CAPITOLO

5

Satelliti, campo ed energia gravitazionale

Un satellite non resta lassù perché è sfuggito alla gravità, ma perché non smette mai di caderle incontro.

OBIETTIVI

1. Calcolare la velocità orbitale e il periodo di un satellite in orbita circolare e spiegare l'orbita geostazionaria.
2. Spiegare l'imponderabilità come caduta libera, non come assenza di gravità.
3. Definire il campo gravitazionale, rappresentarlo con le linee di campo e calcolarne l'intensità a varie distanze.
4. Usare l'energia potenziale gravitazionale $U = -G\,M\,m/r$ e riconoscere quando basta $m\,g\,h$.
5. Applicare la conservazione dell'energia per calcolare la velocità di fuga e l'energia di un'orbita, distinguendo sistemi legati e non legati.
6. Spiegare l'origine delle maree e la differenza tra maree vive e maree morte.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 I satelliti in orbita circolare 2
5.2 Il campo gravitazionale 6
5.3 L'energia potenziale gravitazionale 9
5.4 La conservazione dell'energia nel campo gravitazionale 12
5.5 Le maree 16

Fisica 4 · Parte II · La gravitazione · versione 1.0
Capitolo 5: Satelliti, campo ed energia gravitazionale · pagine 129–152 del volume completo · estratto per lo studio

In una sera limpida, poco dopo il tramonto, un punto luminoso più brillante di qualunque stella attraversa il cielo da un orizzonte all'altro in pochi minuti, senza lampeggiare, e a un tratto si spegne: è entrato nell'ombra della Terra. È la Stazione Spaziale Internazionale, un laboratorio grande come un campo da calcio che ci gira intorno a circa 400 km di quota, con a bordo sei o sette persone. Fa un giro completo in un'ora e mezza; chi vi abita vede sorgere e tramontare il Sole circa sedici volte al giorno, e fluttua nella cabina come se il peso fosse scomparso.

Nel capitolo precedente hai scritto la legge di gravitazione universale; qui la metterai al lavoro. Calcolerai la velocità e il periodo di un satellite e capirai perché gli astronauti fluttuano anche se la gravità, lassù, è quasi quella che sentiamo noi. Incontrerai due idee nuove, il *campo* gravitazionale e un'energia potenziale valida a qualunque distanza, e con la conservazione dell'energia risponderai a una domanda antica: quanto forte bisogna lanciare un sasso perché non ricada più?

5.1 I satelliti in orbita circolare

Nel capitolo 4 hai incontrato il cannone di Newton: a una velocità abbastanza grande la curvatura della Terra «sfugge» sotto il proiettile alla stessa rapidità con cui esso scende, e il proiettile gira intorno al pianeta cadendo di continuo. Un corpo che orbita così attorno a un altro di massa molto maggiore si chiama **satellite**: la Luna è il satellite naturale della Terra, Io, Europa, Ganimede e Callisto, scoperti da Galileo, sono satelliti di Giove, e dal 1957 attorno alla Terra girano migliaia di satelliti artificiali.

> **DA RICORDARE**
>
> **Dal volume del terzo anno: il moto circolare uniforme**
>
> Nel moto circolare uniforme di raggio r e velocità v l'accelerazione è diretta verso il centro e vale $a_c = v^2/r$ (Fisica 3, capitolo 12); la forza risultante, la forza centripeta $F_c = mv^2/r$, non è un nuovo tipo di forza ma il ruolo che svolge di volta in volta una tensione, un attrito, una forza normale (Fisica 3, capitolo 14). Il periodo è $T = 2\pi r/v$.

5.1.1 La velocità orbitale

Un satellite di massa m percorre un'orbita circolare di raggio r attorno alla Terra, di massa M_T; r si misura dal *centro* della Terra, quindi per una quota h si ha $r = R_T + h$. Trascurando l'aria, debolissima a qualche centinaio di chilometri di quota, sul satellite agisce solo la gravità terrestre, diretta verso il centro: è lei a fare da forza centripeta.

$$G\frac{M_T\, m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

La massa m del satellite compare in entrambi i membri e si semplifica; moltiplicando per r si ricava la **velocità orbitale**, la velocità che un satellite deve avere per mantenersi su un'orbita circolare di raggio r:

$$v = \sqrt{(G\, M_T/r)}$$

La formula vale per qualunque corpo centrale di massa M: un pianeta attorno al Sole, una luna attorno a Giove. Dice tre cose. La velocità orbitale *non dipende dalla massa del satellite*: la stazione spaziale e una chiave inglese sfuggita a un astronauta, sulla stessa orbita, viaggiano appaiate, per la stessa ragione per cui tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione. La velocità diminuisce quando il raggio aumenta. E a ogni raggio corrisponde una sola velocità.

Dal raggio e dalla velocità si ottiene il periodo, $T = 2\pi r/v$. Elevando al quadrato e sostituendo $v^2 = GM_T/r$ si ritrova la relazione $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM_T)$ che hai dimostrato nel capitolo 4: la terza legge di Keplero vale per i satelliti della Terra come per i pianeti, con una costante diversa perché diverso è il corpo centrale.

ESEMPIO SVOLTO

La Stazione Spaziale Internazionale

Problema. La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita a una quota di circa 400 km. Calcola la sua velocità orbitale e il periodo. Dati: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

Il raggio dell'orbita si misura dal centro della Terra: $r = R_T + h = 6{,}37 \times 10^6$ m + $0{,}40 \times 10^6$ m = $6{,}77 \times 10^6$ m.

$$v = \sqrt{\left(\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}77 \times 10^6\ \text{m}}\right)} \approx 7{,}67 \times 10^3\ \text{m/s}$$

Il periodo è il tempo per percorrere la circonferenza: $T = 2\pi r/v = 2\pi \cdot 6{,}77 \times 10^6$ m / ($7{,}67 \times 10^3$ m/s) ≈ $5{,}55 \times 10^3$ s, cioè circa 92 minuti.

Controllo. Le unità: (N·m^2/kg^2 · kg / m)$^{1/2}$ = (N·m/kg)$^{1/2}$ = m/s. Sono quasi 28 000 km/h; in un giorno la ISS compie 86 400/5550 ≈ 15,6 giri, da cui i circa sedici tramonti dell'introduzione.

5.1.2 Le orbite più usate

La Tabella 5.1 raccoglie, calcolati con la stessa formula, i dati di tre orbite molto diverse e quelli della Luna; la Figura 5.1 le disegna in scala. Le orbite tra circa 200 e 2000 km di quota si dicono **orbite basse**: le percorrono la ISS, i satelliti che fotografano la Terra e quelli per le telecomuni-

cazioni via Internet. Sono vicine e veloci, e un satellite passa sopra un dato luogo per pochi minuti alla volta.

Tabella 5.1 Orbite circolari attorno alla Terra, calcolate con $v = \sqrt{(GM_T/r)}$ e $T = 2\pi r/v$ ($M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km). L'ultima colonna è l'intensità del campo gravitazionale GM_T/r^2 sull'orbita, definita più avanti nel capitolo. I valori sono arrotondati.

Orbita	quota h (km)	raggio r (km)	v (km/s)	periodo T	g (N/kg)
Stazione Spaziale	400	6770	7,67	92 min	8,69
satelliti GPS	20 200	26 600	3,87	11 h 58 min	0,564
geostazionaria	35 800	42 200	3,07	23 h 56 min	0,224
Luna	378 000	384 000	1,02	27,4 giorni	0,0027

Molto più in alto c'è un'orbita speciale. La Terra ruota su sé stessa, rispetto alle stelle, in un giorno siderale, 86 164 s. Un satellite su un'orbita circolare sopra l'equatore, che gira nel verso della rotazione terrestre con un periodo uguale al giorno siderale, appare fermo nel cielo: è sull'**orbita geostazionaria**. Il suo raggio è imposto dal periodo; dalla terza legge,

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}97\times10^{24}\cdot(86\,164)^2}{4\pi^2}\right)}\ \text{m} \approx 4{,}22\times10^{7}\ \text{m}$$

cioè circa 42 200 km dal centro e 35 800 km dalla superficie. Lassù stanno i satelliti meteorologici e quelli televisivi: l'antenna parabolica sul tetto è puntata una volta per tutte verso un punto fisso del cielo. Un satellite geostazionario non può invece restare sopra Roma: l'orbita deve avere il centro nel centro della Terra, dove punta la gravità, e stare nel piano dell'equatore, perché il satellite segua la rotazione.

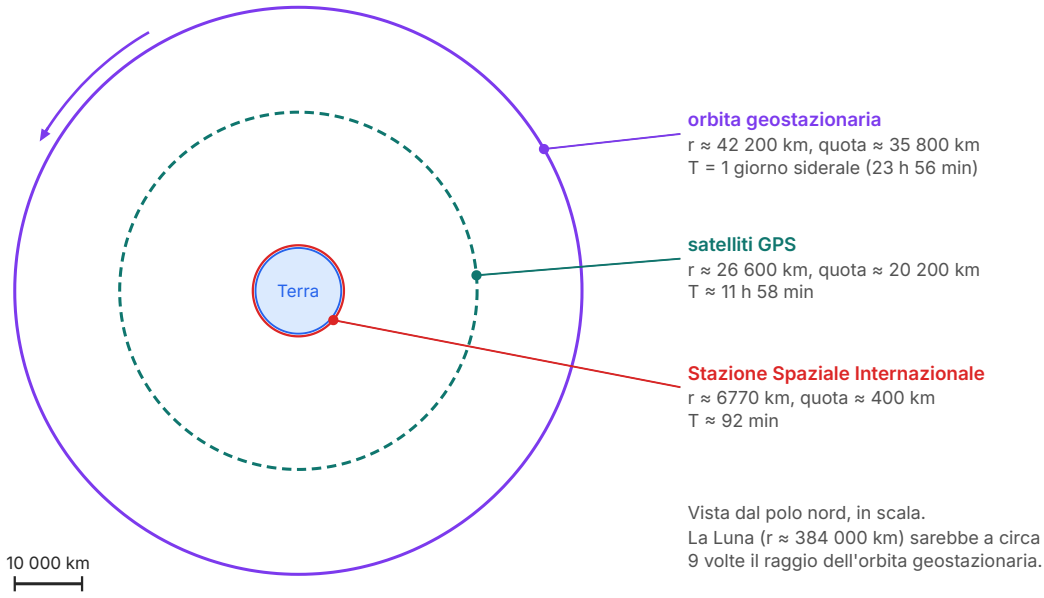


Figura 5.1 Tre orbite circolari attorno alla Terra, disegnate in scala (raggi della Tabella 5.1). L'orbita della ISS è così bassa che quasi coincide con il contorno della Terra. La freccia indica il verso del moto dei satelliti geostazionari, lo stesso della rotazione terrestre.

A metà strada orbitano i satelliti del sistema di navigazione GPS, una trentina, con un periodo di mezzo giorno siderale: da ogni punto della Terra se ne vedono sempre almeno quattro, quanti ne servono a un ricevitore per calcolare la propria posizione. Il sistema europeo analogo si chiama Galileo.

5.1.3 Perché gli astronauti fluttuano

Sulla ISS gli astronauti fluttuano e una penna lasciata andare non cade. Si dice che sono in imponderabilità, e spesso si aggiunge, sbagliando, «in assenza di gravità». Ma a 400 km di quota il campo della Terra vale $GM_T/r^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} / (6{,}77 \times 10^6)^2$ N/kg $\approx 8{,}7$ N/kg, circa l'89% del valore al suolo: un astronauta di 70 kg vi è attratto con circa 610 N, contro i 686 N al suolo.

È proprio la gravità a tenere la stazione in orbita. Gli astronauti fluttuano perché essi e la stazione *cadono insieme*, con la stessa accelerazione: come nell'ascensore in caduta libera (Fisica 3, capitolo 14), il pavimento non preme sui piedi. La stazione non si schianta perché, mentre cade, si muove di lato abbastanza in fretta da mancare la Terra: è il proiettile del cannone di Newton.

ERRORE FREQUENTE

«Nello spazio non c'è gravità»

La gravità non finisce dove finisce l'atmosfera: diminuisce come $1/r^2$, ma non si annulla mai. È la gravità della Terra a trattenere la Luna, a 384 000 km, e quella del Sole a trattenere la Terra. L'imponderabilità non è assenza di gravità, ma *caduta libera*: un corpo su cui agisce soltanto la gravità non preme su niente, come un tuffatore durante il salto.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Satellite viene dal latino *satelles, satellitis*, «guardia del corpo, accompagnatore»: in Cicerone e in Livio i *satellites* sono gli armati che scortano un potente. Fu Keplero, nel 1611, a usare la parola per le quattro lune di Giove scoperte da Galileo, che scortano il pianeta nel suo giro attorno al Sole.

Imponderabilità è formata con il prefisso negativo *in-* e il latino *ponderare*, «pesare», da *pondus, ponderis*, «peso»: la condizione di ciò che «non si può pesare», perché non preme su nessuna bilancia, non di ciò che non ha peso.

Geostazionario unisce il greco γῆ, «terra», alla radice del latino *statio*, «il restare fermo, posto fisso», da *stare*, «stare»: il satellite che sta fermo rispetto alla Terra, pur correndo a 3 km/s.

5.2 Il campo gravitazionale

5.2.1 Un'azione a distanza?

La legge di gravitazione dice *quanto* si attraggono due masse, non *come*. Il Sole attira la Terra attraverso 150 milioni di chilometri di vuoto, senza contatto. Per i filosofi meccanicisti, eredi di Cartesio, che spiegavano ogni fenomeno con urti e contatti, era inaccettabile: Leibniz accusò la gravità di Newton di essere una «qualità occulta». Newton stesso ne era a disagio: in una lettera del 1692–93 a Richard Bentley, teologo e tra i maggiori grecisti del suo tempo, definì un'assurdità l'idea di un corpo che agisce su un altro a distanza senza nulla in mezzo. Nei *Principia* si limitò a descrivere la forza con la sua legge.

La fisica ha trovato un altro modo di guardare la questione: il Sole, con la sua sola presenza, modifica lo spazio che lo circonda, e la Terra risponde alla condizione dello spazio là dove si trova. Questa condizione, che esiste in ogni punto anche se lì non c'è nessun corpo ad avvertirla, è il **campo gravitazionale**. L'idea di campo si affermò nell'Ottocento, con Faraday e Maxwell, per i fenomeni elettrici e magnetici, che incontrerai il prossimo anno.

5.2.2 Il vettore campo gravitazionale

Per conoscere il campo in un punto P si usa una **massa di prova**, un corpo così piccolo da non disturbare le masse che generano il campo: lo si pone in P, si misura la forza gravitazionale $\boldsymbol{F}$ che agisce su di esso e la si divide per la sua massa m. Il **vettore campo gravitazionale** in P è

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

Ha la direzione e il verso della forza e si misura in newton al chilogrammo. Poiché 1 N = 1 kg·m/s^2, 1 N/kg = 1 m/s^2: il campo in un punto coincide con l'accelerazione di caduta libera che vi avrebbe qualunque corpo, e il «g = 9,8 m/s^2» del terzo anno è l'intensità del campo terrestre al suolo. Noto il campo, la forza su un corpo di massa m è $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$.

Per una sfera di massa M (la Terra, il Sole, un pianeta) la forza su m a distanza r dal centro è GMm/r^2; dividendo per m, l'intensità del campo è

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

e il campo punta verso il centro della sfera. La massa di prova è sparita: il campo dipende solo dalla massa che lo genera e dalla posizione. Si rappresenta con le **linee di campo**, tangenti in ogni punto al vettore $\boldsymbol{g}$ e orientate come esso (Figura 5.2); per una sfera sono semirette che convergono nel centro. A distanza doppia le stesse linee si distribuiscono su una sfera di superficie quattro volte più grande, e la loro densità diventa un quarto, come l'intensità del campo.

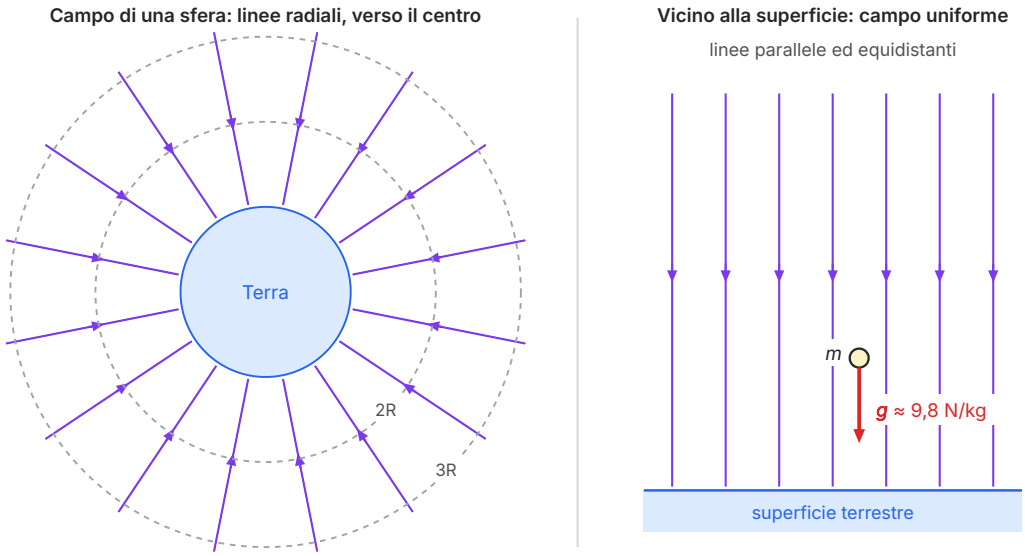


Figura 5.2 A sinistra: le linee del campo gravitazionale della Terra sono radiali e dirette verso il centro; sulle sfere tratteggiate di raggio $2R$ e $3R$ passano le stesse linee, distribuite su superfici 4 e 9 volte maggiori. A destra: in una regione piccola rispetto alla Terra, per esempio una stanza o un campo da calcio, le linee sono praticamente parallele ed equidistanti: il campo è uniforme, e su una massa m agisce la stessa forza $m\boldsymbol{g}$ in ogni punto.

In una regione piccola rispetto alla Terra il campo cambia così poco da poterlo considerare un **campo uniforme**, lo stesso vettore in ogni punto: è l'approssimazione che hai sempre usato nei problemi di caduta del terzo anno. Allontanandosi, invece, il campo cala in fretta (Figura 5.3): a $2R_T$ dal centro vale un quarto del valore al suolo, sull'orbita geostazionaria circa 0,22 N/kg.

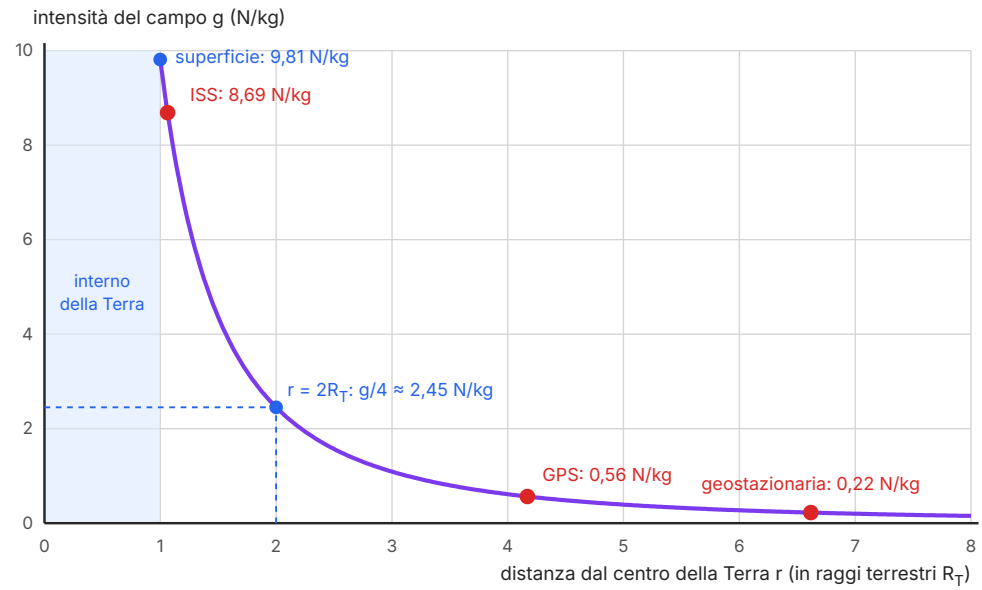


Figura 5.3 Intensità del campo gravitazionale della Terra in funzione della distanza dal centro, $g = GM_T/r^2$, calcolata per $r \geq R_T$. Sono segnati i valori alla superficie, a $2R_T$ e sulle tre orbite della Tabella 5.1. All'interno della Terra la formula non vale.

Per la Luna ($M_L = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg, $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m) la formula dà $g = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 7{,}34 \times 10^{22} / (1{,}74 \times 10^6)^2$ N/kg $\approx 1{,}62$ N/kg, circa un sesto di quello terrestre: per questo gli astronauti delle missioni Apollo avanzavano a balzi. Conta anche il raggio: Giove ha una massa 318 volte quella della Terra ma un raggio 11 volte maggiore, e alla sua «superficie» il campo è solo due volte e mezza quello terrestre.

5.3 L'energia potenziale gravitazionale

5.3.1 Perché *mgh* non basta

La formula *mg h* presuppone un peso costante, cioè un campo uniforme. Ma da 400 km a 36 000 km di quota il campo diminuisce di quasi quaranta volte, e *mg h* darebbe un risultato del tutto sbagliato.

DA RICORDARE

Dal volume del terzo anno: l'energia potenziale

Vicino al suolo l'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m a un'altezza h sopra il livello di zero è $U = mg\,h$; il lavoro del peso dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, $W_{\text{peso}} = -\Delta U$, e ha significato fisico soltanto ΔU, non il valore di U, che dipende dal livello di zero scelto. Se compiono lavoro solo forze conservative, l'energia meccanica $E = K + U$ si conserva (Fisica 3, capitolo 16). Il lavoro di una forza variabile è l'area sotto il grafico forza–spostamento (Fisica 3, capitolo 15).

Come nel terzo anno, l'energia potenziale in una posizione è legata al lavoro della gravità fino al livello di zero, e il lavoro di una forza variabile è l'area sotto il suo grafico (Figura 5.4). Per la gravità di una sfera conviene porre lo zero all'infinito, dove la forza si annulla. Per allontanare un corpo dalla distanza r fino all'infinito bisogna compiere contro la gravità un lavoro uguale all'area sotto la curva $F = GMm/r^2$ da r in poi. L'area si estende senza fine, ma la curva scende così in fretta che il suo valore è finito: un calcolo che si impara all'università, con l'analisi matematica, mostra che vale GMm/r. L'energia potenziale a distanza r è dunque minore di quella all'infinito (zero) di questa quantità:

$$U = -G\frac{M\,m}{r}$$

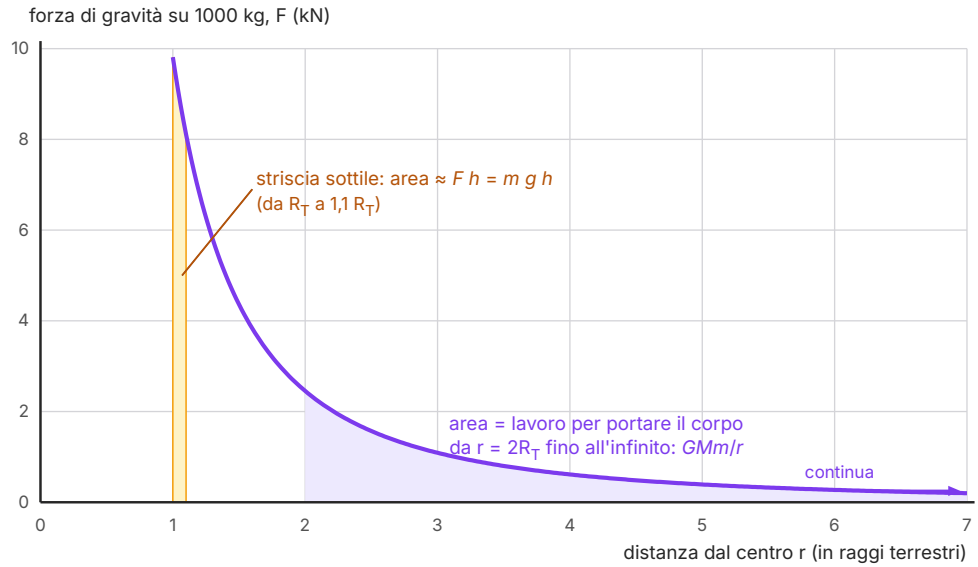


Figura 5.4 Forza gravitazionale della Terra su un corpo di 1000 kg in funzione della distanza dal centro. L'area viola, da $r = 2R_T$ fino all'infinito, è il lavoro necessario per allontanare il corpo da $2R_T$ fino a una distanza infinita: vale $GMm/r = 3{,}1 \times 10^{10}$ J. Vicino alla superficie, in una striscia sottile, la forza è quasi costante e l'area è quasi un rettangolo di base h e altezza mg.

Con questa scelta del livello di zero l'energia potenziale gravitazionale di un corpo a distanza finita è sempre *negativa*, e cresce (diventa meno negativa) man mano che il corpo si allontana: allontanarsi costa lavoro, come salire le scale. Il segno meno non è un difetto della formula ma il suo contenuto: dice che il corpo è «in debito» di energia rispetto alla condizione di libertà, all'infinito. La formula vale per r uguale o maggiore del raggio della sfera, e, come sempre, ciò che ha significato fisico sono le differenze.

5.3.2 *mgh* come approssimazione

La nuova formula deve contenere la vecchia: vicino alla superficie le due devono dare la stessa differenza di energia. Controlliamolo con i numeri, per un corpo di 1 kg che sale dalla superficie a una quota h. Con la formula nuova, $\Delta U = GM_T(1/R_T - 1/(R_T + h))$; con quella vecchia, $\Delta U = g\,h$, con $g = GM_T/R_T^2 \approx 9{,}81$ N/kg.

Per $h = 100$ m la formula esatta dà 981,33 J, $mg\,h$ 981,34 J: meno di due parti su centomila di differenza. Per $h = 1000$ km la formula esatta dà $8{,}48 \times 10^6$ J, $mg\,h$ $9{,}81 \times 10^6$ J, il 16% in più, perché tratta la forza come se restasse quella del suolo. La regola: $mg\,h$ vale quando h è molto minore del raggio della Terra, perché allora l'area sotto la curva è quasi un rettangolo (la striscia arancione della Figura 5.4); per i satelliti serve $-GMm/r$.

5.4 La conservazione dell'energia nel campo gravitazionale

Lontano dall'atmosfera la gravità è l'unica forza che agisce su un satellite o su una sonda con i motori spenti. È una forza conservativa: l'energia meccanica, ora scritta con la nuova energia potenziale, si conserva.

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - G\frac{M\, m}{r} = \text{costante}$$

È una sola equazione, ma collega la velocità e la distanza in qualunque punto del moto, su un'orbita circolare, su un'ellisse o lungo una traiettoria che porta lontano per sempre.

5.4.1 La velocità di fuga

Si lancia un corpo dalla superficie di un pianeta di massa M e raggio R, trascurando l'aria. Se la velocità è piccola, il corpo sale, si ferma e ricade. Se è più grande, sale più in alto; ma la gravità, salendo, diminuisce, e c'è una velocità oltre la quale il corpo non torna più. La **velocità di fuga** è la minima velocità di lancio con cui un corpo, partendo dalla superficie, si allontana indefinitamente: arriva «all'infinito» con velocità nulla. Lì $K = 0$ e $U = 0$, quindi $E = 0$; poiché l'energia si conserva, anche al momento del lancio $\tfrac{1}{2}mv_f^2 - GMm/R = 0$, cioè

$$v_f = \sqrt{\left(\frac{2G\, M}{R}\right)}$$

Per la Terra $v_f = \sqrt{(2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} / 6{,}37 \times 10^{6})}$ m/s $\approx 1{,}12 \times 10^{4}$ m/s, cioè 11,2 km/s; per la Luna, con massa 81 volte minore e raggio 3,7 volte minore, appena 2,4 km/s. La velocità di fuga *non dipende dalla massa* del corpo lanciato, né dalla *direzione* del lancio, purché la traiettoria non incontri il pianeta: l'energia cinetica è uno scalare. Un razzo vero accelera a lungo con i motori e attraversa l'aria, ma il bilancio energetico è questo.

Confrontando le due formule, $v_f = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(GM/R)}$: la velocità di fuga è $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ volte la velocità di un'orbita circolare radente alla superficie (7,9 km/s per la Terra). Per passare da un'orbita bassa alla fuga basta dunque aumentare la velocità del 41%.

5.4.2 L'energia di un'orbita circolare

Su un'orbita circolare di raggio r, $v^2 = GM/r$. L'energia cinetica è quindi $K = \tfrac{1}{2}mv^2 = GMm/(2r)$: esattamente la metà del valore assoluto dell'energia potenziale, $K = -U/2$. L'energia totale è

$$E = K + U = G\frac{M\, m}{2r} - G\frac{M\, m}{r} = -G\frac{M\, m}{2r}$$

L'energia di un satellite in orbita circolare è negativa e vale metà della sua energia potenziale. Il segno si legge nel grafico di U in funzione di r (Figura 5.5): un corpo con energia E può trovarsi

solo dove $K = E - U \geq 0$, cioè dove la curva sta sotto la retta orizzontale di E. Se $E < 0$ la retta incontra la curva a una distanza massima, oltre la quale il corpo non va: è un **sistema legato**, come un satellite, la Luna, un sasso lanciato in aria. Se $E \geq 0$ il corpo può allontanarsi senza limite. La fuga è il caso di confine, $E = 0$.

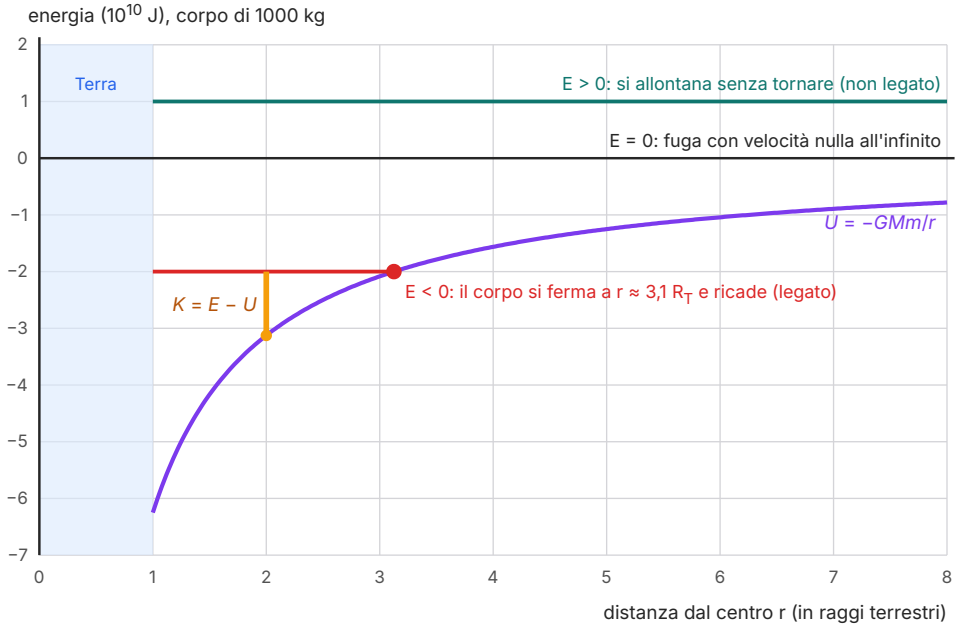


Figura 5.5 Energia potenziale gravitazionale di un corpo di 1000 kg nel campo della Terra, $U = -GM_T m/r$, calcolata per $r \geq R_T$. Le rette orizzontali sono tre valori dell'energia totale. Con $E = -2{,}0 \times 10^{10}$ J il corpo non può superare la distanza a cui $U = E$, circa $3{,}1R_T$; in ogni punto l'energia cinetica è il segmento tra la curva e la retta. Con $E \geq 0$ il corpo sfugge alla Terra.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere un grafico: fin dove sale una sonda

Problema. Una sonda di 1000 kg ha, nel campo della Terra, l'energia totale $E = -2{,}0 \times 10^{10}$ J della retta rossa della Figura 5.5; i motori sono spenti e l'aria è trascurabile. a) Leggi sul grafico la distanza massima dal centro della Terra che la sonda può raggiungere. b) Con quale velocità era partita dalla superficie? c) Quanto vale la sua velocità a $2R_T$ dal centro?

a) La sonda si ferma dove $K = 0$, cioè dove la retta di E incontra la curva di U: sul grafico, a circa $3{,}1R_T$. Controllo: da $-GM_Tm/r = E$ si ha $r = GM_Tm/|E| = 6{,}25 \times 10^{10}$ J $\cdot\ R_T$ / $2{,}0 \times 10^{10}$ J $\approx 3{,}1R_T$, perché $GM_Tm/R_T \approx 6{,}25 \times 10^{10}$ J.

b) Alla superficie $U = -6{,}25 \times 10^{10}$ J, quindi $K = E - U = -2{,}0 \times 10^{10}$ J $+ 6{,}25 \times 10^{10}$ J $\approx 4{,}25 \times 10^{10}$ J e $v = \sqrt{(2K/m)} = \sqrt{(2 \cdot 4{,}25 \times 10^{10}\ \text{J} / 1000\ \text{kg})} \approx 9{,}2$ km/s.

c) A $2R_T$ l'energia potenziale è la metà di quella alla superficie, $-3{,}13 \times 10^{10}$ J (sul grafico il segmento arancione misura K): $K \approx 1{,}13 \times 10^{10}$ J, $v \approx \sqrt{(2 \cdot 1{,}13 \times 10^{10}\ \text{J} / 1000\ \text{kg})} \approx 4{,}7$ km/s.

Osservazione. Partita a 9,2 km/s, tra la velocità dell'orbita radente (7,9 km/s) e quella di fuga (11,2 km/s), la sonda sale a circa 13 500 km di quota e ricade: è legata alla Terra.

ESEMPIO SVOLTO

Quanta energia per mettere in orbita un satellite

Problema. Un satellite di 1000 kg deve essere portato dalla superficie terrestre su un'orbita circolare a 400 km di quota. Trascurando l'aria e la rotazione della Terra, quanta energia deve ricevere dal razzo? Quanta di questa serve per salire e quanta per acquistare velocità?

Sistema e scelta dello zero. Il sistema è satellite–Terra; zero dell'energia potenziale all'infinito. Al suolo il satellite è fermo: $E_i = U_i = -GM_Tm/R_T = -6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} \cdot 1000 / 6{,}37 \times 10^{6}$ J $\approx -6{,}25 \times 10^{10}$ J.

In orbita, con $r = 6{,}77 \times 10^{6}$ m: $E_f = -GM_Tm/(2r) \approx -2{,}94 \times 10^{10}$ J. L'energia da fornire è la differenza, $\Delta E = E_f - E_i \approx 3{,}31 \times 10^{10}$ J.

Come si divide. L'aumento di energia potenziale è $\Delta U = -GM_Tm/r - (-GM_Tm/R_T) \approx -5{,}88 \times 10^{10}$ J $+ 6{,}25 \times 10^{10}$ J $\approx 0{,}37 \times 10^{10}$ J; l'energia cinetica finale è $K = GM_Tm/(2r) \approx 2{,}94 \times 10^{10}$ J. Solo un nono circa dell'energia serve a salire: quasi tutta serve a raggiungere la velocità orbitale di 7,7 km/s.

Controllo. $0{,}37 \times 10^{10}$ J $+ 2{,}94 \times 10^{10}$ J $= 3{,}31 \times 10^{10}$ J. Con $mg\,h = 0{,}39 \times 10^{10}$ J si sarebbe sovrastimato ΔU del 6%. La rotazione terrestre, che all'equatore regala circa 0,46 km/s ai lanci verso est, riduce un poco l'energia necessaria.

DA RICORDARE

Più in alto, più lento, ma con più energia

Passando a un'orbita più alta un satellite diventa *più lento* ($v = \sqrt{(GM/r)}$ diminuisce) ma la sua energia totale *aumenta*, perché $-GMm/(2r)$ diventa meno negativa: perde energia cinetica, ma guadagna il doppio in energia potenziale. Il paradosso apparente si scioglie seguendo la manovra: il satellite accende i motori in avanti, accelera, si allontana dalla Terra e, salendo, rallenta più di quanto aveva accelerato; una seconda accensione, nel punto più alto, rende circolare la nuova orbita.

5.4.3 Perché la Luna non ha atmosfera

Le molecole di un gas si muovono in tutte le direzioni con velocità che a temperatura ambiente sono dell'ordine di centinaia di metri al secondo, e alcune sono molto più veloci della media (capitolo 9). Sulla Luna, dove la velocità di fuga è soltanto 2,4 km/s e il suolo al Sole è più caldo che sulla Terra, una parte non trascurabile delle molecole più veloci di un'eventuale atmosfera sfugge nello spazio, e in miliardi di anni il gas se ne va quasi tutto. Sulla Terra, con 11,2 km/s, sfuggono quasi soltanto le molecole più leggere, come l'idrogeno e l'elio; Giove, con circa 60 km/s, ha trattenuto persino questi.

APPROFONDIMENTO

Le «stelle oscure» di Michell e Laplace

Che cosa accadrebbe se una stella fosse così compatta che la sua velocità di fuga superasse quella della luce? Se lo chiese nel 1783 l'ecclesiastico e naturalista inglese John Michell. Con la fisica di Newton, che pensava la luce come uno sciame di particelle soggette alla gravità, calcolò che una stella con la densità del Sole e un raggio 500 volte maggiore avrebbe trattenuto la propria luce: invisibile, si sarebbe riconosciuta solo dalla gravità esercitata su eventuali stelle compagne. Nel 1796 Pierre-Simon Laplace, nell'*Exposition du système du monde*, giunse a una conclusione analoga.

Il conto si rifà con la velocità di fuga. Per il Sole $v_f \approx 618$ km/s; a parità di densità la massa cresce come R^3, quindi M/R come R^2 e v_f come R: per un raggio 500 volte maggiore, $500 \cdot 618$ km/s $\approx 3{,}1 \times 10^5$ km/s, più della velocità della luce.

L'idea fu presto dimenticata e tornò nel Novecento in forma diversa: i *buchi neri* sono una previsione della relatività generale di Einstein, che supera la gravitazione di Newton e si studia all'università. Resta una coincidenza: il raggio sotto il quale, per la relatività, un corpo diventa un buco nero è $R = 2GM/c^2$, la stessa espressione che dà $v_f = c$ nella formula di Michell. Per la Terra sono circa 9 mm.

COLLEGAMENTI

Storia: la corsa allo spazio

Il 4 ottobre 1957 l'Unione Sovietica mise in orbita lo Sputnik 1, una sfera di circa 84 kg che faceva un giro della Terra in circa 96 minuti. In piena guerra fredda fu uno shock per gli Stati Uniti, che risposero con un grande programma spaziale: nel 1969 la missione Apollo 11 portò i primi esseri umani sulla Luna. Oggi la ISS, abitata senza interruzione dal 2000, è un progetto comune di molti paesi, Italia compresa. Le sue orbite si calcolano con le formule scritte da Newton tre secoli prima.

5.5 Le maree

Due volte al giorno, sulle coste dell'oceano, il mare sale e scende: in alcune baie atlantiche di oltre dieci metri, nel Mediterraneo di poche decine di centimetri. Già gli antichi avevano notato che le maree seguono la Luna: l'alta marea ritarda di circa 50 minuti al giorno, come il sorgere della Luna, e le maree sono più ampie con la Luna nuova e la Luna piena. Ma perché le alte maree sono due e non una?

La risposta di Newton sta nel fatto che la gravità cambia con la distanza. Calcolando GM_L/d^2 si trova che la Luna attira ogni chilogrammo d'acqua con $3{,}43 \times 10^{-5}$ N/kg dalla sua parte della Terra, con $3{,}21 \times 10^{-5}$ N/kg dalla parte opposta, e il centro della Terra con $3{,}32 \times 10^{-5}$ N/kg. La Terra intera «cade» verso la Luna con l'accelerazione del suo centro (più esattamente, Terra e Luna girano attorno al loro centro di massa, capitolo 2). Rispetto al centro, l'acqua dalla parte della Luna è tirata un poco *più* e si solleva; quella dalla parte opposta è tirata un poco *meno*, resta indietro e si solleva anche lei. Le differenze, circa 1×10^{-6} N/kg, sono minuscole ma agiscono su tutto l'oceano. È la **forza di marea**: la differenza tra l'attrazione su una parte di un corpo e quella sul suo centro.

Si formano così due **rigonfiamenti di marea**, uno verso la Luna e uno dalla parte opposta. La Terra ruota sotto di essi mentre la Luna avanza sulla sua orbita: ogni costa ha quindi due alte maree circa ogni 24 ore e 50 minuti. La forma dei bacini e dei fondali complica molto il fenomeno reale, ma il motore è questo.

Anche il Sole produce maree. Attira la Terra con una forza circa 180 volte maggiore di quella della Luna, ma è circa 390 volte più lontano, e la sua attrazione varia molto meno da una parte all'altra della Terra: il suo effetto di marea è circa la metà di quello lunare. Con la Luna nuova e la Luna piena Sole, Terra e Luna sono allineati, i rigonfiamenti si sommano e si hanno le **maree vive**, le più ampie; ai quarti i rigonfiamenti sono a 90° e in parte si compensano: sono le **maree morte** (Figura 5.6).

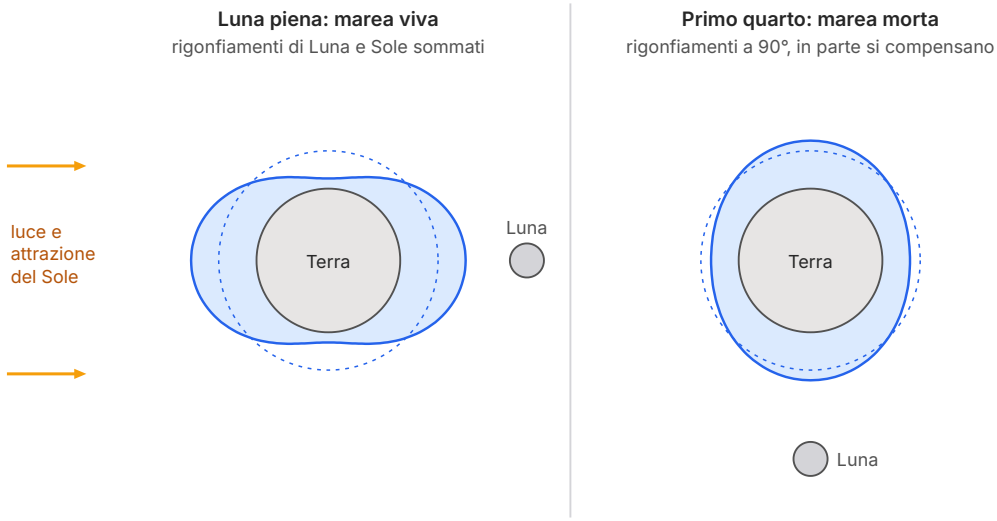


Figura 5.6 Le maree viste dal polo nord. Con la Luna piena (e con la Luna nuova) i rigonfiamenti prodotti dalla Luna e dal Sole sono allineati e si sommano: marea viva. Al primo (e all'ultimo) quarto sono perpendicolari: marea morta. Il cerchio tratteggiato è il livello del mare in assenza di maree; il rigonfiamento del Sole è disegnato circa la metà di quello della Luna. Non in scala.

Non tutti, nel Seicento, accettarono che la Luna c'entrasse. Galileo, nella Giornata quarta del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), spiegò le maree con i due moti della Terra, rotazione e rivoluzione, che a suo giudizio accelerano e rallentano i bacini dei mari e ne fanno oscillare l'acqua; vi vedeva la prova fisica del moto terrestre. E rimproverò a Keplero di aver dato ascolto «a predominii della Luna sopra l'acqua, ed a proprietà occulte, e simili fanciullezze». La teoria di Galileo era sbagliata: prevede una sola alta marea al giorno e ignora le fasi della Luna. Questa volta aveva visto giusto Keplero; la spiegazione quantitativa venne con Newton, nel 1687.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il pendolo conico, un'«orbita» sul tavolo

Materiali. Due palline (50 g e 100 g), un filo inestensibile, un gancio fisso; un foglio con cerchi di raggio 20, 30, 40 e 50 cm, steso sotto il punto di sospensione; un cronometro; un metro.

Procedimento. Fissa la pallina al filo con l = 0,800 m (± 0,005 m) dal punto di sospensione al centro della pallina, e mettila in rotazione su una circonferenza orizzontale sopra uno dei cerchi disegnati: il filo descrive un cono (Figura 5.7). La risultante del peso e della tensione è orizzontale e diretta verso il centro, come la gravità su un satellite. Dai triangoli simili (forza centripeta : peso = r : h) si ricava $mv^2/r = mg\,r/h$, quindi $T = 2\pi r/v = 2\pi\sqrt{(h/g)}$, che non dipende dalla massa. Calcola $h = \sqrt{(l^2 - r^2)}$, cronometra 10 giri (± 0,2 s) e confronta il periodo con la previsione (Tabella 5.2).

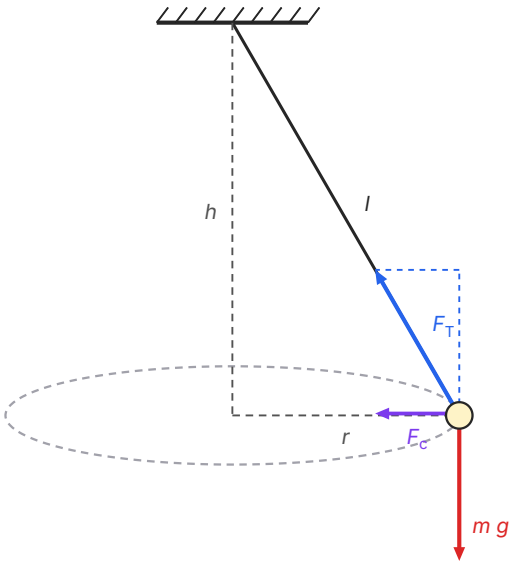
Tabella 5.2 Pendolo conico con l = 0,800 m (dati tipici). h è calcolata da l e r; il periodo previsto è $2\pi\sqrt{(h/g)}$, con un'incertezza dovuta a quelle su l e r.

m (g)	r (m) ± 0,01	h (m)	10 giri (s) ± 0,2	T misurato (s)	T previsto (s)
50	0,20	0,775	17,7	1,77 ± 0,02	1,77 ± 0,01
50	0,30	0,742	17,4	1,74 ± 0,02	1,73 ± 0,01
50	0,40	0,693	16,8	1,68 ± 0,02	1,67 ± 0,01
50	0,50	0,624	16,0	1,60 ± 0,02	1,59 ± 0,02
100	0,40	0,693	16,8	1,68 ± 0,02	1,67 ± 0,01

Che cosa concludere. In ogni riga periodo misurato e previsto sono compatibili: il modello «risultante verso il centro = forza centripeta» funziona, e raddoppiando la massa il periodo non cambia, come per un satellite. Il periodo diminuisce invece quando il cerchio si allarga: qui l'analogia si ferma, perché la forza centripeta del pendolo conico *cresce* con r, mentre la gravità diminuisce con la distanza.

Sicurezza. Usa un filo robusto e un gancio sicuro, e lavora lontano dai compagni: una pallina che si stacca durante la rotazione parte per la tangente.

Per la relazione. Segui lo schema di Fisica 3, capitolo 4: tabella con misure e incertezze, calcolo di h e del periodo previsto, confronto riga per riga, discussione della dipendenza dalla massa e dal raggio. Perché conviene cronometrare 10 giri invece di uno?



Le due forze sulla pallina:

peso $m\,g$ (verso il basso)

tensione del filo F_T (lungo il filo)

La componente orizzontale della tensione, F_c, punta verso il centro del cerchio: è la forza centripeta.

Triangoli simili:

$F_c / (m\,g) = r / h$

Risultato: $T = 2\pi\sqrt{(h/g)}$

non dipende dalla massa della pallina

Figura 5.7 Il pendolo conico: la pallina percorre una circonferenza orizzontale di raggio r, il filo di lunghezza l descrive un cono di altezza h. La tensione F_T ha una componente verticale che equilibra il peso e una componente orizzontale F_c, diretta verso il centro, che fa da forza centripeta.

IN SINTESI

Le formule del capitolo e il loro significato

Velocità orbitale: $v = \sqrt{(GM/r)}$: la velocità di un satellite su un'orbita circolare di raggio r (dal centro del corpo centrale di massa M); non dipende dalla massa del satellite e diminuisce con il raggio. In m/s, con r in m e M in kg.

Periodo: $T = 2\pi r/v$, da cui $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$. Orbita geostazionaria: T = 1 giorno siderale (86 164 s), $r \approx 4{,}22 \times 10^7$ m, sopra l'equatore.

Campo gravitazionale: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$, in N/kg = m/s^2; per una sfera $g = GM/r^2$, diretto verso il centro. La forza su un corpo è $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$.

Energia potenziale gravitazionale: $U = -GMm/r$, in J, con lo zero all'infinito: negativa a ogni distanza finita. Per dislivelli h molto minori del raggio del pianeta $\Delta U \approx mg\,h$.

Velocità di fuga: $v_f = \sqrt{(2GM/R)}$: la minima velocità di lancio dalla superficie per allontanarsi indefinitamente; non dipende dalla massa del corpo né dalla direzione. Terra 11,2 km/s, Luna 2,4 km/s.

Energia di un'orbita circolare: $K = GMm/(2r) = -U/2$, $E = -GMm/(2r)$. $E < 0$: sistema legato; $E \geq 0$: il corpo può allontanarsi senza limite.

Con questo capitolo si chiude la seconda parte. Dalle sfere di Aristotele e dagli epicicli di Tolomeo sei arrivato a calcolare l'orbita di un satellite: un'unica legge governa la mela, la Luna, le maree e le sonde. Nella prossima parte lascerai il cielo per un'altra forma dell'energia: il calore.

SINTESI

- Un satellite in orbita circolare è tenuto in orbita dalla gravità, che fa da forza centripeta: $GMm/r^2 = mv^2/r$, con r misurato dal centro del corpo centrale.
- La velocità orbitale è $v = \sqrt{(GM/r)}$: non dipende dalla massa del satellite e diminuisce con il raggio; il periodo è $T = 2\pi r/v$, e T^2/r^3 è lo stesso per tutti i satelliti dello stesso corpo.
- La ISS (quota circa 400 km) viaggia a 7,7 km/s e fa un giro in circa 92 minuti; i satelliti geostazionari, sopra l'equatore a circa 35 800 km di quota, hanno un periodo di un giorno siderale e restano fermi rispetto al suolo.
- Gli astronauti in orbita sono in imponderabilità perché sono in caduta libera insieme alla stazione, non perché manchi la gravità: alla quota della ISS il campo è circa il 90% di quello al suolo.
- Il campo gravitazionale in un punto è la forza su una massa di prova divisa per la massa, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$; si misura in N/kg (= m/s^2) e coincide con l'accelerazione di caduta libera in quel punto.
- Il campo di una sfera è diretto verso il centro e ha intensità $g = GM/r^2$; le linee di campo sono radiali. Vicino al suolo il campo è praticamente uniforme.
- L'energia potenziale gravitazionale, con lo zero all'infinito, è $U = -GMm/r$: è negativa e cresce allontanandosi. Per piccoli dislivelli si ritrova $\Delta U \approx mg\,h$.
- Lontano dall'atmosfera l'energia meccanica di un corpo nel campo gravitazionale si conserva.
- La velocità di fuga $v_f = \sqrt{(2GM/R)}$ è la minima velocità di lancio per allontanarsi indefinitamente: 11,2 km/s per la Terra, 2,4 km/s per la Luna; non dipende dalla massa né dalla direzione del lancio.
- Su un'orbita circolare $K = -U/2$ ed $E = -GMm/(2r) < 0$: il sistema è legato. Un corpo con $E \geq 0$ può allontanarsi senza limite.
- Le maree sono dovute alla differenza tra l'attrazione della Luna (e del Sole) sulle diverse parti della Terra: si formano due rigonfiamenti, e ogni costa ha due alte maree al giorno.
- L'effetto del Sole è circa la metà di quello della Luna: con Luna nuova e Luna piena si hanno le maree vive, ai quarti le maree morte.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● La velocità di un satellite su un'orbita circolare attorno alla Terra dipende:
   A. dalla massa del satellite
   B. dal raggio dell'orbita
   C. dalla forma del satellite
   D. dalla quantità di carburante a bordo

2. ● Gli astronauti a bordo della Stazione Spaziale Internazionale fluttuano perché:
   A. a 400 km di quota la gravità terrestre è nulla
   B. la stazione è fuori dall'atmosfera
   C. loro e la stazione cadono liberamente con la stessa accelerazione
   D. la forza centrifuga equilibra esattamente la gravità della Luna

3. ● Il campo gravitazionale in un punto è:
   A. la forza gravitazionale che agirebbe su una massa di prova in quel punto, divisa per la massa di prova
   B. la forza gravitazionale che agisce su un corpo di 1 N
   C. la massa del corpo che genera il campo divisa per la distanza
   D. l'energia potenziale di un corpo in quel punto

4. ● A una distanza dal centro della Terra pari a $3R_T$, l'intensità del campo gravitazionale terrestre è circa:
   A. $g/3$
   B. $g/6$
   C. $3g$
   D. $g/9$

5. ● L'energia potenziale gravitazionale $U = -GMm/r$:
   A. è positiva a ogni distanza
   B. è nulla a distanza infinita e negativa a ogni distanza finita
   C. è nulla sulla superficie della Terra
   D. diminuisce quando il corpo si allontana dalla Terra

6. ●● La velocità di fuga dalla superficie di un pianeta senza atmosfera:
   A. è maggiore per un corpo di massa maggiore
   B. è minore se il corpo è lanciato in verticale
   C. è uguale alla velocità di un'orbita circolare radente alla superficie
   D. dipende soltanto dalla massa e dal raggio del pianeta

7. ●● L'energia totale di un satellite su un'orbita circolare:
   A. è negativa e vale metà della sua energia potenziale
   B. è nulla, perché il satellite non cade
   C. è positiva e uguale alla sua energia cinetica
   D. è uguale alla sua energia potenziale

8. ●● Le maree vive, le più ampie, si verificano:
   A. soltanto di giorno, quando il Sole è alto
   B. al primo e all'ultimo quarto di Luna
   C. con la Luna nuova e con la Luna piena
   D. soltanto nel Mediterraneo

Vero o falso

9. ● Un satellite su un'orbita circolare più lontana dalla Terra si muove più lentamente di uno su un'orbita più vicina. V / F

10. ● Alla quota della Stazione Spaziale Internazionale l'intensità del campo gravitazionale terrestre è circa il 10% di quella al suolo. V / F

11. ●● Un satellite geostazionario può restare fermo sopra Roma, se si sceglie bene la quota. V / F

12. ● Se l'energia totale di una sonda nel campo gravitazionale della Terra è positiva, la sonda può allontanarsi indefinitamente. V / F

13. ●● Il Sole attira la Terra con una forza molto maggiore di quella della Luna, quindi produce maree più ampie di quelle lunari. V / F

Applicare

14. ● Calcola l'intensità del campo gravitazionale sulla superficie di Marte (massa $6{,}42 \times 10^{23}$ kg, raggio $3{,}39 \times 10^{6}$ m) e confrontala con quella terrestre.

15. ● Completa. Se la distanza dal centro della Terra raddoppia, l'intensità del campo gravitazionale diventa _____ del valore iniziale; se la distanza diventa 10 volte maggiore, diventa _____ . Il campo si misura in _____ , unità equivalente a m/s^2.

16. ●● Un satellite meteorologico percorre un'orbita circolare a 800 km di quota. Calcola la sua velocità orbitale e il suo periodo, in minuti.

17. ●● Leggi nella Figura 5.3 a quale distanza dal centro della Terra, in raggi terrestri, il campo vale circa 2,5 N/kg, e a quale quota corrisponde in chilometri. Verifica poi la lettura con la formula $g = GM_T/r^2$.

18. ●● Calcola l'energia potenziale gravitazionale di un satellite di 500 kg sull'orbita geostazionaria ($r = 4{,}22 \times 10^{7}$ m) e sulla superficie terrestre. Di quanto aumenta l'energia potenziale tra la superficie e l'orbita?

19. ● Calcola la velocità di fuga dalla superficie di Marte (massa $6{,}42 \times 10^{23}$ kg, raggio $3{,}39 \times 10^6$ m) e confrontala con quella della Terra.

20. ●● Un satellite deve fare un giro della Terra ogni 2,0 ore su un'orbita circolare. Calcola il raggio dell'orbita e la quota.

Problemi

21. ●●● Un satellite di 1200 kg viene spostato da un'orbita circolare a 400 km di quota all'orbita geostazionaria ($r = 4{,}22 \times 10^7$ m). a) Calcola la sua energia cinetica, potenziale e totale sulle due orbite. b) Quanta energia devono fornire i motori? c) Su quale orbita il satellite è più veloce?

22. ●●● Dalla superficie della Luna un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto a 1,0 km/s (non c'è aria). a) Usando la conservazione dell'energia con $U = -GM_\text{L}m/r$, calcola a quale quota arriva. b) Calcola la quota con la formula del terzo anno $h = v^2/(2g)$, con $g = 1{,}62$ m/s^2 (Fisica 3, capitolo 16). c) Perché il risultato b) è sbagliato, e in che verso? Dati: $M_\text{L} = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg, $R_\text{L} = 1{,}74 \times 10^6$ m.

23. ●●● a) Calcola la velocità e il periodo della Luna supponendo che percorra un'orbita circolare di raggio $3{,}84 \times 10^8$ m attorno al centro della Terra. b) Il periodo osservato (mese siderale) è 27,3 giorni: di quanto differisce il risultato, in percentuale? c) Una delle cause è che la Terra non sta ferma: Terra e Luna ruotano entrambe attorno al loro centro di massa. Calcola la distanza del centro di massa dal centro della Terra (capitolo 2) e confrontala con il raggio terrestre.

24. ●● I satelliti GPS percorrono orbite circolari di raggio $2{,}656 \times 10^7$ m. a) Calcola la loro velocità e il loro periodo, in ore. b) Quanti giri compiono in un giorno siderale? c) Quanto vale lassù l'intensità del campo gravitazionale terrestre?

25. ●●● A quale raggio si dovrebbe comprimere la Terra, conservandone la massa, perché la sua velocità di fuga diventi uguale alla velocità della luce? Confronta il risultato con il raggio attuale. Perché questo calcolo, alla Michell, non basta a descrivere un buco nero?

26. ●● Un'astronauta di 62 kg è a bordo della ISS, a 400 km di quota. a) Calcola la forza di gravità che la Terra esercita su di lei, e confrontala con il suo peso al suolo. b) Che cosa segnerebbe una bilancia pesapersone fissata al pavimento della stazione? Spiega con il modello dell'ascensore in caduta libera (Fisica 3, capitolo 14).

Ragionare e argomentare

27. ●● Commenta la fonte. In una lettera del 1692–93 a Richard Bentley Newton scrive: «Che la gravità sia innata, inerente ed essenziale alla materia, così che un corpo possa agire su un altro a distanza attraverso il vuoto, senza la mediazione di nient'altro [...], è per me un'assurdità così grande che credo che nessuno che abbia in materia filosofica una competente facoltà di pensiero possa mai caderci» (traduzione della redazione). Che cosa contesta Newton, che pure aveva scritto la legge di gravitazione? Come risponde al problema l'idea di campo gravitazionale?

28. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Per portare un satellite su un'orbita più alta bisogna che alla fine vada più veloce, perché deve vincere la gravità a una distanza maggiore; e infatti per salire serve energia». Individua che cosa c'è di giusto e che cosa di sbagliato, e correggi il ragionamento.

29. ●●● Stima. Un piccolo asteroide sferico ha un raggio di 10 km e una densità di 2000 kg/m^3. a) Calcola la sua massa e la sua velocità di fuga. b) Sulla Terra un buon salto da fermi solleva il baricentro di circa 0,5 m: con quale velocità si stacca dal suolo chi salta? c) Potresti lanciarti nello spazio con un salto da questo asteroide? E da uno della stessa densità ma con raggio di 2 km? (La velocità di fuga, a parità di densità, è proporzionale al raggio.)

30. ●●● Commenta la fonte. Nella Giornata quarta del *Dialogo* (1632) Galileo rimprovera a Keplero di aver prestato fede «a predominii della Luna sopra l'acqua, ed a proprietà occulte, e simili fanciullezze». Quale spiegazione delle maree rifiutava Galileo, e quale proponeva? Quali osservazioni sulle maree permettono di decidere chi aveva ragione?

PER APPROFONDIRE

- [NEW] Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, libro III: la teoria della Luna, delle comete e delle maree come conseguenze di un'unica legge di gravitazione.
- [DIA] Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Giornata quarta: la teoria galileiana delle maree, sbagliata ma ingegnosa, e la polemica con Keplero.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla teoria della gravitazione, con la spiegazione delle maree e una discussione dell'azione a distanza.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla gravitazione, per satelliti, energia delle orbite e velocità di fuga con molti esercizi.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: come l'idea di campo ha cambiato il modo di pensare le forze.

Glossario del capitolo

Campo gravitazionale
Condizione dello spazio prodotta da una massa, per cui un corpo posto in un punto subisce una forza gravitazionale; vettore $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$, in N/kg.

Campo uniforme
Campo che ha lo stesso vettore in ogni punto di una regione; tale è, con ottima approssimazione, il campo gravitazionale vicino al suolo.

Energia di un'orbita circolare
$E = -G\,M\,m/(2r)$, con $K = -U/2$.

Energia potenziale gravitazionale (generale)
$U = -G\,M\,m/r$, con lo zero all'infinito; negativa a ogni distanza finita. Per piccoli dislivelli $\Delta U \approx m\,g\,h$.

Forza di marea
Differenza tra l'attrazione gravitazionale su una parte di un corpo e quella sul suo centro; è causa delle maree.

Imponderabilità
Condizione di un corpo in caduta libera, per esempio in orbita: non preme su alcun supporto, ma la gravità agisce.

Linee di campo
Linee tangenti in ogni punto al vettore campo; per una sfera sono radiali, dirette verso il centro, e la loro densità diminuisce come $1/r^2$.

Maree morte
Maree meno ampie, al primo e all'ultimo quarto, quando i rigonfiamenti della Luna e del Sole sono a 90°.

Maree vive
Maree più ampie, con Luna nuova e Luna piena, quando i rigonfiamenti della Luna e del Sole si sommano.

Massa di prova
Corpo di massa così piccola da non disturbare il campo che si vuole misurare.

Orbita bassa
Orbita a una quota tra circa 200 e 2000 km; periodo dell'ordine di un'ora e mezza.

Orbita geostazionaria
Orbita circolare nel piano dell'equatore, percorsa nel verso della rotazione terrestre in un giorno siderale; raggio $\approx 4{,}22 \times 10^7$ m. Il satellite appare fermo nel cielo.

Rigonfiamenti di marea
I due sollevamenti dell'oceano prodotti dalla forza di marea, uno verso la Luna e uno dalla parte opposta.

Satellite
Corpo che orbita attorno a un altro di massa molto maggiore: naturale (la Luna) o artificiale.

Sistema legato
Sistema con energia totale negativa: i corpi non possono allontanarsi oltre una distanza massima (un satellite, un pianeta).

Velocità di fuga
Minima velocità di lancio dalla superficie con cui un corpo si allontana indefinitamente: $v_f = \sqrt{(2G\,M/R)}$; 11,2 km/s per la Terra.

Velocità orbitale
Velocità di un satellite su un'orbita circolare di raggio r: $v = \sqrt{(G\,M/r)}$; non dipende dalla massa del satellite.

Soluzioni

1. B. $v = \sqrt{(G\,M_T/r)}$: dipende dal raggio (e dalla massa della Terra), non dalla massa del satellite.

2. C. Alla quota della ISS il campo vale circa 8,7 N/kg; astronauti e stazione sono in caduta libera insieme, quindi non premono gli uni sull'altra.

3. A. $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$, con m massa di prova; si misura in N/kg.

4. D. $g \propto 1/r^2$: a distanza tripla il campo è $1/3^2 = 1/9$ di quello al suolo.

5. B. Con lo zero all'infinito U è negativa a ogni distanza finita e aumenta (diventa meno negativa) allontanandosi.

6. D. $v_f = \sqrt{(2G\,M/R)}$: non dipende dalla massa del corpo né dalla direzione del lancio; è $\sqrt{2}$ volte la velocità orbitale radente.

7. A. $E = -G\,M\,m/(2r) = U/2$.

8. C. Con Luna nuova e Luna piena Sole, Terra e Luna sono allineati e i rigonfiamenti si sommano.

9. V. $v = \sqrt{(G\,M/r)}$ diminuisce al crescere di r.

10. F. $g = G\,M_T/r^2 \approx 8{,}7$ N/kg, circa l'89% del valore al suolo.

11. F. L'orbita di un satellite ha il centro nel centro della Terra; per seguire la rotazione deve stare nel piano equatoriale, quindi un satellite geostazionario sta sempre sopra un punto dell'equatore.

12. V. Con $E \geq 0$ la retta dell'energia non incontra mai la curva di U: la sonda non ha una distanza massima.

13. F. Le maree dipendono dalla differenza di attrazione tra le varie parti della Terra, che per il Sole, molto più lontano, è circa la metà di quella della Luna.

14. $g = G\,M/R^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6{,}42 \times 10^{23} / (3{,}39 \times 10^6)^2$ N/kg $\approx 3{,}73$ N/kg, circa il 38% di 9,8 N/kg.

15. un quarto; un centesimo; N/kg (newton al chilogrammo).

16. $r = 6{,}37 \times 10^6$ m $+ 0{,}80 \times 10^6$ m $= 7{,}17 \times 10^6$ m. $v = \sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} / 7{,}17 \times 10^6)}$ m/s $\approx 7{,}45 \times 10^3$ m/s. $T = 2\pi r/v = 2\pi \cdot 7{,}17 \times 10^6$ m $/ (7{,}45 \times 10^3$ m/s$) \approx 6{,}05 \times 10^3$ s ≈ 101 min.

17. Dal grafico $g \approx 2{,}5$ N/kg a $r \approx 2R_T$, cioè a una quota di circa 6400 km (un raggio terrestre). Verifica: $g = 9{,}81$ N/kg $/ 2^2 \approx 2{,}45$ N/kg.

18. In orbita: $U = -6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} \cdot 500 / 4{,}22 \times 10^7$ J $\approx -4{,}72 \times 10^9$ J. Al suolo: $U = -6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} \cdot 500 / 6{,}37 \times 10^6$ J $\approx -3{,}13 \times 10^{10}$ J. Aumento: $\Delta U \approx -0{,}47 \times 10^{10}$ J $+ 3{,}13 \times 10^{10}$ J $\approx 2{,}65 \times 10^{10}$ J.

19. $v_f = \sqrt{(2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6{,}42 \times 10^{23} / 3{,}39 \times 10^6)}$ m/s $\approx 5{,}03 \times 10^3$ m/s $\approx 5{,}0$ km/s, meno della metà degli 11,2 km/s della Terra.

20. $T = 7200$ s. $r = \sqrt[3]{(G\,M_T\,T^2/(4\pi^2))} = \sqrt[3]{(6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} \cdot 7200^2 / (4\pi^2))}$ m $\approx 8{,}06 \times 10^6$ m; quota $h = r - R_T \approx 1{,}69 \times 10^6$ m ≈ 1700 km.

21. a) Orbita bassa, $r = 6{,}77 \times 10^6$ m: $U = -G\,M_T m/r \approx -7{,}06 \times 10^{10}$ J; $K = -U/2 \approx 3{,}53 \times 10^{10}$ J; $E \approx -3{,}53 \times 10^{10}$ J. Geostazionaria: $U \approx -1{,}13 \times 10^{10}$ J; $K \approx 0{,}57 \times 10^{10}$ J; $E \approx -0{,}57 \times 10^{10}$ J. b) $\Delta E \approx -0{,}57 \times 10^{10}$ J $+ 3{,}53 \times 10^{10}$ J $\approx 2{,}96 \times 10^{10}$ J. c) Sull'orbita bassa (7,67 km/s contro 3,07 km/s): l'energia totale cresce anche se la velocità diminuisce.

22. Sistema sasso–Luna, isolato, nessun attrito. a) $\frac{1}{2}m\,v^2 - G\,M_L m/R_L = -G\,M_L m/r$, da cui $1/r = 1/R_L - v^2/(2G\,M_L) = 5{,}747 \times 10^{-7}$ m$^{-1} - 1{,}021 \times 10^{-7}$ m^{-1}, $r \approx 2{,}12 \times 10^6$ m; quota $h = r - R_L \approx 3{,}8 \times 10^5$ m ≈ 380 km. b) $h = (1000$ m/s$)^2/(2 \cdot 1{,}62$ m/s$^2) \approx 3{,}1 \times 10^5$ m ≈ 310 km. c) La formula del terzo anno suppone g costante; salendo il campo diminuisce, la gravità frena meno e il sasso sale più in alto: b) sottostima la quota, perché la quota non è piccola rispetto a R_L.

23. a) $v = \sqrt{(6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} / 3{,}84 \times 10^8)}$ m/s $\approx 1{,}02 \times 10^3$ m/s; $T = 2\pi r/v \approx 2{,}37 \times 10^6$ s $\approx 27{,}4$ giorni. b)

$(27{,}4 - 27{,}3)/27{,}3 \approx 0{,}4\%$. c) $x_{cm} = M_L d/(M_T + M_L) = 7{,}34 \times 10^{22} \cdot 3{,}84 \times 10^8 / (5{,}97 \times 10^{24} + 0{,}0734 \times 10^{24})$ m $\approx 4{,}66 \times 10^6$ m, circa 4700 km dal centro: all'interno della Terra (il 73% del raggio). Il centro di massa non coincide con il centro della Terra, e il modello «Terra ferma» è solo approssimato.

24. a) $v = \sqrt{(G\,M_T/r)} \approx 3{,}87 \times 10^3$ m/s; $T = 2\pi r/v \approx 4{,}31 \times 10^4$ s $\approx 11{,}97$ h (11 h 58 min). b) 86 164 s / 43 100 s $\approx$ 2,00 giri: il periodo è mezzo giorno siderale. c) $g = G\,M_T/r^2 \approx 0{,}564$ N/kg.

25. Da $c = \sqrt{(2G\,M_T/R)}$: $R = 2G\,M_T/c^2 = 2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}97 \times 10^{24} / (3{,}00 \times 10^8)^2$ m $\approx 8{,}85 \times 10^{-3}$ m, circa 9 mm, contro $6{,}37 \times 10^6$ m: quasi un miliardo di volte più piccolo. Il calcolo tratta la luce come un proiettile soggetto alla gravità di Newton; la luce invece viaggia sempre a velocità c, e la gravità così intensa richiede la relatività generale: la coincidenza della formula è, appunto, una coincidenza.

26. a) $F = m\,G\,M_T/r^2 = 62$ kg $\cdot$ 8,69 N/kg ≈ 539 N $\approx 5{,}4 \times 10^2$ N; al suolo $m\,g = 62$ kg $\cdot$ 9,8 m/s$^2 \approx 608$ N: lassù la forza è circa l'89% del peso al suolo. b) Zero: astronauta, bilancia e stazione cadono con la stessa accelerazione ($\approx 8{,}7$ m/s^2 verso il centro della Terra), come in un ascensore in caduta libera; con l'asse verso l'alto, $N - mg = ma$ con $a = -g$, quindi la forza normale N è nulla.

27. Traccia di risposta. Newton non contesta la legge (la descrizione matematica dell'attrazione), ma l'idea che la materia agisca dove non è, senza nulla che trasmetta l'azione: per lui una causa ci doveva essere, anche se non la conosceva. L'idea di campo sposta la domanda: la massa genera in ogni punto dello spazio un campo $\boldsymbol{g}$, e un corpo risponde al campo nel punto in cui si trova; l'azione diventa locale. Il campo è per ora un modo di descrivere; la relatività generale ne farà una proprietà dello spazio-tempo.

28. Giusto: per salire serve energia, perché l'energia totale $E = -G\,M\,m/(2r)$ aumenta con r. Sbagliato: sull'orbita più alta la velocità è minore, $v = \sqrt{(G\,M/r)}$, perché la gravità da «vincere» è più debole e basta una forza centripeta minore. I motori aumentano la velocità per avviare la salita; salendo il satellite rallenta. Tra le due orbite l'energia potenziale aumenta del doppio di quanto diminuisce l'energia cinetica: la differenza è l'energia fornita dai motori.

29. a) $M = \rho \cdot (4/3)\pi R^3 = 2000 \cdot (4/3)\pi \cdot (1{,}0 \times 10^4)^3$ kg $\approx 8{,}4 \times 10^{15}$ kg; $v_f = \sqrt{(2G\,M/R)} \approx 11$ m/s. b) $v = \sqrt{(2g\,h)} = \sqrt{(2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5)}$ m/s ≈ 3 m/s. c) No: 3 m/s è molto meno di 11 m/s. Con $R = 2$ km la velocità di fuga è 5 volte minore, circa 2 m/s: con un salto si sfuggirebbe all'asteroide (è una stima d'ordine di grandezza).

30. Traccia di risposta. Galileo rifiutava l'idea che la Luna agisse a distanza sull'acqua, che giudicava una «qualità occulta» da filosofia medievale; proponeva che le maree fossero un effetto meccanico della combinazione di rotazione e rivoluzione della Terra, che accelerano e rallentano i mari. Le osservazioni che decidono: le alte maree sono due al giorno, non una; il loro orario ritarda di circa 50 minuti al giorno come il passaggio della Luna; sono più ampie con Luna nuova e Luna piena. La teoria di Galileo non spiega nessuna delle tre; quella di Newton, basata sulla differenza di attrazione lunare e solare, le spiega tutte.