CAPITOLO

4

Le leggi di Keplero e la gravitazione universale

«È cosa certissima ed esattissima che la proporzione fra i tempi periodici di due pianeti qualsiasi è precisamente la sesquialtera della proporzione delle loro distanze medie.» — Giovanni Keplero, Harmonices mundi (1619), libro V, capitolo 3 (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Ricostruire come i dati di Tycho Brahe portarono Keplero ad abbandonare le orbite circolari.
2. Descrivere l'ellisse con fuochi, semiassi ed eccentricità e calcolare le distanze al perielio e all'afelio.
3. Enunciare e applicare le tre leggi di Keplero, anche per verificare dati e fare previsioni.
4. Spiegare il test della Luna e il cannone di Newton come prove che la gravità terrestre regge anche i moti celesti.
5. Applicare la legge di gravitazione universale e spiegare come la bilancia di Cavendish permise di misurare G e la massa della Terra.
6. Ricavare la terza legge di Keplero per le orbite circolari e usarla per calcolare la massa di un corpo celeste.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Keplero e l'orbita di Marte 2
4.2 L'ellisse 3
4.3 Le tre leggi di Keplero 5
4.4 Dalla mela alla Luna 10
4.5 La legge di gravitazione universale 13
4.6 Newton spiega Keplero 15

Fisica 4 · Parte II · La gravitazione · versione 1.0
Capitolo 4: Le leggi di Keplero e la gravitazione universale · pagine 105–128 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo precedente hai seguito il lungo dibattito sui sistemi del mondo: alla fine del Cinquecento il sistema di Copernico, quello di Tycho e quello di Tolomeo si contendevano il cielo, e nessuna osservazione a occhio nudo bastava a decidere. Tutti, però, condividevano un presupposto che risaliva a Platone e ad Aristotele: i moti celesti dovevano essere composti di circonferenze percorse con velocità costante. In questo capitolo vedrai come quel presupposto sia caduto per pochi minuti d'arco di differenza fra calcolo e misure, e quali leggi abbiano preso il suo posto.

Le leggi di Keplero dicono *come* si muovono i pianeti, ma non *perché*. La risposta di Newton fu che la forza che fa cadere una mela è la stessa che trattiene la Luna e guida i pianeti: è la **sintesi newtoniana**, la prima legge fisica valida allo stesso modo sulla Terra e nel cielo.

4.1 Keplero e l'orbita di Marte

Giovanni Keplero (1571–1630) era un matematico tedesco convinto, fin dagli studi, del sistema copernicano. Nel 1600 raggiunse a Praga Tycho Brahe, che per oltre vent'anni aveva misurato le posizioni dei pianeti con grandi strumenti a occhio nudo, con una precisione di circa 1–2 minuti d'arco (un minuto d'arco, 1′, è la sessantesima parte di un grado). Tycho gli affidò il problema più difficile: l'orbita di Marte, il pianeta che più si discostava dalle previsioni. Alla morte di Tycho, nel 1601, Keplero ne ereditò le osservazioni e il ruolo di matematico dell'imperatore Rodolfo II.

Per anni Keplero cercò di descrivere Marte con una circonferenza, con il Sole fuori dal centro e un punto ausiliario che regolava la velocità, come l'equante di Tolomeo. Il modello riproduceva molte posizioni entro 2′, ma per altre si allontanava dai dati fino a 8′: circa un quarto del diametro apparente della Luna piena, uno scarto che prima di Tycho nessuno avrebbe potuto notare. Keplero ragionò così: se le misure sbagliano al massimo di un paio di minuti, uno scarto di otto non è un errore di misura; è sbagliato il modello. Nell'*Astronomia nova* (1609) scrisse che quegli otto minuti, da soli, avevano aperto la strada a una riforma di tutta l'astronomia.

È il metodo sperimentale di *Fisica 3*, capitolo 3: un modello si confronta con i dati *tenendo conto della loro incertezza*, e una discrepanza quattro volte più grande dell'incertezza obbliga a cambiare idea, anche se il modello è antico e venerato. Curiosamente, Keplero trovò prima la legge che regola la velocità del pianeta (la seconda delle sue leggi) e solo dopo molti altri tentativi la forma dell'orbita: un'ellisse.

4.2 L'ellisse

4.2.1 La costruzione del giardiniere

Pianta due chiodi su una tavola, lega ai chiodi le estremità di un filo più lungo della loro distanza e fai scorrere una matita tenendo il filo sempre teso: disegni una curva chiusa e schiacciata. È la **costruzione del giardiniere**, usata davvero per le aiuole ovali. La curva ottenuta è un'**ellisse**: il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti **fuochi** (F_1 e F_2 nella Figura 4.1). La somma costante è la lunghezza del filo.

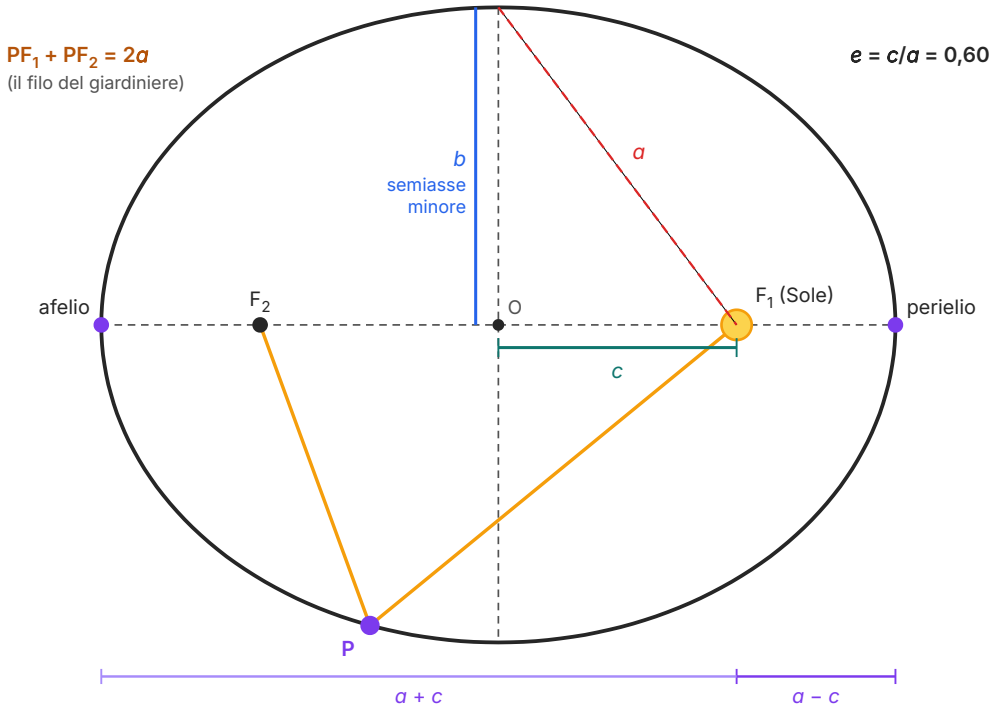


Figura 4.1 Gli elementi di un'ellisse con eccentricità e = 0,60 (curva calcolata). Per ogni punto P la somma delle distanze dai fuochi è uguale alla lunghezza del filo, $2a$. Il triangolo rettangolo tratteggiato ha cateti b e c e ipotenusa a. Per l'orbita di un pianeta il Sole occupa uno dei fuochi, F_1; perielio e afelio sono i punti dell'orbita più vicino e più lontano dal Sole.

4.2.2 Semiassi, fuochi ed eccentricità

Il segmento più lungo che attraversa l'ellisse passa per i due fuochi ed è l'asse maggiore; la sua metà è il **semiasse maggiore** a. La perpendicolare all'asse maggiore nel centro O dà l'asse minore, la cui metà è il **semiasse minore** b. La distanza di ciascun fuoco dal centro è la **semidistanza**

focale c. Con la matita in un'estremità dell'asse maggiore si vede che il filo è lungo $2a$; con la matita in un'estremità dell'asse minore le due metà del filo sono lunghe a ciascuna e formano con b e c il triangolo rettangolo della Figura 4.1. Per il teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Quanto un'ellisse sia schiacciata lo dice l'**eccentricità**, il rapporto fra la semidistanza focale e il semiasse maggiore:

$$e = \frac{c}{a} \quad (0 \le e < 1)$$

Se i due fuochi coincidono con il centro, $c = 0$, $e = 0$ e l'ellisse è una circonferenza di raggio a; più i fuochi si allontanano dal centro, più e si avvicina a 1 e l'ellisse diventa lunga e stretta (Figura 4.2). Ellissi con la stessa e hanno la stessa forma.

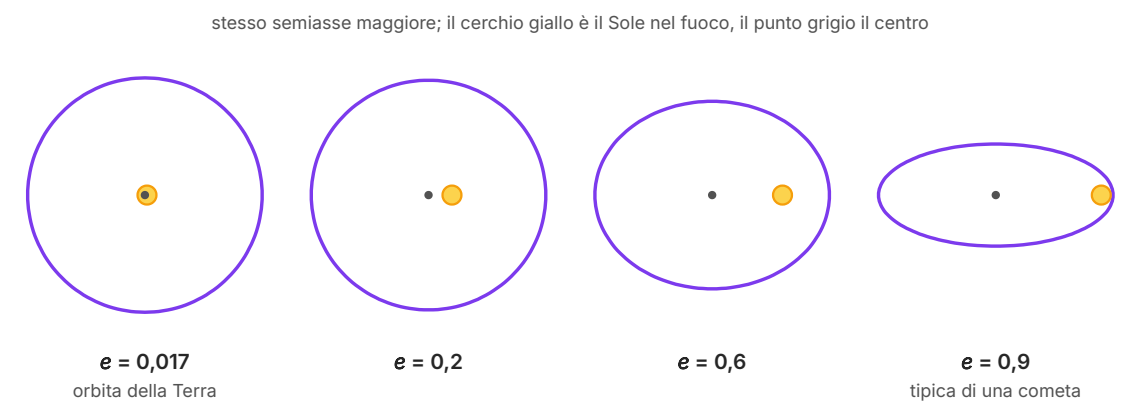


Figura 4.2 Quattro ellissi con lo stesso semiasse maggiore e eccentricità crescente (curve calcolate). Con e = 0,017, il valore dell'orbita terrestre, il Sole è spostato dal centro dell'1,7% del semiasse e la curva non si distingue a occhio da una circonferenza; le comete percorrono orbite molto allungate, come quella con e = 0,9.

Per l'orbita di un pianeta che ha il Sole in un fuoco interessano soprattutto due punti, gli estremi dell'asse maggiore: il **perielio**, il punto più vicino al Sole, e l'**afelio**, il più lontano. Dalla Figura 4.1 si leggono le loro distanze dal Sole:

$$r_{\text{perielio}} = a - c = a(1 - e) \quad r_{\text{afelio}} = a + c = a(1 + e)$$

La loro somma è $2a$: il semiasse maggiore è la media fra distanza minima e massima, ed è detto anche *distanza media* dal Sole. Nel Sistema solare si usano le unità astronomiche (UA): 1 UA = $1{,}496 \times 10^{11}$ m è il semiasse maggiore dell'orbita terrestre. L'equazione dell'ellisse nel piano cartesiano la studierai in *Matematica 4*, capitolo 2.

ESEMPIO SVOLTO

L'orbita di Marte

Problema. L'orbita di Marte ha semiasse maggiore $a = 1{,}524$ UA ed eccentricità $e = 0{,}093$ (Tabella A.3 dell'Appendice). a) Calcola le distanze di Marte dal Sole al perielio e all'afelio. b) Di quanto è spostato il Sole dal centro? c) Quanto è lungo il semiasse minore?

Soluzione. a) $r_{\text{perielio}} = a(1 - e) = 1{,}524 \text{ UA} \cdot 0{,}907 = 1{,}382$ UA; $r_{\text{afelio}} = a(1 + e) = 1{,}524 \text{ UA} \cdot 1{,}093 = 1{,}666$ UA. b) $c = ea = 0{,}093 \cdot 1{,}524 \text{ UA} = 0{,}142$ UA. c) Da $b^2 = a^2 - c^2$: $b = \sqrt{(1{,}524^2 - 0{,}142^2)}$ UA $= 1{,}517$ UA, più corto di a soltanto dello 0,4%.

Commento. Controllo: 1,382 UA + 1,666 UA = 3,048 UA = $2a$. La forma dell'orbita è quasi una circonferenza, ma il Sole è fuori dal centro di quasi un decimo del semiasse e la distanza Sole–Marte varia del 20% circa: fu questo a tradire il cerchio negli otto minuti di Keplero.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Ellisse viene dal greco ἔλλειψις, «mancanza, difetto», da ἐλλείπω, «restare indietro, mancare». Il nome risale ad Apollonio di Perga (fra III e II secolo a.C.), che studiò le sezioni del cono, e non significa «cerchio imperfetto»: si riferisce a un confronto fra aree in cui, per questa curva, un rettangolo «resta al di sotto» di quello di riferimento.

Perielio e **afelio** uniscono ἥλιος, «sole», alle preposizioni περί, «intorno, presso», e ἀπό, «lontano da»: il punto «presso il Sole» e quello «lontano dal Sole»; con γῆ, «terra», perigeo e apogeo.

Eccentricità viene da ἐκ, «fuori da», e κέντρον, «centro»: Tolomeo chiamava eccentrico il cerchio il cui centro non coincide con la Terra. **Gravitazione** viene dal latino *gravitas*, «pesantezza», da *gravis*, «pesante»: una pesantezza estesa da Newton a tutto l'universo.

4.3 Le tre leggi di Keplero

4.3.1 La prima legge

Nell'*Astronomia nova* Keplero enunciò per Marte le prime due leggi, poi estese agli altri pianeti. La **prima legge di Keplero** dice: **ogni pianeta percorre un'orbita ellittica, e il Sole occupa uno dei due fuochi dell'ellisse**.

L'altro fuoco è un punto vuoto. Le eccentricità dei pianeti (Tabella A.3) vanno da 0,007 (Venere) a 0,206 (Mercurio): orbite quasi circolari. Ma scompaiono gli epicicli: una sola curva descrive l'intera orbita, e il centro del moto è il Sole stesso, non un punto geometrico vicino a esso.

4.3.2 La seconda legge: aree uguali in tempi uguali

Unisci con un segmento il Sole al pianeta: è il **raggio vettore**, una lancetta di lunghezza variabile. La **seconda legge di Keplero**, o legge delle aree, dice: **il raggio vettore descrive aree uguali in intervalli di tempo uguali**.

Nella Figura 4.3 i tre settori colorati sono percorsi nello stesso tempo e hanno la stessa area. Vicino al Sole il raggio vettore è corto: per spazzare la stessa area deve ruotare di un angolo maggiore, e il pianeta percorre in quel tempo un arco più lungo. Il pianeta è dunque **più veloce al perielio e più lento all'afelio**: anche il moto uniforme, come il cerchio, va abbandonato.

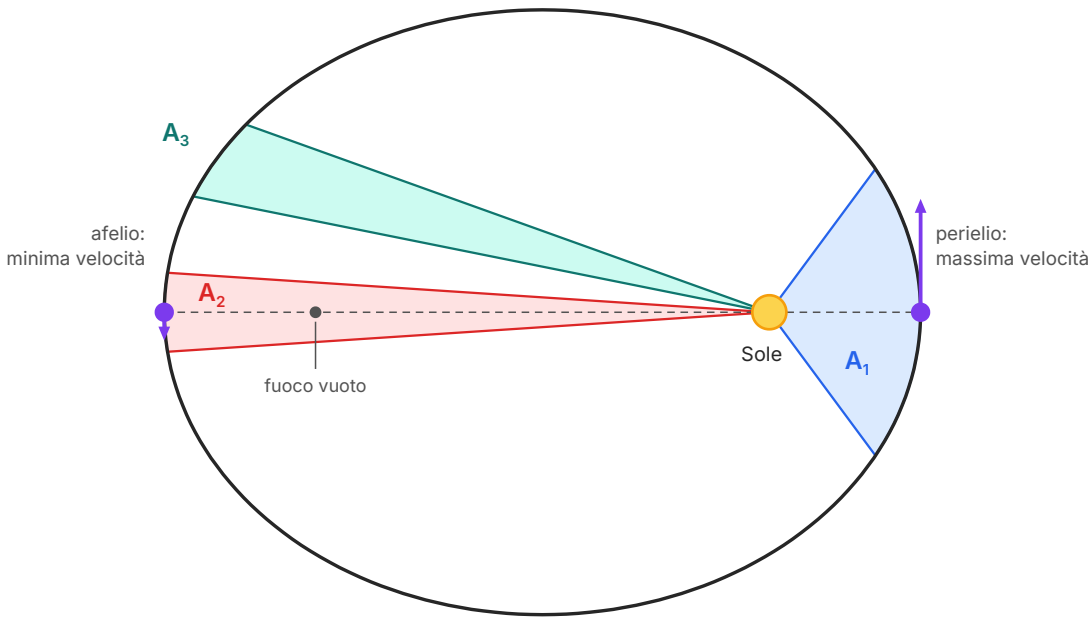


Figura 4.3 La seconda legge di Keplero su un'orbita con e = 0,60, molto più eccentrica di quella di qualsiasi pianeta per rendere visibile l'effetto. Le posizioni sono calcolate con le leggi del moto: i settori A_1, A_2 e A_3 sono percorsi ciascuno in 1/15 del periodo e hanno aree uguali. Le frecce viola, proporzionali alla velocità, mostrano che al perielio il pianeta è quattro volte più veloce che all'afelio. Nella versione interattiva puoi cambiare l'eccentricità e seguire il pianeta.

In un tempo breve Δt il pianeta percorre un arco lungo circa $v\Delta t$ e il raggio vettore spazza un triangolo sottile. Al perielio e all'afelio la velocità è perpendicolare al raggio vettore: il triangolo è rettangolo, di cateti r e $v\Delta t$, e ha area $\tfrac{1}{2}\, rv\Delta t$. Se le aree spazzate nello stesso Δt sono uguali:

$$v_p r_p = v_a r_a \quad \text{cioè} \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e}$$

Le velocità al perielio e all'afelio sono inversamente proporzionali alle distanze dal Sole. Per l'ellisse della Figura 4.3 il rapporto è 1,6/0,4 = 4; per la Terra è 1,017/0,983 ≈ 1,035: al perielio, all'inizio di gennaio, la Terra è più veloce del 3,5% circa che all'afelio, all'inizio di luglio. Per questo l'inverno boreale, dal solstizio di dicembre all'equinozio di marzo, dura circa 89 giorni, l'estate boreale circa 94.

4.3.3 La terza legge

Le prime due leggi riguardano un pianeta alla volta. Per molti anni Keplero cercò una regola che legasse fra loro i pianeti; la trovò nel 1618, come racconta lui stesso, e la pubblicò nel libro V dell'*Harmonices mundi* (1619). Nella sua lingua, la proporzione fra i periodi è «sesquialtera», cioè di esponente 3/2, della proporzione fra le distanze medie. In termini moderni, è la **terza legge di Keplero**:

> **DA RICORDARE**
>
> **Terza legge.** Per tutti i pianeti che orbitano attorno al Sole, il quadrato del periodo di rivoluzione T è proporzionale al cubo del semiasse maggiore a dell'orbita:
>
> $$\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}$$

Se si misura T in anni e a in UA, la costante vale 1, perché per la Terra $T = 1$ anno e $a = 1$ UA: allora $T^2 = a^3$. Un pianeta lontano ha un'orbita più lunga e la percorre anche più lentamente: Saturno, a 9,5 UA, ha un'orbita circa 9,5 volte più lunga di quella terrestre, ma impiega 29,5 anni, e quindi va a circa un terzo della velocità della Terra.

ESEMPIO SVOLTO

Verificare la terza legge con i dati

Dati. La Tabella 4.1 riporta il semiasse maggiore e il periodo dei pianeti (Tabella A.3 dell'Appendice). Verifica la terza legge e rappresentala con un grafico.

Tabella 4.1 Semiassi maggiori, periodi e loro potenze per gli otto pianeti (dati dell'Appendice; a^3 e T^2 calcolati, con tre cifre significative).

Pianeta	a (UA)	T (anni)	a^3 (UA^3)	T^2 (anni^2)	T^2/a^3
Mercurio	0,387	0,241	0,0580	0,0581	1,002
Venere	0,723	0,615	0,378	0,378	1,001
Terra	1,000	1,000	1,00	1,00	1,000
Marte	1,524	1,881	3,54	3,54	1,000
Giove	5,203	11,86	141	141	0,999
Saturno	9,537	29,45	867	867	1,000
Urano	19,19	84,01	7 067	7 058	0,999
Nettuno	30,07	164,8	27 189	27 159	0,999

Analisi. Il rapporto T^2/a^3 vale 1,00 per tutti gli otto pianeti, entro lo 0,2% (mentre a cambia di un fattore 78). Mettendo in grafico T^2 in funzione di a^3 (Figura 4.4), i punti stanno su una retta per l'origine di pendenza 1: è la linearizzazione di *Fisica 3*, capitolo 4.

Una previsione. La legge vale anche per le comete. La cometa di Halley ha $a \approx 17{,}8$ UA ed $e \approx 0{,}967$: passa a 0,59 UA dal Sole al perielio e si allontana fino a circa 35 UA, oltre Nettuno. Il suo periodo è $T = \sqrt{(17{,}8^3)}$ anni ≈ 75 anni, in accordo con i ritorni osservati, in media ogni 75–76 anni.

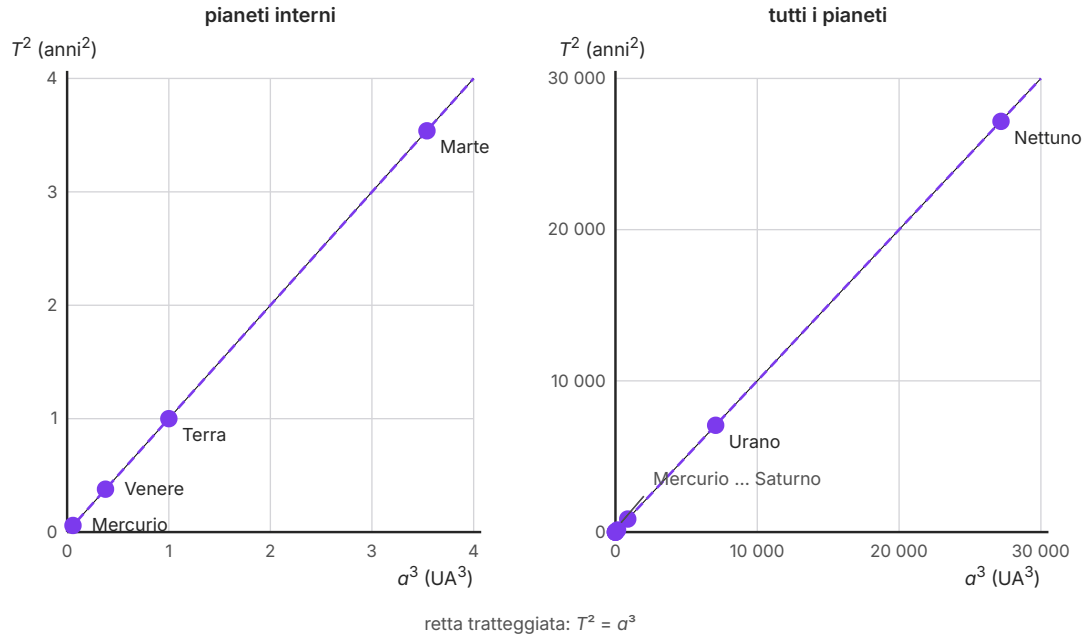


Figura 4.4 La terza legge di Keplero: T^2 in funzione di a^3 per i pianeti (dati della Tabella A.3). A sinistra i quattro pianeti interni; a destra tutti gli otto, con scale molto più ampie (fino a 30 000). In entrambi i pannelli i punti stanno sulla retta $T^2 = a^3$.

ERRORE FREQUENTE

«Il Sole è al centro dell'orbita, e il pianeta percorre archi uguali in tempi uguali.» Due errori. Il Sole è in un *fuoco*: il centro dell'ellisse è un punto vuoto. E la seconda legge parla di *aree* spazzate dal raggio vettore, non di archi: proprio perché le aree sono uguali, gli archi percorsi nello stesso tempo sono più lunghi vicino al Sole.

«T^2/a^3 ha lo stesso valore per tutti i corpi in orbita.» No: il rapporto è lo stesso solo per corpi che girano attorno *allo stesso* corpo centrale. Per la Luna attorno alla Terra la costante è diversa: vedrai nell'ultimo paragrafo che dipende dalla massa del corpo centrale.

COLLEGAMENTI

Filosofia · Keplero e l'armonia del mondo

Nel *Mysterium cosmographicum* (1596) Keplero aveva provato a spiegare il numero e le distanze dei pianeti incastrando fra le loro sfere i cinque poliedri regolari del *Timeo* di Platone. Nell'*Harmonices mundi* confrontò i rapporti fra le velocità angolari estreme dei pianeti, viste dal Sole, con gli intervalli musicali: un'eco dell'armonia delle sfere pitagorica (ne riparleremo con il monocordo, nel capitolo 13). La terza legge sta proprio lì, fra pagine di musica e di teologia.

Le armonie non hanno superato la prova dei dati; la terza legge sì. Keplero cercò anche una *causa fisica* dei moti: una forza che emana dal Sole e si indebolisce con la distanza, sul modello del magnetismo. Sbagliata nei dettagli, l'idea indicava la strada di Newton (*Filosofia 4*, capitolo 3).

4.4 Dalla mela alla Luna

DAL VOLUME DEL TERZO ANNO

Un corpo che percorre una circonferenza di raggio r con periodo T ha velocità di modulo $v = 2\pi r/T$ e un'accelerazione centripeta, diretta verso il centro, di modulo $a_c = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$ (*Fisica 3*, capitolo 12). Per il secondo principio serve una forza risultante verso il centro, la forza centripeta $F = ma_c$ (*Fisica 3*, capitolo 14); senza di essa il corpo proseguirebbe in linea retta.

4.4.1 Una sola forza per la Terra e per il cielo

Per il principio d'inerzia, qualcosa deve continuamente piegare verso il Sole la traiettoria dei pianeti, e verso la Terra quella della Luna. Isaac Newton (1643–1727) si chiese se fosse la stessa forza che fa cadere i corpi sulla Terra. Secondo un aneddoto che egli stesso raccontò in tarda età all'amico William Stukeley, l'idea gli sarebbe venuta guardando cadere una mela: un racconto forse abbellito, ma la domanda era giusta. Se la gravità arriva fino alla cima delle montagne più alte, perché non dovrebbe arrivare fino alla Luna?

Che cadere e orbitare siano lo stesso fenomeno, Newton lo mostrò con un esperimento mentale, descritto nel trattato *De mundi systemate*, pubblicato dopo la sua morte: un cannone in cima a una montagna altissima spara orizzontalmente, senza resistenza dell'aria (Figura 4.5). Con una velocità piccola il proiettile cade vicino alla montagna (traiettoria A); più veloce è lo sparo, più lontano cade (B, C), perché la superficie curva della Terra «si abbassa» sotto il proiettile mentre cade. A una velocità precisa la traiettoria si curva quanto la Terra: il proiettile cade sempre senza mai toccare il suolo e torna alla montagna dopo un giro (D). È un satellite. Con una velocità ancora maggiore l'orbita diventa un'ellisse (E), proprio come quelle di Keplero.

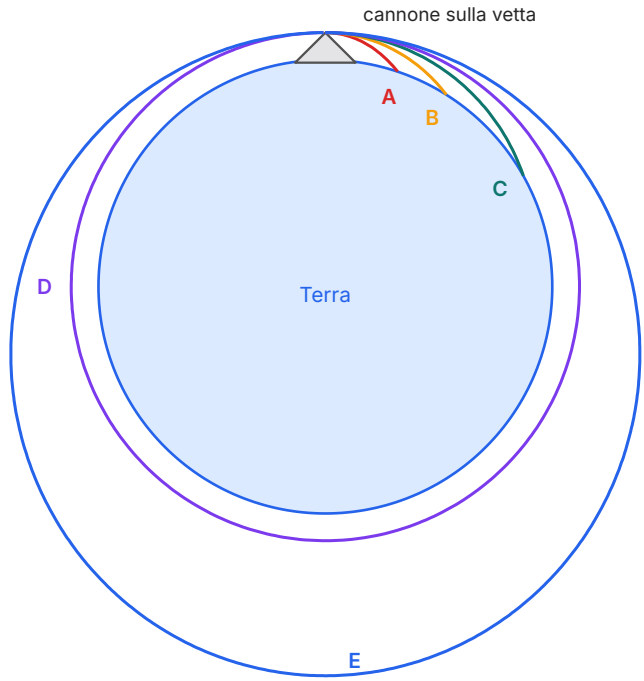


Figura 4.5 Il cannone di Newton (montagna di altezza enormemente esagerata, aria trascurata). Le traiettorie sono calcolate con la gravitazione universale per cinque velocità di sparo orizzontali, pari a 0,55, 0,75, 0,90, 1,00 e 1,10 volte la velocità dell'orbita circolare: A, B e C ricadono sulla Terra; D è un'orbita circolare; E un'orbita ellittica con la Terra in un fuoco e la montagna al perigeo.

La Luna, dunque, *cade* verso la Terra: non nel senso che si avvicina, ma nel senso che la sua traiettoria si piega continuamente verso di essa, staccandosi dalla retta che seguirebbe per inerzia. Se è la gravità a farla cadere, quanto vale l'accelerazione di gravità a quella distanza?

4.4.2 Il test della Luna

Newton aveva un'ipotesi precisa: la forza di gravità diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra. È la **legge dell'inverso del quadrato**: a distanza doppia la forza diventa un quarto, a distanza tripla un nono. La Luna dista dal centro della Terra circa 60 raggi terrestri ($r = 3{,}84 \times 10^8$ m, $R_\mathrm{T} = 6{,}37 \times 10^6$ m). Se l'ipotesi è giusta, la sua accelerazione verso la Terra deve essere $g/60^2 = 9{,}8/3600$ m/s$^2 \approx 2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s^2. Il confronto con l'accelerazione centripeta della Luna è il **test della Luna** (Figura 4.6). Newton, secondo un suo ricordo tardo, lo aveva tentato già da giovane; il calcolo compare nel libro III dei *Principia* (1687).

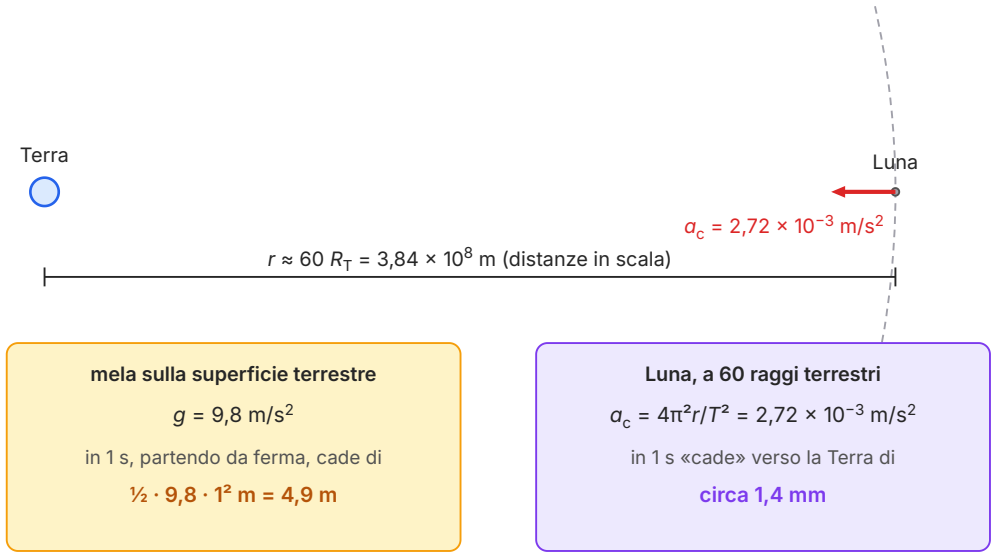


Figura 4.6 Il test della Luna. In alto la Terra e l'orbita della Luna con le distanze in scala ($r \approx 60\ R_T$). In basso il confronto: in un secondo una mela lasciata cadere percorre 4,9 m; la Luna si scosta dalla retta tangente di circa 1,4 mm. Il rapporto fra le due accelerazioni è 3600 = 60², come prevede la legge dell'inverso del quadrato.

ESEMPIO SVOLTO

L'accelerazione della Luna

Problema. La Luna percorre attorno alla Terra un'orbita quasi circolare di raggio $r = 3{,}84 \times 10^8$ m con periodo $T = 27{,}3$ giorni. a) Calcola la sua accelerazione centripeta. b) Confrontala con $g/60^2$. c) Di quanto «cade» la Luna verso la Terra in un secondo?

Soluzione. a) $T = 27{,}3 \cdot 86\,400$ s $= 2{,}36 \times 10^6$ s. $a_c = 4\pi^2 r/T^2 = 4 \cdot 9{,}87 \cdot 3{,}84 \times 10^8$ m / $(2{,}36 \times 10^6\ \text{s})^2 = 2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s². b) $g/60^2 = 9{,}8/3600$ m/s² $= 2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s². Coincidono. c) Partendo con velocità nulla verso la Terra, in $t = 1$ s la Luna si scosta dalla tangente di $\tfrac{1}{2} a_c t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s² · $(1\ \text{s})^2 \approx 1{,}4 \times 10^{-3}$ m = 1,4 mm.

Commento. Due accelerazioni misurate in modo indipendente, con un sasso che cade e con la Luna nel cielo, stanno nel rapporto 60^2, il quadrato del rapporto fra le distanze dal centro della Terra: la Luna è trattenuta dalla gravità terrestre, indebolita secondo l'inverso del quadrato.

4.5 La legge di gravitazione universale

4.5.1 L'enunciato

Newton generalizzò: *ogni* corpo attira ogni altro corpo. La forza è proporzionale alla massa m del corpo attirato, perché tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione; ma per il terzo principio la mela attira la Terra con una forza uguale e opposta, quindi la forza è proporzionale anche alla massa M dell'altro corpo. È la **legge di gravitazione universale**:

Due corpi puntiformi di masse m_1 e m_2, a distanza r, **si attraggono con forze uguali e opposte, dirette lungo la retta che li congiunge**, di modulo

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ è la **costante di gravitazione universale**, la stessa per tutti i corpi dell'universo.

La forza è sempre **attrattiva**, e le due forze sono una coppia di azione e reazione (*Fisica 3*, capitolo 13): il Sole attira la Terra con la stessa forza, $3{,}5 \times 10^{22}$ N, con cui la Terra attira il Sole. Newton dimostrò inoltre che un corpo sferico (omogeneo, o fatto di gusci concentrici omogenei) attira i corpi esterni come se tutta la sua massa fosse nel centro: per questo r è la distanza fra i *centri* della Terra e della Luna, e per una mela sul suolo è il raggio terrestre.

Se la distanza raddoppia la forza diventa un quarto; se una delle masse raddoppia, raddoppia la forza. Una mela di 0,20 kg è attirata dalla Terra con circa 2,0 N, il suo peso, e attira la Terra con 2,0 N; ma l'accelerazione della Terra verso la mela è $F/M_\text{T} \approx 3 \times 10^{-25}\ \text{m/s}^2$, del tutto impercettibile. Le forze sono uguali, gli effetti no.

4.5.2 La costante G e la bilancia di Cavendish

Il valore di G è piccolissimo. Due persone di 70 kg a un metro di distanza si attraggono con una forza di 3×10^{-7} N, pari al peso di una massa di tre centesimi di milligrammo. La gravità conta solo quando almeno un corpo ha una massa enorme; per questo misurare G in laboratorio è difficilissimo.

Ci riuscì Henry Cavendish nel 1798, con una **bilancia di torsione** (Figura 4.7). Un'asta leggera con due piccole sfere di piombo alle estremità è appesa a un filo sottile; due grandi sfere di piombo, avvicinate da parti opposte, la fanno ruotare di un angolo piccolissimo, finché la torsione del filo bilancia le attrazioni. Dall'angolo e dalla rigidità del filo, misurata a parte, si ricava la forza. Cavendish presentò il suo risultato come la misura della *densità media della Terra*, circa 5,5 volte quella dell'acqua; il valore di G si ricava dalle stesse misure.

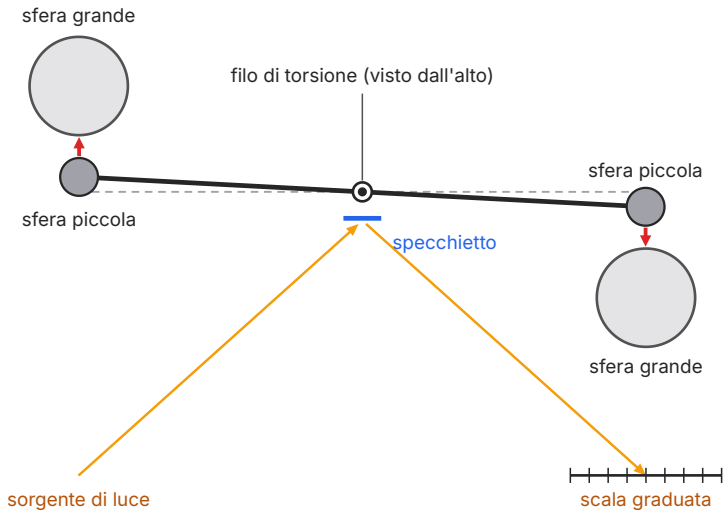


Figura 4.7 La bilancia di torsione di Cavendish, vista dall'alto (schema non in scala). Le sfere grandi attirano le piccole e fanno ruotare l'asta; il filo di torsione si oppone alla rotazione. Nelle versioni didattiche moderne, come quella dello schema, uno specchietto fissato al filo riflette un raggio di luce su una scala lontana, così che una rotazione minima produce uno spostamento ben visibile della macchia luminosa; Cavendish leggeva invece la posizione delle estremità dell'asta su piccole scale graduate, con cannocchiali puntati dall'esterno della stanza.

4.5.3 «Pesare» la Terra

Perché misurare G equivale a pesare la Terra? Un corpo di massa m sulla superficie terrestre ha peso mg; per la legge di gravitazione questa forza vale $GM_\text{T}m/R_\text{T}^2$. Uguagliando e semplificando m:

$$g = G\frac{M_\text{T}}{R_\text{T}^2} \quad\Rightarrow\quad M_\text{T} = \frac{g\,R_\text{T}^2}{G} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37\times10^6\ \text{m})^2}{6{,}67\times10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2} \approx 5{,}96\times10^{24}\ \text{kg}$$

Il valore dell'Appendice è $5{,}97\times10^{24}$ kg. Divisa per il volume $(4/3)\pi R_\text{T}^3$, la massa dà una densità media di circa $5{,}5\times10^3$ kg/m^3, il doppio di quella delle rocce superficiali ($2{,}5$–3×10^3 kg/m^3): l'interno della Terra è molto più denso della crosta, un indizio del nucleo metallico.

4.5.4 Massa inerziale e massa gravitazionale

In *Fisica 3*, capitolo 13, hai distinto la massa inerziale m_i del secondo principio dalla massa gravitazionale m_g del peso. Un corpo vicino alla Terra subisce la forza $GM_\text{T}m_\text{g}/r^2$ e accelera di $a = (GM_\text{T}/r^2)\cdot m_\text{g}/m_\text{i}$. Poiché le due masse sono uguali per tutti i corpi, come mostrano esperimenti sempre più precisi, l'accelerazione GM_T/r^2 è la stessa per una piuma e per un martello nel

vuoto: la caduta universale dei gravi di Galileo. Newton prendeva questa uguaglianza come un fatto, senza spiegarla; la relatività generale di Einstein ne farà il proprio punto di partenza.

4.6 Newton spiega Keplero

4.6.1 La terza legge dalla gravitazione

Con la gravitazione le leggi di Keplero diventano conseguenze. Newton dimostrò che una forza attrattiva proporzionale a $1/r^2$ produce ellissi con il corpo attraente in un fuoco (prima legge) e che una forza sempre diretta verso il Sole fa spazzare aree uguali in tempi uguali (seconda legge): dimostrazioni che richiedono una matematica più avanzata. La terza legge, per un'orbita circolare, si ricava in poche righe.

Un pianeta di massa m percorre una circonferenza di raggio r attorno al Sole, di massa M, con periodo T. L'unica forza che agisce sul pianeta è l'attrazione del Sole, e deve fornire la forza centripeta:

$$G\frac{M\,m}{r^2} = m\frac{4\pi^2\,r}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$$

La massa m del pianeta si semplifica: il periodo non dipende da quanto è pesante il pianeta, ma solo dalla distanza e dalla massa del corpo centrale. Il rapporto T^2/r^3 è lo stesso per tutti i pianeti, come aveva trovato Keplero, e cambia per i satelliti di un altro corpo centrale, perché cambia M. Per un'orbita ellittica vale la stessa relazione con il semiasse maggiore a al posto di r.

La relazione si può leggere al contrario, ed è uno degli strumenti più potenti dell'astronomia: **misurando il periodo e il raggio dell'orbita di un satellite si ricava la massa del corpo attorno a cui gira**, $M = 4\pi^2 r^3/(GT^2)$. Così si conoscono le masse del Sole, dei pianeti con satelliti e delle stelle doppie.

ESEMPIO SVOLTO

La massa del Sole

Problema. La Terra percorre attorno al Sole un'orbita quasi circolare di raggio 1 UA = $1{,}496 \times 10^{11}$ m in 365,26 giorni. Calcola la massa del Sole e confrontala con quella della Terra.

Soluzione. $T = 365{,}26 \cdot 86\,400$ s $= 3{,}156 \times 10^7$ s. $M_S = 4\pi^2 r^3/(GT^2) = 39{,}48 \cdot (1{,}496 \times 10^{11}\ \text{m})^3 / [6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot (3{,}156 \times 10^7\ \text{s})^2] \approx 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

Controllo e commento. Unità: $\text{m}^3/(\text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot \text{s}^2) = \text{m}^3\text{·kg}^2/(\text{kg·m/s}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2) = \text{kg}$. Il rapporto $M_S/M_T = 1{,}99 \times 10^{30} / 5{,}97 \times 10^{24} \approx 3{,}3 \times 10^5$: il Sole ha una massa circa 333 000 volte quella della Terra.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la massa di Giove dai suoi satelliti

Materiali. Un laboratorio virtuale: una serie di immagini di Giove riprese con un piccolo telescopio, una al giorno o più, per alcune settimane (da archivi didattici o da un programma planetario), oppure osservazioni dirette con un binocolo su treppiede; un foglio di calcolo.

Procedimento. Per ciascuno dei quattro satelliti scoperti da Galileo (capitolo 3): 1) misura sulle immagini la massima distanza apparente da Giove, l'*elongazione*, in raggi di Giove (R_G = 7,15 × 10^7 m): è il raggio dell'orbita, vista di taglio; 2) ricava il periodo T dal tempo fra due elongazioni massime dalla stessa parte, mediato su più giri; 3) calcola T^2/r^3 e la massa $M_G = 4\pi^2/(G \cdot T^2/r^3)$ (Tabella 4.2).

Tabella 4.2 Raggi delle orbite e periodi dei satelliti galileiani ricavati da una serie di immagini (dati tipici), e la massa di Giove calcolata da ciascuno. L'incertezza relativa su M_G è 3 volte quella su r più 2 volte quella su T.

Satellite	r (R_G)	T (giorni)	r (10^8 m)	T^2/r^3 (10^{-16} s²/m³)	M_G (10^{27} kg)
Io	5,9 ± 0,2	1,77 ± 0,02	4,22	3,12	1,90 ± 0,24
Europa	9,4 ± 0,2	3,55 ± 0,03	6,72	3,10	1,91 ± 0,15
Ganimede	15,0 ± 0,2	7,16 ± 0,05	10,72	3,10	1,91 ± 0,10
Callisto	26,4 ± 0,3	16,7 ± 0,1	18,88	3,10	1,91 ± 0,09

Che cosa concludere. Il rapporto T^2/r^3 è lo stesso per i quattro satelliti, entro le incertezze: la terza legge di Keplero vale anche attorno a Giove, ma con una costante diversa da quella dei pianeti attorno al Sole. Le quattro stime sono compatibili fra loro e con il valore accettato, circa 1,90 × 10^{27} kg. Callisto dà la stima più precisa, perché ha l'incertezza relativa più piccola sul raggio.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 3*, capitolo 4: tabella con incertezze, grafico di T^2 in funzione di r^3 (una retta per l'origine), massa dalla pendenza con la sua incertezza, confronto con il valore accettato. Fra le fonti d'errore: la massima elongazione può cadere fra due immagini successive.

APPROFONDIMENTO

Le regole di Newton e la disputa con Hooke

I *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* uscirono a Londra nel 1687. Il terzo libro, intitolato al sistema del mondo, si apre, a partire dalla seconda edizione (1713), con alcune *Regulae philosophandi*, regole del ragionamento in filosofia naturale. La prima, nella forma definitiva della terza edizione (1726), dice: «*Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quae et verae sint et earum phaenomenis explicandis sufficiant*»: «Non si devono ammettere più cause delle cose naturali di quante siano vere e sufficienti a spiegarne i fenomeni» (traduzione della redazione). È il principio che autorizza a usare una sola causa, la gravità, per la mela, la Luna e i pianeti.

Nello *Scholium generale* aggiunto alla seconda edizione (1713) Newton ammette un limite: «*Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phaenomenis nondum potui deducere, et hypotheses non fingo*»: «La ragione di queste proprietà della gravità non sono ancora riuscito a dedurla dai fenomeni, e non invento ipotesi» (traduzione della redazione). La legge dice *come* agisce la gravità; *che cosa* sia, e come agisca a distanza nel vuoto, Newton rinuncia a dirlo. Per i cartesiani e per Leibniz un'attrazione senza contatto era una «qualità occulta» (*Filosofia 4*, capitolo 5).

Quando il primo libro dei *Principia* fu presentato alla Royal Society, nel 1686, Robert Hooke rivendicò la priorità della legge dell'inverso del quadrato: anni prima, in alcune lettere, aveva suggerito a Newton di spiegare il moto dei pianeti con un moto inerziale piegato da un'attrazione verso il Sole proporzionale a $1/r^2$. Newton replicò che Hooke non aveva dimostrato che una tale forza produce le orbite di Keplero: la dimostrazione è nei *Principia*.

La seconda legge di Keplero, infine, vale per qualsiasi forza diretta sempre verso uno stesso punto: esprime la conservazione del *momento angolare*, incontrato nell'approfondimento del capitolo 2 con la pattinatrice che raccoglie le braccia. Al perielio il pianeta, come lei, è «più raccolto» e gira più in fretta.

IN SINTESI

Le relazioni del capitolo

Ellisse: $c^2 = a^2 - b^2$, $e = c/a$; $r_{\text{perielio}} = a(1 - e)$, $r_{\text{afelio}} = a(1 + e)$. Il semiasse a (m o UA) è la distanza media; l'eccentricità, numero puro, misura lo schiacciamento.

Seconda legge di Keplero: $v_p r_p = v_a r_a$: al perielio e all'afelio la velocità (m/s) è inversamente proporzionale alla distanza dal Sole.

Terza legge di Keplero: T^2/a^3 = costante per i corpi che orbitano attorno allo stesso corpo centrale; con T in anni e a in UA, per i pianeti, $T^2 = a^3$.

Gravitazione universale: $F = Gm_1m_2/r^2$, con $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg²: ogni coppia di corpi si attrae con forze (N) uguali e opposte, proporzionali alle masse (kg) e inversamente proporzionali al quadrato della distanza fra i centri (m).

Pesare un corpo celeste: $g = GM_T/R_T^2$ sulla superficie; per un satellite in orbita circolare $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$, da cui $M = 4\pi^2 r^3/(GT^2)$: dal periodo (s) e dal raggio dell'orbita (m) si ricava la massa (kg) del corpo centrale.

SINTESI

- Le osservazioni di Tycho Brahe, precise a 1–2 minuti d'arco, mostrarono a Keplero che nessun modello con orbite circolari poteva descrivere Marte: uno scarto di 8′, quattro volte l'incertezza delle misure, obbligò ad abbandonare il cerchio.
- L'ellisse è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dai due fuochi è costante e uguale a $2a$; semiassi e semidistanza focale sono legati da $c^2 = a^2 - b^2$, e l'eccentricità $e = c/a$ misura lo schiacciamento (0 per la circonferenza).
- Le distanze dal Sole al perielio e all'afelio sono $a(1 - e)$ e $a(1 + e)$; il semiasse maggiore è la distanza media.
- Prima legge di Keplero: i pianeti percorrono ellissi con il Sole in uno dei fuochi. Le orbite dei pianeti sono quasi circolari; quelle delle comete molto allungate.
- Seconda legge di Keplero: il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali; il pianeta è più veloce al perielio, e $v_p r_p = v_a r_a$.
- Terza legge di Keplero: T^2/a^3 è lo stesso per tutti i corpi che orbitano attorno allo stesso corpo centrale; per i pianeti, con T in anni e a in UA, $T^2 = a^3$.
- Il cannone di Newton mostra che un'orbita è una caduta continua; il test della Luna mostra che l'accelerazione della Luna è $g/60^2$: la gravità terrestre arriva fino alla Luna e diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza.
- Legge di gravitazione universale: due corpi si attraggono con forze uguali e opposte di modulo Gm_1m_2/r^2; i corpi sferici agiscono come punti nei loro centri.
- La costante $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ è piccolissima; fu ricavata dalla bilancia di torsione di Cavendish (1798), che permise di «pesare» la Terra: $M_T = gR_T^2/G$.
- L'uguaglianza fra massa inerziale e massa gravitazionale fa sì che tutti i corpi, nello stesso punto, cadano con la stessa accelerazione.
- Per un'orbita circolare la gravitazione dà $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$: la costante della terza legge dipende solo dalla massa del corpo centrale, che si può così misurare dal moto dei suoi satelliti.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Secondo la prima legge di Keplero, il Sole si trova:
   A. nel centro dell'orbita ellittica del pianeta
   B. in uno dei due fuochi dell'ellisse
   C. nel punto dell'orbita più vicino al pianeta
   D. in un punto che cambia da un anno all'altro

2. ● Lungo la sua orbita un pianeta si muove più velocemente:

   A. all'afelio

   B. quando attraversa l'asse minore

   C. sempre alla stessa velocità, come voleva l'astronomia antica

   D. al perielio

3. ● Un'ellisse ha semiasse maggiore a e semidistanza focale c. La sua eccentricità è:

   A. c/a

   B. a/c

   C. $a - c$

   D. c^2/a^2

4. ● Per tutti i pianeti del Sistema solare è uguale il rapporto:

   A. T/a

   B. T^2/a^2

   C. T^2/a^3

   D. T^3/a^2

5. ● Se la distanza fra i centri di due corpi triplica, la forza di attrazione gravitazionale fra loro:

   A. triplica

   B. diventa un terzo

   C. diventa un nono

   D. non cambia, perché le masse sono le stesse

6. ●● Una mela di 0,20 kg cade verso la Terra. La forza con cui la mela attira la Terra:

   A. è uguale in modulo a quella con cui la Terra attira la mela

   B. è nulla, perché la massa della mela è trascurabile

   C. è molto minore del peso della mela

   D. è maggiore del peso della mela, perché la Terra è più grande

7. ● Il primo esperimento di laboratorio da cui si ricavò il valore di G fu compiuto:

   A. da Newton, con il test della Luna

   B. da Keplero, con i dati di Tycho

   C. da Galileo, con il piano inclinato

   D. da Cavendish, con la bilancia di torsione

8. ●● Il «test della Luna» di Newton confronta:

   A. la velocità della Luna con quella di un proiettile sparato da un cannone

   B. l'accelerazione centripeta della Luna con l'accelerazione di gravità sulla Terra divisa per 60^2

   C. il periodo della Luna con il giorno solare

   D. la massa della Luna con quella della Terra

Vero o falso

9. ● L'orbita della Terra è un'ellisse così poco eccentrica che, disegnata in scala, a occhio non si distingue da una circonferenza. V / F

10. ● La seconda legge di Keplero afferma che un pianeta percorre archi di uguale lunghezza in tempi uguali. V / F

11. ●● Il rapporto T^2/r^3 della Luna attorno alla Terra è uguale a quello dei pianeti attorno al Sole. V / F

12. ● Due corpi qualsiasi dotati di massa si attraggono, anche se spesso la forza è troppo piccola per essere avvertita. V / F

13. ●● Il nome «ellisse» viene da una parola greca che significava «cerchio imperfetto, schiacciato». V / F

Applicare

14. ● Un'ellisse ha semiasse maggiore 5,0 cm e semiasse minore 4,0 cm. Calcola la semidistanza focale, l'eccentricità e la distanza fra i due fuochi.

15. ●● L'orbita di Mercurio ha $a = 0{,}387$ UA ed $e = 0{,}206$. Calcola le sue distanze dal Sole al perielio e all'afelio, in UA e in chilometri ($1\ \text{UA} = 1{,}496 \times 10^8$ km).

16. ● Un asteroide orbita attorno al Sole con semiasse maggiore 2,8 UA. Usa la terza legge di Keplero, con T in anni e a in UA, per calcolarne il periodo.

17. ● Calcola la forza di attrazione gravitazionale fra due persone di 60 kg e 75 kg, i cui centri di massa distano 1,0 m. Confrontala con il peso della prima persona.

18. ●● Completa. Se la massa di uno dei due corpi raddoppia e anche la distanza fra loro raddoppia, la forza gravitazionale diventa _____ volte quella iniziale. Se entrambe le masse raddoppiano e la distanza si dimezza, la forza diventa _____ volte quella iniziale.

19. ●● Nel pannello di sinistra della Figura 4.4 immagina un corpo con $a^3 = 2{,}0\ \text{UA}^3$. Leggi sulla retta il suo T^2, poi calcola il semiasse maggiore a e il periodo T.

20. ●●● La Luna percorre un'orbita di raggio $3{,}84 \times 10^8$ m in 27,3 giorni. Usa la terza legge nella forma di Newton per calcolare la massa della Terra, e confronta il risultato con il valore dell'Appendice.

Problemi

21. ●● Una cometa passa al perielio a 0,50 UA dal Sole e all'afelio arriva a 29,5 UA. a) Calcola il semiasse maggiore, la semidistanza focale e l'eccentricità dell'orbita. b) Calcola il periodo. c) In quale punto dell'orbita la cometa è più veloce? Quante volte più veloce che nel punto opposto?

22. ●●● Un'astronauta, con la tuta, ha una massa di 80 kg. a) Usa la legge di gravitazione e i dati della Luna (massa $7{,}34 \times 10^{22}$ kg, raggio $1{,}74 \times 10^{6}$ m) per calcolare il suo peso sulla superficie lunare e l'accelerazione di gravità lunare. b) Quante volte è minore del peso sulla Terra? c) Sulla Terra, con un salto, solleva il proprio baricentro di 0,50 m. Supponendo la stessa velocità di stacco, di quanto lo solleverebbe sulla Luna? (Ricorda il moto verticale, *Fisica 3*, capitolo 11.)

23. ●●● Callisto, il più esterno dei satelliti galileiani, percorre attorno a Giove un'orbita di raggio $1{,}88 \times 10^{9}$ m in 16,7 giorni. a) Calcola la massa di Giove. b) Quante volte è maggiore della massa della Terra? c) Io orbita a $4{,}22 \times 10^{8}$ m da Giove: prevedi il suo periodo, in giorni.

24. ●●● Una sonda viaggia dalla Terra alla Luna lungo la retta che ne unisce i centri. a) In quale punto le attrazioni della Terra e della Luna sulla sonda hanno lo stesso modulo? Esprimi la distanza dal centro della Terra in metri e come frazione della distanza Terra–Luna. b) Il punto dipende dalla massa della sonda?

25. ●●● a) Calcola l'accelerazione centripeta della Terra nel suo moto attorno al Sole ($r = 1{,}496 \times 10^{11}$ m, $T = 365{,}26$ giorni) e confrontala con GM_S/r^2. b) Calcola il rapporto fra la forza con cui il Sole attira la Luna e quella con cui la Terra attira la Luna (prendi per la Luna la distanza media dal Sole, 1 UA). c) Il risultato sembra assurdo: perché la Luna non abbandona la Terra?

Ragionare e argomentare

26. ●● Commenta questa frase di Newton, dallo *Scholium generale* dei *Principia* (1713): «La ragione di queste proprietà della gravità non sono ancora riuscito a dedurla dai fenomeni, e non invento ipotesi» (traduzione della redazione). Che cosa afferma Newton di sapere, e che cosa di non sapere? Perché la sua legge poteva essere controllata con osservazioni anche senza sapere che cosa sia la gravità?

27. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «In estate fa caldo perché la Terra, lungo la sua orbita ellittica, è al perielio, cioè più vicina al Sole.» Usa la seconda legge di Keplero e i dati dell'orbita terrestre ($a = 1$ UA, $e = 0{,}017$) per mostrare che il ragionamento non regge.

28. ●●● Stima la forza di attrazione fra una sfera di piombo di 100 kg e una di 1,0 kg i cui centri distano 20 cm, e confrontala con il peso di un granello di sabbia fine (circa 0,1 mg). Perché Cavendish non poteva usare una bilancia ordinaria, e quali accorgimenti richiede l'esperimento?

PER APPROFONDIRE

- [KEP] Giovanni Keplero, *Astronomia nova* e *Harmonices mundi*: i capitoli sull'orbita di Marte e, nel libro V dell'*Harmonices*, la scoperta della terza legge raccontata dal suo autore.
- [NEW] Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, libro III: le *Regulae philosophandi*, il test della Luna e lo *Scholium generale*.
- [KUH] Thomas S. Kuhn, *La rivoluzione copernicana*: gli ultimi capitoli seguono il passaggio da Keplero all'universo di Newton.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: le pagine sul concetto di forza e sulla gravitazione nella visione meccanica del mondo.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo dedicato alla teoria della gravitazione, dalle leggi di Keplero all'esperimento di Cavendish.

Glossario del capitolo

Afelio
Il punto dell'orbita di un pianeta più lontano dal Sole; dista $a(1 + e)$ dal Sole.

Bilancia di torsione
Strumento in cui una piccola forza orizzontale fa ruotare un'asta appesa a un filo sottile; Cavendish la usò nel 1798 per misurare l'attrazione gravitazionale fra sfere di piombo.

Costante di gravitazione universale
La costante $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$ della legge di gravitazione, la stessa per tutti i corpi.

Costruzione del giardiniere
Modo di tracciare un'ellisse con un filo teso fissato a due chiodi, i fuochi, e una matita che scorre lungo il filo.

Eccentricità
Il rapporto $e = c/a$ fra la semidistanza focale e il semiasse maggiore di un'ellisse: vale 0 per la circonferenza e si avvicina a 1 per le ellissi molto allungate.

Ellisse
Il luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi, i fuochi, è costante e uguale a $2a$.

Fuochi
I due punti fissi che definiscono un'ellisse; nell'orbita di un pianeta il Sole occupa uno dei fuochi.

Legge dell'inverso del quadrato
Legge secondo cui l'intensità di una forza diminuisce come $1/r^2$: a distanza doppia diventa un quarto.

Legge di gravitazione universale
Due corpi puntiformi si attraggono con forze uguali e opposte di modulo $F = G\,m_1 m_2/r^2$, dirette lungo la retta che li congiunge.

Perielio
Il punto dell'orbita di un pianeta più vicino al Sole; dista $a(1 - e)$ dal Sole.

Prima legge di Keplero
I pianeti percorrono orbite ellittiche, e il Sole occupa uno dei due fuochi.

Raggio vettore
Il segmento che unisce il Sole a un pianeta, la cui lunghezza varia lungo l'orbita.

Seconda legge di Keplero
Legge delle aree: il raggio vettore descrive aree uguali in tempi uguali; al perielio il pianeta è più veloce.

Semiasse maggiore
La metà dell'asse più lungo di un'ellisse; per un'orbita è la distanza media del pianeta dal Sole.

Semiasse minore
La metà dell'asse più corto di un'ellisse, perpendicolare al maggiore nel centro.

Semidistanza focale
La distanza c di ciascun fuoco dal centro dell'ellisse; $c^2 = a^2 - b^2$.

Sintesi newtoniana
L'unificazione, con la legge di gravitazione universale, della caduta dei corpi sulla Terra e dei moti dei corpi celesti.

Terza legge di Keplero
Per i corpi che orbitano attorno allo stesso corpo centrale il rapporto T^2/a^3 è costante; per un'orbita circolare vale $4\pi^2/(GM)$.

Test della Luna
Il confronto di Newton fra l'accelerazione centripeta della Luna e $g/60^2$, che conferma la legge dell'inverso del quadrato.

Soluzioni

1. B. Il Sole è in uno dei due fuochi; il centro dell'ellisse e l'altro fuoco sono punti vuoti.

2. D. Per la seconda legge, vicino al Sole il raggio vettore è più corto e, per spazzare la stessa area nello stesso tempo, il pianeta deve percorrere un arco più lungo.

3. A. $e = c/a$, un numero puro compreso fra 0 (circonferenza) e 1.

4. C. Terza legge di Keplero: T^2/a^3 = costante; con T in anni e a in UA vale 1.

5. C. $F \propto 1/r^2$: con r tre volte maggiore la forza è divisa per $3^2 = 9$.

6. A. Le due forze formano una coppia di azione e reazione: hanno lo stesso modulo, circa 2,0 N. La Terra però, con la sua massa enorme, ha un'accelerazione impercettibile.

7. D. Cavendish, nel 1798, con la bilancia di torsione; il test della Luna non permette di ricavare G, perché vi compare solo il prodotto GM_T.

8. B. Newton confronta l'accelerazione centripeta della Luna, $4\pi^2 r/T^2 \approx 2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s², con $9{,}8/60^2$ m/s²: la Luna dista circa 60 raggi terrestri.

9. V. Con $e = 0{,}017$ il semiasse minore è più corto del maggiore dello 0,014% ($b = a\sqrt{(1 - e^2)}$): in un disegno di 10 cm la differenza è di poco più di un centesimo di millimetro. Ciò che si nota, con attenzione, è solo il Sole spostato dal centro dell'1,7%.

10. F. Sono uguali le *aree* spazzate dal raggio vettore; gli archi percorsi nello stesso tempo sono più lunghi vicino al Sole.

11. F. La costante $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$ dipende dalla massa del corpo centrale: per la Luna M è la massa della Terra, circa 333 000 volte minore di quella del Sole, e il rapporto è altrettante volte maggiore.

12. V. La gravitazione è universale; fra corpi di massa ordinaria la forza è minuscola (fra due persone a 1 m, circa 3×10^{-7} N).

13. F. ἔλλειψις significa «mancanza, difetto»; il nome, dato da Apollonio, si riferisce a un confronto fra aree in cui un rettangolo «resta al di sotto» di un altro, non a un cerchio venuto male.

14. $c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(25 - 16)}$ cm = 3,0 cm; $e = c/a$ = 3,0/5,0 = 0,60; distanza fra i fuochi $2c$ = 6,0 cm.

15. $r_{\text{perielio}} = 0{,}387 \cdot (1 - 0{,}206)$ UA = 0,307 UA ≈ $4{,}60 \times 10^7$ km; $r_{\text{afelio}} = 0{,}387 \cdot 1{,}206$ UA = 0,467 UA ≈ $6{,}98 \times 10^7$ km.

16. $T^2 = a^3 = 2{,}8^3 = 22{,}0 \Rightarrow T = \sqrt{22{,}0}$ anni ≈ 4,7 anni.

17. $F = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg² · 60 kg · 75 kg / (1,0 m)² ≈ $3{,}0 \times 10^{-7}$ N. Il peso della prima persona è 60 kg · 9,8 m/s² = 588 N ≈ $5{,}9 \times 10^2$ N: la loro attrazione reciproca è circa 2 miliardi di volte più piccola.

18. Primo caso: $2/2^2 = 1/2$ (la forza si dimezza). Secondo caso: $(2 \cdot 2)/(1/2)^2 = 4 \cdot 4 = 16$ volte.

19. Sulla retta $T^2 = a^3$, quindi $T^2 = 2{,}0$ anni². $a = \sqrt[3]{2{,}0}$ UA ≈ 1,26 UA; $T = \sqrt{2{,}0}$ anni ≈ 1,41 anni.

20. $T = 27{,}3 \cdot 86\,400$ s = $2{,}36 \times 10^6$ s; $M_T = 4\pi^2 r^3/(GT^2)$ = $39{,}48 \cdot (3{,}84 \times 10^8\text{ m})^3$ / [$6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg² · $(2{,}36 \times 10^6\text{ s})^2$] ≈ $6{,}0 \times 10^{24}$ kg, in accordo con $5{,}97 \times 10^{24}$ kg entro l'1%. (Il piccolo scarto dipende dagli arrotondamenti e dal fatto che la Luna e la Terra ruotano entrambe attorno al loro centro di massa, capitolo 2.)

21. a) $2a = 0{,}50$ UA + 29,5 UA = 30,0 UA $\Rightarrow a$ = 15,0 UA; $c = a - r_{\text{perielio}}$ = 14,5 UA; e = 14,5/15,0 ≈ 0,967. b) $T = \sqrt{(15{,}0^3)}$ anni ≈ 58 anni. c) Al perielio; per la seconda legge $v_p/v_a = r_a/r_p$ = 29,5/0,50 = 59 volte.

22. a) $g_L = GM_L/{R_L}^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 7{,}34 \times 10^{22}$ / $(1{,}74 \times 10^6)^2$ m/s² ≈ 1,62 m/s²; peso P = 80 kg · 1,62 m/s² ≈ $1{,}3 \times 10^2$ N. b) Sulla Terra 80 · 9,8 N = 784 N: 784/129 ≈ 6,1 volte minore. c) Con la stessa velocità di stacco v_0 l'altezza massima è $h = {v_0}^2/(2g)$, inversamente proporzionale a g: h_L = 0,50 m · 9,8/1,62 ≈ 3,0 m. (Sulla Terra $v_0 = \sqrt{(2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}50)}$ m/s ≈ 3,1 m/s.)

23. a) $T = 16{,}7 \cdot 86\,400\ \text{s} = 1{,}443 \times 10^6\ \text{s}$; $M_G = 4\pi^2 r^3/(GT^2) = 39{,}48 \cdot (1{,}88 \times 10^9\ \text{m})^3 / [6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot (1{,}443 \times 10^6\ \text{s})^2] \approx 1{,}89 \times 10^{27}$ kg. b) $1{,}89 \times 10^{27} / 5{,}97 \times 10^{24} \approx 3{,}2 \times 10^2$: circa 316 volte. c) Per la terza legge $T_{Io} = T_C \cdot (r_{Io}/r_C)^{3/2} = 16{,}7\ \text{d} \cdot (4{,}22/18{,}8)^{3/2} \approx 16{,}7\ \text{d} \cdot 0{,}106 \approx 1{,}78$ giorni (osservato: 1,77 giorni).

24. a) Sistema: la sonda; asse dalla Terra alla Luna, x distanza dal centro della Terra, $r = 3{,}84 \times 10^8$ m. Uguaglianza dei moduli: $GM_T m/x^2 = GM_L m/(r - x)^2 \Rightarrow x/(r - x) = \sqrt{(M_T/M_L)} = \sqrt{(5{,}97 \times 10^{24} / 7{,}34 \times 10^{22})} = \sqrt{81{,}3} \approx 9{,}02 \Rightarrow x = 9{,}02r/10{,}02 \approx 0{,}900r \approx 3{,}46 \times 10^8$ m dal centro della Terra (circa $3{,}8 \times 10^7$ m dal centro della Luna). b) No: m compare in entrambi i membri e si semplifica.

25. a) $a_c = 4\pi^2 r/T^2 = 39{,}48 \cdot 1{,}496 \times 10^{11}\ \text{m} / (3{,}156 \times 10^7\ \text{s})^2 \approx 5{,}93 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$; $GM_S/r^2 = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 1{,}99 \times 10^{30} / (1{,}496 \times 10^{11})^2\ \text{m/s}^2 \approx 5{,}93 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$: coincidono, come deve essere. b) $F_{Sole}/F_{Terra} = (M_S/M_T) \cdot (r_{TL}/r_{SL})^2 = 3{,}33 \times 10^5 \cdot (3{,}84 \times 10^8/1{,}496 \times 10^{11})^2 \approx 2{,}2$: il Sole attira la Luna più del doppio della Terra. c) Il Sole attira con quasi la stessa accelerazione, circa $5{,}9 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$, sia la Terra sia la Luna, che sono praticamente alla stessa distanza da esso: le due accelerano insieme verso il Sole e girano insieme attorno a esso. Ciò che decide il moto della Luna *rispetto alla Terra* è la differenza fra le attrazioni solari sulle due, molto piccola, mentre l'attrazione della Terra la tiene legata.

26. Traccia. Newton afferma di conoscere le «proprietà» della gravità: è universale, è proporzionale alle masse, diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza, e da queste proprietà deduce i moti di pianeti, satelliti, comete e maree. Ammette di non conoscerne la causa, cioè che cosa sia la gravità e come agisca a distanza, e rifiuta di inventarla senza prove. La legge è controllabile perché fa previsioni numeriche: il test della Luna, la terza legge di Keplero, il ritorno delle comete, la misura di G in laboratorio. Una legge può essere confermata dalle sue conseguenze anche quando il suo meccanismo resta sconosciuto: una spiegazione più profonda della gravità sarebbe arrivata solo con la relatività generale.

27. L'errore è nella premessa: la Terra è al perielio all'inizio di gennaio, cioè nell'inverno boreale. Inoltre la variazione di distanza è piccola: $a(1 - e) = 0{,}983$ UA $\approx 1{,}471 \times 10^8$ km al perielio, $a(1 + e) = 1{,}017$ UA $\approx 1{,}521 \times 10^8$ km all'afelio, circa il 3% di differenza. Le stagioni sono dovute all'inclinazione dell'asse terrestre (capitolo 3), che cambia l'altezza del Sole sull'orizzonte e la durata del giorno; per questo quando nell'emisfero nord è estate nell'emisfero sud è inverno, alla stessa distanza dal Sole. Per la seconda legge, anzi, al perielio la Terra è più veloce: l'inverno boreale è la stagione astronomica più breve.

28. Traccia. $F = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 100 \cdot 1{,}0 / (0{,}20)^2\ \text{N} \approx 1{,}7 \times 10^{-7}$ N, pari al peso di una massa di $1{,}7 \times 10^{-7}/9{,}8\ \text{kg} \approx 1{,}7 \times 10^{-8}\ \text{kg} = 0{,}017$ mg: circa un sesto del peso di un granello di sabbia fine. (Molto più vicini i centri non possono stare: una sfera di piombo di 100 kg ha un raggio di quasi 13 cm.) Una bilancia ordinaria confronta pesi verticali di centinaia di grammi o di chilogrammi e non potrebbe isolare una forza così piccola. La bilancia di torsione misura invece forze orizzontali, che non devono sostenere il peso delle sfere, con un filo sottilissimo che si torce sotto coppie minime; la rotazione si legge a distanza, su scale graduate con un cannocchiale (oggi con uno specchietto e un raggio di luce, che la amplificano). Servono poi: l'apparato chiuso in una cassa per evitare correnti d'aria, temperatura stabile, la lettura a distanza (Cavendish osservava da fuori della stanza con un cannocchiale), la misura separata della rigidità del filo dal periodo delle sue oscillazioni.