela un caso limite. Restano uguali per tutti le leggi fisiche, la velocità della luce, l'intervallo spaziotemporale e l'ordine fra cause ed effetti: per questo relatività non significa relativismo.