CAPITOLO

1

Quantità di moto e impulso

«La quantità di moto è la misura del moto, che nasce dalla velocità e dalla quantità di materia prese insieme.» — Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), Definizione II (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Definire la quantità di moto come vettore e distinguerla dall'energia cinetica.
2. Scrivere il secondo principio della dinamica come $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$ e usare il teorema dell'impulso, anche leggendo l'impulso come area sotto il grafico forza–tempo.
3. Spiegare con l'impulso l'airbag, il casco, l'atterraggio e il rimbalzo di una palla.
4. Ricavare dal terzo principio la conservazione della quantità di moto in un sistema isolato e applicarla al rinculo e alla propulsione a reazione.
5. Applicare la conservazione per componenti a semplici moti nel piano.
6. Ricostruire il passaggio dalla quantità di moto scalare di Cartesio a quella vettoriale di Huygens e Newton.

INDICE DEL CAPITOLO

1.1 La quantità di moto 2
1.2 Forza e variazione della quantità di moto 3
1.3 L'impulso nella vita di tutti i giorni 6
1.4 La conservazione della quantità di moto 8
1.5 La quantità di moto nel piano 14

Fisica 4 · Parte I · La quantità di moto · versione 1.0
Capitolo 1: Quantità di moto e impulso · pagine 23–44 del volume completo · estratto per lo studio

Su una rotaia a cuscino d'aria, dove gli attriti sono quasi nulli, un carrello di 0,50 kg corre a 0,60 m/s verso un secondo carrello di 1,00 kg, fermo. Il primo ha in punta una piccola molla: i due si urtano e si separano. Il carrello leggero torna indietro a 0,20 m/s, quello pesante parte in avanti a 0,40 m/s. Ripetiamo l'esperimento dopo aver sostituito la molla con una striscia di velcro: questa volta i carrelli restano attaccati e proseguono insieme a 0,20 m/s.

In *Fisica 3* (capitolo 16) hai visto che una grandezza *si conserva* quando, mentre posizioni e velocità cambiano, il suo valore resta lo stesso. L'energia cinetica dei carrelli si conserva? Prima dell'urto vale $\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}50\ \text{kg} \cdot (0{,}60\ \text{m/s})^2 = 0{,}090\ \text{J}$; dopo il primo urto $0{,}010\ \text{J} + 0{,}080\ \text{J} = 0{,}090\ \text{J}$; dopo il secondo soltanto $\tfrac{1}{2} \cdot 1{,}50\ \text{kg} \cdot (0{,}20\ \text{m/s})^2 = 0{,}030\ \text{J}$. Eppure un conto torna in tutti e due i casi. Moltiplichiamo ogni velocità per la massa, contando come negative le velocità verso sinistra: prima $0{,}50\ \text{kg} \cdot 0{,}60\ \text{m/s} = 0{,}30\ \text{kg·m/s}$; dopo il primo urto $0{,}50 \cdot (-0{,}20) + 1{,}00 \cdot 0{,}40 = 0{,}30\ \text{kg·m/s}$; dopo il secondo $1{,}50 \cdot 0{,}20 = 0{,}30\ \text{kg·m/s}$.

Questo prodotto della massa per la velocità è la *quantità di moto*, la seconda grande grandezza conservata della meccanica. In questo capitolo impareremo che cosa la fa cambiare, l'impulso di una forza, e perché in un sistema isolato la sua somma resta sempre la stessa; nel prossimo la useremo per studiare gli urti.

1.1 La quantità di moto

1.1.1 Massa per velocità

La **quantità di moto** di un corpo di massa m che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ è il vettore

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

Poiché la massa è positiva, $\boldsymbol{p}$ ha sempre la direzione e il verso della velocità, e il suo modulo è $p = m\,v$. Nel Sistema Internazionale si misura in **kg·m/s**, un'unità che non ha un nome proprio. In alcuni testi la quantità di moto è chiamata anche momento lineare, per analogia con l'inglese *momentum*.

Due corpi possono avere la stessa quantità di moto con masse e velocità molto diverse. Un proiettile di 10 g a 400 m/s ha $p = 0{,}010\ \text{kg} \cdot 400\ \text{m/s} = 4{,}0\ \text{kg·m/s}$, come un camion di 4000 kg che avanza di 1 mm al secondo; lo stesso camion a 90 km/h (25 m/s) ha $p = 1{,}0 \times 10^{5}\ \text{kg·m/s}$.

La quantità di moto non va confusa con l'energia cinetica: questa è uno scalare, proporzionale al *quadrato* della velocità; la quantità di moto è un vettore, proporzionale alla velocità. Il proiettile ha un'energia cinetica di $\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}010\ \text{kg} \cdot (400\ \text{m/s})^2 = 800\ \text{J}$, il camion che striscia di soli 0,002 J: per questo il primo è pericoloso e il secondo no.

1.1.2 Un vettore: contano direzione e verso

Due automobili di 1200 kg percorrono la stessa strada a 15 m/s in versi opposti: le loro quantità di moto hanno lo stesso modulo, $1{,}8 \times 10^4$ kg·m/s, ma sono vettori opposti, e la loro somma è nulla. Per i moti lungo una retta si sceglie un verso positivo e si lavora con le componenti, positive o negative, come in cinematica: è il conto fatto per i carrelli dell'introduzione. Nel piano si usano le due componenti $p_x = m\,v_x$ e $p_y = m\,v_y$ (*Fisica 3*, capitolo 5). La quantità di moto cambia, quindi, anche quando cambia soltanto la direzione del moto, come per un'auto in curva a velocità costante in modulo.

Il nome viene da Newton. La seconda delle definizioni con cui si aprono i *Principia* (terza edizione, 1726) dice: «*Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim*», «la quantità di moto è la misura del moto, che nasce dalla velocità e dalla quantità di materia prese insieme» (traduzione della redazione). La «quantità di materia» è la massa, definita da Newton subito prima; «prese insieme» significa moltiplicate. Il «moto» di cui parla la seconda legge di Newton, come anticipava *Fisica 3* (capitolo 13), è proprio questa grandezza.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Quantità di moto traduce il latino *quantitas motus* dei *Principia*: *quantitas* (da *quantus*, «quanto grande») è la misura, *motus* (da *movere*) il movimento.

Impulso viene dal latino *impulsus*, participio di *impellere*, «spingere contro», composto di *in* e *pellere*, «spingere, battere». Della stessa famiglia è **propulsione**, da *propellere*, «spingere in avanti» (*pro*, «avanti»): una spinta breve è un impulso, una spinta che porta avanti un veicolo è una propulsione.

Sistema viene dal greco σύστημα, «insieme composto di più parti», dal verbo συνίστημι, «mettere insieme», formato da σύν, «con», e ἵστημι, «porre»: è la stessa radice di *statica*. In fisica un sistema è un gruppo di corpi che si sceglie di studiare insieme.

1.2 Forza e variazione della quantità di moto

1.2.1 Il secondo principio in forma generale

Il secondo principio della dinamica dice che la forza risultante su un corpo è $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ (*Fisica 3*, capitolo 13). L'accelerazione è la variazione della velocità divisa per l'intervallo di tempo in cui avviene, $\boldsymbol{a} = \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$. Se la massa del corpo non cambia, $m\,\Delta\boldsymbol{v} = \Delta(m\boldsymbol{v}) = \Delta\boldsymbol{p}$, e quindi

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

La forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla rapidità con cui varia la sua quantità di moto. Con massa costante equivale a $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$; ma è la forma più vicina all'enunciato di Newton, che parla di «cambiamento del moto», e la più generale: resterà valida nella teoria della relatività, che studierai il prossimo anno. Se la forza risultante è nulla, la quantità di moto resta costante: è il principio d'inerzia.

1.2.2 L'impulso di una forza

Moltiplichiamo per Δt entrambi i membri. A sinistra compare il prodotto della forza per la durata della sua azione, che si chiama **impulso** della forza:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\,\Delta t$$

L'impulso è un vettore con la direzione e il verso della forza; si misura in N·s, e poiché 1 N = 1 kg·m/s^2, 1 N·s = 1 kg·m/s: la stessa unità della quantità di moto. Non è un caso, perché a destra compare $\Delta\boldsymbol{p}$. Se $\boldsymbol{I}$ è l'impulso della forza risultante, vale il **teorema dell'impulso**:

$$\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$$

L'impulso della forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione della sua quantità di moto. Conta il prodotto: una forza grande per poco tempo o una piccola per molto tempo danno lo stesso risultato. Un ragazzo che spinge con 40 N per 2,5 s una slitta di 20 kg, ferma sul ghiaccio liscio, le comunica 100 N·s: la slitta parte con p = 100 kg·m/s, cioè a 5,0 m/s. Una spinta di 100 N per 1,0 s farebbe lo stesso.

Il teorema dell'impulso ha lo stesso ruolo del teorema dell'energia cinetica del terzo anno, con una differenza importante: il lavoro è una forza per uno *spostamento* e cambia l'energia cinetica, uno scalare; l'impulso è una forza per un *tempo* e cambia la quantità di moto, un vettore.

1.2.3 Quando la forza non è costante

Spesso la forza cambia istante per istante: quando un piede calcia un pallone, la forza cresce da zero mentre il pallone si schiaccia, resta grande per qualche millesimo di secondo e torna a zero quando il pallone si stacca. Per una forza costante l'impulso $F\Delta t$ è l'area di un rettangolo di base Δt e altezza F; per una forza variabile si dimostra che **l'impulso è l'area compresa fra il grafico forza–tempo e l'asse dei tempi**, come nel terzo anno lo spostamento era l'area sotto il grafico velocità–tempo e il lavoro quella sotto il grafico forza–spostamento (*Fisica 3*, capitoli 11 e 15).

Spesso interessa un solo numero che riassuma l'urto: la **forza media** F_m, la forza costante che nello stesso intervallo di tempo darebbe lo stesso impulso:

$$F_\mathrm{m} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Graficamente, è l'altezza del rettangolo che ha la stessa base e la stessa area della figura sotto il grafico (Figura 1.1).



Figura 1.1 Grafico forza–tempo semplificato del calcio a un pallone di 0,45 kg, fermo all'inizio. La forza sale a 1 800 N in 2 ms, resta costante per 4 ms e torna a zero in altri 2 ms. L'area del trapezio è l'impulso, 10,8 N·s; il rettangolo tratteggiato, con la stessa base di 8 ms e la stessa area, ha per altezza la forza media, 1 350 N.

ESEMPIO SVOLTO

Il calcio al pallone

Problema. Il grafico della Figura 1.1 descrive, in forma semplificata, la forza del piede su un pallone di 0,45 kg, inizialmente fermo. a) Quanto vale l'impulso? b) Con quale velocità parte il pallone? c) Qual è la forza media durante il contatto? Trascura il peso del pallone durante il calcio.

a) L'area sotto il grafico è un trapezio con base maggiore 8 ms, base minore 4 ms e altezza 1 800 N:

$$I = \frac{(8\ \text{ms} + 4\ \text{ms}) \cdot 1\,800\ \text{N}}{2} = 6 \times 10^{-3}\ \text{s} \cdot 1\,800\ \text{N} = 10{,}8\ \text{N·s}$$

b) Per il teorema dell'impulso, con $p_i = 0$: $p_f = I = 10{,}8$ kg·m/s, quindi $v = 10{,}8$ kg·m/s / 0,45 kg = 24 m/s, circa 86 km/h.

c) $F_m = I/\Delta t = 10{,}8$ N·s / 0,008 s = 1 350 N $\approx 1{,}4 \times 10^3$ N.

Controllo. La forza media è minore del picco, come deve essere. Il peso del pallone, 0,45 kg · 9,8 m/s^2 ≈ 4,4 N, è circa trecento volte più piccolo della forza media: trascurarlo è del tutto lecito.

1.3 L'impulso nella vita di tutti i giorni

1.3.1 Allungare il tempo per ridurre la forza

Il teorema dell'impulso, scritto come $F_{\text{m}} = \Delta p/\Delta t$, spiega molti accorgimenti che usiamo d'istinto. Quando un corpo in moto deve fermarsi, la variazione della sua quantità di moto è fissata: dalla massa e dalla velocità iniziale. Su di essa non possiamo fare nulla. Possiamo però scegliere *in quanto tempo* fermarlo: più lungo è l'arresto, minore è la forza media.

Chi salta giù da un muretto alto 1,0 m tocca terra a $\sqrt{(2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}0\ \text{m})} \approx 4{,}4$ m/s (*Fisica 3*, capitolo 16): per una persona di 70 kg, circa 310 kg·m/s da annullare. A gambe rigide l'arresto dura circa un centesimo di secondo, e la forza media risultante è dell'ordine di 3×10^4 N; piegando le ginocchia può durare 0,2 s, e la forza scende a circa $1{,}6 \times 10^3$ N (a cui il suolo aggiunge il sostegno del peso, circa 690 N). Le durate sono stime, ma le forze stanno nel rapporto inverso dei tempi.

Lo stesso vale per chi afferra una palla accompagnandola con le mani verso il petto, per i materassi dei saltatori in alto, per la sabbia della buca del salto in lungo, per il mazzuolo di gomma che il piastrellista preferisce al martello d'acciaio. E vale per i dispositivi di sicurezza dei veicoli.

COLLEGAMENTI

Sicurezza: casco, cintura e airbag

In un urto frontale a circa 50 km/h, cioè 14 m/s, la testa di un passeggero (circa 5,0 kg) deve fermarsi: $\Delta p = 70$ kg·m/s, qualunque cosa accada. Contro il volante l'arresto dura qualche millesimo di secondo; contro un airbag, che si sgonfia mentre la trattiene, alcune decine di millesimi, e la forza media si riduce nello stesso rapporto (Figura 1.2). Lo stesso fanno la cintura di sicurezza, che si allunga un poco, e la **zona a deformazione programmata** dell'auto, progettata per accartocciarsi.

Il casco ha un guscio rigido, che distribuisce l'urto, e uno strato di polistirolo espanso, che schiacciandosi allunga l'arresto della testa. Per questo un casco che ha subito un urto va sostituito anche se sembra intatto.



Figura 1.2 Stima dell'arresto della testa di un passeggero (5,0 kg a 14 m/s) in un urto, con grafici forza–tempo semplificati a forma di triangolo. Le due aree sono uguali, perché la variazione della quantità di moto è la stessa, 70 N·s; ma l'arresto sull'airbag dura dieci volte di più, e la forza media è dieci volte minore: 1 400 N invece di 14 000 N. Valori indicativi.

ERRORE FREQUENTE

L'airbag riduce la quantità di moto?

No. La variazione della quantità di moto del passeggero è la stessa con e senza airbag: è fissata dalla velocità prima dell'urto e da quella finale, nulla. L'airbag non cambia Δp, cambia Δt; ed è la forza, non la quantità di moto, che provoca le lesioni. Allo stesso modo, piegare le ginocchia non rende «più leggero» l'atterraggio: lo rende più lungo.

1.3.2 Una palla che rimbalza

Una pallina da tennis di 58 g arriva perpendicolarmente contro una parete a 20 m/s e rimbalza indietro, ancora a 20 m/s. Il modulo della velocità non è cambiato; la quantità di moto sì, e molto. Scegliamo come positivo il verso verso la parete: prima dell'urto $p_\mathrm{i} = +0{,}058\ \mathrm{kg} \cdot 20\ \mathrm{m/s} = +1{,}16\ \mathrm{kg\cdot m/s}$, dopo $p_\mathrm{f} = -1{,}16\ \mathrm{kg\cdot m/s}$. La variazione è

$$\Delta p = p_\mathrm{f} - p_\mathrm{i} = -1{,}16\ \mathrm{kg\cdot m/s} - (+1{,}16\ \mathrm{kg\cdot m/s}) = -2{,}32\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

cioè, in modulo, $2mv$: il doppio di quanto servirebbe per fermare la pallina (Figura 1.3). Il segno meno dice che $\Delta \boldsymbol{p}$, e con esso la forza della parete sulla pallina, è diretto verso l'esterno della parete. Se il contatto dura 4,0 ms, la forza media è 2,32 kg·m/s / 0,0040 s = 580 N; per il terzo principio la pallina spinge la parete con una forza uguale e opposta. Una pallina di plasti-

lina, che si spiaccica senza rimbalzare, subisce una variazione dimezzata: rimbalzare costa di più. Con una racchetta il conto cresce ancora: una pallina che arriva a 20 m/s e riparte a 30 m/s ha $\Delta p = 0{,}058\ \text{kg} \cdot 50\ \text{m/s} = 2{,}9\ \text{kg·m/s}$.

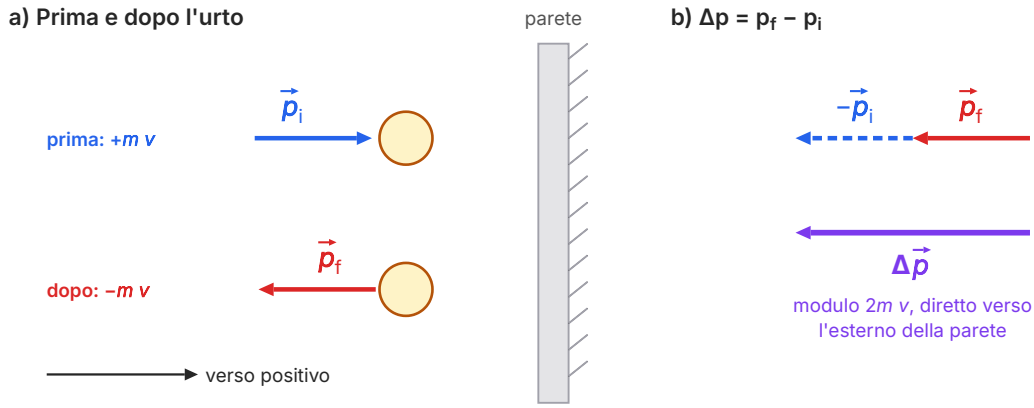


Figura 1.3 a) Una pallina urta perpendicolarmente una parete e rimbalza con velocità dello stesso modulo: la quantità di moto passa da $+m\,v$ a $-m\,v$. b) La variazione $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$ si ottiene sommando a $\boldsymbol{p}_f$ il vettore opposto di $\boldsymbol{p}_i$: ha modulo $2m\,v$ ed è diretta verso l'esterno della parete, come la forza che la parete esercita sulla pallina.

1.4 La conservazione della quantità di moto

1.4.1 Sistemi, forze interne e forze esterne

Torniamo ai due carrelli dell'introduzione e studiamoli insieme, come un **sistema**: un insieme di corpi che scegliamo di considerare come un tutto. Le forze che agiscono sui corpi del sistema si dividono in due gruppi. Come sai da *Fisica 3* (capitolo 14), le **forze interne** sono quelle che i corpi del sistema esercitano l'uno sull'altro: la spinta della molla o del velcro fra i due carrelli. Le **forze esterne** sono quelle esercitate da corpi che non fanno parte del sistema: il peso, dovuto alla Terra, e la spinta verso l'alto del cuscino d'aria della rotaia.

Un sistema si dice **sistema isolato** quando la risultante delle forze esterne è nulla: o perché le forze esterne non ci sono, come per una sonda lontana da ogni pianeta, o perché si fanno equilibrio, come il peso e la spinta della rotaia orizzontale, se l'attrito è trascurabile. La **quantità di moto totale** del sistema è la somma vettoriale delle quantità di moto dei suoi corpi, $\boldsymbol{p}_{tot} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots$

DA RICORDARE

Dal volume del terzo anno: il terzo principio

Se un corpo A esercita una forza $\boldsymbol{F}_{AB}$ su un corpo B, allora B esercita su A una forza $\boldsymbol{F}_{BA}$ uguale in modulo e direzione e opposta in verso: $\boldsymbol{F}_{BA} = -\boldsymbol{F}_{AB}$. Le due forze agiscono **su corpi diversi**, quindi non si annullano a vicenda; esistono insieme, nello stesso istante, e sono uguali anche quando i corpi accelerano o si deformano (*Fisica 3*, capitolo 13).

1.4.2 Perché la quantità di moto totale non cambia

Durante l'urto il carrello 2 spinge il carrello 1 con una forza $\boldsymbol{F}_{21}$, e il carrello 1 spinge il carrello 2 con $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$. Queste forze possono cambiare istante per istante, ma in ogni istante sono opposte, e agiscono esattamente per lo stesso tempo: l'interazione comincia e finisce per entrambi nello stesso momento. Quindi anche i loro impulsi sono opposti, $\boldsymbol{I}_{12} = -\boldsymbol{I}_{21}$. Se le forze esterne si equilibrano, gli impulsi delle forze interne sono gli unici, e per il teorema dell'impulso

$$\Delta\boldsymbol{p}_1 = -\Delta\boldsymbol{p}_2 \quad \text{cioè} \quad \Delta\boldsymbol{p}_1 + \Delta\boldsymbol{p}_2 = 0$$

La quantità di moto che il carrello 1 perde è esattamente quella che il carrello 2 guadagna: la quantità di moto totale non cambia. Nell'introduzione il carrello leggero è passato da +0,30 a −0,10 kg·m/s ($\Delta p_1 = -0{,}40$ kg·m/s), quello pesante da 0 a +0,40 kg·m/s ($\Delta p_2 = +0{,}40$ kg·m/s).

Poiché le forze interne si presentano sempre a coppie di azione e reazione, il ragionamento vale per un numero qualsiasi di corpi. È il **principio di conservazione della quantità di moto**: **la quantità di moto totale di un sistema isolato resta costante**, qualunque cosa accada al suo interno. Per due corpi, con l'apice per le velocità dopo l'interazione:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}'_1 + m_2\boldsymbol{v}'_2$$

Newton la ricava proprio così, come terzo corollario delle leggi del moto: la quantità di moto, ottenuta sommando i moti diretti dalla stessa parte e sottraendo quelli diretti dalla parte opposta, non è cambiata dall'azione dei corpi fra loro (*Principia*, Corollario III; parafrasi della redazione). La legge vale per forze interne di qualsiasi natura (molle, urti, esplosioni, attriti fra i corpi del sistema) e anche quando l'energia cinetica non si conserva, come con il velcro: non serve sapere come sono fatte le forze interne, né quanto durano.

1.4.3 Il rinculo

Giulia (50 kg) e Marco (75 kg), con i pattini ai piedi, sono fermi uno di fronte all'altro su una pista di ghiaccio. Si spingono con le mani e si allontanano: Marco scivola all'indietro a 0,80 m/s. Con quale velocità si muove Giulia? Il sistema formato dai due ragazzi è isolato: i pesi sono equilibrati dalla spinta del ghiaccio, e l'attrito dei pattini è piccolo. Prima della spinta la quanti-

tà di moto totale è nulla, quindi deve esserlo anche dopo. Scelto come positivo il verso in cui va Marco:

$$0 = 75\ \text{kg} \cdot (+0{,}80\ \text{m/s}) + 50\ \text{kg} \cdot v_G \quad \Rightarrow \quad v_G = -1{,}2\ \text{m/s}$$

Giulia si muove in verso opposto, più veloce di Marco nel rapporto inverso delle masse, 75/50 = 1,5 (Figura 1.4). Le due quantità di moto sono uguali e opposte, 60 kg·m/s ciascuna. Non importa chi spinge di più, perché le forze che i due si scambiano sono comunque uguali e opposte: anche se spinge soltanto Giulia, le due quantità di moto restano uguali e opposte e le velocità stanno ancora nel rapporto 1,5.

Questo allontanarsi in versi opposti di due corpi che si spingono si chiama **rinculo**. È il rinculo che fa indietreggiare la barca quando si salta sul molo (e chi lo dimentica finisce in acqua), il fucile che colpisce la spalla del tiratore, il tubo dell'acqua che sfugge di mano quando si apre di colpo il rubinetto.

ESEMPIO SVOLTO

Il rinculo di un fucile

Problema. Un fucile da tiro di 4,0 kg spara orizzontalmente un proiettile di 10 g, che esce dalla canna a 800 m/s. a) Con quale velocità rincula il fucile, se nessuno lo trattiene? b) Confronta l'energia cinetica del proiettile con quella del fucile. c) Se la spalla del tiratore ferma il fucile in 0,050 s, qual è la forza media sulla spalla?

Il sistema è fucile + proiettile. Durante lo sparo la spinta dei gas, interna, è enorme rispetto alle forze esterne orizzontali: il sistema è con ottima approssimazione isolato, ed era fermo: $p_{tot} = 0$. Verso positivo: quello del proiettile.

a) $0 = 0{,}010\ \text{kg} \cdot 800\ \text{m/s} + 4{,}0\ \text{kg} \cdot v_F$, da cui $v_F = -8{,}0\ \text{kg·m/s} / 4{,}0\ \text{kg} = -2{,}0\ \text{m/s}$: il fucile rincula a 2,0 m/s.

b) $K_{\text{proiettile}} = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}010\ \text{kg} \cdot (800\ \text{m/s})^2 = 3{,}2 \times 10^3\ \text{J}$; $K_{\text{fucile}} = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}0\ \text{kg} \cdot (2{,}0\ \text{m/s})^2 = 8{,}0\ \text{J}$. Quantità di moto uguali, energie 400 volte diverse, nel rapporto inverso delle masse (4,0 kg / 0,010 kg = 400).

c) $F_m = 8{,}0\ \text{kg·m/s} / 0{,}050\ \text{s} = 1{,}6 \times 10^2\ \text{N}$. Con il calcio ben appoggiato, fucile e tiratore rinculano insieme: massa molto maggiore, velocità molto minore.

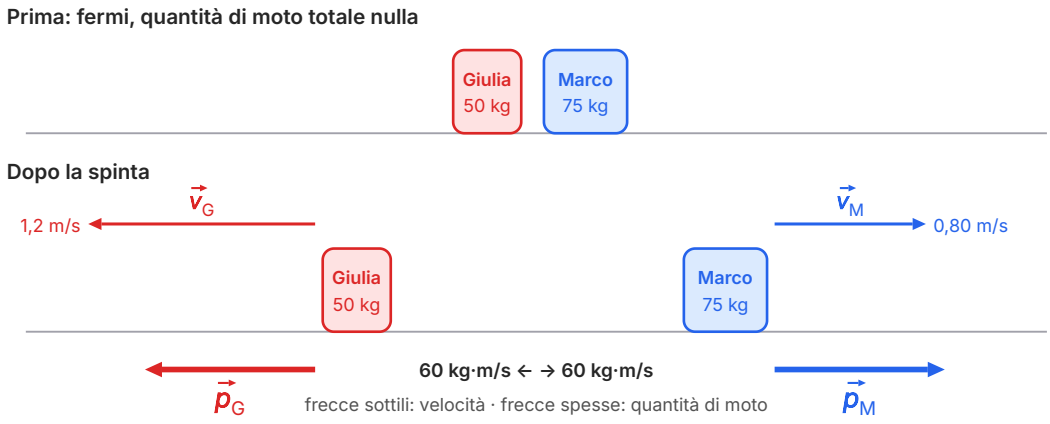


Figura 1.4 Due pattinatori, inizialmente fermi, si spingono a vicenda. La quantità di moto totale era nulla e resta nulla: quella di Giulia (50 kg, 1,2 m/s) e quella di Marco (75 kg, 0,80 m/s) sono uguali in modulo, 60 kg·m/s, e opposte. Velocità e quantità di moto sono disegnate in scala, con scale diverse.

1.4.4 La propulsione a reazione

Un razzo funziona come un fucile che spara di continuo. Nella camera di combustione i gas caldi, prodotti dalla reazione chimica fra il combustibile e l'ossidante, vengono espulsi all'indietro ad alta velocità attraverso l'ugello. Il razzo spinge i gas indietro, e i gas spingono il razzo in avanti con una forza uguale e opposta: è la **propulsione a reazione**. Visto come sistema razzo + gas espulsi, il fenomeno conserva la quantità di moto: quella che i gas portano via all'indietro è guadagnata in avanti dal razzo.

La forza dei gas sul razzo è la **spinta** del motore. Un conto con un solo getto: una sonda di 1200 kg, combustibile compreso, è ferma nello spazio lontano da ogni pianeta, ed espelle in un istante 30 kg di gas a 2500 m/s rispetto al riferimento in cui la sonda era ferma. Restano 1170 kg, e $0 = 30\ \text{kg} \cdot (-2500\ \text{m/s}) + 1170\ \text{kg} \cdot v$ dà $v \approx 64$ m/s. Un razzo vero espelle gas di continuo e perde massa mentre accelera: il calcolo completo richiede una matematica che non useremo, ma il principio è questo.

Con la propulsione a reazione nuotano anche calamari e seppie, che espellono con forza l'acqua dal mantello; i motori a getto degli aerei aspirano aria, la scaldano bruciandovi il carburante e la espellono dietro più veloce.

ERRORE FREQUENTE

Il razzo spinge contro l'aria?

No. Il razzo spinge i propri gas di scarico, che fanno parte del sistema, e ne riceve la reazione: funziona anzi meglio nel vuoto, dove manca la resistenza dell'aria, e porta con sé l'ossidante perché nello spazio non c'è ossigeno. Il motore a getto, invece, ha bisogno dell'aria: non per spingersi contro di essa, ma come comburente e come materia da espellere.

APPROFONDIMENTO

Cartesio, Huygens e la quantità di moto con il segno

Che nell'universo si conservi «la stessa quantità di moto» lo aveva sostenuto Cartesio nei *Principia philosophiae* (1644, parte II): Dio, causa prima del moto, conserva nel mondo quella che vi ha messo all'inizio. Ma la quantità di moto di Cartesio era il prodotto della grandezza di un corpo per la sua velocità *senza tenere conto del verso*: uno scalare. Le sette regole degli urti che ne ricavò sono quasi tutte sbagliate; secondo la quarta, un corpo piccolo non potrebbe mai smuovere un corpo più grande fermo, per quanto veloce lo urti.

Lo scalare di Cartesio non si conserva: due carrelli uguali con il velcro, che si vengono incontro alla stessa velocità e restano attaccati, fermi, lo fanno passare da $2mv$ a zero. Fra il 1668 e il 1669, su invito della Royal Society di Londra, John Wallis, Christopher Wren e Christiaan Huygens presentarono le loro leggi dell'urto (le ritroverai nel capitolo 2). Fra le regole che Huygens rese pubbliche nel 1669 c'era, in sostanza, questa: nell'urto la quantità di moto di due corpi può aumentare o diminuire, ma resta la stessa quella «verso una stessa parte», sottratta quella del moto contrario. È la nostra quantità di moto con il segno. Huygens aggiunse che negli urti fra corpi «duri», cioè elastici, resta uguale anche la somma dei prodotti della massa per il quadrato della velocità.

È la *vis viva* di Leibniz (*Fisica 3*, capitolo 16). La disputa fra i suoi seguaci e quelli di Cartesio nasceva da un equivoco: mv, come vettore, e $\frac{1}{2}mv^2$ sono grandezze diverse, che si conservano a condizioni diverse: la prima sempre, in un sistema isolato; la seconda, come energia cinetica, solo negli urti elastici, come vedrai nel prossimo capitolo.

COLLEGAMENTI

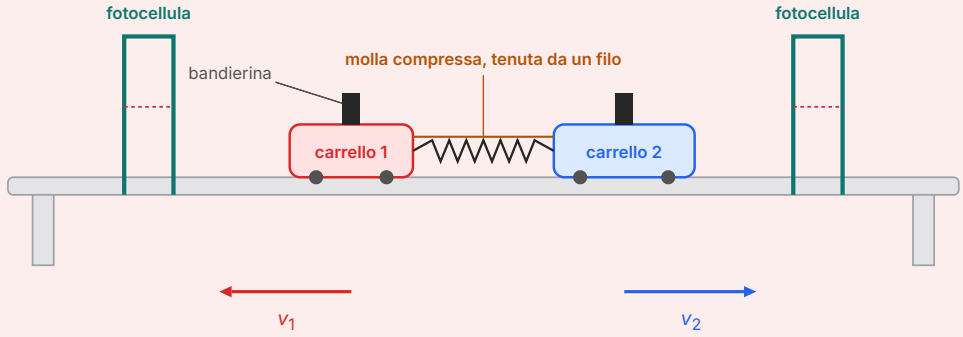
In laboratorio: due carrelli che si respingono

Materiali. Una rotaia a cuscino d'aria (o a basso attrito) ben livellata; due carrelli, il primo di 0,500 kg, il secondo di 0,500 kg con pesi aggiuntivi per arrivare a 1,000 kg e 1,500 kg (bilancia, ± 0,001 kg); una piccola molla e un filo; due fotocellule con cronometro (sensibilità 0,1 ms); su ogni carrello una bandierina larga w = 2,00 cm (± 0,01 cm). In alternativa, un video con lo smartphone e un programma di analisi video.

Procedimento. Metti i carrelli fermi a metà della rotaia, con la molla compressa e tenuta dal filo, e una fotocellula da ciascuna parte (Figura 1.5). Brucia il filo, senza toccare i carrelli: la molla, forza interna, li spinge in versi opposti. Da ogni tempo di oscuramento Δt ricava $v = w/\Delta t$. Ripeti con le tre masse del secondo carrello e calcola le quantità di moto (Tabella 1.1).

Tabella 1.1 Velocità dei due carrelli dopo la separazione (dati tipici). Il carrello 1 ha sempre massa m_1 = 0,500 kg. L'incertezza relativa di ogni quantità di moto è la somma delle incertezze relative della massa, della larghezza della bandierina e del tempo.

m_2 (kg)	Δt_1 (ms)	Δt_2 (ms)	v_1 (m/s)	v_2 (m/s)	m_1v_1 (kg·m/s)	m_2v_2 (kg·m/s)
0,500	41,2	41,6	0,485	0,481	0,243 ± 0,002	0,240 ± 0,002
1,000	35,3	70,9	0,567	0,282	0,283 ± 0,003	0,282 ± 0,002
1,500	32,6	98,4	0,613	0,203	0,307 ± 0,003	0,305 ± 0,002



Bruciato il filo, la molla spinge i carrelli in versi opposti; ciascuna fotocellula misura il tempo Δt in cui la bandierina (larga 2,00 cm) interrompe il fascio.

Figura 1.5 Schema dell'esperienza. La molla compressa fra i carrelli, fermi all'inizio, è una forza interna al sistema dei due carrelli; il peso e la spinta della rotaia si equilibrano. Le fotocellule misurano le velocità dopo la separazione.

Che cosa concludere. Più il secondo carrello è pesante, più è lento: con 1,000 kg va a circa metà della velocità del primo, con 1,500 kg a circa un terzo. In ogni prova le due quantità di moto hanno lo stesso modulo entro le incertezze: con $m_2 = 1{,}000$ kg la differenza è 0,001 kg·m/s, molto minore della somma delle incertezze, 0,005 kg·m/s (*Fisica 3*, capitolo 3). Poiché i versi sono opposti, la quantità di moto totale resta compatibile con zero. Quella di ciascun carrello cambia da una prova all'altra, perché cambia la massa del secondo carrello e la molla non cede ogni volta esattamente la stessa energia; il bilancio no.

Sicurezza. Se usi un fiammifero, tienilo lontano dai fogli e spegnilo in un contenitore con acqua; metti dei respingenti imbottiti alle estremità della rotaia.

Per la relazione. Segui lo schema di *Fisica 3*, capitolo 4: lo scopo (verificare che $m_1 v_1 = m_2 v_2$), l'apparato, la tabella con le incertezze, un calcolo d'incertezza svolto per intero e la discussione: che effetto avrebbero una rotaia non orizzontale o attriti diversi sui due carrelli?

1.5 La quantità di moto nel piano

Finora i moti avvenivano lungo una retta. Ma la quantità di moto è un vettore, e la legge di conservazione è una legge fra vettori: in un sistema isolato $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ resta costante in modulo, direzione e verso. Scelti due assi perpendicolari x e y, un vettore costante ha componenti costanti; quindi **in un sistema isolato si conservano separatamente la componente x e la componente y della quantità di moto totale**:

$$p_{\text{tot},\,x} = \text{costante} \qquad p_{\text{tot},\,y} = \text{costante}$$

Un problema nel piano si riduce così a due problemi su una retta, con il metodo delle componenti del terzo anno. Se un corpo fermo si separa in due pezzi, questi partono in versi opposti lungo la stessa retta, come Giulia e Marco; se il corpo era in moto, possono partire in direzioni diverse, ma la somma delle loro quantità di moto deve essere uguale a quella iniziale: i tre vettori formano un triangolo.

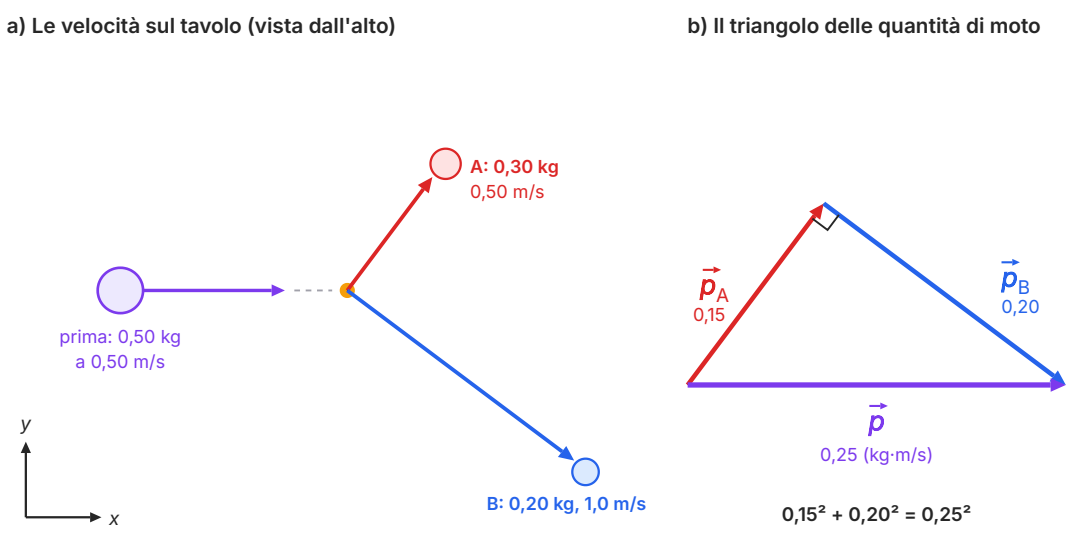


Figura 1.6 a) Un disco di 0,50 kg, in moto a 0,50 m/s, si divide in due parti: A (0,30 kg) parte a 0,50 m/s, B (0,20 kg) a 1,0 m/s, in direzioni perpendicolari (velocità in scala). b) Le quantità di moto dei pezzi, messe punta–coda, hanno per somma la quantità di moto iniziale $\boldsymbol{p}$: il triangolo, con lati 0,15, 0,20 e 0,25 kg·m/s, è rettangolo.

Lo stesso vale per un fuoco d'artificio che esplode in cielo. Il peso è una forza esterna, ma l'esplosione dura così poco che il suo impulso, $m\,g\Delta t$, è trascurabile: subito prima e subito dopo, la quantità di moto totale è praticamente la stessa. Gli urti, in cui accade qualcosa di simile, sono l'argomento del prossimo capitolo.

ESEMPIO SVOLTO

Il disco che si divide in due

Problema. Su un tavolo a cuscino d'aria, visto dall'alto, un disco di 0,50 kg scivola a 0,50 m/s lungo l'asse x. Il disco è formato da due parti, A (0,30 kg) e B (0,20 kg), tenute insieme da un filo con una molla compressa in mezzo; a un certo istante il filo si spezza. Dopo la separazione la parte A ha una velocità di componenti $v_{Ax} = 0{,}30$ m/s e $v_{Ay} = 0{,}40$ m/s. a) Trova la velocità della parte B. b) Verifica che le quantità di moto dei due pezzi sono perpendicolari. c) L'energia cinetica si è conservata?

Il sistema è il disco (A + B), isolato: peso e spinta dell'aria si equilibrano, la molla è interna. Prima: $p_x = 0{,}50\ \text{kg} \cdot 0{,}50\ \text{m/s} = 0{,}25\ \text{kg·m/s}$, $p_y = 0$.

a) Parte A: $p_{Ax} = 0{,}30\ \text{kg} \cdot 0{,}30\ \text{m/s} = 0{,}090\ \text{kg·m/s}$; $p_{Ay} = 0{,}30\ \text{kg} \cdot 0{,}40\ \text{m/s} = 0{,}12\ \text{kg·m/s}$. Lungo x: $p_{Bx} = 0{,}25 - 0{,}090 = 0{,}16\ \text{kg·m/s}$; lungo y: $p_{By} = 0 - 0{,}12 = -0{,}12\ \text{kg·m/s}$. Dividendo per 0,20 kg: $v_{Bx} = 0{,}80$ m/s, $v_{By} = -0{,}60$ m/s, modulo $\sqrt{(0{,}80^2 + 0{,}60^2)}\ \text{m/s} = 1{,}0$ m/s. Se A devia da una parte, B devia dall'altra.

b) $p_A = \sqrt{(0{,}090^2 + 0{,}12^2)} = 0{,}15\ \text{kg·m/s}$, $p_B = \sqrt{(0{,}16^2 + 0{,}12^2)} = 0{,}20\ \text{kg·m/s}$, $p = 0{,}25\ \text{kg·m/s}$. Poiché $0{,}15^2 + 0{,}20^2 = 0{,}0625 = 0{,}25^2$, il triangolo di $\boldsymbol{p}_A$, $\boldsymbol{p}_B$ e della loro somma $\boldsymbol{p}$ è rettangolo, con l'angolo retto fra $\boldsymbol{p}_A$ e $\boldsymbol{p}_B$ (Figura 1.6).

c) Prima: $K = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}50\ \text{kg} \cdot (0{,}50\ \text{m/s})^2 \approx 0{,}063$ J. Dopo: $\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}50^2 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}20 \cdot 1{,}0^2 \approx 0{,}14$ J. I 0,075 J in più sono l'energia elastica restituita dalla molla: le forze interne possono cambiare l'energia cinetica, mai la quantità di moto totale.

IN SINTESI

Le formule del capitolo e il loro significato

Quantità di moto: $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$: un vettore con la direzione e il verso della velocità; modulo $p = m\,v$, in kg·m/s. Lungo una retta si usa con il segno.

Secondo principio in forma generale: $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$: la forza risultante è uguale alla rapidità di variazione della quantità di moto; con massa costante equivale a $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Impulso: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$, in N·s = kg·m/s: l'effetto complessivo di una forza che agisce per un tempo Δt; per una forza variabile è l'area sotto il grafico forza–tempo.

Teorema dell'impulso: $\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i}$: l'impulso della forza risultante è uguale alla variazione della quantità di moto. Forza media: $F_\mathrm{m} = \Delta p/\Delta t$: a parità di Δp, un tempo più lungo dà una forza minore.

Rimbalzo: se un corpo torna indietro con velocità dello stesso modulo, $\Delta p = 2m\,v$, non zero.

Conservazione della quantità di moto: in un sistema isolato (risultante delle forze esterne nulla) $\boldsymbol{p}_\mathrm{tot}$ = costante; per due corpi $m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}'_1 + m_2\boldsymbol{v}'_2$. Nel piano si conservano separatamente le componenti x e y.

Rinculo da fermi: $m_1v_1 = m_2v_2$ in modulo, versi opposti: le velocità stanno nel rapporto inverso delle masse.

SINTESI

- La quantità di moto di un corpo è $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$: un vettore con la direzione e il verso della velocità, che si misura in kg·m/s. Il nome traduce la *quantitas motus* dei *Principia* di Newton.
- Quantità di moto ed energia cinetica dipendono entrambe da massa e velocità, ma la prima è un vettore proporzionale a v, la seconda uno scalare proporzionale a v^2: due corpi con la stessa quantità di moto possono avere energie molto diverse.
- Il secondo principio nella forma di Newton è $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$: la forza risultante è la rapidità di variazione della quantità di moto.
- L'impulso di una forza è $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$ e si misura in N·s; per il teorema dell'impulso, l'impulso della forza risultante è uguale alla variazione della quantità di moto.
- Per una forza variabile l'impulso è l'area sotto il grafico forza–tempo; la forza media è la forza costante che nello stesso tempo darebbe lo stesso impulso.
- A parità di variazione della quantità di moto, allungare la durata dell'arresto riduce la forza: è il principio dell'airbag, del casco e delle ginocchia piegate nell'atterraggio.
- Un corpo che rimbalza con velocità dello stesso modulo subisce una variazione di quantità di moto $2m\,v$, doppia di quella che lo fermerebbe.
- Le forze interne a un sistema sono coppie di azione e reazione; un sistema è isolato quando la risultante delle forze esterne è nulla.
- In un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva, qualunque siano le forze interne; l'energia cinetica, invece, può cambiare.
- Nel rinculo due corpi inizialmente fermi acquistano quantità di moto uguali e opposte: le velocità stanno nel rapporto inverso delle masse. Sullo stesso principio si basa la propulsione a reazione, che non ha bisogno di aria contro cui spingere.
- Nel piano si conservano separatamente le due componenti della quantità di moto totale.
- Cartesio pensava a una quantità di moto scalare, che non si conserva; Huygens e Newton mostrarono che si conserva la quantità di moto contata con il verso.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Nel Sistema Internazionale la quantità di moto si misura in:

   A. N/s

   B. kg·m/s

   C. kg·m/s²

   D. J

2. ● La quantità di moto di un corpo è:

   A. uno scalare, sempre positivo

   B. un vettore con la direzione e il verso della velocità

   C. un vettore con la direzione e il verso dell'accelerazione

   D. uno scalare uguale a $\frac{1}{2}m\,v^2$

3. ● Per il teorema dell'impulso, l'impulso della forza risultante su un corpo è uguale:

   A. alla variazione della sua velocità

   B. alla variazione della sua energia cinetica

   C. alla forza media moltiplicata per lo spostamento

   D. alla variazione della sua quantità di moto

4. ● In un urto, l'airbag riduce la forza sulla testa del passeggero perché:

   A. riduce la variazione della quantità di moto della testa

   B. trasforma la quantità di moto in energia

   C. allunga la durata dell'arresto, a parità di variazione della quantità di moto

   D. aumenta la massa che deve essere fermata

5. ● Un sistema di corpi si dice isolato quando:

   A. la risultante delle forze esterne è nulla

   B. fra i corpi non agiscono forze interne

   C. tutti i corpi sono fermi

   D. la sua energia cinetica si conserva

6. ●● Due pattinatori, inizialmente fermi, si spingono a vicenda; il pattinatore A ha la metà della massa di B. Dopo la spinta, A:

   A. ha la stessa velocità di B, in verso opposto

   B. ha metà della velocità di B

   C. ha una quantità di moto doppia di quella di B

   D. ha una velocità doppia di quella di B, in verso opposto

7. ●● Una palla di 0,20 kg arriva perpendicolarmente contro un muro a 5,0 m/s e rimbalza indietro a 5,0 m/s. Il modulo della variazione della sua quantità di moto è:

   A. 0

   B. 1,0 kg·m/s

   C. 2,0 kg·m/s

   D. 5,0 kg·m/s

8. ●● Il grafico forza–tempo di un colpo è un triangolo con base 0,050 s e altezza 400 N. L'impulso vale:

   A. 10 N·s
   B. 20 N·s
   C. $8{,}0 \times 10^3$ N·s
   D. 40 N·s

Vero o falso

9. ● La quantità di moto e l'energia cinetica di un corpo sono entrambe grandezze vettoriali. V / F

10. ● Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla, la sua quantità di moto resta costante. V / F

11. ● In un sistema isolato resta costante la quantità di moto di ciascuno dei corpi che lo compongono. V / F

12. ●● Un razzo nello spazio vuoto non può accelerare, perché non c'è aria contro cui spingere. V / F

13. ● Un camion lento e una bicicletta veloce possono avere la stessa quantità di moto. V / F

Applicare

14. ● Calcola il modulo della quantità di moto: a) di un ciclista che, con la bicicletta, ha una massa di 80 kg e va a 9,0 m/s; b) di un pallone di 0,43 kg calciato a 25 m/s.

15. ● Un pallone di 0,30 kg, fermo, riceve con un colpo un impulso di 6,0 N·s. Con quale velocità parte?

16. ● Completa. Un'auto di 1000 kg accelera in linea retta da 10 m/s a 25 m/s in 6,0 s. La variazione della sua quantità di moto è _____ kg·m/s e la forza media risultante che agisce su di essa è _____ N.

17. ●● Leggi nella Figura 1.1 la forza massima e la durata del calcio, e controlla il valore dell'impulso. Se il pallone avesse una massa di 0,40 kg, con quale velocità partirebbe, a parità di impulso?

18. ●● Nella Figura 1.2 verifica, calcolando le aree dei due triangoli, che i due impulsi sono uguali. Qual è il rapporto fra le forze medie nei due casi, e perché è uguale al rapporto inverso delle durate?

19. ●● Una persona di 60 kg salta orizzontalmente a 3,0 m/s dalla prua di una barca di 120 kg, inizialmente ferma; l'attrito dell'acqua è trascurabile durante il salto. Con quale velocità si muove la barca subito dopo? In quale verso?

20. ●● Nella Tabella 1.1, ricava per la terza prova le velocità v_1 e v_2 dai tempi Δt_1 e Δt_2 (bandierina di 2,00 cm), calcola le due quantità di moto e stabilisci se sono compatibili.

Problemi

21. ●● Una pallina da tennis di 58 g colpisce perpendicolarmente una parete a 25 m/s e rimbalza indietro a 20 m/s; il contatto dura 5,0 ms. Considera il sistema formato dalla sola pallina e scegli come positivo il verso verso la parete. a) Calcola la variazione della quantità di moto della pallina, con il segno. b) Calcola la forza media che la parete esercita sulla pallina. c) Quale forza media esercita la pallina sulla parete?

22. ●● Uno studente di 60 kg salta giù da un muretto alto 0,80 m. a) Con quale velocità arriva a terra? (Usa la conservazione dell'energia, *Fisica 3*, capitolo 16, e trascura la resistenza dell'aria.) b) Qual è la variazione della sua quantità di moto durante l'atterraggio? c) Calcola la forza media con cui il suolo spinge sui suoi piedi se l'arresto dura 0,015 s (gambe rigide) e se dura 0,25 s (ginocchia piegate). Ricorda di aggiungere il peso.

23. ●●● Un'astronauta di 90 kg, tuta compresa, è ferma rispetto alla Stazione spaziale, a 15 m dal portello: il suo cavo di sicurezza si è sganciato. Per tornare indietro lancia via, nel verso opposto al portello, un attrezzo di 2,0 kg a 6,0 m/s rispetto alla Stazione. a) Il sistema astronauta + attrezzo è isolato? Perché? b) Con quale velocità si muove l'astronauta verso il portello? c) In quanto tempo lo raggiunge? d) Quanta energia cinetica è stata prodotta in tutto dai suoi muscoli?

24. ●●● Due carrelli di 0,40 kg e 0,60 kg sono fermi su una rotaia senza attrito, con una molla compressa fra loro (costante elastica 800 N/m, compressione 5,0 cm), tenuta da un filo. Il filo viene bruciato e tutta l'energia elastica della molla diventa energia cinetica dei carrelli. a) Calcola l'energia elastica immagazzinata nella molla (*Fisica 3*, capitolo 16). b) Che relazione c'è fra le velocità dei due carrelli dopo la separazione? c) Calcola le due velocità.

25. ●● Una sonda di 800 kg, compreso il combustibile, è ferma nello spazio, lontano da ogni pianeta. Con un breve getto espelle 20 kg di gas a 1500 m/s rispetto al riferimento in cui la sonda era ferma. a) Con quale velocità si muove la sonda dopo il getto? b) Quanti chilogrammi di gas, espulsi alla stessa velocità in un solo getto, servirebbero per farle raggiungere 50 m/s?

26. ●●● Un fuoco d'artificio di 0,45 kg, lanciato verticalmente, esplode nel punto più alto della traiettoria, dove è fermo, in tre frammenti che partono in orizzontale. Il primo (0,10 kg) va verso est a 12 m/s, il secondo (0,20 kg) verso nord a 4,5 m/s. a) Perché si può applicare la conservazione della quantità di moto, nonostante il peso? b) Calcola le componenti est e nord della quantità di moto del terzo frammento. c) Calcola il modulo della sua velocità e descrivi la sua direzione.

Ragionare e argomentare

27. ●● Stima. Quando salti verso l'alto, la Terra rincula verso il basso. Stima la tua massa e la velocità con cui ti stacchi dal suolo (circa 3 m/s), e calcola la velocità di rinculo della Terra (massa $5{,}97 \times 10^{24}$ kg). Perché nessuno se ne accorge? E perché, quando ricadi, la Terra si ferma di nuovo?

28. ●●● Commenta la fonte. Nei *Principia philosophiae* (1644, parte II, art. 36) Cartesio afferma che Dio è la causa prima del moto e conserva sempre nell'universo la stessa quantità di moto (traduzione della redazione); per Cartesio la quantità di moto è il prodotto della grandezza di un corpo per la sua velocità, senza tenere conto del verso. Che cosa afferma il passo? È corretto alla luce di questo capitolo? Progetta un esperimento con due carrelli su una rotaia che permetta di decidere fra la «quantità di moto» di Cartesio e la nostra.

29. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Nello sparo il fucile e il proiettile hanno quantità di moto uguali e opposte; quindi hanno anche la stessa energia cinetica, e il rinculo del fucile è pericoloso quanto il proiettile». Individua l'errore e correggi il ragionamento con i dati dell'esempio svolto del capitolo.

30. ●●● Commenta la fonte. La seconda legge di Newton dice: «*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur*», «il cambiamento del moto è proporzionale alla forza motrice impressa, e avviene lungo la retta secondo la quale quella forza è impressa» (*Principia*, 1726; traduzione della redazione). Il «moto» di Newton è la quantità di moto. Una forza che agisce più a lungo produce un cambiamento maggiore: a quale delle formule di questo capitolo assomiglia di più l'enunciato, letto alla lettera? In quale caso equivale a $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$?

PER APPROFONDIRE

- [NEW] Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: la definizione II (la quantità di moto), le tre leggi e i corollari che le seguono, fra cui il terzo, sulla conservazione della quantità di moto, e lo scolio che li segue, con gli esperimenti sugli urti fra pendoli.
- [HUY] Christiaan Huygens, *Traité de la lumière*: un'opera sulla luce, ma nel primo capitolo Huygens ragiona sugli urti fra sfere dure per spiegare la propagazione delle onde, con le leggi dell'urto che aveva studiato per anni.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sulla conservazione della quantità di moto, che la ricava dal principio di relatività di Galileo con un esperimento mentale sugli urti.
- [EIN] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*: la nascita dei concetti della meccanica, raccontata senza formule.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sulla quantità di moto e l'impulso, con molti problemi.

Glossario del capitolo

Forza media
Forza costante che, nello stesso intervallo di tempo, darebbe lo stesso impulso della forza reale: $F_m = \Delta p / \Delta t$.

Forze esterne
Forze esercitate sui corpi di un sistema da corpi che non ne fanno parte.

Forze interne
Forze che i corpi di un sistema esercitano l'uno sull'altro; si presentano a coppie di azione e reazione.

Grafico forza–tempo
Grafico della forza in funzione del tempo; l'area compresa fra il grafico e l'asse dei tempi è l'impulso.

Impulso
Prodotto di una forza per l'intervallo di tempo in cui agisce, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$; si misura in N·s. Per una forza variabile è l'area sotto il grafico forza–tempo.

Principio di conservazione della quantità di moto
In un sistema isolato la quantità di moto totale resta costante; nel piano si conservano separatamente le sue componenti.

Propulsione a reazione
Accelerazione di un veicolo che espelle all'indietro una parte della propria massa (gas, acqua) e riceve dalla massa espulsa una spinta in avanti.

Quantità di moto
Vettore $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, prodotto della massa per la velocità; si misura in kg·m/s.

Quantità di moto totale
Somma vettoriale delle quantità di moto dei corpi di un sistema.

Rinculo
Moto in verso opposto di due corpi che si spingono a vicenda partendo da fermi; le loro quantità di moto sono uguali e opposte.

Secondo principio (forma generale)
La forza risultante su un corpo è uguale alla rapidità di variazione della sua quantità di moto: $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p} / \Delta t$.

Sistema
Insieme di corpi che si sceglie di studiare come un tutto.

Sistema isolato
Sistema in cui la risultante delle forze esterne è nulla.

Teorema dell'impulso
L'impulso della forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione della sua quantità di moto: $\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p}$.

Soluzioni

1. B. 1 kg·m/s = 1 N·s. I kg·m/s^2 sono newton, i J joule.

2. B. $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ con $m > 0$: stessa direzione e stesso verso della velocità.

3. D. $\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p}$. Il prodotto forza per spostamento è il lavoro, che cambia l'energia cinetica.

4. C. Δp è fissato da velocità iniziale e finale; con Δt maggiore, $F_\text{m} = \Delta p/\Delta t$ è minore.

5. A. Le forze esterne possono esserci, purché si equilibrino; le forze interne non contano.

6. D. $p_\text{tot} = 0$ prima e dopo: $m_\text{A} v_\text{A} = m_\text{B} v_\text{B}$ in modulo; con $m_\text{A} = m_\text{B}/2$, $v_\text{A} = 2v_\text{B}$, in verso opposto.

7. C. $\Delta p = 2m\,v = 2 \cdot 0{,}20$ kg $\cdot$ 5,0 m/s = 2,0 kg·m/s.

8. A. $I = \frac{1}{2} \cdot 0{,}050$ s $\cdot$ 400 N = 10 N·s.

9. F. La quantità di moto è un vettore; l'energia cinetica è uno scalare, sempre positivo o nullo.

10. V. Dal teorema dell'impulso: se la risultante è nulla, $\Delta\boldsymbol{p} = 0$ (è il principio d'inerzia).

11. F. Si conserva la quantità di moto *totale*: quella di ciascun corpo cambia, perché le forze interne la trasferiscono da un corpo all'altro.

12. F. Il razzo spinge i propri gas di scarico e ne riceve la reazione; nel vuoto funziona anzi meglio.

13. V. Basta che il prodotto $m\,v$ sia lo stesso: per esempio un camion di 4000 kg a 0,25 m/s e una bici con ciclista di 100 kg a 10 m/s hanno entrambi $1{,}0 \times 10^3$ kg·m/s.

14. a) $p = 80$ kg $\cdot$ 9,0 m/s = 720 kg·m/s $\approx 7{,}2 \times 10^2$ kg·m/s. b) $p = 0{,}43$ kg $\cdot$ 25 m/s = 10,75 kg·m/s ≈ 11 kg·m/s.

15. $p_\text{f} = I = 6{,}0$ kg·m/s; $v = 6{,}0$ kg·m/s / 0,30 kg = 20 m/s.

16. $\Delta p = 1000$ kg $\cdot$ (25 − 10) m/s $= 1{,}5 \times 10^4$ kg·m/s; $F_\text{m} = 1{,}5 \times 10^4$ kg·m/s / 6,0 s $= 2{,}5 \times 10^3$ N.

17. Forza massima 1 800 N, durata 8 ms (salita 2 ms, tratto costante 4 ms, discesa 2 ms). Impulso: area del trapezio, (8 + 4)/2 ms $\cdot$ 1 800 N = 10,8 N·s. Con 0,40 kg: $v = 10{,}8$ kg·m/s / 0,40 kg = 27 m/s.

18. Senza airbag: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}005$ s $\cdot$ 28 000 N = 70 N·s; con airbag: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}050$ s $\cdot$ 2 800 N = 70 N·s. Forze medie: 70/0,005 = 14 000 N e 70/0,050 = 1 400 N, rapporto 10. Poiché $F_\text{m} = \Delta p/\Delta t$ con lo stesso Δp, le forze medie stanno nel rapporto inverso dei tempi: 50 ms / 5 ms = 10.

19. Sistema persona + barca, isolato in orizzontale; $p_\text{tot} = 0$ prima e dopo. Verso positivo: quello della persona. $0 = 60$ kg $\cdot$ 3,0 m/s + 120 kg $\cdot\, v_\text{B}$, $v_\text{B} = -1{,}5$ m/s: la barca si muove a 1,5 m/s in verso opposto al salto.

20. $v_1 = 0{,}0200$ m / 0,0326 s = 0,613 m/s; $v_2 = 0{,}0200$ m / 0,0984 s = 0,203 m/s. $m_1 v_1 = 0{,}500$ kg $\cdot$ 0,613 m/s = 0,307 kg·m/s; $m_2 v_2 = 1{,}500$ kg $\cdot$ 0,203 m/s = 0,305 kg·m/s. Incertezze relative: per il carrello 1, 0,2% (massa) + 0,5% (bandierina) + 0,3% (tempo) ≈ 1%, cioè ± 0,003; per il carrello 2, 0,07% + 0,5% + 0,1% ≈ 0,7%, cioè ± 0,002. Differenza 0,002 kg·m/s < 0,005 kg·m/s: compatibili.

21. a) $\Delta p = p_\text{f} - p_\text{i} = 0{,}058$ kg $\cdot$ (−20 m/s) − 0,058 kg $\cdot$ (+25 m/s) = −1,16 − 1,45 = −2,61 kg·m/s ≈ −2,6 kg·m/s. b) $F_\text{m} = \Delta p/\Delta t = -2{,}61$ kg·m/s / 0,0050 s $\approx -5{,}2 \times 10^2$ N: 522 N diretti verso l'esterno della parete. c) Per il terzo principio, $5{,}2 \times 10^2$ N diretti verso la parete.

22. a) $\frac{1}{2} m\,v^2 = m\,g\,h$: $v = \sqrt{(2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}80\ \text{m})} \approx 3{,}96$ m/s ≈ 4,0 m/s. b) $\Delta p = 60$ kg $\cdot$ 3,96 m/s $\approx 2{,}4 \times 10^2$ kg·m/s (in modulo, diretta verso l'alto). c) Forza media risultante: 238 kg·m/s / 0,015 s $\approx 1{,}58 \times 10^4$ N; il suolo deve anche sostenere il peso, 60 kg $\cdot$ 9,8 m/s^2 = 588 N: in tutto $\approx 1{,}6 \times 10^4$ N. Con 0,25 s: 238/0,25 ≈ 950 N, più 588 N: $\approx 1{,}5 \times 10^3$ N, circa dieci volte meno.

23. a) Sì, con ottima approssimazione: rispetto alla Stazione, che è in caduta libera come lei, sull'astro-

nauta e sull'attrezzo non agiscono forze esterne che ne cambino il moto relativo; la forza fra mano e attrezzo è interna. b) $p_{tot} = 0$: $0 = 2{,}0\ \text{kg} \cdot (-6{,}0\ \text{m/s}) + 90\ \text{kg} \cdot v$, $v = 12\ \text{kg·m/s} / 90\ \text{kg} \approx 0{,}13\ \text{m/s}$ verso il portello. c) $t = 15\ \text{m} / 0{,}133\ \text{m/s} \approx 1{,}1 \times 10^2\ \text{s}$, quasi due minuti. d) $K = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\ \text{kg} \cdot (6{,}0\ \text{m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 90\ \text{kg} \cdot (0{,}133\ \text{m/s})^2 = 36\ \text{J} + 0{,}80\ \text{J} \approx 37\ \text{J}$.

24. a) $U_{el} = \frac{1}{2} \cdot 800\ \text{N/m} \cdot (0{,}050\ \text{m})^2 = 1{,}0\ \text{J}$. b) Sistema isolato, fermo all'inizio: $0{,}40\ \text{kg} \cdot v_1 = 0{,}60\ \text{kg} \cdot v_2$ in modulo, versi opposti, cioè $v_1 = 1{,}5\ v_2$. c) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}40 \cdot (1{,}5v_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}60 \cdot v_2^2 = 1{,}0\ \text{J}$, cioè $(0{,}45 + 0{,}30)\ \text{kg} \cdot v_2^2 = 1{,}0\ \text{J}$: $v_2 = \sqrt{(1{,}0/0{,}75)}\ \text{m/s} \approx 1{,}15\ \text{m/s} \approx 1{,}2\ \text{m/s}$; $v_1 = 1{,}5 \cdot 1{,}155\ \text{m/s} \approx 1{,}7\ \text{m/s}$. Controllo: $0{,}40 \cdot 1{,}73 = 0{,}69\ \text{kg·m/s} = 0{,}60 \cdot 1{,}15$.

25. Sistema sonda + gas, isolato, fermo all'inizio. a) $0 = 20\ \text{kg} \cdot (-1500\ \text{m/s}) + 780\ \text{kg} \cdot v$: $v = 30\,000\ \text{kg·m/s} / 780\ \text{kg} \approx 38\ \text{m/s}$. b) $m_g \cdot 1500\ \text{m/s} = (800\ \text{kg} - m_g) \cdot 50\ \text{m/s}$, quindi $m_g \cdot 1550\ \text{m/s} = 40\,000\ \text{kg·m/s}$ e $m_g \approx 26\ \text{kg}$.

26. a) L'esplosione dura pochissimo: l'impulso del peso, $m\,g\Delta t$, è trascurabile rispetto agli impulsi delle forze interne; subito prima e subito dopo, il sistema dei frammenti ha la stessa quantità di moto, nulla. b) Est: $0{,}10\ \text{kg} \cdot 12\ \text{m/s} = 1{,}2\ \text{kg·m/s}$; nord: $0{,}20\ \text{kg} \cdot 4{,}5\ \text{m/s} = 0{,}90\ \text{kg·m/s}$. Il terzo frammento ($0{,}45 - 0{,}10 - 0{,}20 = 0{,}15\ \text{kg}$) deve avere componenti $-1{,}2\ \text{kg·m/s}$ (cioè 1,2 verso ovest) e $-0{,}90\ \text{kg·m/s}$ (0,90 verso sud). c) $p_3 = \sqrt{(1{,}2^2 + 0{,}90^2)} = 1{,}5\ \text{kg·m/s}$; $v_3 = 1{,}5\ \text{kg·m/s} / 0{,}15\ \text{kg} = 10\ \text{m/s}$, verso sud-ovest, con componenti 8,0 m/s verso ovest e 6,0 m/s verso sud.

27. Traccia. Con 60 kg a 3 m/s, $p \approx 180\ \text{kg·m/s}$; la Terra acquista una quantità di moto uguale e opposta: $v \approx 180 / 5{,}97 \times 10^{24}\ \text{m/s} \approx 3 \times 10^{-23}\ \text{m/s}$, una velocità del tutto impercettibile (in un miliardo di anni non percorrerebbe un millimetro). Mentre sei in volo il tuo peso e la forza con cui attiri la Terra sono una coppia di azione e reazione interna al sistema Terra + te: quando ricadi e ti fermi, la quantità di moto totale torna nulla, e la Terra si ferma con te.

28. Traccia. Cartesio sostiene che la somma delle «quantità di moto» di tutti i corpi resta costante, e fonda la legge su un argomento teologico, l'immutabilità di Dio. L'idea di una grandezza conservata è giusta e feconda, ma la grandezza è sbagliata: si conserva la quantità di moto vettoriale, con il verso, non la somma dei moduli. Esperimento: due carrelli uguali, con il velcro, si vengono incontro con velocità uguali e opposte e restano attaccati, fermi. La somma dei moduli passa da $2m\,v$ a 0 (contro Cartesio), la somma vettoriale resta 0 (come previsto). Si misurano le velocità con fotocellule prima e dopo l'urto.

29. L'errore è dedurre l'uguaglianza delle energie da quella delle quantità di moto. Con quantità di moto uguali in modulo, $K = p^2/(2m)$ è inversamente proporzionale alla massa: il proiettile (10 g) ha $3{,}2 \times 10^3$ J, il fucile (4,0 kg) 8,0 J, 400 volte meno. Il rinculo è un colpo sopportabile; il proiettile è letale.

30. Traccia. Letto alla lettera, l'enunciato dice che il cambiamento della quantità di moto è proporzionale alla forza «impressa»: assomiglia al teorema dell'impulso, $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\Delta t$, in cui la forza conta insieme alla durata della sua azione (molti storici leggono così la «forza impressa» di Newton, pensata come un colpo). Dividendo per il tempo si ottiene $\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$, la forma generale del secondo principio; se la massa è costante, $\Delta\boldsymbol{p} = m\Delta\boldsymbol{v}$ e si ritrova $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. La frase dice anche che il cambiamento avviene «lungo la retta» della forza: $\Delta\boldsymbol{p}$ ha la direzione della forza, come in un rimbalzo.