CAPITOLO

11

Il moto uniformemente accelerato e la caduta dei gravi

«I mobili grandi e i piccoli ancora, essendo della medesima gravità in spezie, si muovono con pari velocità.» — Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Giornata prima (1638)

OBIETTIVI

1. Definire l'accelerazione media e istantanea e interpretarne il segno.
2. Usare le leggi del moto uniformemente accelerato e leggerne i grafici velocità-tempo e spazio-tempo.
3. Ricavare lo spostamento come area sotto il grafico velocità-tempo e usare la relazione senza il tempo.
4. Ricostruire il dibattito sulla caduta dei gravi da Aristotele a Galileo e la legge dei numeri dispari.
5. Risolvere problemi di caduta libera e di lancio verticale.
6. Calcolare e discutere la distanza di arresto di un veicolo.

INDICE DEL CAPITOLO

11.1 L'accelerazione 2
11.2 Il moto uniformemente accelerato 3
11.3 Galileo e la caduta dei gravi 7
11.4 La caduta libera e il lancio verticale 12
11.5 Fermarsi in tempo: la distanza di arresto 16

Fisica 3 · Parte IV · Il moto · versione 1.0
Capitolo 11: Il moto uniformemente accelerato e la caduta dei gravi · pagine 273–296 del volume completo · estratto per lo studio

Un'automobile ferma al semaforo scatta quando scatta il verde; un sasso lasciato cadere da un ponte va sempre più veloce; un ciclista che smette di pedalare in salita rallenta fino a fermarsi. Nel capitolo 10 abbiamo descritto i moti a velocità costante, ma in natura e nella tecnica i moti in cui la velocità *cambia* sono la regola. Per descriverli serve una grandezza nuova, l'accelerazione, che misura quanto rapidamente cambia la velocità.

Il caso più semplice, e il più importante, è quello in cui la velocità cambia sempre della stessa quantità in tempi uguali. È il moto di un corpo che cade, e intorno alla caduta dei gravi si è giocata una delle partite decisive nella storia del pensiero: per Aristotele i corpi più pesanti cadono più in fretta; per Galileo, nel vuoto, tutti cadono allo stesso modo. In questo capitolo costruiremo le leggi del moto uniformemente accelerato, seguiremo il ragionamento e gli esperimenti di Galileo sul piano inclinato e applicheremo ciò che abbiamo imparato alla caduta libera, al lancio verso l'alto e a una questione molto concreta: quanta strada serve a un'auto per fermarsi.

11.1 L'accelerazione

11.1.1 Accelerazione media

Un'auto passa da 0 a 100 km/h in 8 s, un'altra in 12 s: la prima «accelera di più». Per dare un numero a questa impressione si confronta la variazione di velocità con il tempo in cui avviene. Se in un intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ la velocità passa da v_1 a v_2, l'**accelerazione media** è il rapporto

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Nel Sistema Internazionale la velocità si misura in m/s e il tempo in s, quindi l'accelerazione si misura in (m/s)/s, cioè in **metri al secondo quadrato**, $\mathrm{m/s^2}$. Un'accelerazione di 3 $\mathrm{m/s^2}$ significa che la velocità aumenta di 3 m/s ogni secondo: dopo 1 s la velocità è cresciuta di 3 m/s, dopo 2 s di 6 m/s, e così via. Per la prima auto, 100 km/h = 27,8 m/s e a_m = 27,8 m/s / 8 s ≈ 3,5 $\mathrm{m/s^2}$; per la seconda $a_m \approx 2{,}3\ \mathrm{m/s^2}$.

Come la velocità media del capitolo 10, l'accelerazione media dice soltanto com'è cambiata la velocità tra l'inizio e la fine dell'intervallo, non che cosa è successo in mezzo. Restringendo l'intervallo intorno a un istante si ottiene l'**accelerazione istantanea**: l'accelerazione media su un intervallo di tempo così breve che, rendendolo ancora più breve, il risultato non cambia più in modo apprezzabile. È la stessa operazione con cui, nel capitolo 10, siamo passati dalla velocità media alla velocità istantanea.

11.1.2 Il segno dell'accelerazione

Nei moti rettilinei la velocità ha un segno, positivo se il corpo si muove nel verso dell'asse e negativo nel verso opposto. Anche l'accelerazione ha un segno, ed è il segno di Δv. Un ciclista che procede nel verso positivo e frena passa, per esempio, da 8 m/s a 2 m/s in 3 s: $a_m = (2 - 8)\ \text{m/s} / 3\ \text{s} = -2\ \text{m/s}^2$. Il segno meno non significa «meno accelerazione», ma un'accelerazione rivolta nel verso negativo dell'asse.

La regola che conta è il confronto fra i due segni. Se velocità e accelerazione hanno lo **stesso segno**, il corpo va sempre più veloce; se hanno **segni opposti**, il corpo rallenta. Un moto in cui il corpo rallenta si chiama spesso **moto decelerato**, e nel linguaggio comune si parla di «decelerazione»; in fisica è semplicemente un'accelerazione opposta alla velocità.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **«Accelerazione negativa vuol dire che il corpo rallenta.»** Non sempre. Un'auto che fa retromarcia (velocità negativa) e preme sull'acceleratore ha accelerazione negativa e va sempre più veloce: la sua velocità passa per esempio da −1 m/s a −3 m/s, e $\Delta v = -2$ m/s. Il segno di a da solo dipende soltanto da come abbiamo orientato l'asse; ciò che dice se il moto è accelerato o decelerato è il confronto fra il segno di a e quello di v.

11.2 Il moto uniformemente accelerato

11.2.1 La legge della velocità

Un moto rettilineo si dice **moto uniformemente accelerato** (MRUA) quando la sua accelerazione è costante: la velocità cambia della stessa quantità in intervalli di tempo uguali. In questo caso l'accelerazione media è la stessa su qualunque intervallo e coincide con l'accelerazione istantanea, che indichiamo semplicemente con a. Se l'orologio parte da $t = 0$, quando la velocità vale v_0, dopo un tempo t la velocità è cambiata di $a \cdot t$:

$$v = v_0 + at$$

È una funzione di primo grado del tempo, della forma $y = mx + q$ che conosci dalla matematica: il grafico velocità-tempo è una **retta**, che taglia l'asse delle velocità in v_0 e ha **pendenza uguale all'accelerazione** (Figura 11.1). Una retta che sale indica accelerazione positiva, una retta che scende accelerazione negativa; nel moto rettilineo uniforme, con $a = 0$, la retta è orizzontale.

11.2.2 Lo spostamento come area

Nel capitolo 10 abbiamo visto che nel moto uniforme lo spostamento è l'area del rettangolo sotto il grafico v–t, base t e altezza v. Lo stesso vale per qualunque moto rettilineo: lo sposta-

mento è l'area compresa fra il grafico v–t e l'asse dei tempi. L'idea si giustifica dividendo il tempo in intervalli molto brevi: in ciascuno la velocità è quasi costante, lo spostamento è l'area di un rettangolino sottile, e la somma dei rettangolini, quando sono abbastanza sottili, riempie la figura sotto il grafico.

Nel moto uniformemente accelerato la figura è un trapezio, che conviene dividere in un rettangolo e un triangolo (Figura 11.1). Il rettangolo ha base t e altezza v_0: area $v_0 t$, lo spostamento che il corpo farebbe se mantenesse la velocità iniziale. Il triangolo ha base t e altezza $v - v_0 = at$: area $\frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2}at^2$, lo spostamento «in più» dovuto all'accelerazione. Sommando e aggiungendo la posizione iniziale s_0:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2$$

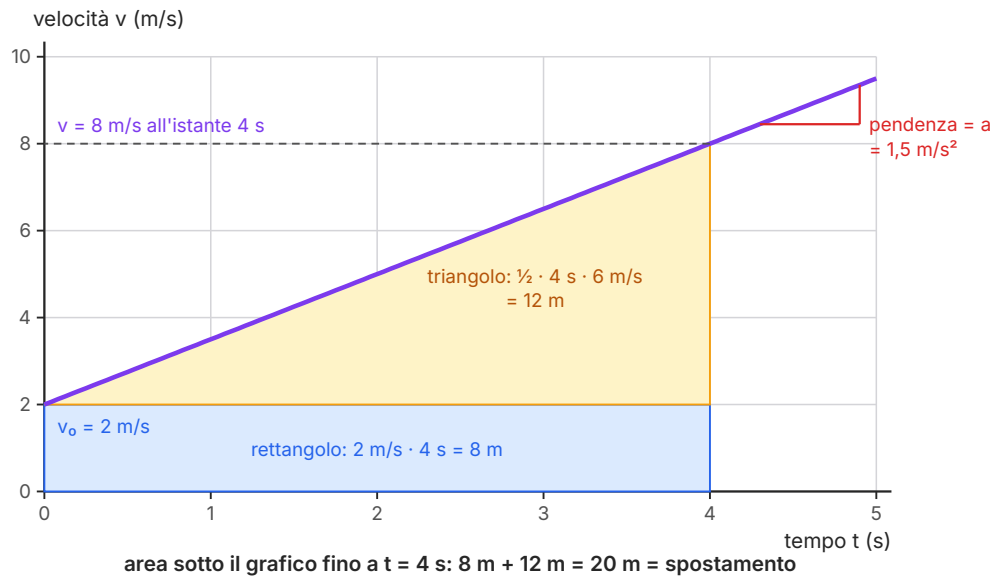


Figura 11.1 Grafico velocità-tempo di un moto uniformemente accelerato con v_0 = 2 m/s e a = 1,5 m/s^2. La pendenza della retta è l'accelerazione. L'area sotto il grafico fino a t = 4 s, divisa in un rettangolo ($v_0 t$ = 8 m) e in un triangolo ($\frac{1}{2}at^2$ = 12 m), è lo spostamento: 20 m.

Se il corpo parte da fermo dall'origine ($s_0 = 0$, $v_0 = 0$) la legge si riduce a $s = \frac{1}{2}at^2$: la posizione è proporzionale al **quadrato** del tempo. È la funzione $y = ax^2$ che conosci, e il grafico spazio-tempo è un arco di **parabola**. Anche con $v_0 \neq 0$ il grafico s–t è un arco di parabola, che parte inclinato invece che orizzontale. La Figura 11.2 mette a confronto i tre grafici dello stesso moto: la posizione cresce sempre più rapidamente, la velocità cresce in modo uniforme, l'accelerazione resta costante. La pendenza del grafico s–t in un punto (quella della retta che lo tocca in quel punto, la tangente) è la velocità istantanea: nel MRUA aumenta con regolarità, e la curva si fa sempre più ripida.

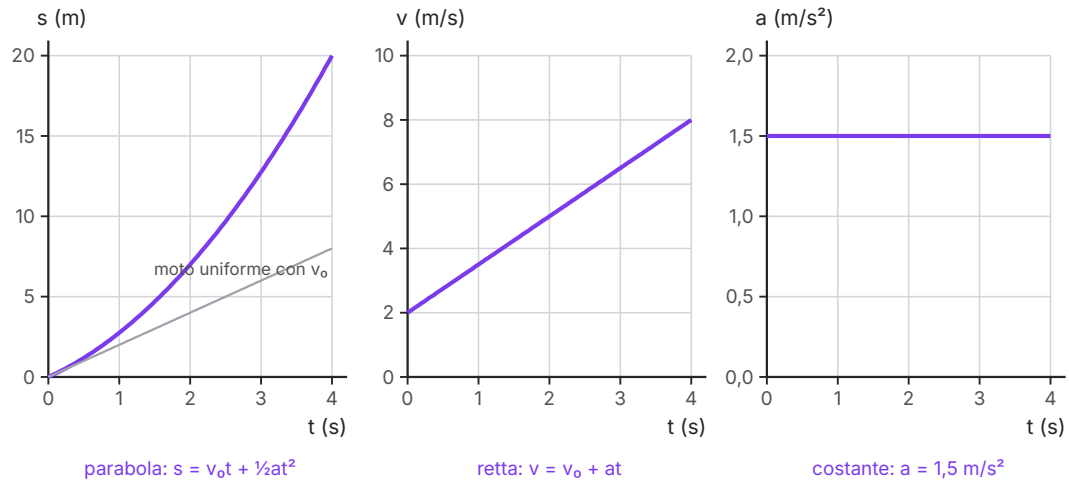


Figura 11.2 I tre grafici dello stesso moto uniformemente accelerato (v_0 = 2 m/s, a = 1,5 m/s^2). Spazio-tempo: un arco di parabola, che si stacca sempre di più dalla retta grigia del moto uniforme con velocità v_0. Velocità-tempo: una retta di pendenza a. Accelerazione-tempo: una retta orizzontale.

11.2.3 Il teorema della velocità media

L'area di un trapezio è la semisomma delle basi per l'altezza. Nel grafico v–t le «basi» sono le velocità v_0 e v, l'«altezza» è il tempo t: lo spostamento è quindi

$$\Delta s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

Questa scrittura ha un significato che vale la pena di dire a parole. Nel moto uniformemente accelerato la velocità media è la media aritmetica della velocità iniziale e di quella finale, e lo spostamento è quello che il corpo farebbe *muovendosi di moto uniforme a quella velocità media*. È il **teorema della velocità media**, che ha una lunga storia (vedi l'Approfondimento più avanti). Attenzione: la semisomma delle velocità dà la velocità media solo perché la velocità cresce in modo uniforme; per un moto qualsiasi non è vero, come abbiamo visto nel capitolo 10.

11.2.4 Una relazione senza il tempo

Spesso il tempo non interessa: si vuole sapere quale velocità raggiunge un corpo dopo un certo tratto, o quanto spazio serve per fermarsi. Basta eliminare t tra la legge della velocità e il teorema della velocità media. Dalla prima $t = (v - v_0)/a$; sostituendo nella seconda:

$$\Delta s = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta s$$

Abbiamo usato soltanto il prodotto di una somma per una differenza, $(v + v_0)(v - v_0) = v^2 - v_0^2$. La relazione vale anche quando a è negativa, purché si tengano i segni: è quella che useremo per la frenata.

ESEMPIO SVOLTO

Un treno regionale in partenza

Situazione. Un treno parte da fermo da una stazione con accelerazione costante $a = 0{,}50\ \text{m/s}^2$, che mantiene per 40 s. Quale velocità raggiunge? Quanta strada percorre? Dopo quanti metri ha raggiunto i 36 km/h?

Velocità. $v = v_0 + at = 0 + 0{,}50\ \text{m/s}^2 \times 40\ \text{s} = 20\ \text{m/s}$, cioè $20 \times 3{,}6 = 72\ \text{km/h}$.

Spostamento. $\Delta s = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}50\ \text{m/s}^2 \times (40\ \text{s})^2 = 0{,}25 \times 1600\ \text{m} = 4{,}0 \times 10^2\ \text{m}$. **Controllo** con il teorema della velocità media: la velocità media è $(0 + 20)/2 = 10\ \text{m/s}$, e in 40 s il treno percorre $10\ \text{m/s} \times 40\ \text{s} = 400\ \text{m}$. I due calcoli coincidono.

Senza il tempo. $36\ \text{km/h} = 10\ \text{m/s}$. Da $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$: $\Delta s = v^2/(2a) = (10\ \text{m/s})^2/(2 \times 0{,}50\ \text{m/s}^2) = 1{,}0 \times 10^2\ \text{m}$. Nota: metà della velocità finale si raggiunge dopo un *quarto* della strada, non dopo la metà, perché lo spazio cresce con il quadrato della velocità.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere i dati di uno scooter

Dati. Uno scooter parte da fermo. Un'app che legge il GPS registra la velocità ogni secondo (Tabella 11.1). Il moto è uniformemente accelerato? Quanto vale l'accelerazione, e quanta strada fa lo scooter in 5 s?

Tabella 11.1 Velocità di uno scooter in partenza, registrata ogni secondo (dati tipici).

t (s)	0	1	2	3	4	5
v (m/s)	0,0	3,1	5,9	9,0	12,1	14,9
Δv nell'ultimo secondo (m/s)	—	3,1	2,8	3,1	3,1	2,8

Analisi. Le variazioni di velocità in ogni secondo sono tutte vicine a 3 m/s, con scarti di qualche decimo compatibili con la precisione dell'app: entro queste incertezze l'accelerazione è costante. Sul grafico v–t i punti cadrebbero su una retta per l'origine.

Accelerazione. Dalla pendenza fra il primo e l'ultimo punto: $a = (14{,}9 - 0{,}0)\ \text{m/s} / 5\ \text{s} \approx 3{,}0\ \text{m/s}^2$.

Spostamento. È l'area del triangolo sotto il grafico v–t: $\Delta s = \tfrac{1}{2} \times 5\ \text{s} \times 14{,}9\ \text{m/s} \approx 37\ \text{m}$. Con la legge oraria si ottiene lo stesso: $\tfrac{1}{2} \times 3{,}0\ \text{m/s}^2 \times (5\ \text{s})^2 = 37{,}5\ \text{m} \approx 38\ \text{m}$; la piccola differenza viene dall'arrotondamento di a.

11.3 Galileo e la caduta dei gravi

11.3.1 Aristotele: più pesante, più veloce

Un **grave**, nella lingua della fisica classica, è semplicemente un corpo pesante, che lasciato libero cade. Perché cade, e con quale velocità? Per Aristotele (384–322 a.C.) ogni corpo pesante tende al suo luogo naturale (capitolo 1), il centro del cosmo, e il suo moto verso il basso avviene sempre attraverso un mezzo, aria o acqua, che gli resiste. Nella *Fisica* osserva:

ὁρῶμεν γὰρ τὰ μείζω ῥοπὴν ἔχοντα ἢ βάρους ἢ κουφότητος, ἐὰν τἆλλα ὁμοίως ἔχῃ, θᾶττον φερόμενα τὸ ἴσον χωρίον

«Vediamo infatti che i corpi che hanno una spinta maggiore di peso o di leggerezza, se per il resto si trovano nelle stesse condizioni, percorrono più velocemente lo stesso spazio» (Aristotele, *Fisica* IV 8, 216a 13–16; traduzione della redazione). Non è un'opinione campata in aria: in un mezzo denso è quello che si vede. Un sasso affonda nell'acqua più in fretta di un sassolino della stessa forma, una moneta cade nell'aria più in fretta di un foglio. Aristotele ne ricava che la velocità di caduta dipende dal peso del corpo e dalla resistenza del mezzo, e usa proprio questo argomento contro il vuoto: senza un mezzo da attraversare, conclude poco dopo, «tutti avranno la stessa velocità; ma è impossibile» (ἰσοταχῆ ἄρα πάντ' ἔσται. ἀλλ' ἀδύνατον, 216a 20–21).

11.3.2 Le due pietre legate

Duemila anni dopo, nella Giornata prima dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638), Galileo affida a Salviati un ragionamento che mette in difficoltà la tesi di Aristotele senza bisogno di alcun esperimento. Supponiamo, dice Salviati a Simplicio, che una pietra grande cada con «otto gradi di velocità» e una piccola con quattro. Leghiamole insieme: la piccola, più lenta, dovrebbe frenare in parte la grande, e il composto dovrebbe cadere con meno di otto gradi. Ma le due pietre legate formano una pietra più pesante della prima, che secondo la tesi dovrebbe cadere con più di otto gradi. La stessa ipotesi porta a due conclusioni opposte: dunque è falsa. La conclusione di Salviati è che «i mobili grandi e i piccoli ancora, essendo della medesima gravità in spezie, si muovono con pari velocità», cioè i corpi della stessa materia cadono insieme qualunque sia la loro grandezza.

È un esempio di *esperimento mentale*, un ragionamento che porta un'ipotesi alle sue conseguenze fino a trovarvi una contraddizione. Galileo sapeva però bene che nell'aria una piuma e una palla di piombo non cadono insieme: la differenza, sostiene, è dovuta alla resistenza del mezzo, che conta molto per i corpi leggeri e larghi e poco per quelli pesanti e compatti. Nel vuoto, che ai suoi tempi nessuno sapeva produrre, tutti i corpi cadrebbero allo stesso modo. Su questo punto Galileo ebbe un predecessore inatteso: un poeta latino del I secolo a.C.

COLLEGAMENTI

Latino · Lucrezio e la caduta nel vuoto

Nel secondo libro del *De rerum natura* Lucrezio, seguendo Epicuro, sostiene che gli atomi si muovono nel vuoto, e discute chi pensa che quelli più pesanti cadano più in fretta e urtino quelli leggeri:

nam per aquas quae cumque cadunt atque aera rarum,
haec pro ponderibus casus celerare necessest [...]
omnia qua propter debent per inane quietum
aeque ponderibus non aequis concita ferri.

«Infatti tutto ciò che cade attraverso l'acqua e l'aria sottile deve affrettare la caduta in proporzione al peso [...]; perciò tutti i corpi, attraverso il vuoto immobile, devono muoversi con uguale rapidità, pur con pesi non uguali» (Lucrezio, *De rerum natura* II 230–231 e 238–239; traduzione della redazione).

Il ragionamento è quello di Aristotele rovesciato: l'acqua e l'aria rallentano di più i corpi leggeri, ma il vuoto non oppone resistenza a nessuno. Lucrezio però parla di una velocità uguale per tutti, non di un'accelerazione uguale; l'idea che la velocità di un grave cresca in modo uniforme è di Galileo. E le sue sono deduzioni filosofiche, non misure: una prova diretta richiede di togliere l'aria, cosa che si imparò a fare con le pompe a vuoto solo dopo la morte di Galileo; la più spettacolare venne nel 1971, sulla Luna.

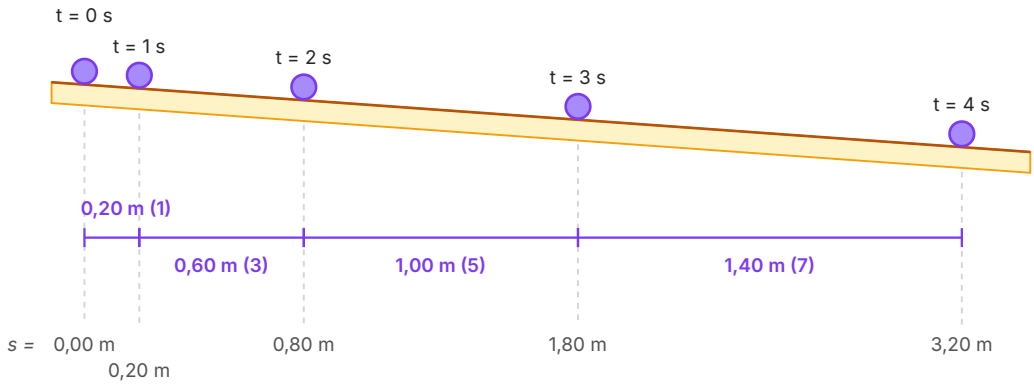
11.3.3 Il piano inclinato e la legge dei numeri dispari

Stabilire che i gravi cadono insieme non basta: bisogna dire *come* cadono. Galileo propone che la caduta sia un moto «naturalmente accelerato» nel senso più semplice possibile, con la velocità che cresce in proporzione al tempo: il nostro MRUA. Ma come verificarlo, quando un sasso cade da qualche metro in meno di un secondo e non esistono orologi capaci di misurare i decimi di secondo? L'idea di Galileo è di «diluire» la caduta: una palla che rotola lungo un piano poco inclinato si muove come un grave, ma molto più lentamente, e i suoi tempi diventano misurabili.

Nella Giornata terza è Salviati a raccontare l'esperimento, che dice di avere eseguito più volte. In un regolo di legno lungo circa dodici braccia era scavato un canale rivestito di pergamena, liscio il più possibile, in cui si faceva scendere «una palla di bronzo durissimo, ben rotondata e pulita»; il tempo era misurato pesando l'acqua uscita da un sottile cannello alla base di un grande secchio durante la discesa. E il risultato, «per esperienze ben cento volte replicate», era sempre lo stesso: gli spazi percorsi a partire dalla quiete stavano tra loro come i quadrati dei tempi. In tempo doppio, spazio quadruplo; in tempo triplo, spazio nove volte maggiore.

Ne segue una regola che si può verificare anche senza misurare i tempi con precisione. Se il corpo parte da fermo, dopo 1, 2, 3, 4 unità di tempo ha percorso spazi proporzionali a 1, 4, 9, 16; quindi nella prima unità di tempo percorre 1, nella seconda $4 - 1 = 3$, nella terza $9 - 4 = 5$, nella

quarta 16 − 9 = 7. È la **legge dei numeri dispari**: nel moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, gli spazi percorsi in intervalli di tempo uguali e successivi stanno fra loro come i numeri dispari 1 : 3 : 5 : 7 : ... Nei *Discorsi* è Sagredo a riassumerla così: gli spazi percorsi in tempi uguali dal mobile che parte dalla quiete sono «tra di loro come i numeri impari ab unitate 1, 3, 5» (Giornata terza). La Figura 11.3 la mostra con i numeri di un esperimento da laboratorio.



distanze nei secondi successivi: 0,20 : 0,60 : 1,00 : 1,40 = 1 : 3 : 5 : 7

distanze totali dalla partenza: 0,20 : 0,80 : 1,80 : 3,20 = 1 : 4 : 9 : 16

Figura 11.3 Schema stroboscopico di una biglia che scende lungo una guida poco inclinata, partendo da ferma con a = 0,40 m/s^2; un lampo ogni 1,0 s ne fissa la posizione. Le distanze percorse nei secondi successivi stanno come 1 : 3 : 5 : 7, le distanze totali dalla partenza come i quadrati 1 : 4 : 9 : 16. (Per chiarezza l'inclinazione della guida è esagerata.)

Una **fotografia stroboscopica**, come quella schematizzata nella figura, si ottiene illuminando un corpo in moto con lampi brevissimi a intervalli regolari, in una stanza buia e con l'otturatore aperto: ogni lampo lascia sulla stessa immagine una posizione del corpo. È lo strumento ideale per verificare la legge dei numeri dispari, perché trasforma un moto in una fila di posizioni a tempi uguali.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il carrello sul piano inclinato

Obiettivo. Verificare, come Galileo, che su un piano inclinato lo spazio percorso a partire da fermo è proporzionale al quadrato del tempo, e misurare l'accelerazione.

Materiali. Una guida rettilinea lunga 2,00 m (una rotaia da laboratorio, oppure un'asse liscia con due listelli come sponde), un carrello leggero o una grossa biglia, uno spessore alto 10,0 cm per sollevare un'estremità, un metro a nastro, nastro adesivo per i segni, un cronometro al centesimo di secondo (o, meglio, due fotocellule collegate a un contasecondi).

Procedimento. 1) Solleva un'estremità della guida di 10,0 cm e segna, a partire dalla posizione di partenza, le distanze 0,40 m, 0,80 m, 1,20 m, 1,60 m e 2,00 m. 2) Trattieni il carrello con una matita appoggiata davanti e lascialo partire spostando la matita in un colpo solo, senza spingerlo; un compagno avvia il cronometro alla partenza e lo ferma quando il carrello passa per il segno. 3) Ripeti cinque volte per ogni distanza e calcola valore medio e semidispersione dei tempi. 4) Calcola t^2 con la sua incertezza (l'incertezza relativa di un quadrato è il doppio di quella del dato, capitolo 3) e costruisci il grafico di s in funzione di t^2 (Figura 11.4).

Tabella 11.2 Tempi di discesa di un carrello sulla guida inclinata (5 misure per distanza, cronometro manuale; dati tipici). L'incertezza sulle distanze, 0,002 m, è trascurabile.

s (m)	t (s)	t^2 (s^2)
0,40	1,32 ± 0,04	1,74 ± 0,11
0,80	1,86 ± 0,04	3,46 ± 0,15
1,20	2,29 ± 0,04	5,24 ± 0,18
1,60	2,64 ± 0,04	7,0 ± 0,2
2,00	2,96 ± 0,04	8,8 ± 0,2

Che cosa concludere. Il grafico di s in funzione di t sarebbe una curva; quello di s in funzione di t^2 è una retta per l'origine, entro le incertezze: è la linearizzazione del capitolo 4, e conferma che $s = \tfrac{1}{2}at^2$. La pendenza della retta è $\tfrac{1}{2}a$. Le rette di massima e minima pendenza che passano per l'origine e dentro la barra dell'ultimo punto hanno pendenze 0,235 e 0,222 m/s^2, quindi $\tfrac{1}{2}a = (0{,}229 \pm 0{,}006)$ m/s^2 e $a = (0{,}46 \pm 0{,}01)$ m/s^2. Senza attriti, come vedrai nel capitolo 14, un carrello su questo piano avrebbe accelerazione $g \cdot h/l = 9{,}8$ m/s^2 × 0,100 m / 2,00 m = 0,49 m/s^2: il valore misurato è un po' minore, segno che attriti e ruote rotanti non sono del tutto trascurabili.

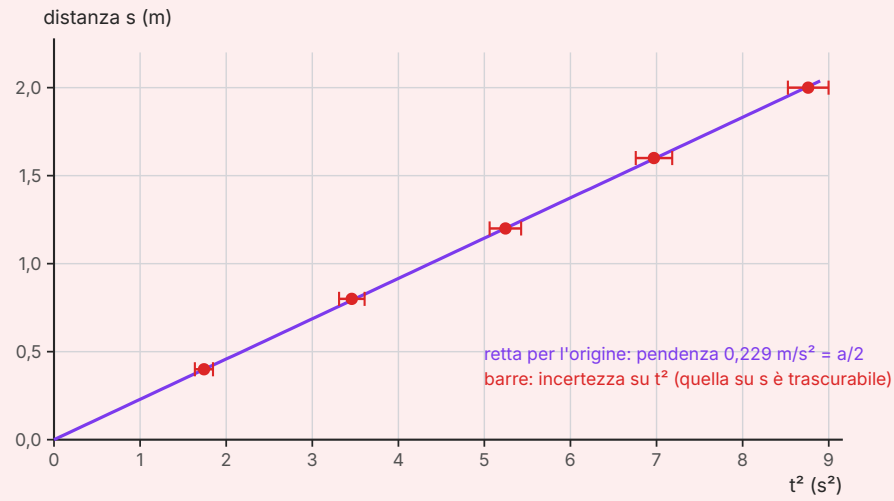


Figura 11.4 Grafico della distanza percorsa in funzione del quadrato del tempo per i dati della Tabella 11.2. I punti, con le loro barre di incertezza, sono allineati su una retta che passa per l'origine: lo spazio è proporzionale a t^2. La pendenza, 0,229 m/s^2, è metà dell'accelerazione.

Sicurezza. Ferma il carrello in fondo alla guida con un ostacolo morbido, e fissa bene lo spessore perché la guida non scivoli.

Per la relazione. Segui lo schema del capitolo 4: tabella dei dati con le unità e la sensibilità del cronometro; grafico di s in funzione di t^2 con le barre di incertezza; pendenza, accelerazione e loro incertezze; confronto con il valore 0,49 m/s^2 e discussione degli errori sistematici (tempo di reazione all'avvio, attriti, inclinazione non uniforme della guida). Facoltativo: verifica con i tuoi dati la legge dei numeri dispari.

APPROFONDIMENTO

I «calculatores» di Oxford e il grafico di Oresme

Il teorema della velocità media non è nato con Galileo. Nel Trecento, al Merton College di Oxford, un gruppo di logici e matematici (Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead, John Dumbleton), che la tradizione chiama *calculatores*, studiava come varia l'intensità di una qualità: il calore di un corpo, la velocità di un moto. Fra i loro risultati c'è la regola per il moto che chiamavano «uniformemente difforme», cioè con velocità che cresce in modo uniforme: in un certo tempo il corpo percorre lo stesso spazio che percorrerebbe muovendosi uniformemente con la velocità dell'istante di mezzo, che è proprio la media fra la velocità iniziale e quella finale.

Pochi decenni dopo, a Parigi, Nicola d'Oresme, di cui nel capitolo 4 hai visto le «configurazioni» delle qualità, diede alla regola una dimostrazione geometrica. Nella sua figura il moto uniforme è un rettangolo e quello uniformemente difforme un triangolo o un trapezio; la regola si riduce allora all'uguaglianza fra l'area del trapezio e quella del rettangolo con l'altezza media: lo stesso ragionamento della Figura 11.1, tre secoli prima del piano cartesiano.

I *calculatores* e Oresme ragionavano però su moti immaginati, non su gravi che cadono, e non cercavano conferme sperimentali. Nei *Discorsi* il teorema torna come prima proposizione del moto naturalmente accelerato, dimostrato con un ragionamento sulle aree molto simile a quello di Oresme; la novità di Galileo è averlo applicato alla caduta dei corpi reali e averlo messo alla prova sul piano inclinato.

11.4 La caduta libera e il lancio verticale

11.4.1 La caduta libera

Un corpo è in **caduta libera** quando si muove soltanto sotto l'azione del proprio peso, senza che la resistenza dell'aria o altro lo influenzi in modo apprezzabile. In queste condizioni vale il risultato di Galileo: tutti i corpi, in un dato luogo, cadono con la **stessa accelerazione** costante, diretta verso il basso, indipendente dalla loro massa e dalla loro materia. Il suo valore è indicato con g:

$$g \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

Ogni secondo di caduta la velocità di un grave aumenta di circa 9,8 m/s, cioè di circa 35 km/h. È lo stesso g della forza-peso $P = mg$ del capitolo 6, dove lo abbiamo scritto in N/kg: le due unità coincidono, perché $1\ \text{N/kg} = 1\ (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)/\text{kg} = 1\ \text{m/s}^2$. Il perché di questa coincidenza, cioè il legame fra la forza che agisce su un corpo e la sua accelerazione, è il tema del capitolo 13. Il valore di g varia un poco da un luogo all'altro della Terra (è leggermente maggiore ai poli che all'equatore), e sulla Luna è circa un sesto, $1{,}62\ \text{m/s}^2$.

DA RICORDARE

Nell'aria i corpi **non** cadono tutti insieme: un foglio steso scende lentamente, una biglia no. La caduta libera è un modello, che descrive bene i corpi compatti e pesanti per cadute di pochi metri, quando la resistenza dell'aria è trascurabile; non descrive un paracadutista, una foglia o una goccia di pioggia. Basta però appallottolare il foglio perché cada quasi insieme alla biglia: la differenza non sta nel peso, ma nell'aria. Nel 1971, sulla Luna, che non ha atmosfera, l'astronauta David Scott della missione Apollo 15 lasciò cadere insieme un martello e una piuma di falco davanti alla telecamera: toccarono il suolo nello stesso istante.

Per un corpo lasciato cadere da fermo conviene orientare l'asse verso il basso, con l'origine nel punto di partenza: allora $v_0 = 0$, $a = +g$, e le leggi del MRUA diventano $v = gt$ e $s = \tfrac{1}{2}gt^2$. Dopo aver percorso un'altezza h il grave ha impiegato un tempo e raggiunto una velocità

$$t = \sqrt{(2h/g)} \qquad v = \sqrt{(2gh)}$$

La prima si ottiene da $h = \tfrac{1}{2}gt^2$, la seconda da $v^2 = 2gh$. Un sasso lasciato cadere da un ponte alto 20 m tocca l'acqua dopo $\sqrt{(2 \times 20\ \text{m} / 9{,}8\ \text{m/s}^2)} \approx 2{,}0$ s, alla velocità di $\sqrt{(2 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 20\ \text{m})} \approx 20$ m/s, oltre 70 km/h. Nota che il tempo cresce come la radice dell'altezza: da un'altezza quattro volte maggiore, 80 m, la caduta dura soltanto il doppio, circa 4,0 s. La Figura 11.5 mostra le posizioni di un grave a intervalli di un decimo di secondo: le distanze crescono come i numeri dispari, esattamente come sul piano inclinato di Galileo.

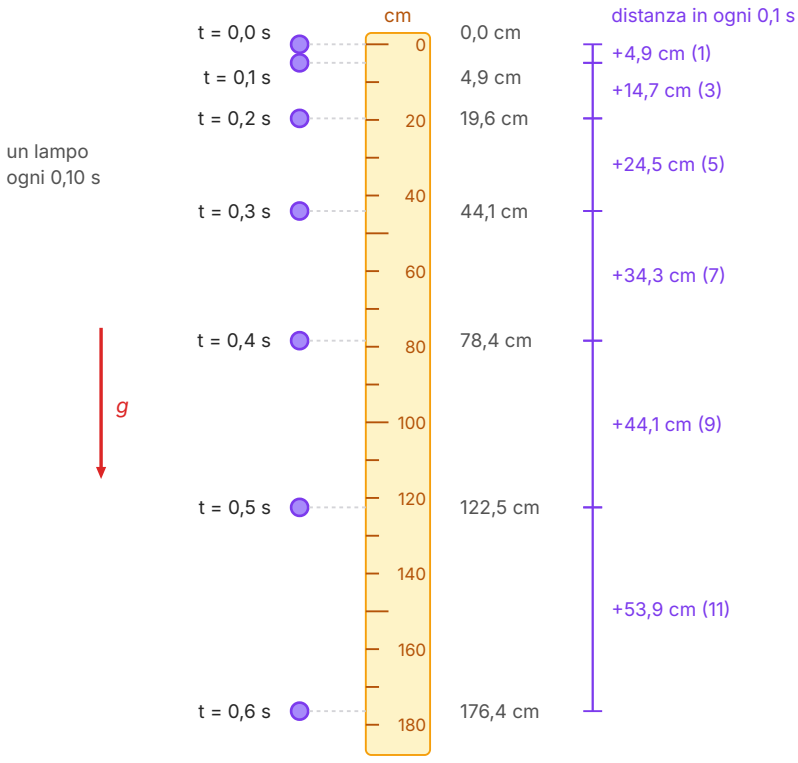


Figura 11.5 Schema stroboscopico di una pallina in caduta libera da ferma, con un lampo ogni 0,10 s (valori calcolati con g = 9,8 m/s^2). Le distanze percorse in ogni decimo di secondo, 4,9 cm, 14,7 cm, 24,5 cm..., stanno come 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11; aumentano ogni volta della stessa quantità, $g\cdot(0{,}10\text{ s})^2$ = 9,8 cm.

11.4.2 Il lancio verticale verso l'alto

Se un corpo è lanciato verso l'alto con velocità v_0, dopo il lancio è anch'esso in caduta libera: l'unica cosa che conta è il suo peso, e la sua accelerazione è g verso il basso anche mentre sale. Conviene allora un asse rivolto verso l'alto, con l'origine nel punto di lancio: la velocità iniziale è positiva, l'accelerazione negativa, $a = -g$. Il moto è un unico MRUA, descritto per tutta la sua durata dalle stesse due leggi:

$$v = v_0 - gt \qquad s = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Durante la salita velocità e accelerazione hanno segni opposti e il corpo rallenta; nel **punto di inversione** la velocità si annulla, e da lì in poi il corpo scende accelerando. Imponendo $v = 0$ si ottengono il **tempo di salita** e, dalla relazione senza il tempo con $\Delta s = h$, l'**altezza massima**:

$$t_{\text{salita}} = \frac{v_0}{g} \qquad h_{\max} = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Il moto è **simmetrico** (Figura 11.6): la discesa dal punto più alto è una caduta libera da ferma da un'altezza h_{max}, che dura quanto la salita; in ogni punto della traiettoria il corpo ripassa in discesa con la stessa velocità, in verso opposto, che aveva in salita, e torna al punto di lancio con velocità $-v_0$. Il tempo totale di volo è quindi $2v_0/g$. Raddoppiando la velocità di lancio, il tempo di salita raddoppia, ma l'altezza massima diventa quattro volte maggiore.

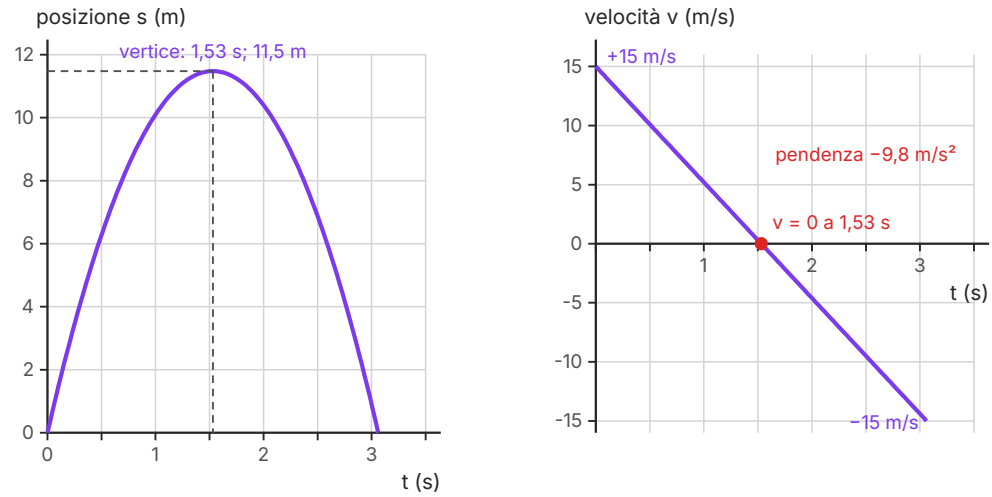


Figura 11.6 Lancio verticale verso l'alto con v_0 = 15 m/s (g = 9,8 m/s^2, asse rivolto verso l'alto). A sinistra la posizione: una parabola con il vertice a 1,53 s e 11,5 m. A destra la velocità: una retta di pendenza $-g$, che si annulla nel punto più alto e diventa negativa nella discesa.

ESEMPIO SVOLTO

Un sasso lanciato verso l'alto

Situazione. Un sasso è lanciato verticalmente verso l'alto con v_0 = 15 m/s. Trascuriamo l'aria e prendiamo l'asse verso l'alto, con l'origine nel punto di lancio.

Punto più alto. $t_{salita} = v_0/g$ = 15 m/s / 9,8 m/s^2 = 1,53 s; $h_{max} = v_0^2/(2g)$ = (15 m/s)^2/(2 × 9,8 m/s^2) = 11,5 m.

Dopo 1,0 s. v = 15 m/s − 9,8 m/s^2 × 1,0 s = +5,2 m/s: il sasso sta ancora salendo.

Dopo 2,0 s. v = 15 m/s − 9,8 m/s^2 × 2,0 s = −4,6 m/s: il segno meno dice che il sasso sta scendendo. La posizione è s = 15 m/s × 2,0 s − ½ × 9,8 m/s^2 × (2,0 s)^2 = 30 m − 19,6 m = 10,4 m sopra il punto di lancio.

Ritorno. Il sasso torna alla mano dopo 2 × 1,53 s = 3,06 s, con velocità −15 m/s: stesso modulo del lancio, verso opposto.

ERRORE FREQUENTE

«Nel punto più alto il sasso è fermo, quindi la sua accelerazione è zero.» Nel punto più alto è nulla la *velocità*, e solo per un istante; l'accelerazione resta g verso il basso, come in tutto il resto del volo. Se in quell'istante anche l'accelerazione fosse nulla, la velocità non potrebbe più cambiare e il sasso resterebbe sospeso a mezz'aria. Velocità nulla non vuol dire accelerazione nulla: lo si vede bene nella Figura 11.6, dove la retta della velocità attraversa lo zero senza cambiare pendenza.

«Il sasso sale perché ha ancora la spinta della mano.» Dopo il lancio la mano non agisce più: il sasso sale perché ha una velocità verso l'alto, che il peso riduce di 9,8 m/s ogni secondo. Che un corpo possa muoversi senza che nulla lo spinga è l'idea del capitolo 13.

11.5 Fermarsi in tempo: la distanza di arresto

Un automobilista vede un ostacolo e frena. Dal momento in cui l'ostacolo compare al momento in cui l'auto si ferma passano due fasi, che si descrivono con i due moti studiati in questa parte del libro.

- **Reazione.** Il conducente deve accorgersi del pericolo, decidere e spostare il piede sul freno. Il **tempo di reazione** t_r di una persona attenta è dell'ordine di un secondo; in questo intervallo l'auto prosegue di moto rettilineo uniforme e percorre lo **spazio di reazione** $v \cdot t_r$.
- **Frenata.** Con i freni azionati l'auto rallenta con una decelerazione che, su asfalto asciutto e con pneumatici in buono stato, è di circa 7 m/s^2 (sul bagnato molto meno). È un moto uniformemente accelerato che termina con velocità zero: dalla relazione senza il tempo, $0 = v^2 - 2a\Delta s$, lo **spazio di frenata** è $v^2/(2a)$, dove a è il modulo della decelerazione.

La somma delle due è la **distanza di arresto**:

$$d_{\text{arresto}} = v \cdot t_r + \frac{v^2}{2a}$$

Le due parti dipendono dalla velocità in modo diverso. Lo spazio di reazione è proporzionale alla velocità; lo spazio di frenata al suo **quadrato**: raddoppiando la velocità raddoppia il primo, ma il secondo diventa quattro volte più lungo. Per questo alle basse velocità conta soprattutto la prontezza del conducente, alle alte velocità soprattutto la frenata (Figura 11.7).

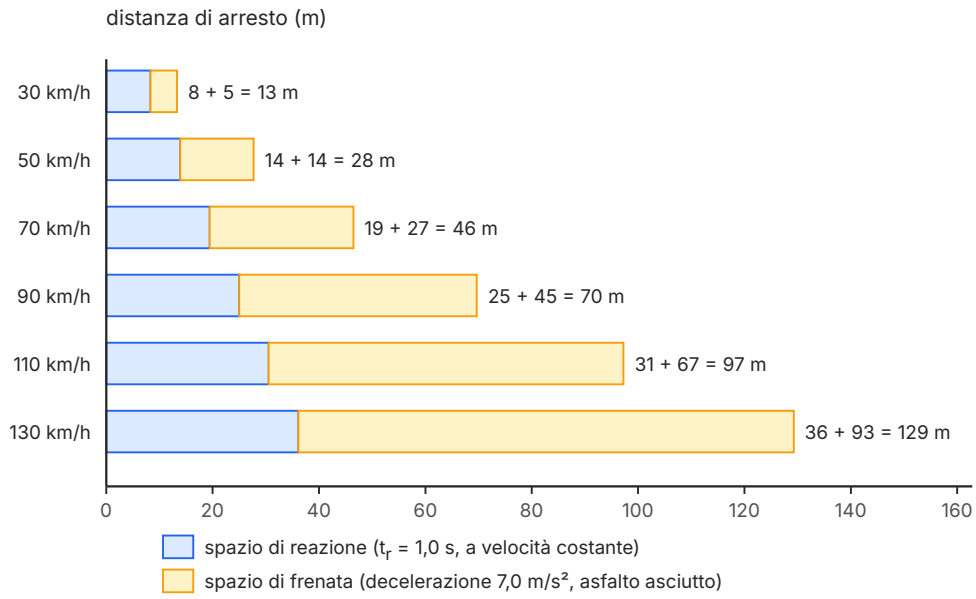


Figura 11.7 Distanza di arresto di un'automobile in funzione della velocità, con tempo di reazione di 1,0 s e decelerazione di 7,0 m/s^2 (asfalto asciutto). Lo spazio di reazione (in azzurro) cresce in proporzione alla velocità, lo spazio di frenata (in giallo) con il suo quadrato. Valori calcolati, arrotondati al metro.

COLLEGAMENTI

Educazione stradale · Che cosa cambia una differenza di velocità

Con i valori della Figura 11.7, a 50 km/h (13,9 m/s) un'auto si ferma in circa 14 m + 14 m = 28 m. Supponiamo che un bambino attraversi la strada proprio a 28 m: l'auto si ferma appena in tempo. Un'altra auto, che nello stesso punto viaggia a 70 km/h (19,4 m/s), in un secondo di reazione percorre 19,4 m; quando inizia a frenare le restano circa 8,2 m. Da $v^2 = v_0^2 - 2a\Delta s$, la velocità con cui arriva sul bambino è $\sqrt{(19{,}4^2 - 2 \times 7{,}0 \times 8{,}2)}$ m/s $\approx$ 16 m/s, cioè circa 58 km/h: frenando, l'auto più veloce colpisce il bambino a una velocità maggiore di quella a cui l'auto più lenta stava *viaggiando*.

Un telefono in mano allunga il tempo di reazione: ogni secondo perso, a 90 km/h, sono 25 m percorsi senza frenare. L'asfalto bagnato riduce la decelerazione, e lo spazio di frenata, inversamente proporzionale a essa, si allunga: con 4 m/s^2 invece di 7 diventa 7/4 volte maggiore.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Accelerazione viene dal latino *accelerare*, «affrettare», composto di *ad* e *celer*, «rapido»: accelerare è rendere più rapido. È la stessa radice di *celere* e di *celerità*; Lucrezio, nel passo citato in questo capitolo, usa il verbo semplice *celerare* proprio per i corpi che «affrettano la caduta».

Grave e **gravità** vengono dal latino *gravis*, «pesante», e *gravitas*, «pesantezza». Nel linguaggio di Galileo i «gravi» sono i corpi pesanti e la loro «gravità» è il loro peso; nell'italiano di oggi *grave* significa soprattutto «serio, pesante» in senso figurato, ma il senso fisico sopravvive nell'espressione «caduta dei gravi».

Stroboscopio è un composto moderno di due parole greche: στρόβος, «rotazione, vortice», e σκοπέω, «osservare». Il nome nacque per strumenti dell'Ottocento che mostravano corpi in rotazione come immobili, illuminandoli a intervalli regolari.

IN SINTESI

Accelerazione media: $a_m = \Delta v/\Delta t$, in m/s^2: di quanto cambia la velocità ogni secondo. Stesso segno di v → il corpo accelera; segno opposto → rallenta.

Moto uniformemente accelerato (a costante): $v = v_0 + at$ (grafico v–t: retta di pendenza a); $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (grafico s–t: parabola); lo spostamento è l'area sotto il grafico v–t.

Velocità media e relazione senza il tempo: $\Delta s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$; $v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta s$.

Partenza da fermo: $s \propto t^2$; spazi in tempi uguali successivi come 1 : 3 : 5 : 7 (legge dei numeri dispari).

Caduta libera: $a = g \approx 9{,}8$ m/s^2 verso il basso, uguale per tutti i corpi in assenza d'aria; da fermo $t = \sqrt{(2h/g)}$, $v = \sqrt{(2gh)}$. **Lancio verticale:** $t_{salita} = v_0/g$, $h_{max} = {v_0}^2/(2g)$; nel punto più alto $v = 0$ ma $a = g$.

Distanza di arresto: $v \cdot t_r + v^2/(2a)$: reazione $\propto v$, frenata $\propto v^2$.

SINTESI

- L'accelerazione media è il rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo, $a_m = \Delta v/\Delta t$; si misura in m/s^2. L'accelerazione istantanea è l'accelerazione media su un intervallo brevissimo.
- Se accelerazione e velocità hanno lo stesso segno il corpo va sempre più veloce, se hanno segni opposti rallenta; il segno di a da solo dipende dall'orientamento dell'asse.
- Nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante e $v = v_0 + at$: il grafico velocità-tempo è una retta con pendenza a.
- Lo spostamento è l'area sotto il grafico velocità-tempo; nel MRUA l'area del trapezio dà $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, e il grafico spazio-tempo è un arco di parabola.
- Teorema della velocità media: nel MRUA lo spostamento è quello di un moto uniforme alla velocità $(v_0 + v)/2$. Eliminando il tempo si ottiene $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$.
- Aristotele riteneva che i corpi più pesanti cadano più velocemente, come accade in un mezzo denso; Galileo, con l'argomento delle pietre legate, mostrò che la tesi si contraddice e attribuì le differenze alla resistenza del mezzo.
- Galileo verificò sul piano inclinato che, partendo da fermo, gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi; gli spazi in intervalli di tempo uguali e successivi stanno come 1 : 3 : 5 : 7 (legge dei numeri dispari).
- In caduta libera tutti i corpi hanno la stessa accelerazione $g \approx 9{,}8$ m/s^2 verso il basso; da fermo, dopo un'altezza h, $t = \sqrt{(2h/g)}$ e $v = \sqrt{(2gh)}$. Nell'aria il modello vale solo per corpi compatti e cadute brevi.
- Nel lancio verticale l'accelerazione è g verso il basso sia in salita sia in discesa; il moto è simmetrico, con tempo di salita v_0/g e altezza massima $v_0^2/(2g)$. Nel punto più alto la velocità è nulla, l'accelerazione no.
- La distanza di arresto di un veicolo è la somma dello spazio di reazione, proporzionale alla velocità, e dello spazio di frenata $v^2/(2a)$, proporzionale al suo quadrato.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● L'unità di misura dell'accelerazione nel Sistema Internazionale è:
   A. m/s
   B. m^2/s
   C. m/s^2
   D. km/h

2. ● Un'auto si muove nel verso positivo dell'asse e frena. In questa fase:
   A. velocità e accelerazione sono entrambe positive
   B. la velocità è positiva e l'accelerazione negativa
   C. la velocità è negativa e l'accelerazione positiva
   D. velocità e accelerazione sono entrambe negative

3. ● Nel moto uniformemente accelerato il grafico velocità-tempo è:
   A. un arco di parabola
   B. una retta orizzontale
   C. un ramo di iperbole
   D. una retta inclinata

4. ●● Un corpo parte da fermo con accelerazione costante e nel primo secondo percorre 2 m. Nel terzo secondo percorre:
   A. 6 m
   B. 10 m
   C. 18 m
   D. 8 m

5. ● Nel punto più alto di un lancio verticale verso l'alto:
   A. la velocità è nulla e l'accelerazione è g verso il basso
   B. velocità e accelerazione sono entrambe nulle
   C. la velocità è massima e l'accelerazione nulla
   D. la velocità è nulla e l'accelerazione è g verso l'alto

6. ●● Se la velocità di un'auto raddoppia e la decelerazione dei freni resta la stessa, lo spazio di frenata:
   A. raddoppia
   B. resta lo stesso
   C. quadruplica
   D. si dimezza

7. ●● Un sasso lasciato cadere da fermo percorre 4,9 m nel primo secondo. In tutto, nei primi tre secondi percorre (aria trascurabile):
   A. 14,7 m
   B. 29,4 m
   C. 24,5 m
   D. 44,1 m

8. ●● Nel vuoto si lasciano cadere insieme, dalla stessa altezza, una piuma e un martello. Che cosa succede?
   A. arrivano a terra insieme, perché hanno la stessa accelerazione
   B. arriva prima il martello, perché ha un peso maggiore
   C. arriva prima la piuma, perché ha una massa minore
   D. la piuma non cade, perché nel vuoto non c'è l'aria che la spinge in basso

Vero o falso

9. ● Se in un certo istante la velocità di un corpo è nulla, in quell'istante è nulla anche la sua accelerazione. V / F

10. ● In ogni moto rettilineo lo spostamento è uguale all'area compresa fra il grafico velocità-tempo e l'asse dei tempi. V / F

11. ●● Un corpo con accelerazione negativa rallenta sempre. V / F

12. ● Nell'aria un foglio di carta steso e una biglia di vetro, lasciati cadere insieme, hanno la stessa accelerazione. V / F

13. ●● Nel moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, la velocità media nei primi t secondi è metà della velocità raggiunta all'istante t. V / F

Applicare

14. ● Un'auto passa da 36 km/h a 90 km/h in 6,0 s. Calcola la sua accelerazione media.

15. ● Uno scooter che viaggia a 12 m/s frena e si ferma in 3,0 s, con decelerazione costante. Calcola l'accelerazione e lo spazio percorso durante la frenata.

16. ● Completa: nel grafico velocità-tempo di un moto uniformemente accelerato la pendenza della retta è _____ e l'area sotto la retta è _____ ; nel grafico spazio-tempo dello stesso moto la curva è un arco di _____ .

17. ●● Osserva la Figura 11.1. a) Qual è la velocità all'istante 3 s? b) Quanto spazio percorre il corpo nei primi 2 s? c) E fra l'istante 2 s e l'istante 4 s?

18. ● Un sasso lasciato cadere da fermo da un ponte tocca l'acqua dopo 2,4 s. Trascurando l'aria, quanto è alto il ponte? Con quale velocità il sasso tocca l'acqua?

19. ●● Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto a 12 m/s. Calcola il tempo di salita e l'altezza massima raggiunta sopra il punto di lancio.

20. ●● Osserva la Figura 11.7. a) A 90 km/h, quanto sono lunghi lo spazio di reazione e lo spazio di frenata? b) Verifica con un calcolo i valori indicati per 50 km/h. c) Di quante volte cresce la distanza di arresto passando da 50 a 130 km/h, e di quante la velocità?

Problemi

21. ●● Un treno ad alta velocità parte da fermo con accelerazione costante 0,40 m/s^2 finché raggiunge 108 km/h. Quanto tempo impiega? Quanta strada percorre in questa fase?

22. ●● Un aereo deve raggiungere 75 m/s per decollare e i suoi motori gli danno un'accelerazione costante di 2,5 m/s^2. Qual è la lunghezza minima della pista? Quanto dura la corsa di decollo?

23. ●●● Un'auto passa a velocità costante di 30 m/s davanti a una pattuglia ferma. Nello stesso istante la pattuglia parte all'inseguimento con accelerazione costante di 3,0 m/s^2. a) Verifica che dopo 20 s la pattuglia ha raggiunto l'auto, calcolando le posizioni dei due veicoli (capitolo 10 per l'auto). b) Quale velocità ha la pattuglia in quel momento? c) Spiega con il teorema della velocità media perché questa velocità è esattamente il doppio di quella dell'auto.

24. ●●● Dal bordo di un tetto alto 25 m una palla è lanciata verticalmente verso l'alto a 10 m/s e ricade poi fino al suolo, passando accanto al tetto. Trascurando l'aria, calcola: a) l'altezza massima raggiunta sopra il suolo; b) la velocità della palla quando ripassa all'altezza del tetto; c) la velocità con cui tocca il suolo; d) il tempo totale dal lancio all'arrivo al suolo.

25. ●● Un'auto viaggia a 108 km/h; il conducente ha un tempo di reazione di 1,0 s. Calcola la distanza di arresto su asfalto asciutto (decelerazione 7,0 m/s^2) e su asfalto bagnato (decelerazione 4,0 m/s^2). Di quanti metri si allunga?

26. ●● Una palla, lasciata libera sul canale di Galileo, percorre 0,30 m nel primo secondo. a) Quanta strada percorre nel secondo, nel terzo e nel quarto secondo? b) Quanta strada ha percorso in tutto dopo 4 s? c) Qual è la sua accelerazione?

Ragionare e argomentare

27. ●● Crash test. Da quale altezza dovrebbe cadere un'auto per toccare terra a 50 km/h? Esprimi il risultato anche in «piani» di un edificio (circa 3 m l'uno) e commenta: che cosa ti dice sull'urto di un'auto contro un muro a quella velocità?

28. ●●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Lancio un sasso verso l'alto a 20 m/s. Nel punto più alto la velocità è zero, quindi anche l'accelerazione è zero, e il sasso resta fermo per un attimo. L'altezza massima è $v_0^2/g = 400/9{,}8 = 40{,}8$ m.» Individua gli errori e correggili.

29. ●●● Commenta la fonte. Discutendo del vuoto nella *Fisica* (IV 8), Aristotele osserva che i corpi più pesanti percorrono più in fretta lo stesso spazio, e conclude che nel vuoto «tutti avranno la stessa velocità; ma è impossibile» (traduzione della redazione). Che cosa afferma? In quali condizioni la sua osservazione è corretta? Che cosa avrebbero risposto Lucrezio e Galileo, e quale esperimento ha deciso la questione?

30. ●● Progetta un esperimento. Hai un piano inclinato lungo 2 m, una biglia, del nastro adesivo e nessun cronometro, ma un metronomo che batte un colpo ogni 0,5 s. Come puoi verificare la legge dei numeri dispari? Dove metteresti i segni, e che cosa ti aspetti di sentire o vedere se la legge è vera?

PER APPROFONDIRE

- [GAL] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*: nella Giornata prima l'argomento delle pietre legate e la discussione della caduta nei mezzi; nella Giornata terza il moto naturalmente accelerato e l'esperimento del piano inclinato.
- [ARI] Aristotele, *Fisica*, libro IV, capitolo 8: il moto attraverso un mezzo e l'argomento contro il vuoto.
- [LUC] Lucrezio, *De rerum natura*, libro II, versi 216–250: la caduta degli atomi nel vuoto e la loro deviazione.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli sul moto, con la velocità e l'accelerazione spiegate senza formule superflue.

Glossario del capitolo

Accelerazione istantanea
Accelerazione media calcolata su un intervallo di tempo così breve che, riducendolo ancora, il risultato non cambia apprezzabilmente.

Accelerazione media
Rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui avviene, $a_m = \Delta v/\Delta t$; si misura in m/s^2.

Altezza massima
Nel lancio verticale, la quota raggiunta sopra il punto di lancio: $v_0^2/(2g)$.

Caduta libera
Moto di un corpo soggetto soltanto al proprio peso: accelerazione costante $g \approx 9{,}8\ m/s^2$ verso il basso, uguale per tutti i corpi.

Distanza di arresto
Somma dello spazio di reazione e dello spazio di frenata.

Fotografia stroboscopica
Immagine che fissa su un'unica fotografia le posizioni di un corpo in moto illuminato da lampi a intervalli di tempo regolari.

Grave
Nel linguaggio della fisica classica, un corpo pesante che, lasciato libero, cade.

Legge dei numeri dispari
Nel moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, gli spazi percorsi in intervalli di tempo uguali e successivi stanno come 1 : 3 : 5 : 7 : ...

Moto decelerato
Moto in cui la velocità diminuisce in modulo, perché accelerazione e velocità hanno segni opposti.

Moto uniformemente accelerato
Moto rettilineo con accelerazione costante: $v = v_0 + at$ e $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Punto di inversione
Nel lancio verticale, il punto più alto, dove la velocità si annulla e cambia verso.

Spazio di frenata
Strada percorsa da un veicolo dall'inizio della frenata all'arresto: $v^2/(2a)$, con a modulo della decelerazione.

Spazio di reazione
Strada percorsa da un veicolo, a velocità costante, durante il tempo di reazione: $v \cdot t_r$.

Tempo di reazione
Intervallo fra la percezione di un pericolo e l'inizio dell'azione (per esempio la frenata); per un conducente attento è dell'ordine di un secondo.

Tempo di salita
Nel lancio verticale, il tempo per raggiungere il punto più alto: v_0/g.

Teorema della velocità media
Nel moto uniformemente accelerato lo spostamento è uguale a quello di un moto uniforme alla velocità media $(v_0 + v)/2$.

Soluzioni

1. C. L'accelerazione è una velocità (m/s) divisa per un tempo (s): (m/s)/s = m/s^2.

2. B. L'auto si muove nel verso positivo ($v > 0$) e rallenta, quindi l'accelerazione ha segno opposto: $a < 0$.

3. D. $v = v_0 + at$ è una funzione di primo grado: una retta, inclinata perché $a \neq 0$.

4. B. Legge dei numeri dispari: nei secondi successivi 1 : 3 : 5, cioè 2 m, 6 m, 10 m.

5. A. Nel punto più alto la velocità si annulla per un istante; l'accelerazione resta g verso il basso per tutto il volo.

6. C. Lo spazio di frenata è $v^2/(2a)$: con $2v$ diventa $(2v)^2/(2a) = 4$ volte maggiore.

7. D. Le distanze totali stanno come 1 : 4 : 9: 9 × 4,9 m = 44,1 m (oppure ½ × 9,8 × 3^2 = 44,1 m). 14,7 m è la distanza nel solo secondo secondo, 24,5 m quella nel solo terzo.

8. A. Nel vuoto non c'è resistenza del mezzo e tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione g (Apollo 15, 1971). D è falsa: la piuma cade per il suo peso, non perché l'aria la spinge.

9. F. La velocità può essere nulla per un istante mentre cambia: nel punto più alto di un lancio verticale $v = 0$ e $a = g$.

10. V. Vale per qualunque moto rettilineo; nel moto uniforme l'area è un rettangolo, nel MRUA un trapezio.

11. F. Rallenta solo se la velocità è positiva; se la velocità è negativa, un'accelerazione negativa la fa crescere in modulo (retromarcia che accelera).

12. F. Nell'aria la resistenza conta molto per il foglio steso, che cade più lentamente; solo nel vuoto le accelerazioni sono uguali.

13. V. Teorema della velocità media: $v_m = (0 + v)/2 = v/2$.

14. 36 km/h = 10 m/s; 90 km/h = 25 m/s. a_m = (25 − 10) m/s / 6,0 s = 2,5 m/s^2.

15. a = (0 − 12) m/s / 3,0 s = −4,0 m/s^2 (opposta alla velocità). Spazio: velocità media (12 + 0)/2 = 6,0 m/s, per 3,0 s: Δs = 18 m (oppure $12^2/(2 \times 4{,}0)$ = 18 m).

16. La pendenza è l'accelerazione; l'area è lo spostamento; la curva è un arco di parabola.

17. a) v = 2 m/s + 1,5 m/s^2 × 3 s = 6,5 m/s. b) $\Delta s = 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1{,}5 \times 2^2 = 4 + 3 = 7$ m (area del trapezio con basi 2 e 5 m/s, altezza 2 s). c) Fino a 4 s lo spostamento è 20 m, quindi fra 2 s e 4 s: 20 m − 7 m = 13 m (trapezio con basi 5 e 8 m/s: (5 + 8)/2 × 2 = 13 m).

18. $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}8$ m/s^2 × (2,4 s)^2 = 28,2 m ≈ 28 m; $v = gt$ = 9,8 × 2,4 = 23,5 m/s ≈ 24 m/s (circa 85 km/h).

19. $t_{salita} = v_0/g$ = 12/9,8 = 1,2 s; $h_{max} = v_0^2/(2g)$ = 144/19,6 = 7,3 m.

20. a) 90 km/h = 25,0 m/s: reazione 25,0 m/s × 1,0 s = 25 m; frenata $25{,}0^2/(2 \times 7{,}0)$ = 44,6 m ≈ 45 m; totale ≈ 70 m. b) 50 km/h = 13,9 m/s: 13,9 m + $13{,}9^2$/14 m = 13,9 m + 13,8 m ≈ 28 m. c) Da 28 m a 129 m la distanza cresce di circa 4,7 volte, mentre la velocità cresce di 130/50 = 2,6 volte: lo spazio di frenata pesa sempre di più.

21. 108 km/h = 30 m/s. $t = v/a$ = 30 m/s / 0,40 m/s^2 = 75 s. $\Delta s = v^2/(2a)$ = 900/0,80 = 1125 m ≈ 1,1 km (controllo: velocità media 15 m/s × 75 s = 1125 m).

22. Pista minima: $\Delta s = v^2/(2a) = (75 \text{ m/s})^2/(2 \times 2{,}5 \text{ m/s}^2)$ = 1125 m ≈ 1,1 km. Durata: $t = v/a$ = 75/2,5 = 30 s.

23. a) Auto (moto uniforme): s = 30 m/s × 20 s = 600 m. Pattuglia (MRUA da ferma): $s = \frac{1}{2} \times 3{,}0 \text{ m/s}^2 \times (20 \text{ s})^2$ = 600 m. Stessa posizione nello stesso istante: la pattuglia ha raggiunto l'auto. b) $v = at$ = 3,0 × 20 = 60 m/s (216 km/h). c) I due veicoli percorrono lo stesso spazio nello stesso tempo, quindi hanno la stessa velocità media, 30 m/s. Per la pattuglia la velocità

media è $(0 + v)/2$: perché valga 30 m/s, la velocità finale deve essere 60 m/s.

24. Asse verso l'alto, origine al suolo. a) Salita sopra il tetto: $v_0^2/(2g) = 100/19{,}6 = 5{,}1$ m; altezza massima 25 m + 5,1 m = 30,1 m ≈ 30 m. b) Per simmetria ripassa all'altezza del tetto con la stessa velocità del lancio, 10 m/s verso il basso. c) Dal tetto al suolo (Δs = 25 m verso il basso): $v^2 = 10^2 + 2 \times 9{,}8 \times 25 = 590$ m^2/s^2, $v = 24$ m/s verso il basso (lo stesso risultato si ha con una caduta da ferma da 30,1 m: $\sqrt{(2 \times 9{,}8 \times 30{,}1)} = 24$ m/s). d) Salita: 10/9,8 = 1,02 s; discesa da ferma da 30,1 m: $\sqrt{(2 \times 30{,}1 / 9{,}8)} = 2{,}48$ s; totale 3,50 s ≈ 3,5 s.

25. 108 km/h = 30 m/s; reazione 30 m/s × 1,0 s = 30 m. Asciutto: frenata $30^2/(2 \times 7{,}0) = 64$ m, totale ≈ 94 m. Bagnato: $30^2/(2 \times 4{,}0) = 112{,}5$ m, totale ≈ 143 m (con due cifre significative $1{,}4 \times 10^2$ m). Si allunga di circa 48 m, cioè di circa la metà.

26. a) Legge dei numeri dispari: 3 × 0,30 = 0,90 m; 5 × 0,30 = 1,50 m; 7 × 0,30 = 2,10 m. b) 16 × 0,30 = 4,8 m (= 0,30 + 0,90 + 1,50 + 2,10). c) Nel primo secondo $\tfrac{1}{2}a(1\text{ s})^2 = 0{,}30$ m, quindi $a = 0{,}60$ m/s^2.

27. 50 km/h = 13,9 m/s. $h = v^2/(2g) = 13{,}9^2/19{,}6 \approx 9{,}8$ m, cioè circa 10 m, poco più di tre piani. Traccia: un urto a 50 km/h contro un muro equivale a cadere dal terzo o quarto piano; a 100 km/h l'altezza diventa quattro volte maggiore (circa 39 m, una dozzina di piani), perché cresce con il quadrato della velocità. Per questo la velocità moderata e le cinture contano tanto.

28. Errori: 1) nel punto più alto la velocità è nulla ma l'accelerazione è sempre g verso il basso: il sasso non «resta fermo», la sua velocità passa da positiva a negativa; 2) la formula è $h_{max} = v_0^2/(2g) = 400/19{,}6 = 20{,}4$ m ≈ 20 m, metà del valore scritto.

29. Traccia. Aristotele afferma che, a parità di condizioni, i corpi più pesanti cadono più velocemente, e che nel vuoto, senza la resistenza del mezzo, tutti avrebbero la stessa velocità: conseguenza per lui assurda, che usa per negare il vuoto. L'osservazione è corretta per i moti in un mezzo denso (acqua, aria per corpi leggeri e larghi). Lucrezio accetta la conseguenza: nel vuoto tutti i corpi si muovono con uguale rapidità. Galileo mostra con le pietre legate che la tesi «più pesante, più veloce» si contraddice e attribuisce le differenze al mezzo, verificando poi la legge del moto accelerato sul piano inclinato. La prova diretta è la caduta di corpi diversi in un tubo svuotato d'aria e, sulla Luna, il martello e la piuma di Apollo 15 (1971).

30. Traccia. Se la legge vale, con segni alle distanze 1 : 4 : 9 : 16 dalla partenza (per esempio 0,10 m, 0,40 m, 0,90 m, 1,60 m) la biglia passa sui segni a intervalli di tempo uguali. Si regola l'inclinazione (o la posizione di partenza) finché la biglia raggiunge il primo segno al primo colpo del metronomo; poi si ascolta se i passaggi sui segni successivi (meglio se ogni segno è un piccolo ostacolo che la biglia urta con un leggero rumore) coincidono con i colpi. Con segni a distanze uguali, invece, i passaggi si farebbero sempre più fitti. Controprova: segni a 1 : 2 : 3 : 4 non danno un ritmo regolare.