CAPITOLO

2

Gli urti e il centro di massa

In ogni urto la quantità di moto passa da un corpo all'altro senza perdersi mai; l'energia cinetica, quasi sempre, un poco sì.

OBIETTIVI

1. Riconoscere un urto e spiegare perché, durante un urto, la quantità di moto totale si conserva anche se il sistema non è isolato.
2. Distinguere urti elastici, anelastici e completamente anelastici, e calcolare l'energia cinetica che si trasforma.
3. Risolvere problemi d'urto in una dimensione, anche in due fasi come il pendolo balistico.
4. Ricavare le velocità finali di un urto elastico frontale e interpretare i casi particolari; analizzare un semplice urto nel piano.
5. Calcolare la posizione e la velocità del centro di massa e descrivere il moto del centro di massa di un sistema isolato.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Che cos'è un urto 2
2.2 Gli urti anelastici 4
2.3 Gli urti elastici 9
2.4 Gli urti nel piano 13
2.5 Il centro di massa 14

Fisica 4 · Parte I · La quantità di moto · versione 1.0
Capitolo 2: Gli urti e il centro di massa · pagine 45–70 del volume completo · estratto per lo studio

Sul tavolo verde una palla bianca corre verso una palla rossa ferma, la colpisce in pieno e si ferma di colpo, mentre la rossa parte con la stessa velocità verso la buca. Su un incrocio due auto si scontrano e proseguono incastrate per qualche metro. In un poligono di tiro un proiettile si conficca in un blocco di legno appeso a due fili, che oscilla appena. Sono tre urti molto diversi, ma obbediscono alla stessa legge.

Nel capitolo precedente hai visto che in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva. Qui la metterai alla prova negli urti, dove si conserva sempre, mentre l'energia cinetica si conserva soltanto in alcuni. Chiuderai il capitolo con il *centro di massa*, il punto che riassume il moto di un intero sistema di corpi.

2.1 Che cos'è un urto

2.1.1 Forze intense per un tempo breve

Un **urto** è un'interazione fra due o più corpi che dura un tempo molto breve, durante il quale i corpi si scambiano forze molto intense. Il contatto fra una racchetta e una pallina da tennis dura qualche millesimo di secondo, quello fra due auto che si scontrano circa un decimo di secondo. Queste forze si chiamano **forze impulsive**. Per il terzo principio della dinamica (Fisica 3, capitolo 13) la forza che A esercita su B e quella che B esercita su A sono, istante per istante, uguali e opposte: sono forze interne al sistema formato dai due corpi.

Non sempre i corpi si toccano: due carrelli con magneti affacciati si respingono senza sfiorarsi, ma anche questo è un urto. Di un urto ci interessano quasi sempre due sole istantanee: le velocità *prima*, quando i corpi non interagiscono ancora, e quelle *dopo*, quando hanno smesso di farlo. Indicheremo le prime con v_1 e v_2, le seconde con v_1' e v_2'.

2.1.2 Perché la quantità di moto si conserva

Se i due corpi che si urtano formano un sistema isolato, la loro quantità di moto totale si conserva (capitolo 1). Ma le auto sentono l'attrito della strada, le palle da biliardo strisciano sul panno: perché possiamo usare la conservazione? Per il teorema dell'impulso. L'impulso delle forze interne è grande, ma si annulla nella somma, perché sono uguali e opposte; quello delle forze esterne è piccolo, perché sono molto meno intense e agiscono per un tempo brevissimo.

Un esempio: un'auto di 1000 kg la cui velocità cambia di 10 m/s in un urto di 0,10 s subisce una forza media di $1{,}0 \times 10^4$ kg·m/s / 0,10 s = $1{,}0 \times 10^5$ N. L'attrito della strada, anche a ruote bloccate, non supera $\mu_d mg \approx 0{,}70 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \approx 6{,}9 \times 10^3$ N: in 0,10 s dà un impulso di circa 690 N·s, meno del 7% di quello dell'urto. Per questo vale l'**approssimazione impulsiva**: *nel breve in-*

tervallo di un urto le forze esterne si possono trascurare, e la quantità di moto totale dei corpi che si urtano è la stessa subito prima e subito dopo.

La conservazione riguarda la quantità di moto *totale*, che i corpi si scambiano, e vale soltanto *a cavallo* dell'urto: qualche secondo dopo lo scontro le due auto incastrate sono ferme, frenate dall'attrito.

2.1.3 Elastici, anelastici, completamente anelastici

Che cosa succede invece all'energia cinetica? Dipende dall'urto, e proprio questa differenza è il criterio con cui gli urti si classificano. In un **urto elastico** l'energia cinetica totale dei corpi è la stessa prima e dopo l'urto: i corpi si deformano come molle e restituiscono per intero l'energia della deformazione. Sono quasi elastici gli urti fra palle d'acciaio o da biliardo.

In un **urto anelastico** l'energia cinetica totale dopo l'urto è minore di quella prima: quasi tutti gli urti reali sono così. Il caso estremo è l'**urto completamente anelastico**, in cui i corpi restano uniti e dopo l'urto si muovono insieme, con la stessa velocità: una freccetta che si conficca nel bersaglio, due vagoni che si agganciano.

Un urto è **frontale** (o centrale) se tutte le velocità sono sulla retta che congiunge i centri dei corpi: è un problema in una dimensione, con velocità scritte come numeri con il segno. Altrimenti l'urto è **obliquo** e si svolge nel piano.

DA RICORDARE

Come si imposta un problema d'urto

1. Il sistema. Scegli i corpi che si urtano e chiediti se, durante l'urto, si possono trascurare le forze esterne (approssimazione impulsiva).

2. Il verso positivo. Fissa un verso positivo e scrivi ogni velocità con il suo segno: il segno sbagliato è l'errore più comune del capitolo.

3. Prima e dopo. Disegna due schizzi, prima e dopo l'urto, con le masse e le velocità note e incognite.

4. Le leggi di conservazione. La quantità di moto totale si conserva *sempre* durante l'urto. L'energia cinetica soltanto se l'urto è elastico. Un'eventuale fase successiva (una salita, una frenata) va trattata a parte.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Elastico viene dal latino scientifico *elasticus*, coniato nel Seicento sul greco ἐλαστός, «duttile», da ἐλαύνω, «spingere, battere»: in origine il metallo battuto e disteso. Un corpo elastico, deformato, «si distende» di nuovo nella sua forma.

Balistico viene dal latino *ballista*, la macchina da guerra che scagliava pietre e dardi, a sua volta dal greco βάλλω, «lanciare, scagliare». La balistica studia il moto dei proiettili.

Centro è il greco κέντρον, da κεντέω, «pungere»: il pungolo con cui si spronavano i buoi, poi la punta fissa del compasso, e quindi il punto attorno a cui si traccia il cerchio.

Le leggi degli urti che Wallis, Wren e Huygens presentarono alla Royal Society di Londra fra il 1668 e il 1669 (di quelle di Huygens hai letto nel capitolo 1) furono presto messe alla prova con i pendoli. Newton lo racconta nei *Principia* (1687), nello *Scholium* che segue le leggi del moto: appendeva due sfere a fili lunghi dieci piedi, le lasciava cadere da altezze note e ricavava le velocità prima e dopo l'urto dall'ampiezza delle oscillazioni, tenendo conto della resistenza dell'aria e del fatto che i corpi non sono perfettamente elastici. Riferisce per esempio che, se il corpo A urtava il corpo B, che gli veniva incontro, con «dodici parti» di moto contro sei, dopo l'urto A tornava indietro con due parti e B con otto: la differenza fra i moti opposti, $12 - 6 = 6$ prima e $8 - 2 = 6$ dopo, non cambiava.

2.2 Gli urti anelastici

2.2.1 Quando i corpi restano uniti

Due corpi di masse m_1 e m_2, con velocità v_1 e v_2 sulla stessa retta, si urtano e restano uniti. Dopo l'urto formano un solo corpo di massa $m_1 + m_2$, con una sola velocità v_f. La conservazione della quantità di moto dà un'equazione con una sola incognita:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \implies v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

La velocità finale è una *media pesata* delle velocità iniziali, in cui ciascuna conta in proporzione alla massa del corpo: è sempre compresa fra v_1 e v_2, e più vicina a quella del corpo più pesante. Se i corpi si vengono incontro, una delle due velocità è negativa.

ESEMPIO SVOLTO

Due vagoni che si agganciano

Problema. In uno scalo ferroviario un vagone di 20 t che viaggia a 3,0 m/s raggiunge un vagone di 30 t che procede nello stesso verso a 1,0 m/s, e i due si agganciano (Figura 2.1a). a) Con quale velocità proseguono? b) Quanta energia cinetica si perde nell'urto? c) E se il secondo vagone viaggiasse a 1,0 m/s in verso opposto?

Il sistema. I due vagoni; durante l'aggancio l'attrito delle rotaie è trascurabile. Verso positivo: quello del primo vagone.

a) $v_f = (2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot 3{,}0\ \text{m/s} + 3{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot 1{,}0\ \text{m/s}) / (5{,}0 \times 10^4\ \text{kg}) = (9{,}0 \times 10^4\ \text{kg·m/s}) / (5{,}0 \times 10^4\ \text{kg}) = 1{,}8\ \text{m/s}$, nel verso iniziale.

b) Prima: $K_i = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot (3{,}0\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot (1{,}0\ \text{m/s})^2 = 9{,}0 \times 10^4\ \text{J} + 1{,}5 \times 10^4\ \text{J} = 1{,}05 \times 10^5\ \text{J}$. Dopo: $K_f = \tfrac{1}{2} \cdot 5{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot (1{,}8\ \text{m/s})^2 = 8{,}1 \times 10^4\ \text{J}$. Si perdono $2{,}4 \times 10^4\ \text{J}$, circa il 23% dell'energia cinetica iniziale.

c) Ora $v_2 = -1{,}0\ \text{m/s}$: $v_f = (6{,}0 \times 10^4 - 3{,}0 \times 10^4)\ \text{kg·m/s} / (5{,}0 \times 10^4\ \text{kg}) = +0{,}60\ \text{m/s}$. I vagoni proseguono, lentamente, nel verso del primo.

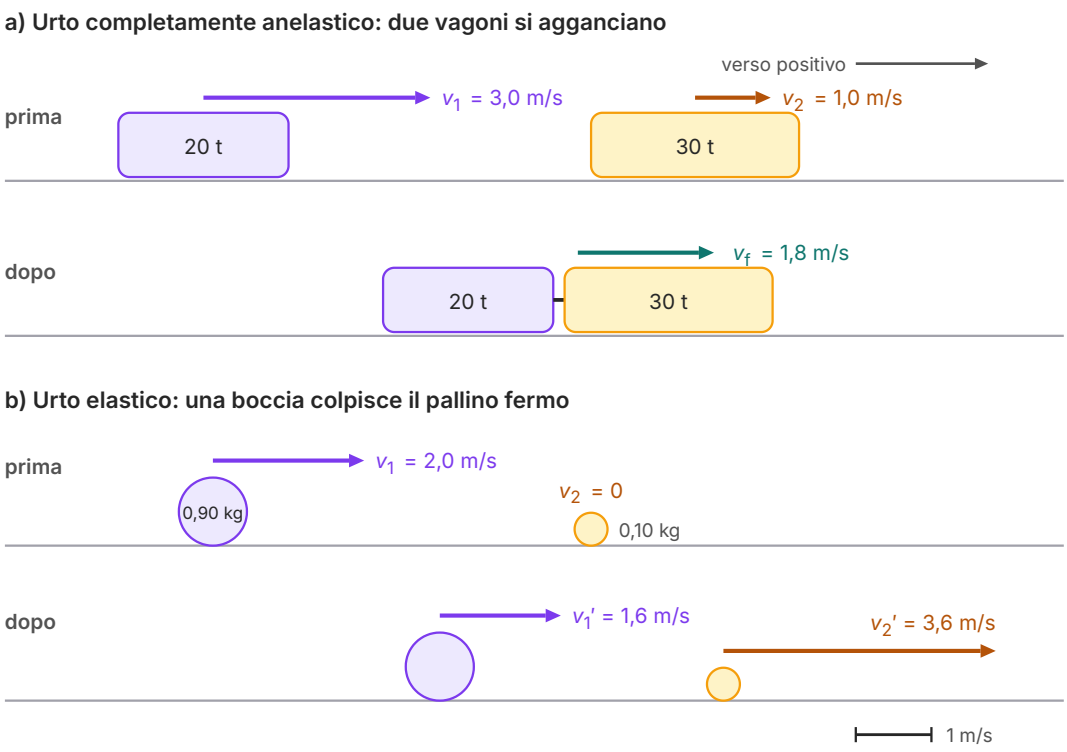


Figura 2.1 Velocità prima e dopo due urti frontali, disegnate in scala (le frecce rappresentano le velocità; scala in basso a destra). a) Urto completamente anelastico fra due vagoni: la velocità comune finale, 1,8 m/s, è la media delle velocità iniziali pesata con le masse. b) Urto elastico fra una boccia di 0,90 kg e il pallino di 0,10 kg, fermo: la boccia prosegue a 1,6 m/s e il pallino schizza via a 3,6 m/s.

2.2.2 Dove va l'energia cinetica

Quanta energia cinetica si perde in un urto completamente anelastico? Consideriamo un corpo, il **proiettile**, che colpisce un corpo fermo, il **bersaglio**. Con $v_2 = 0$ si ha $v_f = m_1 v_1/(m_1 + m_2)$, e il rapporto fra l'energia cinetica dopo e prima vale

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_f^{\,2}}{\tfrac{1}{2} m_1 v_1^{\,2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Con masse uguali si perde metà dell'energia cinetica; contro un bersaglio molto più pesante quasi tutta. Se poi due palle di pongo uguali si scontrano a velocità opposte, la quantità di moto totale è zero e tale resta: i corpi uniti si fermano, e tutta l'energia cinetica è scomparsa.

Scomparsa però solo come energia *cinetica*: l'energia totale si conserva come sempre. Quella che manca ha deformato i corpi, è diventata suono e soprattutto energia interna (Fisica 3, capi-

tolo 16): dopo l'urto i corpi sono un po' più caldi, e nel capitolo 7 imparerai a calcolare di quanto.

ERRORE FREQUENTE

Anelastico non vuol dire «senza energia», né «senza quantità di moto»

Due errori opposti. Il primo è credere che in un urto anelastico non si conservi nemmeno la quantità di moto: si conserva sempre; è l'energia *cinetica* a non conservarsi. Il secondo è credere che un urto completamente anelastico distrugga *tutta* l'energia cinetica: succede solo se la quantità di moto totale è zero, altrimenti i corpi uniti devono continuare a muoversi.

2.2.3 Il pendolo balistico

Per misurare la velocità di un proiettile, troppo veloce per un cronometro, si usa il **pendolo balistico**: un blocco di legno pesante, appeso a fili, in cui il proiettile si conficca (Figura 2.2). Il blocco, con il proiettile dentro, oscilla e sale di un'altezza h: il problema si risolve in due fasi, con due leggi di conservazione diverse.

Fase 1, l'urto. Urto completamente anelastico: si conserva la quantità di moto, $mv = (M + m)V$, dove V è la velocità del blocco subito dopo. L'energia cinetica *non* si conserva.

Fase 2, la risalita. Compie lavoro soltanto il peso (la tensione dei fili è perpendicolare allo spostamento): si conserva l'energia meccanica (Fisica 3, capitolo 16), $\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh$, da cui $V = \sqrt{(2gh)}$. Ora è la quantità di moto a non conservarsi: in cima il blocco è fermo.

Mettendo insieme le due fasi:

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{(2gh)}$$

ESEMPIO SVOLTO

La velocità di un proiettile

Problema. Un proiettile di 10,0 g si conficca in un blocco di legno di 2,00 kg appeso a fili lunghi 1,00 m, che sale di 12,0 cm. a) Qual era la velocità del proiettile? b) Quale frazione della sua energia cinetica si è trasformata in altre forme di energia nell'urto?

Fase 2 (all'indietro). Dalla risalita: $V = \sqrt{(2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}120\ \text{m})} = \sqrt{(2{,}35\ \text{m}^2/\text{s}^2)} \approx 1{,}53\ \text{m/s}$.

Fase 1. Sistema: proiettile e blocco, verso positivo quello del proiettile. $v = (2{,}010\ \text{kg} / 0{,}0100\ \text{kg}) \cdot 1{,}53\ \text{m/s} = 201 \cdot 1{,}53\ \text{m/s} \approx 308\ \text{m/s} \approx 3{,}1 \times 10^2\ \text{m/s}$.

b) K del proiettile: $\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}0100\ \text{kg} \cdot (308\ \text{m/s})^2 \approx 475\ \text{J}$. K del blocco subito dopo l'urto: $\tfrac{1}{2} \cdot 2{,}010\ \text{kg} \cdot (1{,}53\ \text{m/s})^2 \approx 2{,}36\ \text{J}$. Resta lo 0,5% dell'energia cinetica, come prevede $m_1/(m_1 + m_2) = 0{,}0100/2{,}010$.

Osservazione. Uguagliare l'energia cinetica del proiettile all'energia potenziale finale darebbe circa 22 m/s, un valore sbagliato di un fattore 14: l'energia meccanica si conserva solo nella seconda fase.

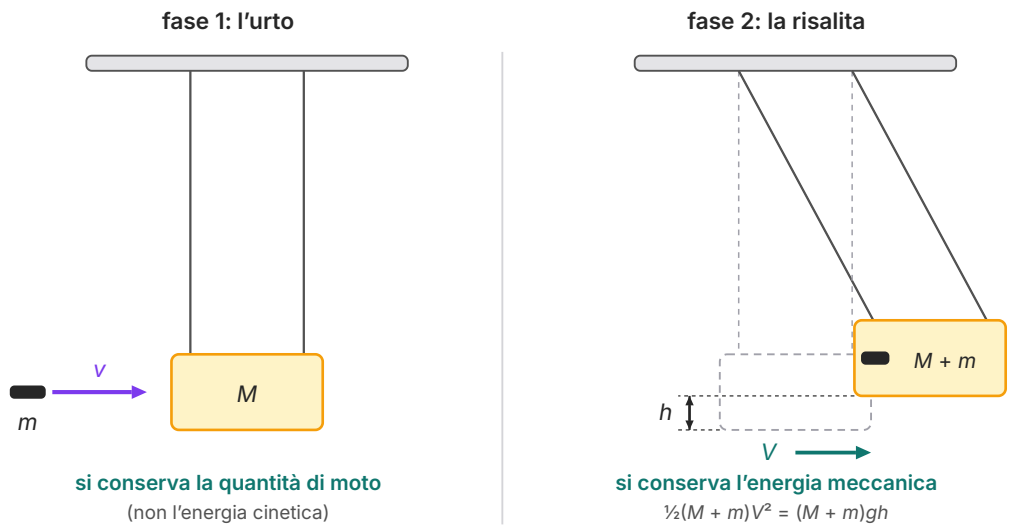


Figura 2.2 Il pendolo balistico, in scala (fili di 1,00 m, salita h = 12,0 cm). Fase 1: il proiettile di massa m si conficca nel blocco di massa M; nell'urto si conserva la quantità di moto, e il blocco parte con velocità V. Fase 2: il blocco sale finché la sua energia cinetica non è diventata tutta energia potenziale. I due fili paralleli fanno sì che il blocco si sposti senza ruotare.

COLLEGAMENTI

Ricostruire un incidente stradale

Chi ricostruisce un incidente ragiona come con il pendolo balistico, all'indietro e in due fasi. Un'auto di 1500 kg tampona un'auto di 1000 kg ferma al semaforo; le due restano incastrate e strisciano insieme, con le ruote bloccate, per 12 m su asfalto asciutto ($\mu_d \approx 0{,}70$) prima di fermarsi.

La frenata: lo spazio di frenata è $d = V^2/(2\mu_d g)$ (Fisica 3, capitolo 16), quindi subito dopo l'urto le auto avevano $V = \sqrt{(2 \cdot 0{,}70 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 12\ \text{m})} \approx 12{,}8$ m/s. **L'urto** conserva la quantità di moto: $1500\ \text{kg} \cdot v = 2500\ \text{kg} \cdot 12{,}8\ \text{m/s}$, e quindi l'auto che tamponava viaggiava a $v \approx 21{,}4$ m/s, cioè circa 77 km/h, ben oltre il limite urbano di 50 km/h.

I periti misurano le tracce di frenata, stimano l'attrito dal tipo di pneumatici e di asfalto e tengono conto delle deformazioni dei veicoli; ma l'ossatura del calcolo è questa.

2.3 Gli urti elastici

2.3.1 Due leggi di conservazione insieme

In un urto elastico frontale si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica. Due equazioni per le due velocità finali; scriviamole separando i termini dei due corpi:

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1(v_1^2 - v_1'^2) = \tfrac{1}{2}m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

Nella seconda equazione compaiono differenze di quadrati, che si scompongono come $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Dividendo membro a membro la seconda equazione (senza il fattore ½) per la prima, le masse e le differenze si semplificano (purché $v_1' \neq v_1$, cioè purché un urto ci sia stato) e resta $v_1 + v_1' = v_2' + v_2$, cioè

$$v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$$

La differenza $v_1 - v_2$ è la **velocità relativa** del corpo 1 rispetto al corpo 2. Dunque *in un urto elastico frontale la velocità relativa cambia segno ma conserva il modulo*: i corpi si allontanano con la rapidità con cui si erano avvicinati. Questa equazione, di primo grado, può sostituire quella dell'energia.

2.3.2 Il bersaglio fermo

Risolviamo il sistema con il bersaglio fermo ($v_2 = 0$). Dalla velocità relativa, $v_2' = v_1 + v_1'$; sostituendo nella conservazione della quantità di moto, $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2(v_1 + v_1')$, si ricava v_1' e poi v_2':

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Il bersaglio parte sempre nel verso del proiettile ($v_2' > 0$). Il proiettile invece prosegue se è più pesante del bersaglio ($m_1 > m_2$), rimbalza indietro se è più leggero ($v_1' < 0$). Nel primo caso rientrano la boccia e il pallino della Figura 2.1b: con $m_1 = 0{,}90$ kg, $m_2 = 0{,}10$ kg e $v_1 = 2{,}0$ m/s si ottiene $v_1' = (0{,}80/1{,}00) \cdot 2{,}0$ m/s $= 1{,}6$ m/s e $v_2' = (1{,}80/1{,}00) \cdot 2{,}0$ m/s $= 3{,}6$ m/s. Controllo: l'energia cinetica vale 1,8 J prima e 1,152 J + 0,648 J = 1,8 J dopo.

Tre casi particolari sono illustrati nella Figura 2.3.

- **Masse uguali.** Con $m_1 = m_2$ si ha $v_1' = 0$ e $v_2' = v_1$: *i corpi si scambiano le velocità*, come la palla da biliardo che ne colpisce in pieno una ferma e si arresta.
- **Bersaglio molto più pesante.** Se $m_2 \gg m_1$, $v_1' \approx -v_1$ e $v_2' \approx 0$: il proiettile rimbalza, il bersaglio quasi non si muove. È la pallina contro il muro del capitolo 1, con $\Delta p = 2mv$.
- **Bersaglio molto più leggero.** Se $m_2 \ll m_1$, $v_1' \approx v_1$ e $v_2' \approx 2v_1$: è la mazza da golf che lancia la pallina.

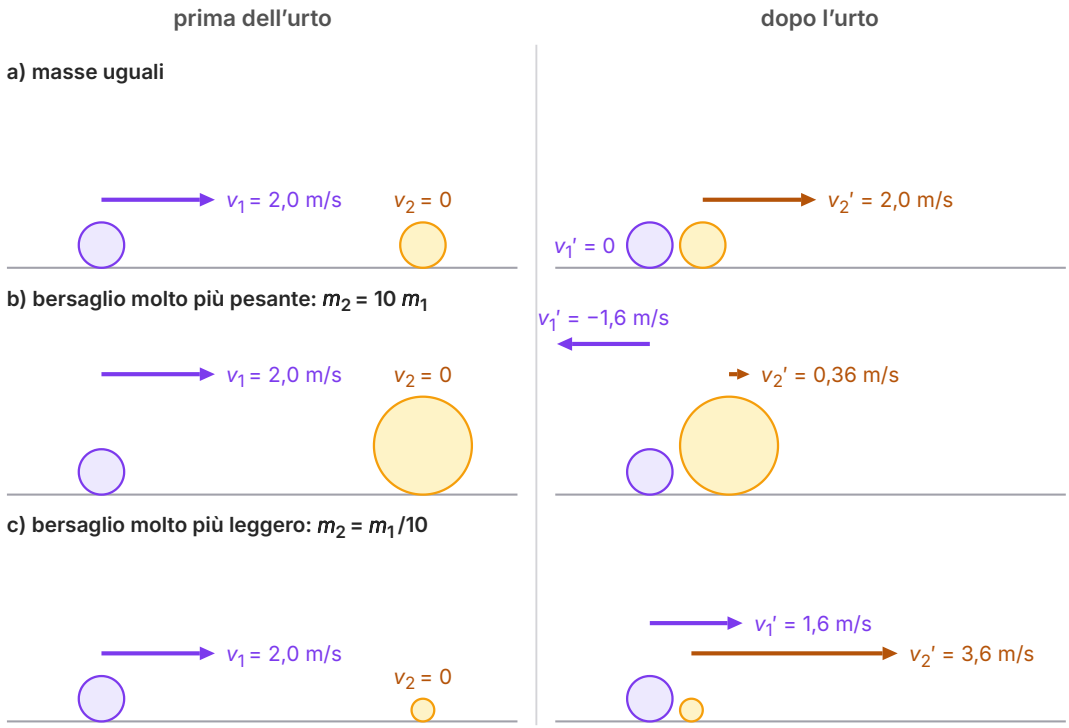


Figura 2.3 Urti elastici frontali contro un bersaglio fermo, con v_1 = 2,0 m/s (frecce in scala, calcolate con le formule del testo). a) Con masse uguali le palline si scambiano le velocità. b) Contro un bersaglio dieci volte più pesante il proiettile rimbalza all'indietro, a 1,6 m/s, mentre il bersaglio si muove appena; più pesante è il bersaglio, più la velocità di rimbalzo si avvicina a quella iniziale. c) Un bersaglio dieci volte più leggero parte con una velocità quasi doppia di quella del proiettile.

Il primo caso spiega il celebre giocattolo da scrivania detto **culla di Newton** (Figura 2.4): cinque sfere d'acciaio uguali appese in fila a contatto. La prima, lasciata cadere, si ferma contro la seconda; la velocità passa di urto in urto attraverso le sfere centrali fino all'ultima, che si stacca e risale quasi alla stessa altezza. Dopo qualche decina di colpi le sfere oscillano tutte insieme, sempre più piano: gli urti non sono perfettamente elastici.

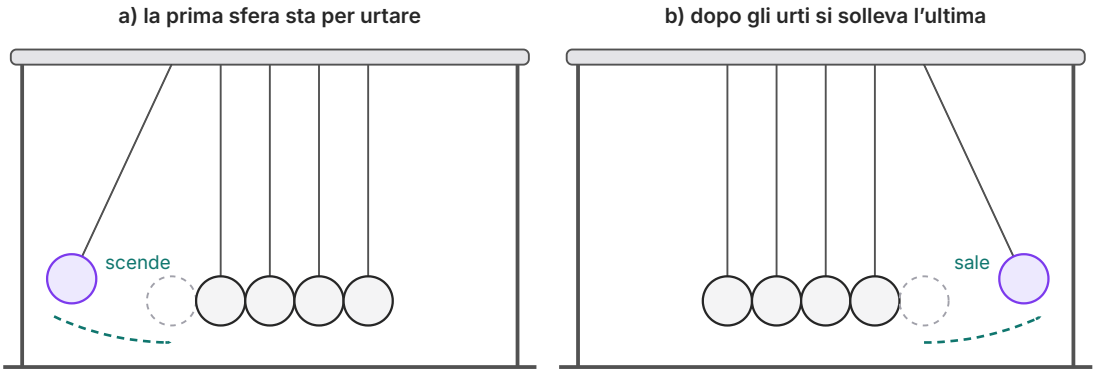


Figura 2.4 La culla di Newton. a) La prima sfera, sollevata, scende verso le altre. b) Dopo la serie di urti elastici fra sfere uguali, che si scambiano le velocità, la prima e le tre centrali sono ferme e l'ultima risale, idealmente, alla stessa altezza.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il grafico di un urto

Problema. Su una rotaia a basso attrito un carrello A di 0,50 kg urta un carrello B di 0,30 kg, fermo, che porta un respingente a molla. Un sensore di moto registra le velocità dei due carrelli (Figura 2.5). a) Leggi le velocità prima e dopo l'urto e la durata dell'urto. b) La quantità di moto si conserva? c) L'urto è elastico?

a) Prima: $v_A = 0{,}80$ m/s, $v_B = 0$. Dopo: $v_A' = 0{,}25$ m/s, $v_B' = 0{,}90$ m/s (incertezza di lettura ± 0,01 m/s). L'urto dura circa 0,06 s (da 0,42 s a 0,48 s).

b) Verso positivo: quello del moto di A. Prima: $p_i = 0{,}50 \text{ kg} \cdot 0{,}80 \text{ m/s} = 0{,}400$ kg·m/s. Dopo: $p_f = 0{,}50 \cdot 0{,}25 + 0{,}30 \cdot 0{,}90 = 0{,}125 + 0{,}270 = 0{,}395$ kg·m/s. Le incertezze sono 0,005 kg·m/s su p_i e $0{,}50 \cdot 0{,}01 + 0{,}30 \cdot 0{,}01 = 0{,}008$ kg·m/s su p_f: la differenza, 0,005 kg·m/s, è minore della loro somma, e la quantità di moto si conserva.

c) $K_i = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}50 \cdot (0{,}80)^2 = 0{,}160$ J; $K_f = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}50 \cdot (0{,}25)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}30 \cdot (0{,}90)^2 \approx 0{,}016 + 0{,}122 = 0{,}137$ J. Si è perso circa il 14%, molto più di quanto spieghino le incertezze: l'urto è anelastico (se fosse elastico si avrebbe $v_A' = 0{,}20$ m/s e $v_B' = 1{,}00$ m/s).

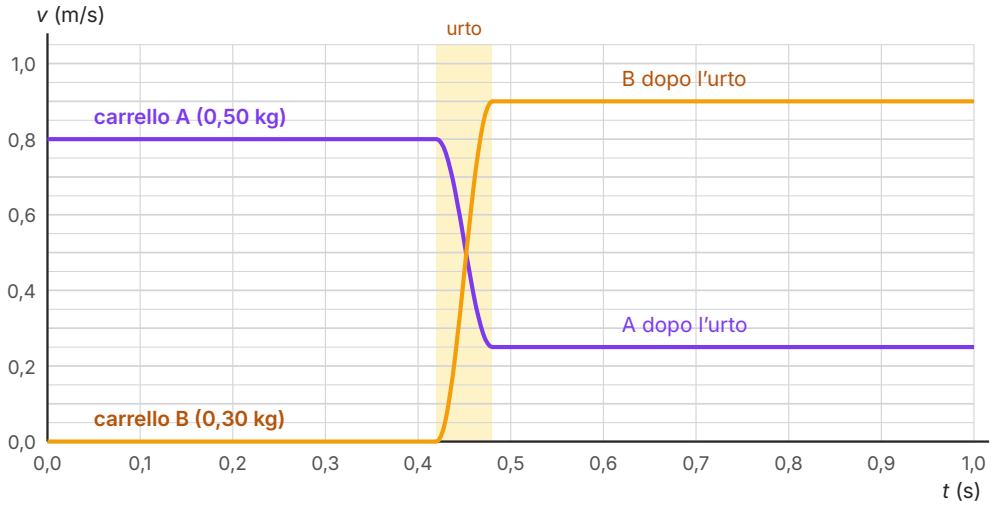


Figura 2.5 Velocità di due carrelli su una rotaia, registrate da un sensore di moto durante l'urto dell'esempio (dati simulati). Nella fascia colorata, che dura circa 0,06 s, il carrello A rallenta e il carrello B accelera contemporaneamente: le due curve sono il segno delle forze uguali e opposte che i carrelli si scambiano.

2.4 Gli urti nel piano

Nel biliardo o nelle bocce gli urti frontali sono l'eccezione, e dopo l'urto le palle si allontanano in direzioni diverse. La conservazione della quantità di moto vale per il vettore: la somma $\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2'$ delle quantità di moto finali è uguale alla quantità di moto iniziale. Come per ogni equazione vettoriale, la si può scrivere *per componenti* (capitolo 1): la componente lungo x della quantità di moto totale si conserva, e così quella lungo y, ciascuna per conto suo.

Un caso si risolve con il solo teorema di Pitagora. Una palla da biliardo, con velocità $v_1 = 2{,}0$ m/s, urta di striscio una palla uguale ferma (Figura 2.6). Le due palle hanno la stessa massa m, che quindi si semplifica in tutte le equazioni, e l'urto si può considerare elastico. Le due leggi di conservazione si scrivono

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2' \qquad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

La prima dice che i tre vettori velocità formano un triangolo, con v_1 come lato più lungo; la seconda che i quadrati dei lati obbediscono al teorema di Pitagora. Allora il triangolo è *rettangolo*, e l'angolo retto è fra $\boldsymbol{v}_1'$ e $\boldsymbol{v}_2'$: *dopo un urto elastico obliquo fra due palle uguali, una delle quali era ferma, le palle si allontanano ad angolo retto*. Se si misura che la prima prosegue a 1,2 m/s, la seconda deve muoversi a $\sqrt{(2{,}0^2 - 1{,}2^2)}$ m/s = $\sqrt{2{,}56}$ m/s = 1,6 m/s, ad angolo retto con la prima. È la «regola dei 90°» dei giocatori di biliardo.

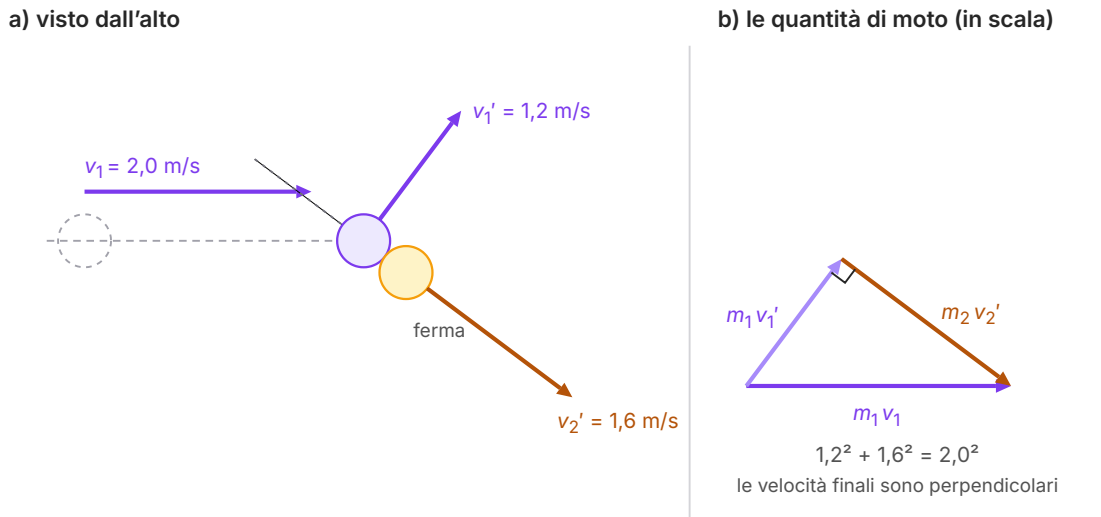


Figura 2.6 Urto elastico obliquo fra due palle da biliardo uguali. a) Vista dall'alto: la palla battente arriva a 2,0 m/s lungo la retta tratteggiata e colpisce di striscio la palla ferma, che parte lungo la retta dei centri al momento del contatto (punteggiata); la battente prosegue perpendicolarmente. b) Il triangolo delle quantità di moto, in scala: la somma delle quantità di moto finali è uguale a quella iniziale, e il triangolo è rettangolo perché si conserva anche l'energia cinetica.

Se l'urto non è elastico, l'angolo fra le direzioni finali è minore di 90°; nel caso limite in cui le palle restano unite proseguono insieme lungo la direzione iniziale, con metà della velocità. I casi generali richiedono la trigonometria, ma il principio non cambia: si conserva ciascuna componente.

2.5 Il centro di massa

2.5.1 La posizione media delle masse

Un martello lanciato in aria ruotando descrive traiettorie complicate, ma un suo punto, vicino alla testa, segue una parabola, come un sasso. Quel punto è il **centro di massa**. Per due corpi puntiformi di masse m_1 e m_2, che si trovano sull'asse x nelle posizioni x_1 e x_2, la sua posizione è

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Come la velocità finale di un urto completamente anelastico, è una media pesata con le masse: il centro di massa sta sempre sul segmento che congiunge i due corpi, più vicino a quello più pesante. Per un corpo di 1,0 kg nell'origine e uno di 3,0 kg in x = 2,0 m si trova x_{cm} = (1,0 · 0 + 3,0 · 2,0) kg·m / (4,0 kg) = 1,5 m (Figura 2.7a): le distanze dai due corpi, 1,5 m e 0,5 m, sono inversa-

mente proporzionali alle masse. Con più corpi, o nel piano, si calcola una media pesata per ogni coordinata:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \qquad y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

Nella Figura 2.7b tre corpi di 2,0 kg, 1,0 kg e 1,0 kg si trovano nei punti (0; 0), (4,0 m; 0) e (0; 3,0 m): x_{cm} = (1,0 kg · 4,0 m)/(4,0 kg) = 1,0 m e y_{cm} = (1,0 kg · 3,0 m)/(4,0 kg) = 0,75 m. Per un corpo omogeneo con un centro di simmetria (una sfera, un'asta, un anello) il centro di massa è quel centro; come mostra l'anello, può cadere fuori dal materiale, e lo stesso accade in un boomerang.

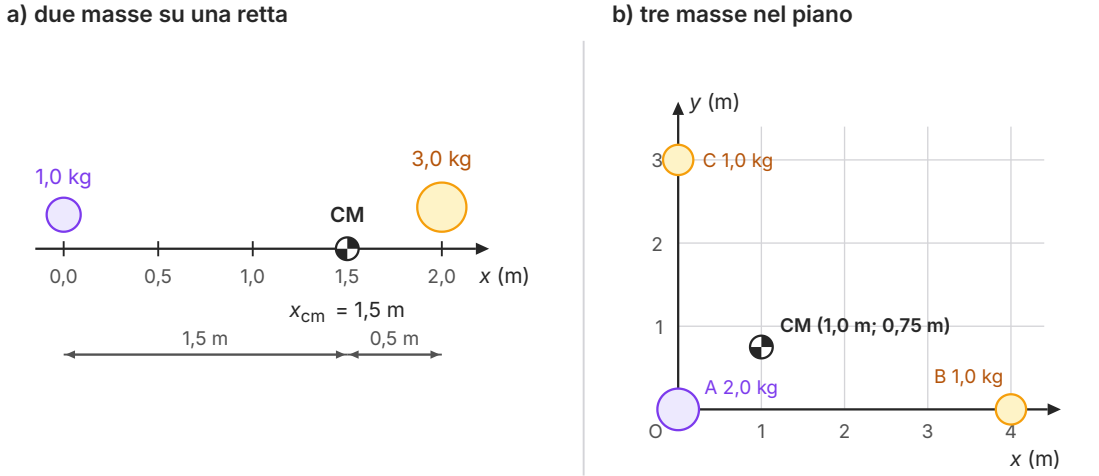


Figura 2.7 Il centro di massa (CM) come media delle posizioni pesata con le masse. a) Due corpi su una retta: il CM divide la loro distanza in parti inversamente proporzionali alle masse. b) Tre corpi nel piano: ciascuna coordinata del CM si calcola con una media pesata.

DA RICORDARE

Dal volume del terzo anno: il baricentro

Il baricentro è il punto in cui si può pensare applicato il peso di tutto un corpo (Fisica 3, capitolo 8): dove la gravità è uniforme, come per qualsiasi oggetto sulla superficie terrestre, *coincide con il centro di massa*, perché i pesi delle parti sono proporzionali alle loro masse. Ma il centro di massa è definito anche senza gravità, e dipende solo da come la massa è distribuita.

2.5.2 La velocità del centro di massa

Se i corpi si muovono, si muove anche il loro centro di massa. In un intervallo Δt abbastanza breve perché le velocità non cambino, i due corpi si spostano di $\Delta x_1 = v_1\Delta t$ e $\Delta x_2 = v_2\Delta t$, e il cen-

tro di massa di $\Delta x_{cm} = (m_1 v_1 \Delta t + m_2 v_2 \Delta t)/(m_1 + m_2)$. Dividendo per Δt si ottiene la **velocità del centro di massa**, che con $m_{tot} = m_1 + m_2$ si scrive

$$\boldsymbol{v}_{cm} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\boldsymbol{p}_{tot}}{m_{tot}}$$

Vale con qualunque numero di corpi: *la quantità di moto di un sistema è quella di un solo corpo, con tutta la massa, che si muovesse con il centro di massa*. Nell'urto completamente anelastico la velocità comune v_f è proprio quella del centro di massa.

2.5.3 Il moto del centro di massa di un sistema isolato

Se il sistema è isolato, $\boldsymbol{p}_{tot}$ è costante, e quindi lo è anche $\boldsymbol{v}_{cm}$: *il centro di massa di un sistema isolato è fermo, o si muove di moto rettilineo uniforme, qualunque cosa accada fra i corpi del sistema*. Newton lo enunciò come quarto corollario delle leggi del moto: «*Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis*», cioè «il comune centro di gravità di due o più corpi, per le azioni dei corpi tra loro, non cambia il suo stato di moto o di quiete» (*Principia*, 1687, Assiomi o leggi del moto, Corollario IV; traduzione della redazione).

Due pattinatori fermi che si spingono (capitolo 1) se ne vanno in versi opposti, ma il loro centro di massa resta fermo; e chi cammina su una barca ferma la fa arretrare.

Se sul sistema agiscono forze esterne, il centro di massa si muove come un punto materiale, con tutta la massa del sistema, su cui agisse la somma delle forze esterne (le forze interne si annullano a coppie). Un fuoco d'artificio lanciato in aria è soggetto, se si trascura l'aria, soltanto al peso: il suo centro di massa descrive la parabola di un proiettile (Fisica 3, capitolo 12). Se il fuoco esplode in volo, i frammenti partono in ogni direzione, ma le forze dell'esplosione sono interne, e il centro di massa dei frammenti continua lungo la stessa parabola, finché il primo frammento non tocca il suolo (Figura 2.8).

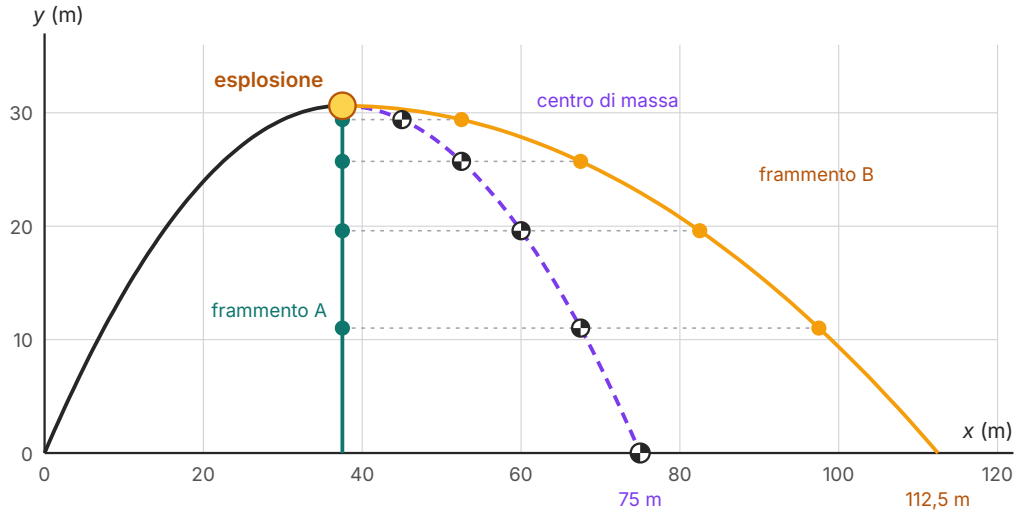


Figura 2.8 Un fuoco d'artificio lanciato con velocità di componenti 15 m/s in orizzontale e 24,5 m/s in verticale (resistenza dell'aria trascurata) esplode nel punto più alto, dopo 2,5 s, a 30,6 m di quota, in due frammenti di uguale massa: A resta fermo e cade in verticale, B parte in orizzontale a 30 m/s. Ogni 0,5 s i due frammenti sono alla stessa quota, e il loro centro di massa, a metà strada, prosegue lungo la parabola iniziale (tratteggiata) fino a 75 m, dove sarebbe caduto il fuoco intero.

Controlliamo i numeri. Nel punto più alto il fuoco, di massa $2m$, ha solo la velocità orizzontale di 15 m/s; se A resta fermo, B deve avere $m\,v_B = 2m \cdot 15$ m/s, cioè 30 m/s. Cadendo dalla stessa quota in 2,5 s, A tocca terra in $x = 37{,}5$ m, B in 37,5 m + 30 m/s · 2,5 s = 112,5 m, e il loro centro di massa in (37,5 + 112,5) m / 2 = 75 m.

2.5.4 La Terra e la Luna

A rigore Terra e Luna girano entrambe attorno al loro centro di massa. Dove si trova? Con i dati dell'Appendice ($M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M_L = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg, distanza media $3{,}84 \times 10^8$ m) e l'origine nel centro della Terra:

$$x_{cm} = \frac{7{,}34 \times 10^{22}\ \text{kg} \cdot 3{,}84 \times 10^{8}\ \text{m}}{5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg} + 7{,}34 \times 10^{22}\ \text{kg}} \approx 4{,}66 \times 10^{6}\ \text{m} \approx 4700\ \text{km}$$

Poiché il raggio della Terra è di 6370 km, il centro di massa del sistema si trova *dentro* la Terra, circa 1700 km sotto la superficie, sulla congiungente con la Luna. In un mese il centro della Terra descrive attorno a questo punto un cerchio di circa 4700 km di raggio.

APPROFONDIMENTO

Ruotare: il momento angolare

Per le rotazioni esiste una grandezza analoga alla quantità di moto, il **momento angolare**. Per un corpo puntiforme di massa m che percorre una circonferenza di raggio r con velocità v, il modulo del momento angolare rispetto al centro è $L = mvr$, e si misura in $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. Si dimostra che il momento angolare di un sistema si conserva se il momento risultante delle forze esterne (Fisica 3, capitolo 8) è nullo: è la terza grande legge di conservazione della meccanica.

Una pallina legata a un filo gira su un piano liscio attorno a un foro, attraverso cui il filo viene tirato da sotto: la forza del filo, diretta verso il foro, non ha momento, e accorciando il raggio mvr resta costante. Dimezzando il raggio la velocità raddoppia. Allo stesso modo una pattinatrice che gira con le braccia aperte accelera quando le stringe al petto.

La stessa legge governa i pianeti. Il Sole attira un pianeta con una forza diretta verso di sé, e il momento angolare del pianeta si conserva: più vicino al Sole, il pianeta è più veloce. Keplero lo aveva scoperto nei dati di Marte (*Astronomia nova*, 1609) come una legge sulle aree; Newton dimostrò nei *Principia* che la legge delle aree vale per ogni forza diretta verso un centro fisso. Ne parleremo nel capitolo 4.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: gli urti fra due carrelli

Materiali. Una rotaia a basso attrito ben livellata; due carrelli e masse aggiuntive; respingenti a velcro (urti completamente anelastici) e a magneti (urti quasi elastici); due fotocellule con cronometro, oppure il video dello smartphone; una bilancia elettronica.

Procedimento. Il carrello A ha massa 0,500 kg; B (0,250 kg) si porta a 0,500 kg e 1,000 kg con le masse aggiuntive. Metti B fermo fra le fotocellule e lancia A: la prima fotocellula misura la velocità di A prima dell'urto, la seconda le velocità dopo. Per ogni prova calcola la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale prima e dopo l'urto (Tabella 2.1).

Tabella 2.1 Urti fra il carrello A (0,500 kg), lanciato con velocità v_A, e il carrello B, fermo (dati tipici; incertezza sulle velocità ± 0,005 m/s, sulle masse trascurabile). Nelle prove con il velcro i carrelli restano uniti. L'incertezza su p_i è ± 0,003 kg·m/s.

urto	m_B (kg)	v_A (m/s)	v_A' (m/s)	v_B' (m/s)	p_i (kg·m/s)	p_f (kg·m/s)	K_f/K_i
velcro	0,250	0,600	0,395	0,395	0,300	0,296 ± 0,004	0,65
velcro	0,500	0,580	0,285	0,285	0,290	0,285 ± 0,005	0,48
velcro	1,000	0,620	0,203	0,203	0,310	0,305 ± 0,008	0,32
magneti	0,500	0,600	0,010	0,585	0,300	0,298 ± 0,005	0,95
magneti	0,250	0,600	0,195	0,790	0,300	0,295 ± 0,004	0,97

Che cosa concludere. In tutte le prove p_f coincide con p_i entro le incertezze; la piccola differenza ha sempre lo stesso segno, perché l'attrito residuo frena un poco i carrelli. Con il velcro il rapporto K_f/K_i è circa 0,65, 0,48 e 0,32, vicinissimo ai valori previsti $m_A/(m_A + m_B)$ = 2/3, 1/2, 1/3; con i magneti è 0,95–0,97: urto quasi elastico, e con masse uguali A quasi si ferma.

Per la relazione. Segui lo schema di Fisica 3, capitolo 4: la tabella con le incertezze (su p, somma delle incertezze assolute dei termini), la compatibilità fra p_i e p_f, il confronto fra i rapporti K_f/K_i misurati e previsti, le cause dell'energia perduta.

IN SINTESI

Le formule del capitolo e il loro significato

Urto: per la breve durata dell'urto le forze esterne si trascurano e la quantità di moto totale si conserva: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ (velocità con il segno, in m/s).

Urto completamente anelastico: $v_f = (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2)$: i corpi restano uniti; con il bersaglio fermo resta la frazione $m_1/(m_1 + m_2)$ dell'energia cinetica.

Urto elastico frontale: si conservano quantità di moto ed energia cinetica; la velocità relativa si inverte, $v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$. Bersaglio fermo: $v_1' = (m_1 - m_2)v_1/(m_1 + m_2)$, $v_2' = 2m_1v_1/(m_1 + m_2)$.

Pendolo balistico: $v = [(M + m)/m]\sqrt{(2gh)}$: quantità di moto nell'urto, energia meccanica nella risalita.

Centro di massa: $x_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots)/(m_1 + m_2 + \ldots)$: la posizione media delle masse. $\boldsymbol{v}_{cm} = \boldsymbol{p}_{tot}/m_{tot}$: in un sistema isolato è costante.

Con questo capitolo si chiude la prima parte. Nella prossima alzerai lo sguardo al cielo: il moto dei pianeti ti porterà da Aristotele e Tolomeo fino alla gravitazione universale di Newton.

SINTESI

- Un urto è un'interazione breve e intensa fra corpi; le forze impulsive che si scambiano sono interne al sistema, uguali e opposte.
- Approssimazione impulsiva: durante l'urto le forze esterne si possono trascurare, perché sono molto meno intense e agiscono per poco tempo; la quantità di moto totale si conserva a cavallo dell'urto, in ogni tipo di urto.
- Negli urti elastici si conserva anche l'energia cinetica; negli anelastici una parte diventa energia interna, lavoro di deformazione e suono; negli urti completamente anelastici i corpi restano uniti.
- Urto completamente anelastico: $v_f = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$; con il bersaglio fermo si conserva la frazione $m_1/(m_1 + m_2)$ dell'energia cinetica, che si perde tutta solo se la quantità di moto totale è nulla.
- Il pendolo balistico si risolve in due fasi: conservazione della quantità di moto nell'urto, conservazione dell'energia meccanica nella risalita; $v = [(M + m)/m]\sqrt{(2gh)}$.
- In un urto elastico frontale la velocità relativa dei corpi cambia segno e conserva il modulo.
- Con il bersaglio fermo: $v_1' = (m_1 - m_2)v_1/(m_1 + m_2)$ e $v_2' = 2m_1 v_1/(m_1 + m_2)$; masse uguali si scambiano le velocità (biliardo, culla di Newton); contro un bersaglio molto pesante il proiettile rimbalza.
- Negli urti nel piano si conserva ogni componente della quantità di moto; in un urto elastico obliquo fra due palle uguali, una ferma, le palle si allontanano ad angolo retto.
- Il centro di massa è la posizione media dei corpi pesata con le masse; non sta necessariamente nel materiale del corpo, e in gravità uniforme coincide con il baricentro.
- La velocità del centro di massa è $\boldsymbol{v}_{cm} = \boldsymbol{p}_{tot}/m_{tot}$: il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme (o è fermo); con forze esterne si muove come un punto con tutta la massa del sistema.
- Il centro di massa del sistema Terra–Luna si trova a circa 4700 km dal centro della Terra, dentro il pianeta.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In un urto fra due corpi che formano un sistema isolato si conserva sempre:
   A. l'energia cinetica totale
   B. la quantità di moto totale
   C. la velocità di ciascun corpo
   D. sia la quantità di moto totale sia l'energia cinetica totale

2. ● Un urto si dice completamente anelastico quando:
   A. l'energia cinetica totale si conserva
   B. i corpi rimbalzano con velocità opposte
   C. l'energia cinetica finale è nulla
   D. dopo l'urto i corpi restano uniti

3. ● Una palla da biliardo urta frontalmente, in modo elastico, una palla uguale ferma. Dopo l'urto:
   A. la prima palla si ferma e la seconda parte con la velocità che aveva la prima
   B. le due palle proseguono unite a metà velocità
   C. le due palle proseguono nello stesso verso, ciascuna a metà velocità
   D. la prima palla rimbalza indietro con la stessa velocità

4. ● Due corpi di masse m e $3m$ si trovano a distanza d. Il loro centro di massa si trova:
   A. a metà strada fra i due corpi
   B. a distanza $d/3$ dal corpo di massa m
   C. a distanza $d/4$ dal corpo di massa $3m$
   D. al centro del corpo di massa $3m$

5. ● Durante un urto fra due auto si possono trascurare le forze esterne perché:
   A. sono nulle
   B. l'urto è elastico
   C. le forze interne sono molto più intense e l'urto dura pochissimo
   D. il peso agisce solo sulle auto ferme

6. ●● Nel pendolo balistico la conservazione dell'energia meccanica si può applicare:
   A. solo dopo l'urto, durante la risalita del blocco
   B. solo durante l'urto
   C. sia durante l'urto sia durante la risalita
   D. in nessuna delle due fasi

7. ●● Un fuoco d'artificio esplode in volo. Trascurando l'aria, il centro di massa dei frammenti, finché nessuno tocca il suolo:
   A. si ferma nel punto dell'esplosione
   B. cade in verticale
   C. segue una nuova parabola, più alta
   D. continua lungo la parabola che seguiva prima dell'esplosione

8. ●● Un vagone in moto si aggancia a un vagone uguale fermo. Quale frazione dell'energia cinetica iniziale si perde?

   A. nessuna
   B. il 50%
   C. il 25%
   D. il 100%

Vero o falso

9. ● In un urto anelastico l'energia cinetica totale diminuisce, ma l'energia totale si conserva. V / F

10. ● In un urto completamente anelastico l'energia cinetica finale è sempre nulla. V / F

11. ●● Il centro di massa di un corpo si trova sempre in un punto occupato dal materiale del corpo. V / F

12. ●● In un urto elastico frontale la velocità relativa dei due corpi cambia segno ma conserva il modulo. V / F

13. ● Se due corpi uguali, con velocità uguali e opposte, si urtano e restano uniti, dopo l'urto sono fermi. V / F

Applicare

14. ● Un carrello di 2,0 kg che viaggia a 3,0 m/s urta un carrello di 1,0 kg fermo, e i due restano agganciati. Con quale velocità proseguono?

15. ●● Per l'urto dell'esercizio precedente calcola l'energia cinetica prima e dopo l'urto e la frazione di energia cinetica perduta. Confronta il risultato con la formula $m_1/(m_1 + m_2)$.

16. ●● Una pallina di 0,20 kg, a 4,0 m/s, urta frontalmente e in modo elastico una pallina di 0,60 kg ferma. Calcola le velocità delle due palline dopo l'urto, con il segno, e verifica che l'energia cinetica si conserva.

17. ● Un corpo di 2,0 kg si trova in $x = 0$ e uno di 3,0 kg in $x = 1{,}5$ m. Dove si trova il loro centro di massa?

18. ●● Tre corpi puntiformi si trovano nel piano: 1,0 kg nell'origine, 2,0 kg nel punto (3,0 m; 0) e 1,0 kg nel punto (0; 4,0 m). Calcola le coordinate del centro di massa.

19. ●● Leggi nella Figura 2.5 la variazione di velocità del carrello B e la durata dell'urto, poi calcola, con il teorema dell'impulso (capitolo 1), la forza media che il carrello A esercita su B. Fai lo stesso calcolo per la forza di B su A: che cosa ti aspetti, e che cosa trovi?

20. ● Completa. Un corpo di 3,0 kg si muove a +4,0 m/s e uno di 1,0 kg a −2,0 m/s sulla stessa retta. La quantità di moto totale è _____ kg·m/s e la velocità del centro di massa è _____ m/s. Se i due corpi si urtano e restano uniti, proseguono a _____ m/s.

Problemi

21. ●● Un pendolo balistico è formato da un blocco di legno di 1,50 kg appeso a due fili. Un proiettile di 8,0 g si conficca nel blocco, che sale di 9,0 cm. a) Con quale velocità si muove il blocco subito dopo l'urto? b) Qual era la velocità del proiettile? c) Quale frazione dell'energia cinetica del proiettile si è trasformata in altre forme di energia?

22. ●●● Un furgone di 2400 kg tampona un'auto di 1200 kg ferma al semaforo. I due veicoli restano incastrati e strisciano insieme, con le ruote bloccate, per 9,0 m prima di fermarsi ($\mu_d = 0{,}60$). a) Con quale velocità si muovevano subito dopo l'urto (rileggi lo spazio di frenata di Fisica 3, capitolo 16)? b) A quale velocità, in km/h, viaggiava il furgone? Rispettava il limite urbano di 50 km/h? c) Quanta energia cinetica si è persa nell'urto? Che frazione dell'energia iniziale è?

23. ●●● Una pallina di 0,10 kg scende da ferma lungo una guida curva senza attrito, partendo da 45 cm di altezza; in fondo, sul tratto orizzontale, urta frontalmente e in modo elastico una pallina di 0,30 kg ferma. a) Con quale velocità arriva in fondo alla guida? b) Calcola le velocità delle due palline dopo l'urto. c) A quale altezza risale la prima pallina lungo la guida?

24. ●● Sul ghiaccio un giocatore di hockey di 80 kg che pattina a 5,0 m/s si scontra frontalmente con un avversario di 100 kg che gli viene incontro a 3,0 m/s; i due restano avvinghiati. Il sistema dei due giocatori si può considerare isolato durante l'urto. a) Con quale velocità, e in quale verso, proseguono? b) Quale percentuale dell'energia cinetica si perde?

25. ●● Una palla da biliardo a 2,5 m/s urta di striscio una palla uguale ferma; l'urto è elastico. Dopo l'urto la prima palla prosegue a 1,5 m/s. a) Con quale velocità si muove la seconda palla? b) Quale angolo formano le due direzioni finali? c) Disegna in scala il triangolo delle quantità di moto.

26. ●●● Una ragazza di 60 kg è ferma sulla poppa di una barca di 140 kg, lunga 4,0 m, ferma in acqua calma; poi cammina fino alla prua. Trascura l'attrito dell'acqua. a) Il sistema ragazza–barca è isolato per le forze orizzontali? Che cosa si può dire del suo centro di massa? b) Di quanto si sposta la barca rispetto all'acqua, e in quale verso? c) Di quanto si sposta la ragazza rispetto all'acqua?

Ragionare e argomentare

27. ●● Commenta la fonte. Nei *Principia* (1687) Newton enuncia così il terzo corollario delle leggi del moto: «*Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se*», cioè «la quantità di moto che si ottiene sommando i moti diretti nello stesso verso e sottraendo quelli diretti in versi opposti non è cambiata dall'azione dei corpi tra loro» (traduzione della redazione). Che cosa afferma, nel linguaggio di questo capitolo? Perché Newton parla di somma e di differenza? Da quale delle sue leggi del moto discende? Nello stesso libro Newton riferisce che, quando un corpo A raggiungeva un corpo B più lento, «con quattordici parti» di moto contro cinque, dopo l'urto A proseguiva con cinque parti e B con quattordici: i suoi dati confermano il corollario? Come lo verificheresti oggi in laboratorio?

28. ●●● Commenta la fonte. Cartesio, nei *Principia philosophiae* (1644, parte II), formulò sette regole degli urti. La quarta, in sostanza, afferma che un corpo fermo, anche di poco più grande di un corpo che lo urta, non può essere messo in moto da questo, qualunque sia la sua velocità: il corpo che urta rimbalza indietro. Hai incontrato questa regola nel capitolo 1. Che cosa prevedono invece le formule dell'urto elastico per un proiettile di massa m contro un bersaglio fermo di massa $1{,}1m$? Quale esperimento semplice smentisce la regola di Cartesio?

29. ●● In uno scontro frontale fra un'auto di 1000 kg e un camion di 9000 kg, che viaggiano entrambi a 20 m/s in versi opposti, i due veicoli restano incastrati. Calcola la velocità finale e la variazione di velocità di ciascun veicolo, e spiega perché, a parità di cinture e airbag, l'urto è molto più pericoloso per chi viaggia nell'auto.

30. ●● Progetta un esperimento. Vuoi misurare la velocità con cui un lanciatore a molla giocattolo spara una pallina di gomma di circa 10 g, usando soltanto materiali di casa e un metro. Descrivi come costruiresti un pendolo balistico, quali grandezze misureresti, con quale formula ricaveresti la velocità e quali sono le principali fonti di errore.

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Assiomi o leggi del moto: i Corollari III e IV (la quantità di moto e il centro di gravità di un sistema) e lo *Scholium* che ricorda Wallis, Wren e Huygens e descrive gli esperimenti con i pendoli che si urtano.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sul centro di massa, con molti esempi di come trovarlo e di come si muove.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sul centro di massa e sugli urti, con molti problemi risolti, anche nel piano.

Glossario del capitolo

Approssimazione impulsiva
Durante un urto le forze esterne si trascurano rispetto a quelle interne: la quantità di moto totale è la stessa subito prima e subito dopo.

Centro di massa
Punto la cui posizione è la media delle posizioni dei corpi di un sistema, pesata con le loro masse; in gravità uniforme coincide con il baricentro.

Culla di Newton
Fila di sfere d'acciaio uguali appese a contatto: negli urti quasi elastici fra masse uguali le velocità si trasmettono da una sfera all'altra.

Forza impulsiva
Forza molto intensa e di breve durata, come quelle che i corpi si scambiano in un urto.

Momento angolare
Grandezza che descrive il moto di rotazione; per un corpo puntiforme su una circonferenza vale $L = mvr$ ($\mathrm{kg \cdot m^2/s}$) e si conserva se il momento delle forze esterne è nullo.

Pendolo balistico
Blocco appeso a fili in cui si conficca un proiettile: dalla risalita del blocco si ricava la velocità del proiettile.

Proiettile e bersaglio
In un urto, il corpo in moto che colpisce e il corpo, spesso fermo, che viene colpito.

Urto
Interazione fra due o più corpi, breve e intensa, al termine della quale i corpi si muovono di nuovo in modo indipendente.

Urto anelastico
Urto in cui l'energia cinetica totale diminuisce: una parte diventa energia interna, lavoro di deformazione e suono.

Urto completamente anelastico
Urto in cui i corpi restano uniti e proseguono con la stessa velocità, quella del centro di massa.

Urto elastico
Urto in cui si conserva anche l'energia cinetica totale dei corpi.

Urto frontale
Urto in cui tutte le velocità, prima e dopo, giacciono sulla retta che congiunge i centri dei corpi; si dice anche urto centrale. L'urto non frontale si dice obliquo.

Velocità del centro di massa
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{cm}} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{tot}}/m_{\mathrm{tot}}$; in un sistema isolato è costante.

Velocità relativa
Differenza fra le velocità di due corpi, $v_1 - v_2$: in un urto elastico frontale cambia segno e conserva il modulo.

Soluzioni

1. B. Nel breve intervallo dell'urto la quantità di moto totale si conserva sempre; l'energia cinetica soltanto negli urti elastici.

2. D. È la definizione: i corpi proseguono insieme, con la stessa velocità. L'energia cinetica finale è nulla solo se la quantità di moto totale è zero.

3. A. Con masse uguali, in un urto elastico frontale i corpi si scambiano le velocità.

4. C. $x_{cm} = 3m \cdot d/(4m) = 3d/4$ dal corpo di massa m, cioè $d/4$ dal corpo di massa $3m$.

5. C. È l'approssimazione impulsiva: l'impulso delle forze esterne, meno intense e attive per un tempo brevissimo, è trascurabile rispetto alla variazione di quantità di moto prodotta dall'urto.

6. A. Nell'urto (completamente anelastico) si conserva la quantità di moto, ma non l'energia meccanica; nella risalita compie lavoro solo il peso e si conserva l'energia meccanica.

7. D. Le forze dell'esplosione sono interne; l'unica forza esterna è il peso, quindi il centro di massa prosegue lungo la stessa parabola.

8. B. Con il bersaglio fermo resta la frazione $m_1/(m_1 + m_2) = 1/2$ dell'energia cinetica: se ne perde il 50%.

9. V. L'energia cinetica che manca diventa energia interna, lavoro di deformazione e suono: l'energia totale si conserva sempre.

10. F. È nulla solo se la quantità di moto totale è zero; altrimenti i corpi uniti continuano a muoversi con $v_f = p_{tot}/m_{tot}$.

11. F. In un anello, in un boomerang o in un ferro di cavallo il centro di massa cade dove non c'è materiale.

12. V. Dalle due leggi di conservazione si ricava $v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$.

13. V. La quantità di moto totale è zero prima dell'urto, e resta zero dopo: i corpi uniti sono fermi (e tutta l'energia cinetica si è trasformata).

14. Sistema dei due carrelli, verso positivo quello del primo. $v_f = (2{,}0\ \text{kg} \cdot 3{,}0\ \text{m/s})/(3{,}0\ \text{kg}) = 2{,}0\ \text{m/s}$.

15. $K_i = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\ \text{kg} \cdot (3{,}0\ \text{m/s})^2 = 9{,}0\ \text{J}$; $K_f = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0\ \text{kg} \cdot (2{,}0\ \text{m/s})^2 = 6{,}0\ \text{J}$. Si perdono 3,0 J, un terzo (33%). La formula dà $K_f/K_i = 2{,}0/3{,}0 = 2/3$: resta il 67%, come trovato.

16. $v_1' = (0{,}20 - 0{,}60)/(0{,}80) \cdot 4{,}0\ \text{m/s} = -2{,}0\ \text{m/s}$ (la prima pallina rimbalza indietro); $v_2' = 2 \cdot 0{,}20/0{,}80 \cdot 4{,}0\ \text{m/s} = +2{,}0\ \text{m/s}$. Energia: prima $\frac{1}{2} \cdot 0{,}20 \cdot 4{,}0^2\ \text{J} = 1{,}6\ \text{J}$; dopo $\frac{1}{2} \cdot 0{,}20 \cdot 2{,}0^2\ \text{J} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}60 \cdot 2{,}0^2\ \text{J} = 0{,}40\ \text{J} + 1{,}2\ \text{J} = 1{,}6\ \text{J}$.

17. $x_{cm} = (2{,}0 \cdot 0 + 3{,}0 \cdot 1{,}5)\ \text{kg·m} / (5{,}0\ \text{kg}) = 0{,}90\ \text{m}$.

18. $m_{tot} = 4{,}0\ \text{kg}$. $x_{cm} = (2{,}0\ \text{kg} \cdot 3{,}0\ \text{m})/(4{,}0\ \text{kg}) = 1{,}5\ \text{m}$; $y_{cm} = (1{,}0\ \text{kg} \cdot 4{,}0\ \text{m})/(4{,}0\ \text{kg}) = 1{,}0\ \text{m}$. Il centro di massa è nel punto (1,5 m; 1,0 m).

19. Dal grafico $\Delta v_B = 0{,}90\ \text{m/s}$ in $\Delta t \approx 0{,}06$ s. $F_m = \Delta p_B/\Delta t = 0{,}30\ \text{kg} \cdot 0{,}90\ \text{m/s} / 0{,}06\ \text{s} \approx 4{,}5\ \text{N}$, nel verso del moto. Su A: $\Delta p_A = 0{,}50\ \text{kg} \cdot (0{,}25 - 0{,}80)\ \text{m/s} = -0{,}275\ \text{kg·m/s}$, $F_m \approx -4{,}6\ \text{N}$. Per il terzo principio ci si aspetta una forza uguale e opposta: lo è, entro le incertezze di lettura (pesa soprattutto quella sulla durata dell'urto: ± 0,01 s su 0,06 s è circa il 17%).

20. $p_{tot} = 3{,}0 \cdot 4{,}0 + 1{,}0 \cdot (-2{,}0) = 10\ \text{kg·m/s}$; $v_{cm} = 10/4{,}0\ \text{m/s} = 2{,}5\ \text{m/s}$; se restano uniti proseguono con la velocità del centro di massa, 2,5 m/s.

21. Sistema proiettile–blocco, verso positivo quello del proiettile. a) Risalita: $V = \sqrt{(2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}090\ \text{m})} \approx 1{,}33\ \text{m/s}$. b) Urto: $v = (1{,}508\ \text{kg} / 0{,}0080\ \text{kg}) \cdot 1{,}33\ \text{m/s} \approx 2{,}5 \times 10^2\ \text{m/s}$. c) Resta la frazione $m/(M + m) = 0{,}0080/1{,}508 \approx 0{,}5\%$ dell'energia cinetica: il 99,5% si è trasformato.

22. Sistema dei due veicoli durante l'urto; verso positivo quello del furgone. a) Frenata: $\frac{1}{2}V^2 = \mu_d g d$, $V = \sqrt{(2 \cdot 0{,}60 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 9{,}0\ \text{m})} \approx 10{,}3\ \text{m/s}$. b) Urto: $2400\ \text{kg} \cdot v = 3600\ \text{kg} \cdot 10{,}3\ \text{m/s}$, $v \approx 15{,}4\ \text{m/s} \approx 56\ \text{km/h}$: superava il limite. c) $K_i = \frac{1}{2} \cdot 2400\ \text{kg} \cdot (15{,}4\ \text{m/s})^2 \approx$

$2{,}86 \times 10^5$ J; $K_f = \frac{1}{2} \cdot 3600$ kg $\cdot (10{,}3 \text{ m/s})^2 \approx 1{,}91 \times 10^5$ J; si perdono circa $9{,}5 \times 10^4$ J, un terzo dell'energia iniziale, come prevede $m_2/(m_1 + m_2) = 1200/3600$.

23. a) Conservazione dell'energia meccanica: $v = \sqrt{(2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}45 \text{ m})} \approx 2{,}97$ m/s. b) Urto elastico con bersaglio fermo, verso positivo quello della prima pallina: $v_1' = (0{,}10 - 0{,}30)/0{,}40 \cdot 2{,}97$ m/s $\approx -1{,}48$ m/s; $v_2' = 2 \cdot 0{,}10/0{,}40 \cdot 2{,}97$ m/s $\approx +1{,}48$ m/s. c) $h = v_1'^2/(2g) = (1{,}485 \text{ m/s})^2/(19{,}6 \text{ m/s}^2) \approx 0{,}11$ m, un quarto dell'altezza iniziale (la velocità si è dimezzata).

24. Verso positivo quello del primo giocatore. a) $p_{tot} = 80 \text{ kg} \cdot 5{,}0 \text{ m/s} + 100 \text{ kg} \cdot (-3{,}0 \text{ m/s}) = 100$ kg·m/s; $v_f = 100/180$ m/s $\approx 0{,}56$ m/s, nel verso in cui pattinava il primo giocatore. b) $K_i = 1000$ J $+ 450$ J $= 1450$ J; $K_f = \frac{1}{2} \cdot 180 \text{ kg} \cdot (0{,}556 \text{ m/s})^2 \approx 28$ J. Si perde circa il 98% dell'energia cinetica.

25. a) Urto elastico fra masse uguali: $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$, $v_2' = \sqrt{(6{,}25 - 2{,}25)}$ m/s $= 2{,}0$ m/s. b) 90°: il triangolo delle velocità soddisfa il teorema di Pitagora, quindi è rettangolo. c) Triangolo rettangolo con ipotenusa 2,5 (in unità di $m \cdot$ m/s) e cateti 1,5 e 2,0 (è il triangolo 3–4–5).

26. a) Sì: le forze orizzontali fra la ragazza e la barca sono interne, e l'attrito dell'acqua è trascurabile. Il centro di massa, inizialmente fermo, resta fermo. b) La ragazza si sposta in avanti rispetto alla barca di 4,0 m; se la barca arretra di d, la ragazza avanza rispetto all'acqua di $4{,}0 \text{ m} - d$. Il centro di massa resta fermo se $60 \text{ kg} \cdot (4{,}0 \text{ m} - d) = 140 \text{ kg} \cdot d$, da cui $d = 240/200$ m $= 1{,}2$ m, all'indietro (verso la poppa iniziale). c) La ragazza avanza di 2,8 m rispetto all'acqua.

27. Traccia. Newton afferma che la quantità di moto totale di un sistema di corpi non cambia per effetto delle forze che i corpi esercitano l'uno sull'altro, cioè che si conserva in un sistema isolato. La somma dei moti nello stesso verso e la differenza di quelli opposti è il modo di sommare quantità con il segno: la quantità di moto è un vettore, e lungo una retta si scrive con il segno. Discende dalla terza legge (azione e reazione uguali e opposte, per lo stesso tempo) insieme alla seconda; Newton lo dimostra proprio così. I dati: prima $14 + 5 = 19$ parti nello stesso verso, dopo $5 + 14 = 19$: la quantità di moto totale non è cambiata, e A ha trasferito 9 parti a B. Verifica oggi: urti fra carrelli su una rotaia, misurando le velocità prima e dopo con le fotocellule, come nel laboratorio di questo capitolo.

28. Traccia. Per un urto elastico con $m_2 = 1{,}1m$: $v_1' = (1 - 1{,}1)/2{,}1 \cdot v \approx -0{,}048v$ e $v_2' = 2/2{,}1 \cdot v \approx 0{,}95v$. Il proiettile rimbalza appena, e il bersaglio parte quasi con la velocità del proiettile: il contrario di quanto afferma Cartesio. Basta una boccia che urta una boccia un po' più pesante, o un carrello che urta un carrello appena più carico: il bersaglio si muove sempre. Cartesio considerava la quantità di moto come un numero senza verso (capitolo 1), e le sue regole, ricavate da principi generali e non da esperimenti, sono quasi tutte sbagliate.

29. Verso positivo quello dell'auto. $p_{tot} = 1000 \cdot 20 - 9000 \cdot 20 = -1{,}6 \times 10^5$ kg·m/s; $v_f = -1{,}6 \times 10^5/10\,000$ m/s $= -16$ m/s (nel verso del camion). Δv dell'auto: $-16 - 20 = -36$ m/s; Δv del camion: $-16 - (-20) = +4$ m/s. Le forze sono uguali e opposte e durano lo stesso tempo, quindi le variazioni di quantità di moto sono uguali e opposte; ma l'auto, nove volte più leggera, subisce una variazione di velocità nove volte maggiore, e i suoi passeggeri un'accelerazione nove volte più intensa.

30. Traccia. Un blocco leggero ma «assorbente» (per esempio una scatola di cartone di qualche centinaio di grammi riempita di pongo o di stracci) appeso a due fili paralleli lunghi circa 1 m; si pesano la pallina (m) e la scatola (M) con una bilancia da cucina; si spara la pallina in modo che resti nella scatola e si misura l'altezza h della risalita (o lo spostamento orizzontale massimo, con un righello dietro il pendolo, ricavando h con il teorema di Pitagora); $v = [(M + m)/m]\sqrt{(2gh)}$. Errori: lettura di h, che è piccola (conviene una scatola non troppo pesante e una media di più lanci), pallina che rimbalza invece di restare nella scatola, rotazione della scatola, attrito dei fili; precisione della bilancia sulla massa della pallina.