CAPITOLO

12

I moti nel piano

Una pallina che cade dal tavolo fa due cose insieme, e nessuna delle due disturba l'altra.

OBIETTIVI

1. Descrivere un moto nel piano con i vettori posizione, spostamento, velocità e accelerazione.
2. Comporre i moti e le velocità, anche tra sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro.
3. Risolvere problemi di lancio orizzontale e di lancio obliquo, calcolando tempo di volo, altezza massima e gittata.
4. Spiegare perché, senza aria, la gittata è massima a 45° e la traiettoria è una parabola.
5. Descrivere il moto circolare uniforme con periodo, frequenza, radianti e velocità angolare.
6. Ricavare e usare l'accelerazione centripeta.

INDICE DEL CAPITOLO

12.1 Posizione, velocità e accelerazione nel piano 2

12.2 La composizione dei moti e delle velocità 4

12.3 Il moto del proiettile e il lancio orizzontale 6

12.4 Il lancio obliquo 9

12.5 Il moto circolare uniforme 12

Fisica 3 · Parte IV · Il moto · versione 1.0
Capitolo 12: I moti nel piano · pagine 297–318 del volume completo · estratto per lo studio

Un pallone calciato dal portiere, il getto d'acqua di una fontana: una volta lasciati liberi, questi corpi disegnano nell'aria una curva che sale, si piega e ridiscende. Una giostra o un punto sul bordo di una ruota girano invece in tondo. Nessuno di questi moti si svolge lungo una retta, e per descriverli non basta più un solo asse con un numero e un segno.

In questo capitolo mettiamo insieme i moti rettilinei dei capitoli 10 e 11 e i vettori del capitolo 5. Un moto nel piano si scompone in due moti rettilinei che procedono ciascuno per conto suo: con questa idea, che è di Galileo, capiremo come una barca attraversa un fiume, perché un proiettile descrive una parabola e quale angolo lo manda più lontano. Infine studieremo il moto circolare uniforme, in cui la velocità cambia continuamente direzione.

12.1 Posizione, velocità e accelerazione nel piano

12.1.1 Il vettore posizione e lo spostamento

Per descrivere un moto nel piano fissiamo un sistema di riferimento con due assi perpendicolari, x e y, un'origine O e, come sempre, un orologio. La posizione di un punto materiale P è data dal **vettore posizione** $\boldsymbol{r}$, la freccia che va dall'origine a P: le sue componenti sono le coordinate $(x; y)$ del punto. Mentre il corpo si muove, la punta di $\boldsymbol{r}$ scorre lungo la traiettoria.

Se all'istante t_1 il corpo è in P_1, con vettore posizione $\boldsymbol{r}_1$, e all'istante t_2 è in P_2, con vettore posizione $\boldsymbol{r}_2$, il suo spostamento è il vettore che va da P_1 a P_2 (Figura 12.1):

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \qquad \text{cioè} \qquad \Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1$$

Come nel moto rettilineo, lo spostamento dipende soltanto dal punto di partenza e da quello di arrivo, non dal percorso: il suo modulo è la lunghezza del segmento P_1P_2, mai maggiore della distanza percorsa lungo la traiettoria, che si misura sulla curva.

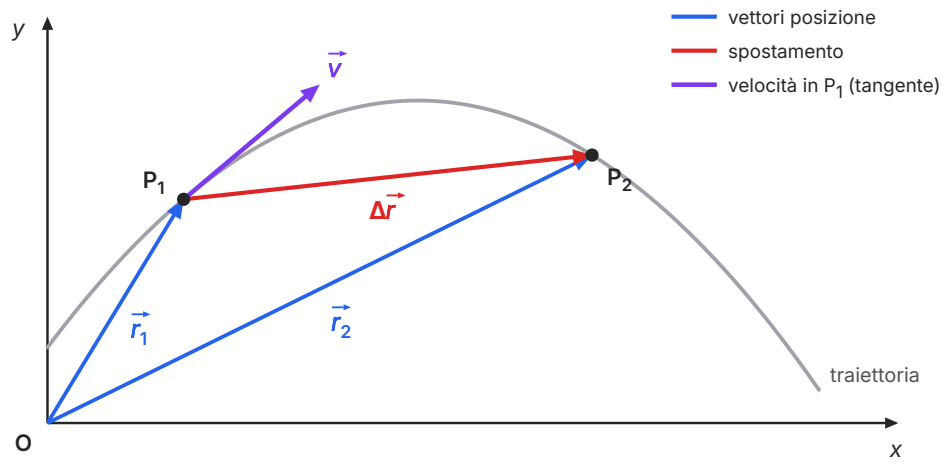


Figura 12.1 Un corpo si muove lungo la traiettoria curva (in grigio, calcolata). I vettori posizione $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ vanno dall'origine alle posizioni occupate agli istanti t_1 e t_2; lo spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ va dalla prima alla seconda. La velocità nel punto P_1 è tangente alla traiettoria.

12.1.2 La velocità vettoriale

Dividendo lo spostamento per l'intervallo di tempo in cui avviene si ottiene la velocità media nel piano, un vettore che ha la direzione e il verso di $\Delta\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad \text{componenti: } v_{\mathrm{m}x} = \Delta x/\Delta t,\ v_{\mathrm{m}y} = \Delta y/\Delta t$$

Come nel capitolo 10, la velocità in un istante si ottiene prendendo un intervallo di tempo sempre più breve. Nella Figura 12.1, se P_2 si avvicina a P_1, la corda P_1P_2 diventa sempre più corta e la sua direzione si confonde con quella della retta che sfiora la curva in P_1, la tangente. La **velocità vettoriale** (istantanea) $\boldsymbol{v}$ è quindi un vettore **tangente alla traiettoria**, orientato nel verso del moto, che ha per modulo la velocità letta sul tachimetro. Quando l'atleta lascia la presa, il martello parte lungo la tangente al cerchio che stava percorrendo, non lungo il raggio.

12.1.3 L'accelerazione vettoriale

Allo stesso modo, l'**accelerazione vettoriale** è il rapporto tra la variazione del vettore velocità e l'intervallo di tempo in cui avviene, preso brevissimo:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad \text{con} \qquad \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$$

Ecco la novità: nel piano un vettore cambia anche quando cambia *soltanto la direzione*. Un'auto che percorre una curva a 50 km/h costanti sta accelerando, perché la sua velocità, come vettore, non è mai la stessa da un istante all'altro. L'acceleratore, il freno e il volante sono tre modi di accelerare.

12.2 La composizione dei moti e delle velocità

12.2.1 Due moti indipendenti

Nel piano la velocità ha due componenti, v_x e v_y, e l'accelerazione altre due, a_x e a_y. La componente x dell'accelerazione fa cambiare solo v_x, quella y solo v_y. Per questo un moto nel piano si può sempre pensare come la **composizione dei moti** delle sue due proiezioni sugli assi: due moti rettilinei, ciascuno con le leggi dei capitoli 10 e 11, che si svolgono contemporaneamente. L'idea che ciascuno dei due moti proceda come se l'altro non ci fosse si chiama **principio di indipendenza dei moti**. I due moti hanno in comune un'unica cosa: il tempo t, che è lo stesso per entrambi.

12.2.2 Velocità relative

Un passeggero che cammina nel corridoio di un treno, una barca nella corrente, un aereo nel vento: la velocità di un corpo dipende dal sistema di riferimento da cui lo si osserva. Per tenerne conto useremo due indici: $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A,B}}$ è la velocità del corpo A misurata da chi è fermo rispetto a B. La regola di **composizione delle velocità** è una somma di vettori:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A,C}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{A,B}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{B,C}}$$

Gli indici si «incatenano»: quello interno, B, compare due volte e sparisce. $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B,C}}$ si chiama anche velocità di trascinamento. Su un binario rettilineo i vettori sono paralleli e la somma diventa algebrica: un passeggero che cammina a 1,5 m/s verso la testa di un treno che viaggia a 30 m/s si muove a 31,5 m/s rispetto ai binari; se cammina verso la coda, a 28,5 m/s. È proprio la regola che Galileo usò per discutere il moto degli oggetti su una nave, e che nel capitolo 13 diventerà un principio.

12.2.3 La barca nel fiume

Una barca attraversa un fiume tenendo la prua perpendicolare alla riva: rispetto all'acqua si muove dritta verso l'altra sponda, ma l'acqua la trascina a valle con la corrente. Rispetto alla riva, la barca percorre una linea obliqua. Il principio di indipendenza dice qualcosa di sorprendente: il tempo di attraversamento dipende solo dalla componente della velocità perpendicolare alla riva, cioè dalla velocità della barca rispetto all'acqua, e **non dipende dalla corrente**.

ESEMPIO SVOLTO

Attraversare un fiume

Problema. Un fiume largo 60 m scorre con una corrente di 3,0 m/s. Una barca a motore va a 4,0 m/s rispetto all'acqua e tiene la prua perpendicolare alla riva. Calcola il tempo di attraversamento, di quanto la barca arriva più a valle rispetto al punto di fronte a quello di partenza, e la sua velocità rispetto alla riva.

Le velocità. Con gli indici b (barca), a (acqua), r (riva): $\boldsymbol{v}_{b,r} = \boldsymbol{v}_{b,a} + \boldsymbol{v}_{a,r}$. I due vettori a destra sono perpendicolari: $\boldsymbol{v}_{b,a}$ attraversa il fiume, $\boldsymbol{v}_{a,r}$ è parallela alle sponde (Figura 12.2).

Il tempo. Il moto perpendicolare alla riva è uniforme a 4,0 m/s: $t = 60\ \text{m} / 4{,}0\ \text{m/s} = 15\ \text{s}$.

La deriva. Nello stesso tempo il moto parallelo alla riva, uniforme a 3,0 m/s, porta la barca a valle di $3{,}0\ \text{m/s} \times 15\ \text{s} = 45\ \text{m}$.

La velocità rispetto alla riva. Per il teorema di Pitagora $v_{b,r} = \sqrt{((4{,}0\ \text{m/s})^2 + (3{,}0\ \text{m/s})^2)} = 5{,}0\ \text{m/s}$. La direzione si descrive con il rapporto delle componenti: la barca avanza di 3 m verso valle ogni 4 m di attraversamento, lo stesso rapporto di 45 m su 60 m.

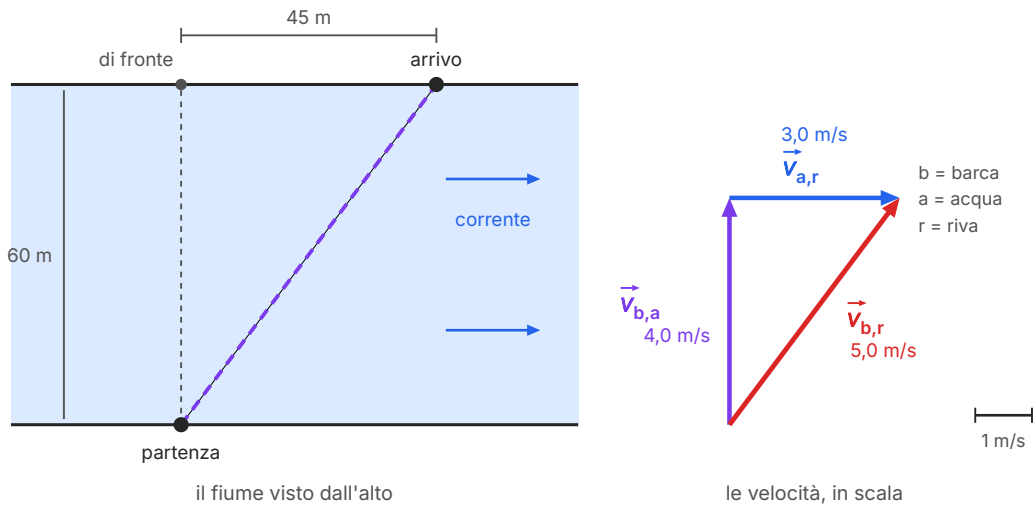


Figura 12.2 La barca dell'esempio svolto. A sinistra, il fiume visto dall'alto: la barca punta la prua verso la sponda opposta ma arriva 45 m più a valle, lungo la linea tratteggiata. A destra, le velocità in scala: $\boldsymbol{v}_{b,a}$ (barca rispetto all'acqua, 4,0 m/s) più $\boldsymbol{v}_{a,r}$ (acqua rispetto alla riva, 3,0 m/s) dà $\boldsymbol{v}_{b,r}$ (barca rispetto alla riva, 5,0 m/s), parallela alla linea tratteggiata.

La stessa regola spiega perché, dal finestrino di un treno, la pioggia che cade verticale sembra cadere obliqua, all'indietro: $\boldsymbol{v}_{g,t} = \boldsymbol{v}_{g,s} + \boldsymbol{v}_{s,t}$, e la velocità del suolo rispetto al treno è opposta a

quella del treno. Con gocce che scendono a circa 6 m/s e un treno a 108 km/h (30 m/s), ogni goccia si sposta rispetto al treno di 30 m all'indietro ogni 6 m di discesa: le strisce sul vetro sono quasi orizzontali.

ERRORE FREQUENTE

«Le velocità si sommano, quindi 4,0 m/s + 3,0 m/s = 7,0 m/s.» Si sommano i *vettori*, non i moduli. I moduli si sommano solo quando i vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso; per due velocità perpendicolari il modulo della somma si trova con il teorema di Pitagora, ed è sempre minore della somma dei moduli.

«Con la corrente più forte la barca ci mette di più ad attraversare.» Il tempo dipende solo dalla componente della velocità perpendicolare alla riva. La corrente cambia il punto di arrivo, non la durata.

12.3 Il moto del proiettile e il lancio orizzontale

12.3.1 Il modello del proiettile

Si chiama **moto del proiettile** il moto di un corpo che, dopo aver ricevuto una velocità iniziale, si muove soggetto soltanto al proprio peso: un pallone, un sasso, una pallina che rotola giù da un tavolo, un getto d'acqua. Il modello si basa su tre ipotesi: il corpo è un punto materiale; vicino alla superficie terrestre e per tragitti di qualche centinaio di metri al massimo, la sua accelerazione è costante, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ verso il basso, come nella caduta libera del capitolo 11; la resistenza dell'aria è trascurabile.

Con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale verso l'alto, l'accelerazione ha componenti $a_x = 0$ e $a_y = -g$. Per il principio di indipendenza il moto del proiettile è quindi la composizione di due moti che conosciamo già:

- in orizzontale un **moto rettilineo uniforme**: v_x resta costante per tutto il volo;
- in verticale un **moto uniformemente accelerato** con accelerazione $-g$: una caduta libera, o un lancio verticale.

COLLEGAMENTI

Latino · Galileo concepisce un proiettile

La Giornata quarta dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) contiene il trattato di Galileo sul moto dei proiettili. Nel libro i personaggi del dialogo parlano in italiano, ma leggono il trattato del loro «Accademico», scritto in latino, che comincia così:

Mobile quoddam super planum horizontale proiectum mente concipio omni secluso impedimento: iam constat ex his quae fusius alibi dicta sunt illius motum aequabilem et perpetuum super ipso plano futurum esse, si planum in infinitum extendatur.

«Immagino con la mente un corpo lanciato su un piano orizzontale, tolto ogni impedimento: è già chiaro, da ciò che è stato detto più ampiamente altrove, che il suo moto su quel piano sarà uniforme e perpetuo, se il piano si estende all'infinito» (Galileo, *Discorsi*, Giornata quarta, *De motu proiectorum*; traduzione della redazione).

Se invece il piano finisce ed è posto in alto, prosegue Galileo, il corpo che ne raggiunge il bordo aggiunge al moto uniforme di prima la caduta dovuta al proprio peso, e nasce un moto composto, dice il testo latino, dall'equabile orizzontale e dal naturalmente accelerato verso il basso: quello che Galileo chiama *proiectio*, la proiezione. La prima proposizione del trattato dimostra che un corpo così lanciato descrive una semiparabola: *lineam semiparabolicam describit in sua latione*. L'esperimento è immaginato (*mente concipio*) e l'impedimento, attrito e aria, è tolto: è la stessa idealizzazione del nostro modello.

12.3.2 Le leggi del lancio orizzontale

Nel **lancio orizzontale** il corpo parte con velocità orizzontale v_0 da un'altezza h sopra il suolo. Mettiamo l'origine nel punto di lancio e facciamo partire il cronometro all'istante del distacco. Lungo x il moto è uniforme con velocità v_0; lungo y è una caduta libera da ferma:

$$x = v_0 t \qquad y = -\tfrac{1}{2} g t^2 \qquad v_x = v_0 \qquad v_y = -g t$$

Il segno meno ricorda che il corpo scende sotto il punto di lancio. Il corpo tocca il suolo quando è sceso di h, cioè quando $\tfrac{1}{2} g t^2 = h$. Il **tempo di volo**, l'intervallo fra il lancio e l'arrivo a terra, è quindi lo stesso della caduta da ferma del capitolo 11:

$$t_v = \sqrt{(2h/g)}$$

In questa formula v_0 **non compare**: il tempo di caduta non dipende dalla velocità orizzontale. La Figura 12.3 lo mostra con una fotografia stroboscopica calcolata: a ogni istante, la pallina lanciata e quella lasciata cadere sono alla stessa altezza.

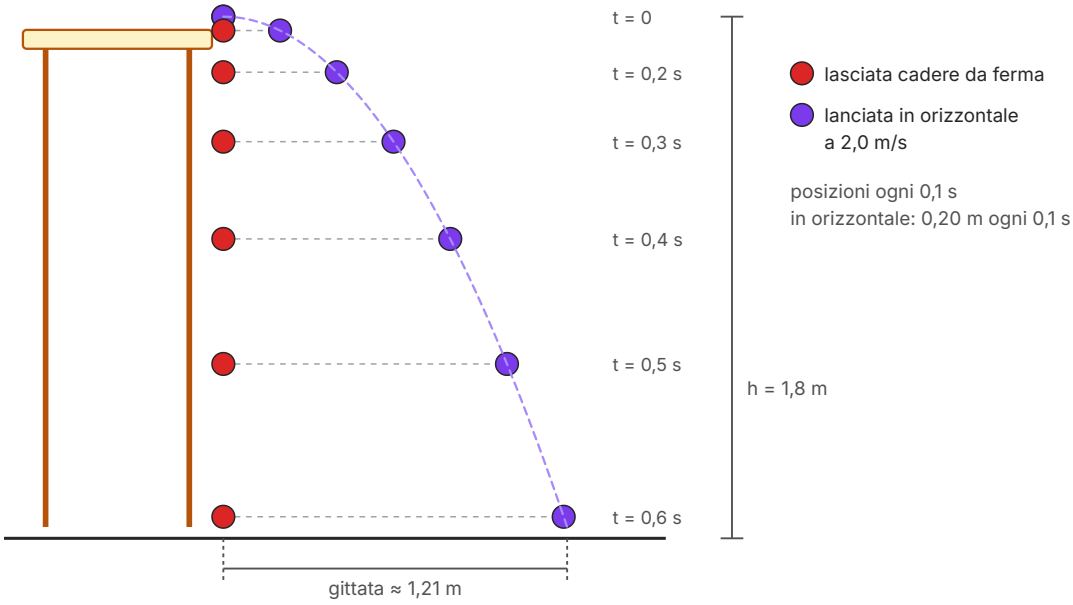


Figura 12.3 Una pallina lasciata cadere da ferma (in rosso) e una lanciata in orizzontale a 2,0 m/s (in viola) dalla stessa altezza di 1,8 m, nelle posizioni occupate ogni 0,1 s (calcolate senza aria). In ogni istante le due palline sono alla stessa altezza, collegate dalle linee tratteggiate; in orizzontale la pallina lanciata percorre 0,20 m ogni 0,1 s. Entrambe toccano terra dopo circa 0,61 s.

Durante il tempo di volo il moto orizzontale procede uniforme. La distanza orizzontale fra il punto di lancio e il punto d'arrivo si chiama **gittata**:

$$x_G = v_0 t_v = v_0 \sqrt{(2h/g)}$$

La gittata è direttamente proporzionale a v_0: raddoppiando la velocità di lancio raddoppia. Rispetto all'altezza, invece, cresce come una radice quadrata: per raddoppiare la gittata alzando il punto di lancio, l'altezza va quadruplicata.

12.3.3 Una traiettoria parabolica

Che forma ha la traiettoria? Dalla prima legge $t = x/v_0$; sostituendo nella seconda si elimina il tempo e resta una relazione fra le due coordinate:

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2} x^2$$

È una funzione del tipo $y = a\,x^2$, che conosci dal corso di matematica e che nel capitolo 4 abbiamo chiamato proporzionalità quadratica: il grafico è una parabola con il vertice nel punto di

lancio e la concavità rivolta verso il basso, perché il coefficiente $a = -g/(2v_0^2)$ è negativo. Il corpo descrive quindi una **traiettoria parabolica**: è la semiparabola di Galileo.

ESEMPIO SVOLTO

Un sasso lanciato da un ponte

Problema. Da un ponte alto 20 m sul pelo dell'acqua un ragazzo lancia un sasso in orizzontale, a 12 m/s. Trascurando l'aria, calcola quanto tempo il sasso resta in volo, a che distanza orizzontale tocca l'acqua e con quale velocità.

Tempo di volo. $t_v = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 20\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} = \sqrt{(4{,}08\ \text{s}^2)} = 2{,}0$ s.

Gittata. $x_G = v_0\, t_v = 12\ \text{m/s} \times 2{,}02\ \text{s} = 24$ m (nei passaggi intermedi teniamo una cifra in più e arrotondiamo solo il risultato).

Velocità d'arrivo. Componenti: $v_x = 12$ m/s; $|v_y| = g\, t_v = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 2{,}02\ \text{s} = 19{,}8$ m/s, la stessa velocità verticale che avrebbe un sasso lasciato cadere da fermo. Modulo, con il teorema di Pitagora: $v = \sqrt{((12\ \text{m/s})^2 + (19{,}8\ \text{m/s})^2)} = 23$ m/s. La direzione: il sasso scende di 19,8 m per ogni 12 m in orizzontale, cioè di circa 1,65 m per ogni metro: entra in acqua con una traiettoria più ripida della diagonale a 45°.

Controllo. Il modulo della velocità d'arrivo si può trovare anche senza il tempo: $v^2 = v_0^2 + 2gh = 144 + 392 = 536\ \text{m}^2/\text{s}^2$, $v = 23$ m/s. Lo ritroverai nel capitolo 16, con l'energia.

12.4 Il lancio obliquo

12.4.1 Le componenti della velocità iniziale

Nel **lancio obliquo** il corpo parte dal suolo con una velocità $\boldsymbol{v}_0$ inclinata verso l'alto. La velocità iniziale si scompone in una componente orizzontale v_{0x} e una verticale v_{0y}, legate al modulo dal teorema di Pitagora, $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$. Per i tre angoli che abbiamo imparato a trattare nel capitolo 5 le componenti vengono dai triangoli rettangoli notevoli (Tabella A.6 dell'Appendice):

- lancio a 45°: $v_{0x} = v_{0y} = (v_0/\sqrt{2}) \approx 0{,}707\ v_0$;
- lancio a 30°: $v_{0x} = (\sqrt{3}/2)\ v_0 \approx 0{,}866\ v_0$ e $v_{0y} = v_0/2$, perché il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa;
- lancio a 60°: le due componenti si scambiano, $v_{0x} = v_0/2$ e $v_{0y} = (\sqrt{3}/2)\ v_0$.

Per un angolo qualsiasi le componenti si ricavano da un disegno in scala, oppure sono date; negli esercizi di questo capitolo le troverai sempre in uno di questi modi.

12.4.2 Salita, discesa, altezza massima e gittata

Lungo x il moto è uniforme con velocità v_{0x}; lungo y è un lancio verticale verso l'alto con velocità iniziale v_{0y}, proprio quello del capitolo 11. Le leggi del moto sono

$$x = v_{0x}t \qquad y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - g\,t$$

e tutto ciò che sai del lancio verticale vale per la componente verticale. Il corpo sale finché v_y si annulla, cioè per un tempo v_{0y}/g; poi ridiscende, e su un terreno orizzontale la discesa dura quanto la salita. Nel punto più alto la velocità **non è nulla**: è orizzontale e vale v_{0x}. Ne seguono le tre grandezze che descrivono il lancio:

$$t_v = \frac{2\,v_{0y}}{g} \qquad h_{max} = \frac{v_{0y}^{\,2}}{2g} \qquad x_G = v_{0x}t_v = \frac{2\,v_{0x}\,v_{0y}}{g}$$

Il tempo di volo e l'altezza massima dipendono solo dalla componente verticale; la gittata dipende da entrambe, perché è il prodotto di una velocità orizzontale per un tempo deciso dal moto verticale. La traiettoria è una parabola con il vertice nel punto più alto.

ESEMPIO SVOLTO

Tre lanci con la stessa velocità

Problema. Un pallone viene calciato da terra a 20 m/s, una volta a 30°, una a 45° e una a 60° sull'orizzontale. Trascurando l'aria, confronta tempo di volo, altezza massima e gittata. La Figura 12.4 mostra le tre traiettorie, calcolate con le leggi del moto.

Componenti. A 30°: $v_{0x} = 0{,}866 \times 20$ m/s $= 17{,}3$ m/s, $v_{0y} = 10{,}0$ m/s. A 45°: $v_{0x} = v_{0y} = 14{,}1$ m/s. A 60°: $v_{0x} = 10{,}0$ m/s, $v_{0y} = 17{,}3$ m/s.

Calcoli. Per il lancio a 30°: $t_v = 2 \times 10{,}0 \text{ m/s} / 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 2{,}04$ s; $h_{max} = (10{,}0 \text{ m/s})^2/(2 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2) = 5{,}10$ m; $x_G = 17{,}3 \text{ m/s} \times 2{,}04 \text{ s} = 35{,}3$ m. Gli altri due casi sono raccolti nella Tabella 12.1.

Tabella 12.1 I tre lanci dell'esempio svolto ($v_0 = 20$ m/s, senza aria).

Angolo	v_{0x} (m/s)	v_{0y} (m/s)	t_v (s)	h_{max} (m)	x_G (m)
30°	17,3	10,0	2,04	5,10	35,3
45°	14,1	14,1	2,89	10,2	40,8
60°	10,0	17,3	3,53	15,3	35,3

Che cosa si legge. Salendo con l'angolo il pallone resta in aria più a lungo e sale più in alto: l'altezza massima a 60° è tripla di quella a 30°, perché $v_{0y}^{\,2}$ passa da 100 a 300 m^2/s^2. La gittata invece non cresce sempre: a 30° e a 60° è la stessa, perché nel prodotto $v_{0x}\,v_{0y}$ le due componenti si sono soltanto scambiate. Il valore più grande, 40,8 m, si ottiene a 45°.

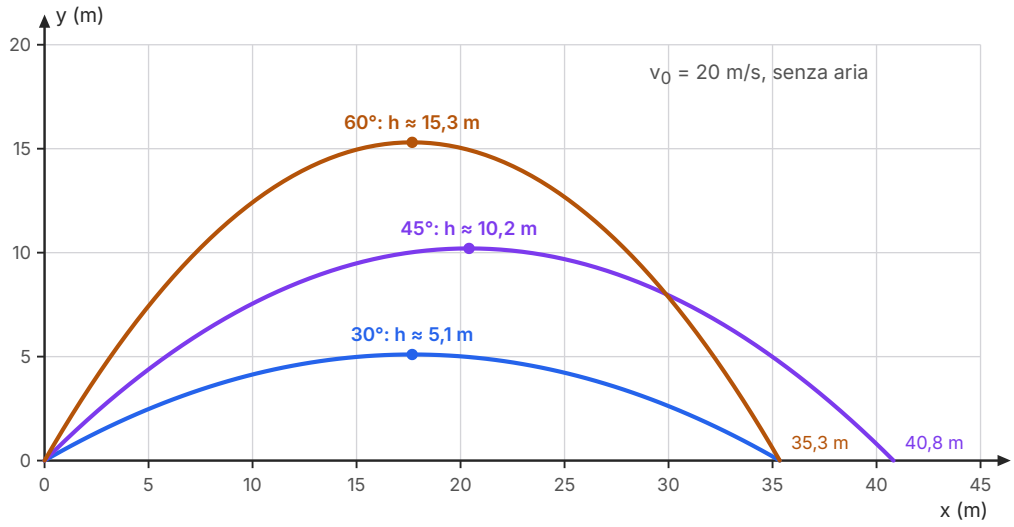


Figura 12.4 Traiettorie di un pallone calciato da terra a 20 m/s con angoli di 30°, 45° e 60° (calcolate senza aria; stessa scala sui due assi). Il punto indica il vertice di ogni parabola, con la sua altezza. I lanci a 30° e a 60° hanno la stessa gittata, 35,3 m; quello a 45° arriva più lontano, a 40,8 m.

12.4.3 Perché 45° è l'angolo della gittata massima

Per una data velocità v_0, quale angolo dà la gittata maggiore? La gittata è proporzionale al prodotto $v_{0x}\,v_{0y}$, mentre la somma dei loro quadrati è fissata: ${v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2 = {v_0}^2$. Basta allora un fatto di algebra: il quadrato di un numero non è mai negativo, quindi

$$(v_{0x} - v_{0y})^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad {v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2 \geq 2\,v_{0x}v_{0y} \quad \Longrightarrow \quad 2\,v_{0x}v_{0y} \leq {v_0}^2$$

Dividendo per g si ottiene $x_G \leq {v_0}^2/g$. L'uguaglianza vale soltanto quando $v_{0x} - v_{0y} = 0$, cioè quando le due componenti sono uguali: è il lancio a 45°, e la gittata massima vale ${v_0}^2/g$. Lo stesso ragionamento spiega l'uguaglianza fra 30° e 60°: scambiare fra loro le due componenti non cambia il prodotto, e scambiarle significa passare da un angolo al suo complementare. Per questo, a parità di v_0, due angoli complementari (20° e 70°, 35° e 55°...) danno sempre la stessa gittata.

DA RICORDARE

Il risultato dei 45° ha tre condizioni, e ciascuna conta: la stessa velocità v_0, un punto di arrivo **alla stessa quota** del punto di lancio, e **niente aria**. Un lanciatore del peso, che rilascia l'attrezzo a circa due metri da terra, ottiene la gittata massima con angoli un po' minori di 45°; un pallone vero, frenato dall'aria, anche.

12.4.4 E l'aria?

Nella realtà l'aria frena il corpo, tanto più quanto più è veloce: la componente orizzontale della velocità diminuisce, il ramo di discesa diventa più corto e più ripido di quello di salita, gittata e altezza risultano minori di quelle calcolate. Per un sasso lanciato a pochi metri l'effetto è piccolo; per un pallone calciato forte o un volano da badminton è enorme. Galileo lo sapeva: nella stessa Giornata quarta discute a lungo come il mezzo, cioè l'aria, alteri il moto, e riconosce che le sue conclusioni valgono esattamente solo togliendo questo impedimento.

APPROFONDIMENTO

Tartaglia e la nuova scienza dei bombardieri

Un secolo prima di Galileo la traiettoria era un problema pratico dei bombardieri. Nel 1537 il matematico bresciano Niccolò Tartaglia pubblicò a Venezia la *Nova scientia*, dedicata al duca di Urbino Francesco Maria della Rovere. Nella dedica racconta che un bombardiere gli aveva chiesto quale alzo mandi il colpo più lontano, e che lui aveva risposto: 45° sull'orizzonte.

La risposta era giusta, ma la teoria su cui poggiava non lo era. Tartaglia ragionava ancora con il moto «violento» e il moto «naturale» della fisica aristotelica (capitolo 1), e disegnava la traiettoria come un tratto rettilineo, seguito da un arco di circonferenza e poi da una discesa rettilinea. In un'opera successiva, i *Quesiti et inventioni diverse* (1546), la disegnò invece come una curva continua.

Il passo decisivo venne con Galileo, che nel 1638 dimostrò che, senza la resistenza del mezzo, la traiettoria è una parabola, e che la gittata è massima a 45° e uguale per alzi che differiscono di uno stesso angolo sopra e sotto i 45°. La *Nova scientia* è spesso indicata come l'atto di nascita della balistica, il primo tentativo di trattare i proiettili con la matematica.

12.5 Il moto circolare uniforme

12.5.1 Periodo e frequenza

Un corpo che percorre una circonferenza con velocità di modulo costante compie un **moto circolare uniforme**: un punto di un disco in rotazione, una cabina della ruota panoramica, con buona approssimazione la Luna intorno alla Terra. Il tempo che il corpo impiega a compiere un giro completo è il suo periodo T, la stessa grandezza che nel capitolo 1 hai misurato per un pendolo. Il numero di giri compiuti in un secondo è la **frequenza** f; periodo e frequenza sono l'uno l'inverso dell'altra:

$$f = \frac{1}{T}$$

La frequenza si misura in s^{-1}, unità che prende il nome di **hertz** (Hz), dal fisico tedesco Heinrich Hertz: 1 Hz è un giro al secondo. Un disco in vinile a 33⅓ giri al minuto ha $f = 33{,}33/60$ Hz = 0,556 Hz e $T = 1{,}80$ s.

12.5.2 La velocità e il radiante

In un periodo il corpo percorre l'intera circonferenza, lunga $2\pi r$. Il modulo della sua velocità, costante, è quindi

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

La direzione della velocità invece cambia di continuo: in ogni punto $\boldsymbol{v}$ è tangente alla circonferenza, cioè perpendicolare al raggio (Figura 12.5a). Per questo la si chiama anche **velocità tangenziale**.

Per dire quanto in fretta gira il corpo conviene misurare l'angolo descritto dal raggio, e in fisica gli angoli si misurano in radianti. Un angolo al centro di una circonferenza misura in **radianti** il rapporto fra l'arco che esso sottende e il raggio:

$$\theta = \frac{\text{arco}}{\text{raggio}} = \frac{l}{r}$$

Un radiante (rad) è dunque l'angolo che sottende un arco lungo quanto il raggio (Figura 12.5b). Il rapporto non dipende dalla circonferenza scelta, perché tutte le circonferenze sono simili. L'angolo giro sottende tutta la circonferenza, $2\pi r$, e misura quindi 2π rad; ne segue $360° = 2\pi$ rad, $180° = \pi$ rad, $90° = \pi/2$ rad, e 1 rad = $180°/\pi \approx 57{,}3°$. Essendo il rapporto fra due lunghezze, il radiante è un numero puro.

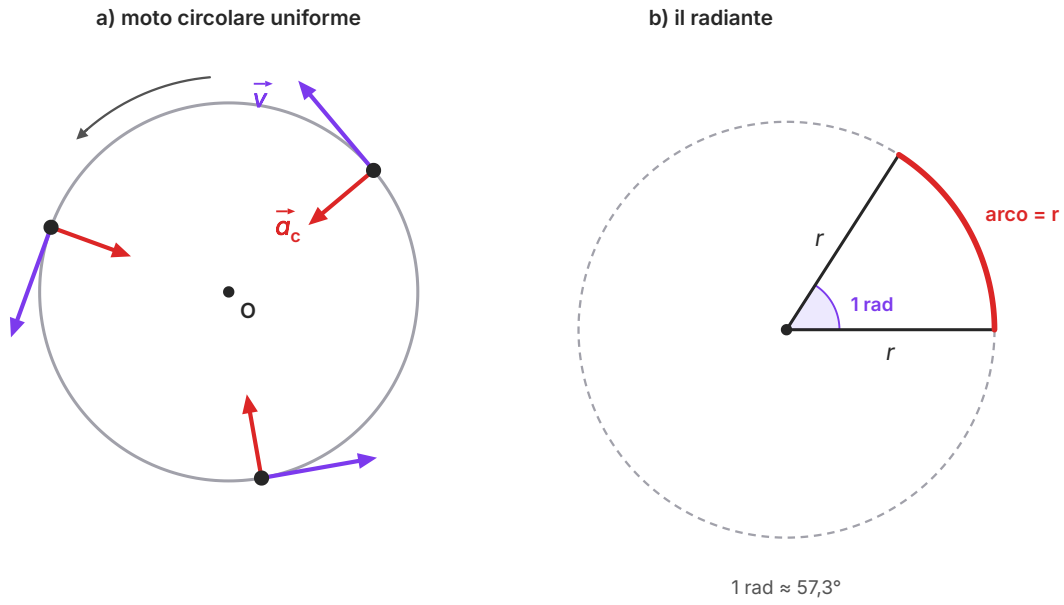


Figura 12.5 a) Nel moto circolare uniforme, in ogni punto la velocità $\boldsymbol{v}$ (in viola) è tangente alla circonferenza e l'accelerazione centripeta $\boldsymbol{a}_c$ (in rosso) è diretta verso il centro O; i moduli sono gli stessi in tutti i punti, le direzioni no. La freccia grigia indica il verso del moto. b) L'angolo di 1 rad sottende un arco lungo quanto il raggio.

12.5.3 La velocità angolare

La **velocità angolare** ω (omega) è il rapporto fra l'angolo descritto dal raggio e il tempo impiegato a descriverlo. In un moto circolare uniforme il raggio descrive 2π rad in un periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad v = \omega\, r$$

La velocità angolare si misura in rad/s. La seconda relazione si ottiene confrontando $v = 2\pi r/T$ con $\omega = 2\pi/T$, e vale **solo se ω è espressa in radianti al secondo**: è proprio per avere una relazione così semplice che in fisica si usano i radianti. Tutti i punti di un disco che gira hanno la stessa ω, ma la velocità tangenziale cresce con la distanza dal centro: sul vinile, $\omega = 2\pi/(1{,}80\ \text{s}) = 3{,}49$ rad/s ovunque, e il bordo, a 15 cm dal centro, va a $3{,}49\ \text{rad/s} \times 0{,}15\ \text{m} = 0{,}52$ m/s.

In due ruote collegate da una catena, come la corona e il pignone di una bicicletta, i denti hanno la stessa velocità tangenziale: $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$: la ruota più piccola gira più in fretta, in proporzione inversa al raggio (o al numero dei denti).

12.5.4 L'accelerazione centripeta

Poiché la direzione della velocità cambia, il moto circolare uniforme è accelerato. Quanto vale l'accelerazione, e dove punta? La risposta si trova con due triangoli simili (Figura 12.6).

- **Le posizioni.** In un breve intervallo Δt il corpo passa da P_1 a P_2 e il raggio ruota di un angolo $\Delta\theta$. Il triangolo OP_1P_2 è isoscele, con i lati uguali lunghi r; la base è lo spostamento, che per un intervallo brevissimo si confonde con l'arco percorso: $|\Delta\boldsymbol{r}| \approx v\,\Delta t$.
- **Le velocità.** Disegniamo $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ con la coda in comune. Hanno lo stesso modulo v, e ciascuna è perpendicolare al proprio raggio; ruotando i raggi di $\Delta\theta$, anche le velocità ruotano di $\Delta\theta$. Il triangolo che formano con $\Delta\boldsymbol{v}$ è quindi isoscele, con i lati uguali lunghi v e lo stesso angolo al vertice $\Delta\theta$.
- **La similitudine.** Due triangoli isosceli con lo stesso angolo al vertice sono simili, quindi le basi stanno fra loro come i lati: $|\Delta\boldsymbol{v}| / v = |\Delta\boldsymbol{r}| / r$, cioè $|\Delta\boldsymbol{v}| = v \cdot v\,\Delta t / r$.

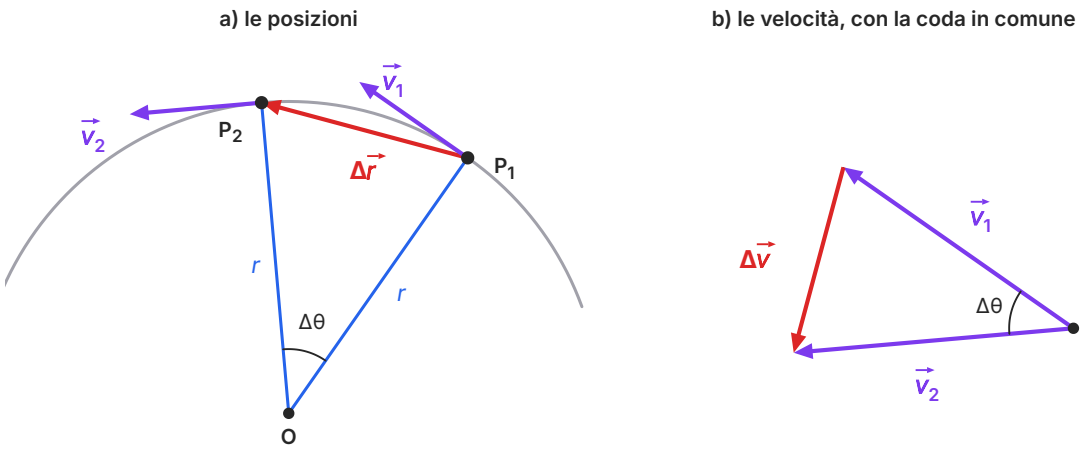


Figura 12.6 Come si ricava l'accelerazione centripeta. a) In un breve intervallo il corpo passa da P_1 a P_2: il triangolo con i due raggi e lo spostamento $\Delta\boldsymbol{r}$ è isoscele, con angolo al vertice $\Delta\theta$. b) Le velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, disegnate con la coda in comune, formano con $\Delta\boldsymbol{v}$ un triangolo isoscele con lo stesso angolo $\Delta\theta$: i due triangoli sono simili. L'angolo è esagerato per chiarezza; quando è piccolo, $\Delta\boldsymbol{v}$ punta verso il centro.

Dividendo per Δt si ottiene il modulo dell'accelerazione. La direzione è quella di $\Delta\boldsymbol{v}$: quando $\Delta\theta$ diventa piccolissimo, $\Delta\boldsymbol{v}$ è perpendicolare alle velocità, quindi diretto lungo il raggio, verso il centro. Per questo si chiama **accelerazione centripeta**:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{diretta verso il centro}$$

La seconda forma si ottiene sostituendo $v = \omega r$. A parità di velocità tangenziale, l'accelerazione centripeta è tanto maggiore quanto più stretta è la curva; a parità di raggio, cresce con il *quadrato* della velocità: a velocità doppia, accelerazione quadrupla. Nel capitolo 14 vedremo quale forza la produce.

ESEMPIO SVOLTO

La Terra che gira e la Luna che le gira intorno

Un punto dell'equatore. La Terra compie un giro su sé stessa rispetto alle stelle in 23 h 56 min, cioè $T = 86\,164$ s; il raggio equatoriale è $r = 6378$ km. Un punto dell'equatore si muove quindi a $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 6{,}378 \times 10^6$ m / 86 164 s = 465 m/s, circa 1670 km/h. La sua accelerazione centripeta è $a_c = v^2/r = (465\text{ m/s})^2 / 6{,}378 \times 10^6$ m = 0,0339 m/s^2, circa 300 volte meno di g: per questo non ci accorgiamo di girare.

La Luna. L'orbita della Luna è quasi circolare, con raggio medio $r = 3{,}844 \times 10^8$ m, e un giro rispetto alle stelle dura 27,3 giorni, cioè $2{,}36 \times 10^6$ s. Allora $v = 2\pi \times 3{,}844 \times 10^8$ m / $2{,}36 \times 10^6$ s = $1{,}02 \times 10^3$ m/s e $a_c = v^2/r = 2{,}7 \times 10^{-3}$ m/s^2, verso la Terra. Da che cosa dipenda questa accelerazione lo scoprirai il prossimo anno, con la gravitazione di Newton.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Proiettile viene dal latino *proicere* (*pro* + *iacere*), «gettare in avanti»: il proiettile è ciò che è gettato in avanti. È lo stesso verbo *iacere*, «gettare», che nel capitolo 10 abbiamo trovato dentro *traiettoria*. Galileo, che scriveva in latino il suo trattato, lo intitola appunto *De motu proiectorum*.

Parabola è il greco παραβολή, da παραβάλλω, «metto accanto, accosto»: «accostamento, confronto». Il nome della curva risale ad Apollonio di Perga, che studiò le sezioni del cono; dal senso di «paragone» viene invece la parabola dei Vangeli, e la nostra parola «parola».

Periodo è il greco περίοδος, da περί, «intorno», e ὁδός, «strada»: il giro, il percorso che torna al punto di partenza. **Centripeto** unisce il latino *centrum*, a sua volta dal greco κέντρον, «pungolo, punta» (la punta fissa del compasso), e il verbo *petere*, «dirigersi verso»: che si dirige verso il centro. L'espressione *vis centripeta* fu coniata da Newton, che la definisce nei *Principia* (1687).

COLLEGAMENTI

In laboratorio: un lancio orizzontale al rallentatore

Obiettivo. Verificare che un lancio orizzontale compone un moto uniforme e una caduta libera, e ricavare velocità di lancio e g.

Materiali. Una pallina da ping-pong riempita di sabbia o una biglia, un tavolo, una guida inclinata (un listello con una scanalatura) appoggiata al tavolo, un metro a nastro fissato in verticale e uno in orizzontale contro una parete chiara, uno smartphone che registri a 60 fotogrammi al secondo su un supporto fermo, un programma di analisi video o un lettore che avanzi un fotogramma alla volta.

Procedimento. 1) Fai scendere la pallina lungo la guida, sempre dallo stesso punto, in modo che lasci il bordo del tavolo in orizzontale. 2) Riprendi il volo con la telecamera perpendicolare al piano del moto. 3) Nel video prendi come $t = 0$ il fotogramma del distacco e leggi le coordinate della pallina ogni tre fotogrammi, cioè ogni 0,05 s: la distanza orizzontale x dal bordo e l'abbassamento d sotto il piano del tavolo.

Tabella 12.2 Dati di un gruppo (dati tipici; intervallo fra le letture 0,05 s, incertezza delle letture ± 0,5 cm).

t (s)	t^2 (s^2)	x (cm)	d (cm)
0,00	0,0000	0,0	0,0
0,05	0,0025	8,0	1,0
0,10	0,0100	14,5	5,5
0,15	0,0225	22,5	11,0
0,20	0,0400	29,5	20,0
0,25	0,0625	38,0	30,0
0,30	0,0900	45,0	44,5
0,35	0,1225	53,0	60,0
0,40	0,1600	59,5	79,0

Che cosa concludere. Il grafico di x in funzione di t è una retta per l'origine: in orizzontale il moto è uniforme, e la pendenza della retta di miglior accordo è la velocità di lancio, $v_0 = (1{,}50 \pm 0{,}03)$ m/s. Il grafico di d in funzione di t^2 (la linearizzazione del capitolo 4) è una retta di pendenza $(4{,}92 \pm 0{,}06)$ m/s^2. Poiché $d = \frac{1}{2} g t^2$, la pendenza è $g/2$, quindi $g = (9{,}84 \pm 0{,}13)$ m/s^2: un valore compatibile con 9,81 m/s^2.

Sicurezza. Lavora su un pavimento libero e recupera subito la pallina, che può far scivolare chi ci passa sopra.

Per la relazione. Segui lo schema del capitolo 4: tabella, i due grafici con le barre d'errore, pendenze con incertezza (rette di massima e minima pendenza), g e la sua compatibilità. Discuti gli errori sistematici: telecamera non perpendicolare al piano del moto, prospettiva (pallina e metro a distanze diverse dall'obiettivo), istante del distacco, aria.

IN SINTESI

Nel piano: $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$; la velocità $\boldsymbol{v}$ (m/s) è tangente alla traiettoria; l'accelerazione $\boldsymbol{a} = \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ (m/s^2) c'è se la velocità cambia in modulo *o* in direzione.

Velocità relative: $\boldsymbol{v}_{A,C} = \boldsymbol{v}_{A,B} + \boldsymbol{v}_{B,C}$, somma di vettori.

Lancio orizzontale da altezza h: $t_v = \sqrt{(2h/g)}$, indipendente da v_0; $x_G = v_0 t_v$; traiettoria $y = -g\,x^2/(2v_0^2)$.

Lancio obliquo su terreno orizzontale: $t_v = 2v_{0y}/g$; $h_{max} = v_{0y}^2/(2g)$; $x_G = 2v_{0x}v_{0y}/g$, massima (v_0^2/g) a 45°.

Moto circolare uniforme: $f = 1/T$ (Hz); $v = 2\pi r/T$; $\omega = 2\pi/T$ (rad/s); $v = \omega r$; $a_c = v^2/r = \omega^2 r$, verso il centro. Angolo in radianti = arco/raggio; 2π rad = 360°.

SINTESI

- Nel piano posizione, spostamento, velocità e accelerazione sono vettori. Il modulo dello spostamento non supera mai la distanza percorsa.
- La velocità istantanea è tangente alla traiettoria. C'è accelerazione anche quando cambia solo la direzione della velocità.
- Un moto nel piano è la composizione di due moti rettilinei indipendenti, che hanno in comune solo il tempo.
- Le velocità relative si sommano come vettori. Una barca con la prua perpendicolare alla riva attraversa il fiume in un tempo che non dipende dalla corrente.
- Senza aria un proiettile si muove di moto uniforme in orizzontale e uniformemente accelerato in verticale, lungo una parabola (Galileo, *Discorsi*, 1638).
- Nel lancio orizzontale il tempo di volo non dipende dalla velocità di lancio; la gittata le è proporzionale.
- Nel lancio obliquo tempo di volo e altezza massima dipendono dalla sola componente verticale; nel punto più alto la velocità è orizzontale, non nulla.
- A parità di velocità, su terreno orizzontale e senza aria, la gittata è massima a 45° e uguale per angoli complementari. L'aria riduce gittata e altezza.
- Nel moto circolare uniforme $v = 2\pi r/T$, $f = 1/T$, $\omega = 2\pi/T$ in rad/s e $v = \omega r$; il radiante è il rapporto arco/raggio.
- L'accelerazione centripeta, verso il centro, vale $v^2/r = \omega^2 r$ e si ricava con due triangoli simili.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In un moto lungo una traiettoria curva, la velocità istantanea è:
   A. diretta verso il centro di curvatura
   B. tangente alla traiettoria, nel verso del moto
   C. parallela allo spostamento totale
   D. perpendicolare alla traiettoria

2. ● Un'auto percorre una rotatoria circolare con il tachimetro fermo a 30 km/h. La sua accelerazione:
   A. è diretta verso il centro della rotatoria
   B. è nulla, perché il modulo della velocità non cambia
   C. è tangente alla rotatoria
   D. è diretta verso l'esterno della rotatoria

3. ● Due palline lasciano in orizzontale, nello stesso istante, il bordo dello stesso tavolo: una a 1,0 m/s, l'altra a 2,0 m/s. Trascurando l'aria, la seconda:
   A. tocca terra prima della prima
   B. tocca terra dopo la prima
   C. tocca terra insieme alla prima, a distanza quadrupla dal tavolo
   D. tocca terra insieme alla prima, a distanza doppia dal tavolo

4. ● Nel punto più alto della traiettoria di un pallone calciato obliquamente, senza aria:
   A. velocità e accelerazione sono nulle
   B. la velocità è nulla, l'accelerazione vale g verso il basso
   C. la velocità è orizzontale, l'accelerazione vale g verso il basso
   D. la velocità è orizzontale, l'accelerazione è nulla

5. ●● Con la stessa velocità iniziale, senza aria e su terreno orizzontale, quale coppia di angoli di lancio dà la stessa gittata?
   A. 30° e 45°
   B. 30° e 60°
   C. 45° e 60°
   D. 60° e 90°

6. ● Una ruota compie 5 giri in 2,0 s. Il suo periodo è:
   A. 2,5 s
   B. 10 s
   C. 2,5 Hz
   D. 0,40 s

7. ●● Un angolo di $\pi/2$ rad è:
   - **A.** un angolo retto
   - **B.** un angolo piatto
   - **C.** un angolo di circa 1,6°
   - **D.** un angolo giro

8. ●● Una barca va a 3,0 m/s rispetto all'acqua, con la prua perpendicolare alla riva, in un fiume la cui corrente scorre a 4,0 m/s. Il modulo della sua velocità rispetto alla riva è:
   - **A.** 7,0 m/s
   - **B.** 1,0 m/s
   - **C.** 5,0 m/s
   - **D.** 3,0 m/s

Vero o falso

9. ● Senza aria, la componente orizzontale della velocità di un proiettile resta costante per tutto il volo. V / F

10. ● Nel moto circolare uniforme la velocità è costante. V / F

11. ●● Se si raddoppia la velocità di un lancio orizzontale dalla stessa altezza, raddoppia anche il tempo di volo. V / F

12. ●● Il modulo dello spostamento di un corpo non può mai superare la distanza che il corpo ha percorso. V / F

13. ●● Se la velocità angolare di una ruota raddoppia, l'accelerazione centripeta di un punto del bordo raddoppia. V / F

Applicare

14. ● Una persona cammina per 40 m verso est e poi per 30 m verso nord, in tutto in 50 s. Calcola il modulo dello spostamento, la distanza percorsa, il modulo della velocità media vettoriale e la velocità scalare media.

15. ● Su un tapis roulant d'aeroporto che si muove a 0,60 m/s, un viaggiatore cammina a 1,2 m/s rispetto al nastro. Calcola la sua velocità rispetto al pavimento quando cammina a) nel verso del nastro; b) in verso opposto.

16. ● Una pallina rotola giù dal bordo di un tavolo alto 0,90 m. Trascurando l'aria, calcola quanto tempo impiega a toccare il pavimento.

17. ●● Una pallina lascia in orizzontale il bordo di un tavolo alto 0,90 m e tocca il pavimento a 0,60 m dal bordo, in orizzontale. Con quale velocità ha lasciato il tavolo?

18. ●● Completa. Un pallone è calciato da terra con $v_{0x} = 12$ m/s e $v_{0y} = 9{,}0$ m/s. Il modulo della velocità iniziale è _____ m/s; nel punto più alto la velocità del pallone vale _____ m/s; il pallone sale per _____ s.

19. ● Esprimi a) 90° in radianti; b) 1,5 rad in gradi; c) tre giri completi in radianti.

20. ●● Osserva la Figura 12.4. a) Quante volte l'altezza massima del lancio a 60° supera quella del lancio a 30°? b) Qual è la gittata dei lanci a 30° e a 60°, e di quanto la supera quella a 45°? c) Quale dei tre palloni resta in aria più a lungo, e perché lo si capisce dal grafico senza calcoli?

Problemi

21. ●● Un aereo che porta aiuti vola in orizzontale a 70 m/s, a 180 m di quota, e sgancia un pacco. Trascurando l'aria, calcola a) quanto dura la caduta del pacco; b) a quale distanza orizzontale dal bersaglio il pilota deve sganciarlo; c) il modulo della velocità con cui il pacco tocca il suolo.

22. ●● Una nuotatrice attraversa un fiume largo 80 m nuotando a 0,90 m/s rispetto all'acqua, perpendicolarmente alla riva; la corrente è di 1,2 m/s. Calcola il tempo di attraversamento, di quanto viene trascinata a valle e il modulo della sua velocità rispetto alla riva.

23. ●●● Un calciatore calcia il pallone da terra con componenti della velocità iniziale $v_{0x} = v_{0y} = 15$ m/s. Trascurando l'aria: a) quale angolo forma la velocità iniziale con il terreno, e quanto vale il suo modulo? b) Calcola il tempo di volo, l'altezza massima e la gittata. c) A 35 m dal punto del calcio, sulla traiettoria del pallone, c'è una porta con la traversa alta 2,44 m. A che altezza passa il pallone in quel punto? Entra in porta?

24. ●●● Un sasso è lanciato da terra a 14 m/s, con un angolo di 60° sull'orizzontale. Trascurando l'aria: a) calcola le componenti della velocità iniziale con il triangolo notevole; b) calcola l'altezza massima, il tempo di volo e la gittata; c) calcola la gittata che si otterrebbe con la stessa velocità a 45°, e di quanto per cento è maggiore.

25. ●● In una bicicletta la catena collega una corona di 44 denti a un pignone di 16 denti, solidale con la ruota posteriore, di raggio 0,34 m. Il ciclista pedala facendo un giro di pedali al secondo. Calcola a) la frequenza della ruota posteriore; b) la velocità della bicicletta, in m/s e in km/h, se le ruote rotolano senza strisciare; c) la velocità angolare della ruota e l'accelerazione centripeta della valvola, che si trova sul bordo.

26. ●●● Il cestello di una lavatrice, di raggio 25 cm, durante la centrifuga compie 1200 giri al minuto. Calcola la frequenza, il periodo, la velocità angolare, la velocità di un punto della parete del cestello e la sua accelerazione centripeta. Quante volte è più grande di g? Spiega, con il concetto di velocità tangente, perché l'acqua esce dai fori del cestello.

Ragionare e argomentare

27. ●● Senza usare la calcolatrice, dimostra con i triangoli notevoli che, a parità di velocità iniziale, la gittata di un lancio a 30° è uguale a quella di un lancio a 60°. Poi spiega perché la stessa cosa vale per ogni coppia di angoli complementari.

28. ●●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Nel punto più alto della traiettoria il pallone si ferma per un istante, quindi in quel momento la sua accelerazione è zero. Per questo un pallone calciato più forte, che arriva più in alto, ci mette anche più tempo a ricadere, qualunque sia l'angolo». Individua e correggi gli errori.

29. ●● Commenta la fonte. Galileo apre il suo trattato sui proiettili così: «Immagino con la mente un corpo lanciato su un piano orizzontale, tolto ogni impedimento: [...] il suo moto su quel piano sarà uniforme e perpetuo, se il piano si estende all'infinito» (*Discorsi*, Giornata quarta; traduzione della redazione). Che cosa afferma? Quale idealizzazione introduce, e perché un esperimento reale non può riprodurla esattamente? Come potresti verificare in laboratorio la parte dell'affermazione che riguarda il moto dopo il bordo del piano?

30. ●●● Progetta un esperimento, con materiali di casa, per verificare che il tempo di caduta di un lancio orizzontale non dipende dalla velocità di lancio. Indica che cosa misuri o ascolti, quali errori possono falsare il risultato e come li riduci.

PER APPROFONDIRE

- [GAL] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*: la Giornata quarta, sul moto dei proiettili; il dialogo iniziale fra Salviati, Sagredo e Simplicio si legge senza difficoltà anche senza seguire le dimostrazioni.
- [RUS] Lucio Russo, *La rivoluzione dimenticata*: la geometria ellenistica, Apollonio e le coniche, e la loro eredità nella scienza moderna.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sul moto, con la velocità come vettore e la composizione dei moti.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sul moto in due dimensioni, con molti esempi tratti dallo sport.

Glossario del capitolo

Accelerazione centripeta
Accelerazione di un corpo in moto circolare uniforme: diretta verso il centro, di modulo $a_c = v^2/r = \omega^2 r$.

Accelerazione vettoriale
Rapporto tra la variazione del vettore velocità e l'intervallo di tempo, preso brevissimo; c'è anche quando cambia solo la direzione della velocità.

Composizione dei moti
Descrizione di un moto nel piano come somma di due moti rettilinei lungo gli assi, che avvengono contemporaneamente.

Composizione delle velocità
Regola per passare da un sistema di riferimento a un altro: $\boldsymbol{v}_{A,C} = \boldsymbol{v}_{A,B} + \boldsymbol{v}_{B,C}$, una somma di vettori.

Frequenza
Numero di giri (o di ripetizioni) compiuti in un secondo; è l'inverso del periodo, $f = 1/T$, e si misura in hertz.

Gittata
Distanza orizzontale tra il punto di lancio e il punto di arrivo di un proiettile.

Hertz
Unità di misura della frequenza (Hz): 1 Hz = 1 s^{-1}, un giro o una ripetizione al secondo.

Lancio obliquo
Moto di un proiettile lanciato con velocità iniziale inclinata rispetto all'orizzontale.

Lancio orizzontale
Moto di un proiettile lanciato con velocità iniziale orizzontale da una certa altezza; il tempo di volo $\sqrt{(2h/g)}$ non dipende dalla velocità di lancio.

Moto circolare uniforme
Moto lungo una circonferenza con velocità di modulo costante; la velocità cambia direzione e c'è un'accelerazione centripeta.

Moto del proiettile
Moto di un corpo lanciato che si muove soggetto solo al proprio peso: uniforme in orizzontale, uniformemente accelerato in verticale.

Principio di indipendenza dei moti
I moti lungo due assi perpendicolari procedono ciascuno come se l'altro non ci fosse; hanno in comune solo il tempo.

Radiante
Unità di misura degli angoli: un angolo al centro misura in radianti il rapporto arco/raggio; 2π rad = 360°.

Tempo di volo
Intervallo di tempo fra il lancio di un proiettile e il suo arrivo al suolo.

Traiettoria parabolica
Traiettoria di un proiettile senza resistenza dell'aria: un arco di parabola, come dimostrò Galileo.

Velocità angolare
Rapporto tra l'angolo descritto dal raggio e il tempo impiegato; nel moto circolare uniforme $\omega = 2\pi/T$, in rad/s.

Velocità tangenziale
Velocità di un punto in moto circolare, tangente alla circonferenza; ha modulo $v = \omega r$.

Velocità vettoriale
Vettore che ha per modulo la velocità istantanea, la direzione della tangente alla traiettoria e il verso del moto.

Vettore posizione
Vettore che va dall'origine del sistema di riferimento al punto in cui si trova il corpo; le sue componenti sono le coordinate del punto.

Soluzioni

1. B. La velocità istantanea è il limite della velocità media su intervalli brevissimi: la corda diventa tangente alla curva.

2. A. Il modulo è costante ma la direzione della velocità cambia: l'accelerazione è centripeta, verso il centro.

3. D. Il tempo di caduta $\sqrt{(2h/g)}$ non dipende da v_0; la gittata $v_0 t_v$ è proporzionale a v_0.

4. C. Nel punto più alto si annulla solo la componente verticale; quella orizzontale resta, e l'accelerazione è sempre g verso il basso.

5. B. 30° e 60° sono complementari: le componenti della velocità iniziale si scambiano e il prodotto $2v_{0x}v_{0y}/g$ non cambia.

6. D. T = 2,0 s / 5 = 0,40 s (la frequenza è 2,5 Hz, ma non è un periodo).

7. A. π rad = 180°, quindi π/2 rad = 90°.

8. C. Velocità perpendicolari: $v = \sqrt{(3{,}0^2 + 4{,}0^2)}$ m/s = 5,0 m/s.

9. V. L'accelerazione è verticale: la componente orizzontale della velocità non cambia.

10. F. È costante il modulo; la direzione cambia continuamente, quindi il vettore velocità non è costante.

11. F. $t_v = \sqrt{(2h/g)}$ non dipende da v_0; raddoppia invece la gittata.

12. V. Il segmento che unisce partenza e arrivo è il percorso più breve fra i due punti; i due valori coincidono solo per un moto rettilineo senza inversioni.

13. F. $a_c = \omega^2 r$: con ω doppia l'accelerazione quadruplica.

14. $|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(40^2 + 30^2)}$ m = 50 m; distanza percorsa 40 m + 30 m = 70 m; $|\boldsymbol{v}_m|$ = 50 m / 50 s = 1,0 m/s; velocità scalare media 70 m / 50 s = 1,4 m/s.

15. a) 1,2 m/s + 0,60 m/s = 1,8 m/s; b) 1,2 m/s − 0,60 m/s = 0,6 m/s, nel verso in cui cammina il viaggiatore.

16. $t = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \times 0{,}90\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)}$ = 0,43 s.

17. $t_v = \sqrt{(2 \times 0{,}90\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)}$ = 0,429 s; $v_0 = x_G/t_v$ = 0,60 m / 0,429 s = 1,4 m/s.

18. $v_0 = \sqrt{(12^2 + 9{,}0^2)}$ m/s = 15 m/s; nel punto più alto $v = v_{0x}$ = 12 m/s; tempo di salita v_{0y}/g = 9,0 m/s / 9,8 m/s² = 0,92 s.

19. a) 90° = π/2 rad ≈ 1,57 rad; b) 1,5 rad × 180°/π ≈ 86°; c) 3 × 2π rad = 6π rad ≈ 18,8 rad.

20. a) 15,3 m / 5,1 m = 3 volte (l'altezza è proporzionale a $v_{0y}{}^2$, che passa da 100 a 300 m²/s²). b) 35,3 m; a 45° la gittata è 40,8 m, cioè 5,5 m in più. c) Il pallone calciato a 60°: arriva più in alto, e il tempo di volo, come l'altezza, dipende solo dalla componente verticale, che è la più grande (salita e discesa durano entrambe $\sqrt{(2h_{max}/g)}$).

21. a) $t = \sqrt{(2 \times 180\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)}$ = 6,06 s ≈ 6,1 s. b) x = 70 m/s × 6,06 s = 424 m ≈ 4,2 × 10² m prima del bersaglio. c) $|v_y|$ = 9,8 m/s² × 6,06 s = 59,4 m/s; $v = \sqrt{(70^2 + 59{,}4^2)}$ m/s = 92 m/s.

22. Tempo: 80 m / 0,90 m/s = 89 s. Deriva: 1,2 m/s × 88,9 s = 1,1 × 10² m. Velocità rispetto alla riva: $\sqrt{(0{,}90^2 + 1{,}2^2)}$ m/s = 1,5 m/s (avanza a valle di 4 m ogni 3 m di attraversamento).

23. a) Componenti uguali: 45°; $v_0 = \sqrt{2} \times 15$ m/s = 21 m/s. b) t_v = 2 × 15 m/s / 9,8 m/s² = 3,06 s ≈ 3,1 s; h_{max} = (15 m/s)²/(2 × 9,8 m/s²) = 11,5 m ≈ 11 m; x_G = 15 m/s × 3,06 s = 45,9 m ≈ 46 m. c) Il pallone arriva a x = 35 m dopo t = 35 m / 15 m/s = 2,33 s; in quell'istante y = 15 m/s × 2,33 s − ½ × 9,8 m/s² × (2,33 s)² = 35,0 m − 26,7 m = 8,3 m. Passa ben sopra la traversa (8,3 m > 2,44 m): non entra.

24. a) v_{0x} = 14 m/s / 2 = 7,0 m/s; $v_{0y} = (\sqrt{3}/2) \times 14$ m/s = 12,1 m/s. b) h_{max} = (12,1 m/s)²/(2 × 9,8 m/s²) = 7,5 m; t_v = 2 × 12,1 m/s / 9,8 m/s² = 2,5 s; x_G = 7,0 m/s × 2,47 s

= 17 m (17,3 m). c) A 45°: $x_G = v_0^2/g$ = (14 m/s)^2 / 9,8 m/s^2 = 20 m; (20,0 − 17,3)/17,3 ≈ 0,15, circa il 15% in più.

25. a) Corona e pignone hanno la stessa velocità ai denti, quindi le frequenze stanno in rapporto inverso al numero dei denti: f = 1,0 Hz × 44/16 = 2,75 Hz ≈ 2,8 Hz. b) $v = 2\pi r f$ = 2π × 0,34 m × 2,75 Hz = 5,9 m/s ≈ 21 km/h. c) $\omega = 2\pi f$ = 17 rad/s; $a_c = \omega^2 r$ = (17,3 rad/s)^2 × 0,34 m = 1,0 × 10^2 m/s^2.

26. f = 1200/60 Hz = 20 Hz; $T = 1/f$ = 0,050 s; $\omega = 2\pi f$ = 126 rad/s; $v = \omega r$ = 126 rad/s × 0,25 m = 31 m/s; a_c = $\omega^2 r$ = 3,9 × 10^3 m/s^2, circa 400 volte g. Ogni goccia ha velocità tangente alla parete; finché è trattenuta dalla parete viene costretta a curvare, ma dove trova un foro nulla la costringe più e se ne va lungo la tangente, uscendo dal cestello.

27. A 30°: $v_{0x} = (\sqrt{3}/2)v_0$, $v_{0y} = v_0/2$; a 60°: $v_{0x} = v_0/2$, v_{0y} = $(\sqrt{3}/2)v_0$. In entrambi i casi $2v_{0x}v_{0y}/g = (\sqrt{3}/2)v_0^2/g$. Traccia: per un angolo qualsiasi α le componenti sono i cateti di un triangolo rettangolo con ipotenusa v_0; nel triangolo con angolo 90° − α gli stessi cateti si scambiano di ruolo, quindi il prodotto, e la gittata, non cambiano.

28. Primo errore: nel punto più alto si annulla solo la componente verticale della velocità; la componente orizzontale resta, e il pallone non si ferma. Secondo errore: l'accelerazione è sempre g verso il basso, anche nel punto più alto (se fosse zero, la velocità non cambierebbe più). Terzo: il tempo di volo dipende dalla componente verticale della velocità iniziale, $t_v = 2v_{0y}/g$, non dalla «forza» del calcio: un pallone calciato più forte ma più radente può restare in aria meno a lungo. È vero invece che, a parità di angolo, più velocità significa più altezza e più tempo.

29. Traccia di risposta. Galileo afferma che un corpo in moto su un piano orizzontale, senza attriti e senza aria, prosegue con velocità costante per sempre: è il nucleo del principio d'inerzia (capitolo 13). L'idealizzazione consiste nel togliere ogni «impedimento» e nell'immaginare un piano infinito: in laboratorio l'attrito e l'aria non si eliminano del tutto e nessun piano è infinito. Si può però verificare il seguito del ragionamento: dopo il bordo del piano il moto orizzontale resta uniforme mentre quello verticale è una caduta libera; con un video al rallentatore si misura che x cresce in proporzione a t e l'abbassamento in proporzione a t^2, come nell'esperienza di laboratorio del capitolo.

30. Traccia di risposta. Due monete: una appoggiata sul bordo del tavolo, l'altra sul piano, poco dietro; con un righello tenuto orizzontale si colpisce di lato la seconda in modo che parta in orizzontale e che lo stesso colpo faccia cadere la prima dal bordo. Se cadono insieme si sente un solo «tic» sul pavimento (meglio se duro); ripetendo con colpi più o meno forti, le gittate cambiano ma il suono resta unico. Per una misura, si registra l'audio con lo smartphone e si confrontano gli istanti dei due impatti (la risoluzione è di pochi millisecondi, mentre la caduta da 0,80 m dura circa 0,40 s). Errori: le monete non partono esattamente nello stesso istante, la moneta colpita può partire un po' inclinata verso l'alto o verso il basso, l'aria influisce poco su monete pesanti e piatte; si riducono ripetendo più volte e scartando i colpi in cui la moneta ruota o sobbalza.