CAPITOLO

7

L'equilibrio del punto materiale

«...nella superficie esattamente equilibrata detta palla resti come indifferente e dubbia tra il moto e la quiete.»
— Galileo Galilei, Le mecaniche

OBIETTIVI

1. Riconoscere quando un corpo si può trattare come un punto materiale e scrivere la condizione di equilibrio in forma vettoriale e per componenti.
2. Disegnare il diagramma di corpo libero e risolvere i problemi di equilibrio con un metodo ordinato.
3. Calcolare reazioni vincolari e tensioni di funi in geometrie notevoli o date dalla pendenza.
4. Scomporre il peso sul piano inclinato con i triangoli simili e calcolare la forza che trattiene un corpo, con e senza attrito.
5. Spiegare il funzionamento della carrucola fissa ideale e verificare in laboratorio la legge del piano inclinato.

INDICE DEL CAPITOLO

7.1 L'equilibrio di un punto materiale 2
7.2 Il diagramma di corpo libero 4
7.3 Corpi appesi a funi 6
7.4 Il piano inclinato liscio 9
7.5 Il piano inclinato con attrito 12
7.6 La carrucola fissa 14

Fisica 3 · Parte III · L'equilibrio · versione 1.0
Capitolo 7: L'equilibrio del punto materiale · pagine 171–194 del volume completo · estratto per lo studio

Un lampadario pende immobile sopra il tavolo, una barca è tirata in secco su uno scivolo, un secchio pieno aspetta sul bordo del pozzo, trattenuto da una fune che passa su una ruota. Nessuno di questi corpi si muove, eppure su ciascuno agiscono più forze: il peso, la tensione di una fune, la spinta di un piano, l'attrito. Se il corpo resta fermo, è perché queste forze si compensano esattamente.

Con questo capitolo comincia la parte dedicata all'equilibrio, la *statica*: il ramo della meccanica più antico, perché è quello in cui i Greci, con Archimede, riuscirono per primi a dimostrare leggi esatte. Partiamo dal caso più semplice, il corpo che possiamo trattare come un punto. Gli strumenti sono quelli già costruiti: la somma e la scomposizione dei vettori (capitolo 5) e le forze che hai imparato a riconoscere, il peso, la forza elastica, le reazioni vincolari e l'attrito (capitolo 6). Qui impareremo a metterli insieme con un metodo che useremo per tutto il resto del volume.

7.1 L'equilibrio di un punto materiale

7.1.1 Quando un corpo è un punto

Nel capitolo 1 hai incontrato il punto materiale: il modello di un corpo di cui conserviamo la massa ma trascuriamo le dimensioni. In statica il modello ha un significato preciso. Trattare un corpo come un punto vuol dire ammettere che tutte le forze agiscano nello stesso punto, o comunque che le loro rette d'azione passino tutte per uno stesso punto: forze di questo tipo si dicono **forze concorrenti**. Allora il corpo può soltanto spostarsi, non ruotare, e per sapere se resta fermo basta guardare la somma delle forze.

Il modello è adatto a una lampada appesa, a una cassa che non rischia di ribaltarsi, al nodo in cui si incontrano più funi. Smette di funzionare quando le forze tendono a far girare il corpo, come succede a una porta spinta vicino ai cardini o a una scala appoggiata al muro: quei casi, che chiedono il modello del corpo rigido, sono l'argomento del capitolo 8.

7.1.2 La condizione di equilibrio

Un corpo è in **equilibrio statico** quando, trovandosi fermo, resta fermo. La definizione chiede due cose: che il corpo sia fermo in un certo istante e che non cominci a muoversi. Un sasso lanciato verso l'alto, nel punto più alto della traiettoria, è fermo per un istante, ma non è in equilibrio: subito dopo ricade.

L'esperienza, e in particolare il laboratorio con le forze in equilibrio del capitolo 5, mostra che un punto materiale fermo resta fermo se, e solo se, la risultante di tutte le forze che agiscono su di esso è il vettore nullo. È la **condizione di equilibrio del punto materiale**:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}$$

La condizione non dice che sul corpo non agisce nessuna forza: dice che le forze presenti si annullano a vicenda. Una lampada appesa è sollecitata dal peso e dalla tensione del filo; è ferma perché le due forze hanno lo stesso modulo e versi opposti, non perché manchino.

Un'equazione tra vettori non si risolve direttamente con la calcolatrice. Si sceglie allora un sistema di assi cartesiani e si sfrutta il fatto, visto nel capitolo 5, che la componente di una somma è la somma delle componenti. Un vettore è nullo se e solo se sono nulle entrambe le sue componenti, quindi la condizione di equilibrio diventa una coppia di equazioni fra numeri:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots = 0 \qquad R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots = 0$$

Ogni componente porta il suo segno: positivo se la forza ha il verso dell'asse, negativo se ha il verso opposto. Due equazioni permettono di trovare due incognite, per esempio le tensioni di due funi. C'è anche una lettura grafica della stessa condizione: se si dispongono i vettori delle forze uno dopo l'altro con il metodo punta-coda, l'ultima punta torna esattamente sulla prima coda. Le forze formano un **poligono delle forze** chiuso; con tre forze, un triangolo.

Un'ultima osservazione, che riprenderemo nel capitolo 13: la stessa condizione, risultante nulla, è soddisfatta anche da un corpo che si muove in linea retta con velocità costante. Per ora ci occupiamo soltanto di corpi fermi.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Statica viene dal greco στατικός, «che fa stare fermo», aggettivo del verbo ἵστημι, «porre, collocare, fermare»: la statica è la scienza dei corpi che stanno.

Equilibrio è il latino *aequilibrium*, composto di *aequus*, «uguale», e *libra*, «bilancia»: la condizione di una bilancia con i due piatti alla pari. Dalla *libra* romana viene anche la lira, l'antica moneta, e il simbolo £ della sterlina.

Inclinato viene dal latino *inclinare*, «piegare verso», composto di *in* e di un verbo *clinare* della stessa radice del greco κλίνω, «piegare, appoggiare»; dalla stessa radice greca vengono *clima* (κλίμα, l'«inclinazione» della superficie terrestre verso il polo, e quindi la fascia di latitudine) e *clinica* (da κλίνη, il letto).

Diagramma è il greco διάγραμμα, da διαγράφω, «tracciare con linee»: nei matematici greci è la figura geometrica che accompagna una dimostrazione. Il diagramma di corpo libero ha lo stesso compito: è il disegno su cui si ragiona.

7.2 Il diagramma di corpo libero

7.2.1 Isolare il corpo

In un problema di equilibrio il passo decisivo viene prima di ogni calcolo: decidere di quale corpo si studia l'equilibrio e trovare tutte le forze che agiscono su di esso, e soltanto quelle. Lo strumento è il **diagramma di corpo libero**: un disegno in cui il corpo è staccato da tutto ciò che lo circonda e ridotto a un punto, e in cui ciascuna azione dell'ambiente (la Terra, una fune, un piano, una mano) è sostituita dalla forza che esercita sul corpo.

Nel diagramma entrano solo le forze che agiscono **sul** corpo. Una valigia preme sul pavimento, ma quella forza agisce sul pavimento e nel diagramma della valigia non compare. Un buon controllo è chiedersi, per ogni freccia, «chi esercita questa forza?»: se non sai rispondere, la freccia non va disegnata. Non esiste, per esempio, una «forza del movimento» o una «forza della posizione».

Ogni problema di equilibrio si risolve con lo stesso metodo, in sei passi:

1. **isola il corpo** di cui vuoi studiare l'equilibrio (se i corpi sono più d'uno, studiali uno alla volta);
2. **disegna le forze** che agiscono su di esso: il peso, e poi una forza per ogni contatto (fune, piano, mano, molla);
3. **scegli gli assi** in modo che il maggior numero possibile di forze cada lungo un asse;
4. **scrivi le equazioni** $R_x = 0$ e $R_y = 0$, con i segni delle componenti;
5. **risolvi** il sistema rispetto alle incognite;
6. **controlla** il risultato: le unità di misura, i segni (una tensione negativa indica un errore) e il buon senso (una fune che regge un corpo non può avere tensione nulla).

7.2.2 Un corpo su un piano orizzontale

Il caso più semplice è un corpo appoggiato su un piano orizzontale, senza altre forze. Su di esso agiscono il peso $\boldsymbol{P}$, verticale verso il basso, e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ del piano, perpendicolare al piano e verso l'alto. Con l'asse y verso l'alto l'equazione di equilibrio è $N - P = 0$, cioè $N = P$.

Basta però un'altra forza verticale perché le cose cambino. Se tiriamo in su la maniglia di una valigia senza riuscire a sollevarla, il pavimento deve sostenere meno; se ci appoggiamo sopra, deve sostenere di più. La reazione vincolare non ha un valore fisso: assume il valore che serve all'equilibrio, fino al limite di rottura del vincolo (Figura 7.1).

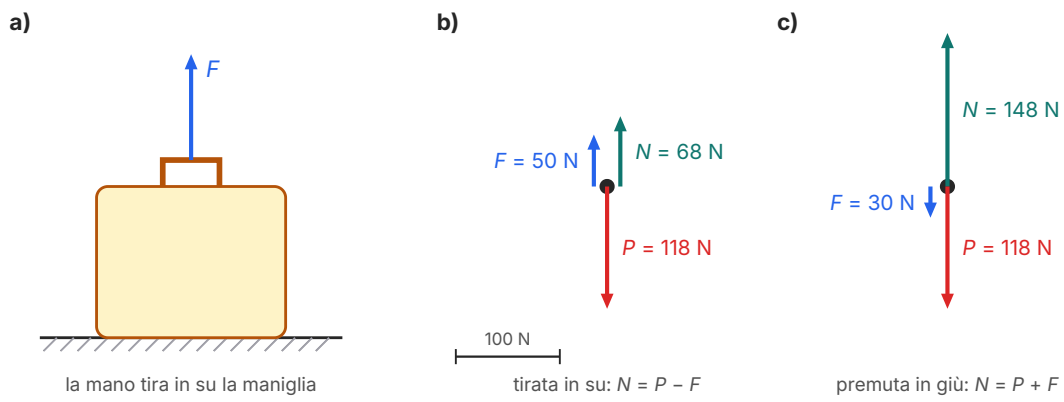


Figura 7.1 Una valigia di 12 kg ferma sul pavimento. a) La situazione: una mano tira la maniglia verso l'alto. b) Diagramma di corpo libero con una forza F = 50 N verso l'alto: $N = P - F$ = 68 N. c) Con una forza F = 30 N verso il basso: $N = P + F$ = 148 N. Le frecce sulla stessa retta sono disegnate affiancate per leggibilità; le lunghezze sono in scala.

ESEMPIO SVOLTO

La valigia che non si solleva

Problema. Una valigia di massa 12 kg è ferma sul pavimento. Calcola la reazione vincolare del pavimento quando una mano tira la maniglia verso l'alto con una forza verticale di 50 N, e quando la stessa mano preme sulla valigia verso il basso con una forza di 30 N.

Soluzione. Sulla valigia agiscono il peso, la forza della mano e la reazione del pavimento: tre forze verticali. Il peso vale $P = mg = 12\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 117{,}6\ \text{N}$. Asse y verso l'alto.

Mano che tira in su: $N + F - P = 0$, quindi $N = P - F = 117{,}6\ \text{N} - 50\ \text{N} \approx 68\ \text{N}$.

Mano che preme in giù: $N - F - P = 0$, quindi $N = P + F = 117{,}6\ \text{N} + 30\ \text{N} \approx 148\ \text{N}$.

Controllo. Nel primo caso, se la mano tirasse con più di 117,6 N, la formula darebbe una reazione negativa: il pavimento non può tirare la valigia verso il basso, quindi la valigia si staccherebbe e non sarebbe più in equilibrio. Il segno di un risultato è un'informazione fisica, non un dettaglio.

ERRORE FREQUENTE

«La reazione del pavimento è uguale al peso perché a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.» Il ragionamento è sbagliato, anche quando il risultato è giusto. Peso e reazione vincolare agiscono **sullo stesso corpo**, e $N = P$ è una conseguenza dell'**equilibrio** del corpo, non una regola generale: lo mostrano la valigia tirata per la maniglia, in cui $N < P$, e il corpo sul piano inclinato che vedrai fra poco. Il principio di azione e reazione riguarda coppie di forze che agiscono su corpi diversi; lo studierai nel capitolo 13.

7.3 Corpi appesi a funi

7.3.1 Una fune e il nodo

Un corpo appeso a una fune verticale è soggetto al peso e alla tensione $\boldsymbol{T}$ della fune, diretta lungo la fune verso il punto di sospensione. L'equilibrio dà $T - P = 0$, cioè $T = P$: una fune ideale che regge un corpo fermo ha una tensione uguale al suo peso.

Quando le funi sono più d'una e si incontrano in un nodo, conviene applicare il metodo non al corpo appeso ma al **nodo**, che è un vero punto materiale: su di esso agiscono le tensioni di tutte le funi che vi arrivano. La fune verticale che regge il corpo tira il nodo verso il basso con una forza uguale al peso del corpo; le altre funi tirano il nodo lungo le loro direzioni.

7.3.2 Due funi in direzioni notevoli

Un'insegna di 8,0 kg è appesa a un nodo da cui partono due funi fissate al soffitto: la fune 1 forma un angolo di 30° con l'orizzontale, la fune 2 un angolo di 60° (Figura 7.2a). Le due funi sono perpendicolari fra loro, perché 30° + 60° = 90°. Per scomporre le tensioni usiamo i triangoli notevoli del capitolo 5: in un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa e l'altro cateto ne è i $\sqrt{3}/2$.

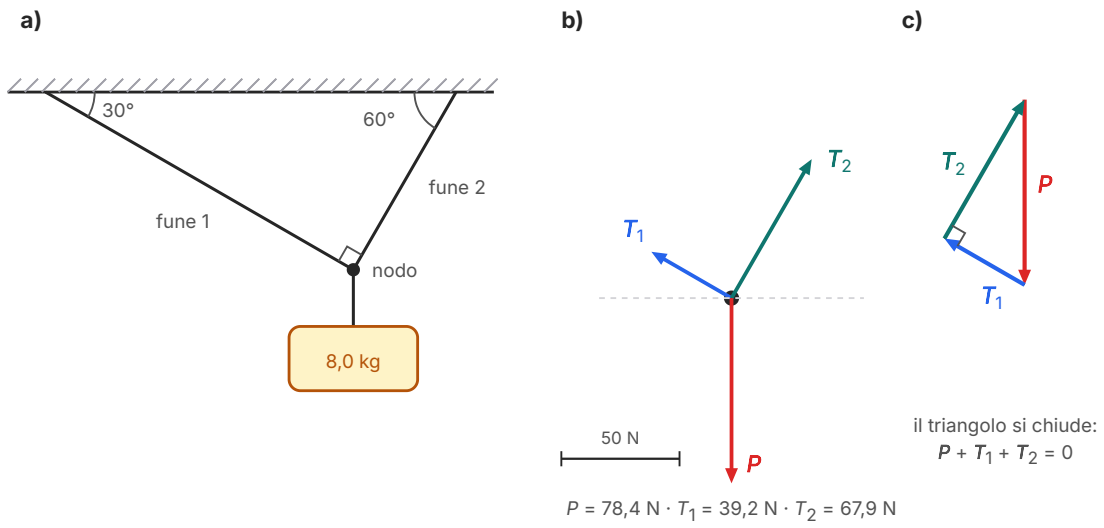


Figura 7.2 Un'insegna di 8,0 kg appesa a due funi inclinate di 30° e di 60° sull'orizzontale. a) La situazione: le due funi sono perpendicolari. b) Diagramma di corpo libero del nodo, in scala. c) Le tre forze, disposte punta-coda, formano un triangolo chiuso: è un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°, di cui P è l'ipotenusa.

ESEMPIO SVOLTO

L'insegna appesa a due funi

Problema. Calcola le tensioni delle due funi che reggono l'insegna di 8,0 kg descritta sopra.

Soluzione. Isoliamo il nodo. Su di esso agiscono la tensione della fune verticale, uguale al peso $P = 8{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 78{,}4\ \text{N}$, e le tensioni $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$. Asse x orizzontale verso destra, asse y verticale verso l'alto. La fune 1 sale verso sinistra a 30° sull'orizzontale, la fune 2 verso destra a 60°. Con i triangoli notevoli:

- $T_{1x} = -(\sqrt{3}/2)\,T_1$, $\quad T_{1y} = T_1/2$;
- $T_{2x} = T_2/2$, $\quad T_{2y} = (\sqrt{3}/2)\,T_2$.

Asse x: $-(\sqrt{3}/2)\,T_1 + T_2/2 = 0$, quindi $T_2 = \sqrt{3}\,T_1$.

Asse y: $T_1/2 + (\sqrt{3}/2)\,T_2 - P = 0$. Sostituendo: $T_1/2 + (3/2)\,T_1 = P$, cioè $2\,T_1 = P$.

Quindi $T_1 = P/2 = 39{,}2\ \text{N}$ e $T_2 = \sqrt{3} \cdot 39{,}2\ \text{N} \approx 67{,}9\ \text{N}$.

Controllo grafico. Nella Figura 7.2c le tre forze formano un triangolo rettangolo che ha $\boldsymbol{P}$ come ipotenusa: il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa (39,2 N), l'altro ne è i $\sqrt{3}/2$ (67,9 N). Osserva che la fune **più ripida** regge la parte maggiore del peso, e che la somma dei moduli delle tensioni (107,1 N) è maggiore del peso: si sommano i vettori, non i moduli.

Con due funi **simmetriche**, inclinate entrambe di 45°, le componenti orizzontali si annullano da sole e ciascuna fune regge metà del peso con la sua componente verticale, che vale $(\sqrt{2}/2)\,T$. Da $2 \cdot (\sqrt{2}/2)\,T = P$ si ricava $T = P/\sqrt{2} \approx 0{,}707\,P$: ogni fune ha una tensione maggiore di metà del peso.

7.3.3 Funi date dalla pendenza

Spesso non si conosce l'angolo, ma la geometria: quanto è lunga una fune e di quanto scende. Una lanterna di 5,0 kg è appesa a metà di un cavo teso fra due pali alla stessa altezza, distanti 4,80 m; ciascuna metà del cavo è lunga 2,50 m e il punto di mezzo si trova 0,70 m sotto i ganci. Per il teorema di Pitagora la distanza orizzontale fra un gancio e il punto di mezzo è $\sqrt{(2{,}50^2 - 0{,}70^2)}\ \text{m} = 2{,}40\ \text{m}$ (Figura 7.3).

La tensione è diretta lungo il cavo, quindi il triangolo formato da $\boldsymbol{T}$ e dalle sue componenti è **simile** al triangolo formato dal tratto di cavo, dal suo dislivello e dalla sua distanza orizzontale: i lati sono paralleli a due a due. I rapporti fra i lati corrispondenti sono uguali:

$$\frac{T_y}{T} = \frac{0{,}70\ \text{m}}{2{,}50\ \text{m}} \qquad \frac{T_x}{T} = \frac{2{,}40\ \text{m}}{2{,}50\ \text{m}}$$

Per simmetria le due metà hanno la stessa tensione e le componenti orizzontali si annullano. In verticale $2T_y = P$, cioè $2 \cdot 0{,}280\,T = 49\ \text{N}$, da cui $T = 87{,}5\ \text{N} \approx 88\ \text{N}$; la componente orizzontale vale

0,960 · 87,5 N = 84,0 N. In generale, se ciascun tratto ha lunghezza L e il punto di mezzo scende di h, la tensione è $T = PL/(2h)$.

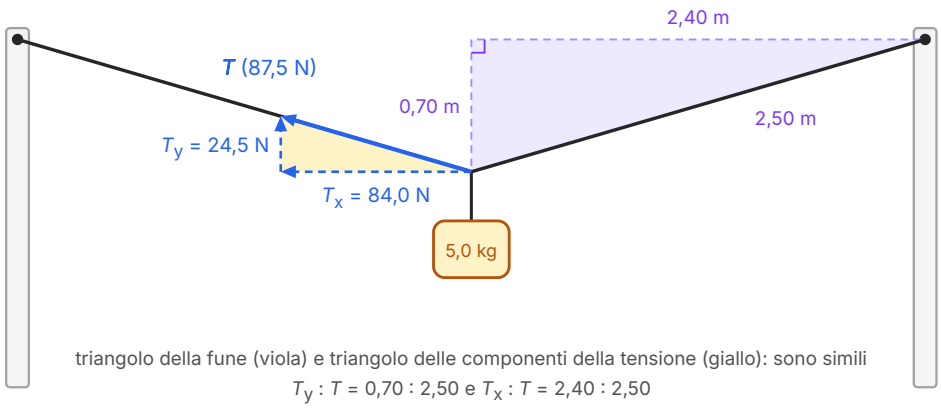


Figura 7.3 La lanterna appesa al cavo. Il tratto di destra forma, con la verticale e l'orizzontale, un triangolo rettangolo di lati 0,70 m, 2,40 m e 2,50 m (in viola); la tensione del tratto di sinistra e le sue componenti formano un triangolo simile (in giallo). Le lunghezze dei vettori sono in scala.

Il grafico della Figura 7.4 mostra come cambia la tensione se, lasciando i pali alla stessa distanza, si tende di più o di meno il cavo. Più il cavo è teso, cioè più è piccolo l'abbassamento h, più la tensione cresce: con $h = 0{,}20$ m supera i 290 N, sei volte il peso della lanterna. Un cavo perfettamente orizzontale non potrebbe reggere nulla, perché le tensioni non avrebbero componente verticale: per quanto lo si tenda, un cavo carico si incurva sempre un poco. È lo stesso motivo per cui le funi di un'amaca non vanno tese quasi orizzontali, e per cui i cavi delle teleferiche e delle linee elettriche hanno sempre una freccia visibile.

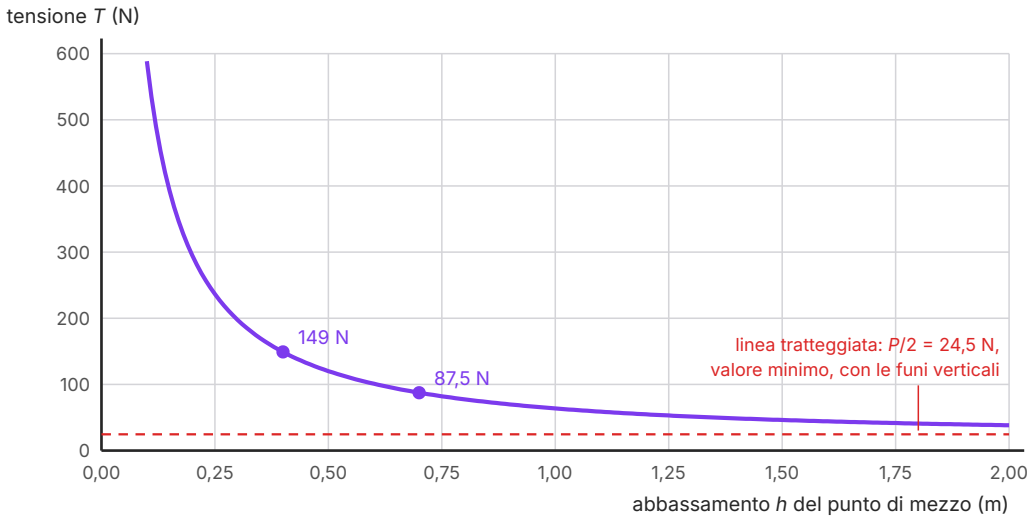


Figura 7.4 Tensione di ciascun tratto del cavo che regge la lanterna di 5,0 kg, in funzione dell'abbassamento h del punto di mezzo, con i ganci a 4,80 m di distanza: $T = PL/(2h)$, con $L = \sqrt{(2{,}40^2 + h^2)}$ m. Sono segnati i casi h = 0,40 m e h = 0,70 m.

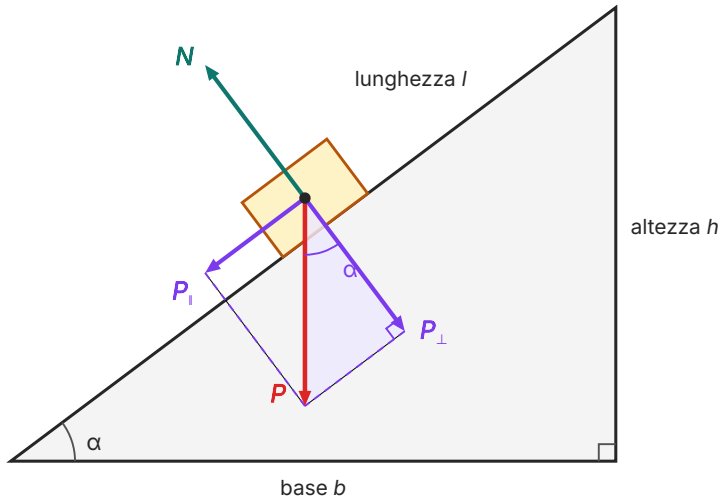
7.4 Il piano inclinato liscio

7.4.1 Scomporre il peso

Un **piano inclinato** è una superficie piana che forma un angolo con l'orizzontale: una rampa, uno scivolo, una strada in salita, un'asse appoggiata a un gradino. Visto di lato è un triangolo rettangolo, di cui chiamiamo **lunghezza** l l'ipotenusa, cioè il tratto su cui si appoggia il corpo, **altezza** h il cateto verticale e **base** b il cateto orizzontale. Per il teorema di Pitagora $l^2 = h^2 + b^2$. Il piano è **liscio** se l'attrito è trascurabile.

Un corpo appoggiato su un piano liscio non resta fermo da solo: scivola verso il basso. Il motivo si vede scomponendo il peso, che è verticale, lungo due direzioni comode: quella del piano e quella perpendicolare al piano (Figura 7.5).

- La **componente parallela** $\boldsymbol{P}_{\parallel}$ è diretta lungo il piano, verso il basso: è la parte del peso che tende a far scivolare il corpo.
- La **componente perpendicolare** $\boldsymbol{P}_{\perp}$ è perpendicolare al piano e lo preme: è la parte del peso che il piano deve sostenere.



Il triangolo delle forze (P, $P_\perp$, $P_\parallel$) è simile al triangolo del piano (l, b, h):

$P_\parallel : P = h : l$

$P_\perp : P = b : l$

Qui il piano sale di 3 ogni 4: $h : b : l = 3 : 4 : 5$, quindi $P_\parallel = 0{,}6\,P$ e $P_\perp = 0{,}8\,P$

Figura 7.5 Un corpo su un piano inclinato liscio che sale di 3 m ogni 4 m. Il peso $\boldsymbol{P}$ è scomposto nella componente $\boldsymbol{P}_\parallel$, lungo il piano, e nella componente $\boldsymbol{P}_\perp$, perpendicolare al piano; $\boldsymbol{N}$ è la reazione vincolare. L'angolo fra $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}_\perp$ è uguale all'angolo α del piano, quindi il triangolo delle forze (in viola) è simile al triangolo del piano.

7.4.2 I due triangoli simili

Per calcolare i moduli di $\boldsymbol{P}_\parallel$ e $\boldsymbol{P}_\perp$ non servono strumenti nuovi: basta dimostrare che il triangolo delle forze è simile al triangolo del piano.

- Il triangolo delle forze ha come ipotenusa $\boldsymbol{P}$ e come cateti $\boldsymbol{P}_\perp$ e $\boldsymbol{P}_\parallel$, che sono perpendicolari fra loro perché uno è perpendicolare al piano e l'altro gli è parallelo.
- Il peso $\boldsymbol{P}$ è verticale, quindi è parallelo all'altezza h del piano. Nel triangolo del piano l'altezza forma con la lunghezza l un angolo di $90° - \alpha$ (gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari). $\boldsymbol{P}_\parallel$ è parallelo a l: l'angolo fra $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}_\parallel$ è dunque anch'esso $90° - \alpha$, perché formato da lati paralleli a quelli del primo.
- Nel triangolo delle forze, allora, l'angolo fra $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}_\perp$ vale α. I due triangoli rettangoli hanno un angolo acuto uguale e sono simili: P corrisponde a l, $P_\parallel$ (opposto ad α) corrisponde a h, $P_\perp$ (adiacente ad α) corrisponde a b.

Dalla similitudine discendono le due relazioni fondamentali del piano inclinato:

$$\frac{P_\parallel}{P} = \frac{h}{l} \quad \Rightarrow \quad P_\parallel = P \cdot \frac{h}{l} \qquad \frac{P_\perp}{P} = \frac{b}{l} \quad \Rightarrow \quad P_\perp = P \cdot \frac{b}{l}$$

In parole: la parte del peso che fa scivolare il corpo sta al peso come l'altezza del piano sta alla sua lunghezza. Il rapporto è quello fra l'altezza e la **lunghezza**, non fra l'altezza e la base. Quando il piano è dato con un angolo di 30°, 45° o 60°, i rapporti h/l e b/l si leggono sui triangoli notevoli (Tabella 7.1); in ogni altro caso si ricavano dalle misure del piano.

Tabella 7.1 Componenti del peso sul piano inclinato liscio, come frazioni del peso P.

inclinazione	h/l	b/l	$P_\parallel$	$P_\perp$
piano orizzontale	0	1	0	P
30°	1/2 = 0,500	√3/2 ≈ 0,866	0,500 P	0,866 P
sale di 3 ogni 4 (3 : 4 : 5)	0,600	0,800	0,600 P	0,800 P
45°	√2/2 ≈ 0,707	√2/2 ≈ 0,707	0,707 P	0,707 P
60°	√3/2 ≈ 0,866	1/2 = 0,500	0,866 P	0,500 P
parete verticale	1	0	P	0

Al crescere dell'inclinazione $P_\parallel$ aumenta e $P_\perp$ diminuisce. I due casi estremi sono un controllo utile per ogni formula: sul piano orizzontale ($h = 0$) la componente parallela è nulla e il piano sostiene tutto il peso; su una parete verticale ($b = 0$, $h = l$) il peso è tutto parallelo e la parete non sostiene nulla.

7.4.3 Tenere fermo un corpo sul piano

Sul corpo appoggiato al piano liscio agiscono il peso e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$, perpendicolare al piano. Per tenerlo fermo serve una terza forza: per esempio quella di una fune o di una mano, parallela al piano e diretta verso l'alto. Conviene scegliere l'asse x lungo il piano, verso l'alto, e l'asse y perpendicolare al piano: così due forze su tre cadono già lungo gli assi, e il peso è sostituito dalle sue due componenti.

$$\text{asse } x\text{: } F - P_\parallel = 0 \quad \Rightarrow \quad F = P \cdot \frac{h}{l} \qquad \text{asse } y\text{: } N - P_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P \cdot \frac{b}{l}$$

Due conseguenze. La reazione del piano inclinato è **minore del peso**, perché $b < l$: è l'esempio più chiaro che $N = P$ non è una regola. E la forza che trattiene il corpo è anch'essa minore del peso: il rapporto $F/P = h/l$, che chiameremo **vantaggio del piano inclinato**, dice quale frazione del peso occorre. Su una rampa che sale di 1 m ogni 4 m di lunghezza basta un quarto del peso. È per questo che si caricano i fusti sui camion facendoli rotolare su due assi, e che le antiche rampe di cantiere permettevano di portare in quota blocchi che nessuno avrebbe potuto sollevare a braccia. Il vantaggio però ha un prezzo, perché il carico deve percorrere tutta la lunghezza l per salire soltanto di h: ne capiremo il significato nel capitolo 15, quando parleremo di lavoro.

ESEMPIO SVOLTO

Un carrello su una rampa

Problema. Un carrello carico, di massa complessiva 25 kg, è trattenuto con una fune parallela a una rampa liscia lunga 3,0 m, che porta su un pianale alto 0,90 m. Calcola la tensione della fune e la reazione vincolare della rampa.

Soluzione. Sul carrello agiscono il peso $P = 25\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 245\ \text{N}$, la reazione $\boldsymbol{N}$ perpendicolare alla rampa e la tensione $\boldsymbol{T}$ parallela alla rampa. La base della rampa è $b = \sqrt{(3{,}0^2 - 0{,}90^2)}\ \text{m} \approx 2{,}86\ \text{m}$.

Asse x lungo la rampa: $T = P \cdot h/l = 245\ \text{N} \cdot 0{,}90/3{,}0 = 73{,}5\ \text{N} \approx 74\ \text{N}$.

Asse y perpendicolare alla rampa: $N = P \cdot b/l = 245\ \text{N} \cdot 2{,}86/3{,}0 \approx 2{,}3 \times 10^2\ \text{N}$.

Controllo. La tensione è circa il 30% del peso, come il rapporto 0,90/3,0; la reazione è un po' minore del peso, come deve essere su una rampa poco ripida. Le cifre significative sono due, come nei dati 3,0 m e 0,90 m.

COLLEGAMENTI

La pendenza di strade e rampe

I cartelli stradali di salita ripida o discesa pericolosa riportano una percentuale, per esempio 10%. È la pendenza della strada: il rapporto h/b fra il dislivello e lo spostamento orizzontale, espresso in percentuale; è proprio la pendenza, nel senso del capitolo 4, della retta che rappresenta il profilo della strada. Una strada al 10% sale di 10 m ogni 100 m misurati in orizzontale. Per pendenze così piccole b e l quasi coincidono (con $h = 10$ m e $b = 100$ m, $l \approx 100{,}5$ m), quindi h/b è anche, con buona approssimazione, la frazione $P_{\parallel}/P$. Attenzione però: una pendenza del 100% non è una parete verticale, ma un piano con $h = b$, cioè inclinato di 45°.

La pendenza conta molto per chi si muove in carrozzina. La normativa italiana sull'abbattimento delle barriere architettoniche (decreto ministeriale n. 236 del 1989) fissa in generale per le rampe una pendenza massima dell'8%. Su una rampa così, per una persona che con la carrozzina ha una massa di 90 kg, la componente parallela del peso è circa $0{,}080 \cdot 882\ \text{N} \approx 70\ \text{N}$: è la forza che le braccia devono vincere per salire o trattenere in discesa, già notevole se mantenuta per molti metri.

7.5 Il piano inclinato con attrito

7.5.1 Quando un corpo resta fermo da solo

Un'auto parcheggiata in salita, una gomma su un libro appena inclinato, una cassa su una rampa: nella realtà molti corpi restano fermi su un piano inclinato senza che nessuno li tratten-

ga. Li tiene l'attrito statico $\boldsymbol{F}_s$, parallelo al piano e diretto verso l'alto, opposto alla tendenza a scivolare. Con gli stessi assi di prima:

$$\text{asse } x\text{: } F_s - P_\parallel = 0 \quad \Rightarrow \quad F_s = P_\parallel \qquad \text{asse } y\text{: } N - P_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P_\perp$$

Come hai visto nel capitolo 6, l'attrito statico non ha un valore fisso: vale quanto serve, ma non può superare il valore massimo $\mu_s F_\perp$. Qui la forza premente è $F_\perp = P_\perp$. Il corpo resta fermo da solo se la forza che serve non supera quella disponibile:

$$P_\parallel \le \mu_s P_\perp \quad \Leftrightarrow \quad P \cdot \frac{h}{l} \le \mu_s \cdot P \cdot \frac{b}{l} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{b} \le \mu_s$$

Il peso e la lunghezza si semplificano, e rimane una condizione sorprendentemente semplice: un corpo resta fermo da solo su un piano inclinato se la pendenza h/b non supera il coefficiente di attrito statico. Il risultato **non dipende dalla massa**: un blocchetto di legno e una cassa dello stesso legno, sullo stesso piano, cominciano a scivolare alla stessa inclinazione.

ERRORE FREQUENTE

Scrivere sempre $F_s = \mu_s P_\perp$ è un errore. L'attrito statico vale quanto serve all'equilibrio, qui $F_s = P_\parallel$; il prodotto $\mu_s P_\perp$ è soltanto il **massimo** che può raggiungere. Un libro fermo su un leggio poco inclinato riceve un attrito piccolo, pari a $P_\parallel$, anche se il coefficiente è grande. L'uguaglianza $F_s = \mu_s P_\perp$ vale in un solo caso: quando il corpo sta per scivolare.

7.5.2 L'inclinazione limite

Se si solleva lentamente un'estremità di un'asse su cui è appoggiato un blocchetto, la pendenza cresce e l'attrito che serve cresce con essa. Arriva un momento in cui l'attrito raggiunge il suo massimo e il blocchetto è sul punto di partire: è la situazione di **slittamento incipiente**, in cui $P_\parallel = \mu_s P_\perp$. La pendenza corrispondente si chiama **inclinazione limite**, e soddisfa

$$\frac{h}{b} = \mu_s$$

È un modo semplice ed elegante di misurare μ_s: basta trovare l'inclinazione a cui il corpo comincia a scivolare e misurare con un metro h e b. Se per esempio un blocchetto parte quando l'asse sale di 24 cm su una base di 60 cm, il coefficiente di attrito statico fra blocchetto e asse è 24/60 = 0,40. Un'auto con gomme su asfalto asciutto (μ_s circa 0,9, Tabella A.5 dell'Appendice) resterebbe ferma, frenata, su pendenze vicine al 90%, molto più ripide di qualunque strada; su una strada ghiacciata, dove il coefficiente è molto più basso, basta una pendenza modesta perché l'auto scivoli.

7.5.3 Trattenere o spingere un corpo sul piano scabro

Se il piano è troppo ripido perché il corpo resti fermo da solo, cioè se $P_\parallel > \mu_s P_\perp$, serve una forza F parallela al piano verso l'alto. Ma, a differenza del piano liscio, la forza non ha un unico valore possibile: l'attrito statico può aiutarla o contrastarla, e il corpo resta fermo per tutto un intervallo di valori di F. Il valore minimo si ha quando il corpo sta per scivolare verso il basso, e l'attrito, rivolto verso l'alto, dà il massimo aiuto; il valore massimo quando il corpo sta per salire, e l'attrito, rivolto verso il basso, si oppone con tutta la sua forza:

$$P_\parallel - \mu_s P_\perp \le F \le P_\parallel + \mu_s P_\perp$$

ESEMPIO SVOLTO

Una cassa su una rampa a 30°

Problema. Una cassa di 40 kg è appoggiata su una rampa inclinata di 30°; il coefficiente di attrito statico fra cassa e rampa è $\mu_s = 0{,}40$. La cassa resta ferma da sola? Fra quali valori deve essere compresa una forza parallela alla rampa, verso l'alto, perché la cassa resti ferma?

Soluzione. $P = 40\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 392\ \text{N}$. Per un piano a 30°, $h/l = 1/2$ e $b/l = \sqrt{3}/2$, quindi $P_\parallel = 196\ \text{N}$ e $P_\perp = (\sqrt{3}/2) \cdot 392\ \text{N} \approx 339\ \text{N}$. La pendenza è $h/b = (1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58$, maggiore di 0,40: la cassa, lasciata a sé, scivola.

Attrito massimo: $\mu_s P_\perp = 0{,}40 \cdot 339\ \text{N} \approx 136\ \text{N}$.

Forza minima (la cassa sta per scendere, attrito verso l'alto): $F_{\text{min}} = 196\ \text{N} - 136\ \text{N} \approx 60\ \text{N}$.

Forza massima (la cassa sta per salire, attrito verso il basso): $F_{\text{max}} = 196\ \text{N} + 136\ \text{N} \approx 332\ \text{N}$.

Risultato. Con una forza compresa fra circa 60 N e circa 330 N la cassa resta ferma. Sulla stessa rampa senza attrito servirebbero esattamente 196 N: l'attrito non cambia la forza «giusta», ma trasforma un valore in un intervallo.

7.6 La carrucola fissa

Per tirare su un secchio da un pozzo è molto più comodo tirare una fune verso il basso, aiutandosi con il proprio peso, che tirarla verso l'alto. Lo si ottiene con una **carrucola fissa**: una ruota con una gola sul bordo, libera di girare attorno a un perno fissato a un sostegno, su cui passa la fune (Figura 7.6a).

Una carrucola si dice **carrucola ideale** se ha massa trascurabile e gira senza attrito, e se la fune che vi passa è ideale (inestensibile e di massa trascurabile). In questo modello la tensione ha lo **stesso modulo** nei due tratti di fune: la carrucola cambia la direzione della forza, non il suo modulo. Per tenere fermo un secchio di 12 kg bisogna tirare con una forza di 118 N, esattamente come senza carrucola; si guadagna in comodità, non in fatica.

Il sostegno della carrucola, invece, deve reggere entrambi i tratti di fune. Applicando il metodo alla carrucola stessa: su di essa tirano verso il basso le due tensioni, di 118 N ciascuna, e il gancio la tiene su con una forza di 235 N, il doppio. Chi fissa una carrucola al soffitto deve tenerne conto.

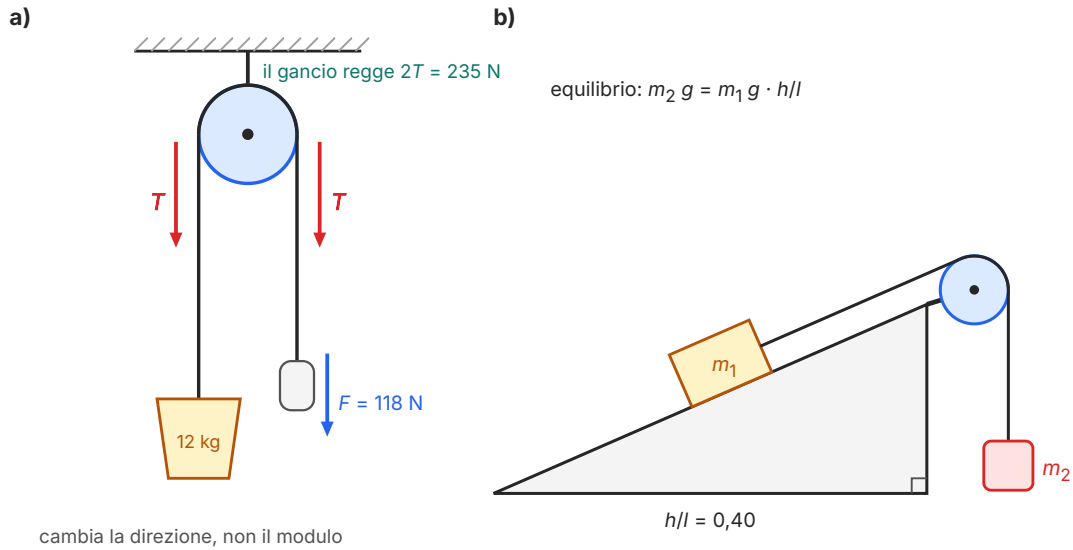


Figura 7.6 La carrucola fissa ideale. a) Un secchio di 12 kg trattenuto con una fune che passa sulla carrucola: la mano tira con $F = T = 118$ N, il gancio regge $2T = 235$ N. b) Un blocco di massa m_1 su un piano inclinato liscio con $h/l = 0{,}40$, collegato da una fune parallela al piano a un contrappeso di massa m_2.

La carrucola fissa permette anche di collegare corpi che si trovano in posizioni diverse. Nella Figura 7.6b un blocco di massa m_1, su un piano inclinato liscio, è tenuto da un contrappeso appeso: la fune è parallela al piano dal blocco alla carrucola, poi scende in verticale. La tensione è la stessa nei due tratti. Il contrappeso è in equilibrio se $T = m_2 g$; il blocco se $T = m_1 g \cdot h/l$. Uguagliando:

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{h}{l}$$

Con $m_1 = 6{,}0$ kg e $h/l = 0{,}40$ serve un contrappeso di 2,4 kg. Un dispositivo come questo, con i pesi al posto delle misure di forza, è il modo più semplice di verificare in laboratorio la legge del piano inclinato. Esistono anche carrucole che si spostano con il carico, le carrucole mobili, che riducono davvero la forza necessaria: le incontrerai nel capitolo 8, fra le macchine semplici.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la forza che trattiene un carrello sul piano inclinato

Materiali. Una guida rettilinea lunga 1,000 m (o un'asse liscia), un carrello con ruote a basso attrito, un dinamometro con portata 5 N e sensibilità 0,05 N, un metro a nastro (sensibilità 1 mm), un sostegno o una pila di libri per sollevare un'estremità della guida.

Procedimento. 1) Appendi il carrello al dinamometro tenuto verticale e misura il suo peso P. 2) Appoggia la guida al sostegno e misura l'altezza h dell'estremità sollevata rispetto al tavolo; la lunghezza l è quella della guida. 3) Aggancia il dinamometro al carrello e tienilo **parallelo alla guida**: leggi la forza F che trattiene il carrello fermo. Batti leggermente con un dito sulla guida prima di ogni lettura, perché il piccolo attrito delle ruote non falsi la misura. 4) Ripeti con cinque altezze diverse.

Tabella 7.2 Dati di una prova: guida lunga l = 1,000 m; peso del carrello misurato con il dinamometro verticale P = (4,90 ± 0,05) N.

h (cm) ± 0,2	h/l	F (N) ± 0,05	$F/(h/l)$ (N)
10,0	0,100	0,50	5,00
20,0	0,200	1,00	5,00
30,0	0,300	1,45	4,83
40,0	0,400	1,95	4,88
50,0	0,500	2,45	4,90

Che cosa concludere. Riporta i dati in un grafico con h/l in ascissa e F in ordinata, con le barre di incertezza (Figura 7.7). Se la legge $F = P \cdot h/l$ è vera, i punti stanno su una retta passante per l'origine, la cui pendenza è il peso del carrello. Confronta la pendenza, con la sua incertezza, con il peso misurato direttamente: due misure compatibili confermano la legge.

Sicurezza. Blocca la guida perché non scivoli dal sostegno e fermati prima che l'inclinazione renda il carrello difficile da trattenere.

Per la relazione. Segui lo schema del capitolo 4: tabella con unità e incertezze, grafico con barre di incertezza e rette di massima e minima pendenza, pendenza con la sua incertezza, confronto di compatibilità con il peso misurato, discussione degli errori sistematici (dinamometro non parallelo alla guida, attrito delle ruote, azzeramento del dinamometro, che va fatto nella posizione in cui si misura).

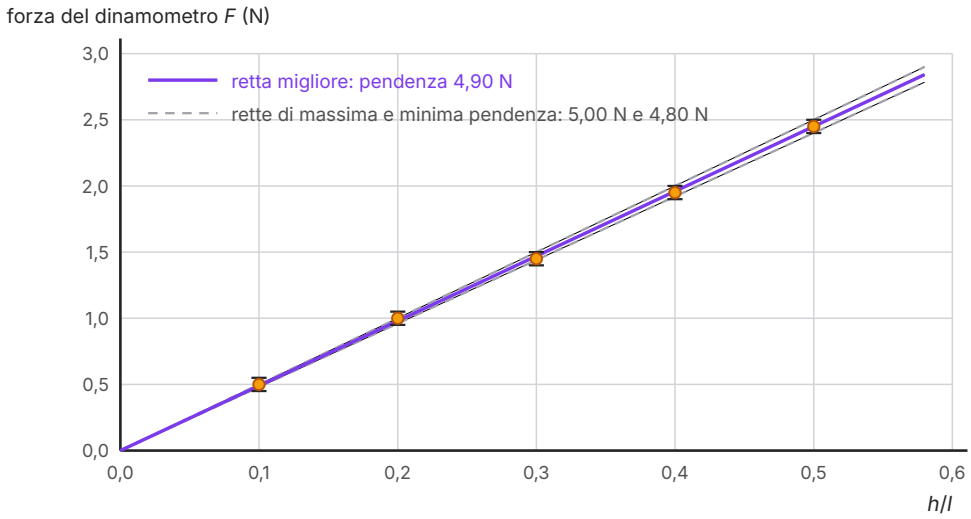


Figura 7.7 Forza che trattiene il carrello in funzione di h/l (dati della Tabella 7.2), con le barre di incertezza di ±0,05 N. Le rette passano per l'origine: la migliore ha pendenza 4,90 N; le rette tratteggiate sono quelle di massima e minima pendenza che attraversano ancora tutte le barre.

ESEMPIO SVOLTO

Dal grafico al peso del carrello

Problema. Usa i dati della Tabella 7.2 e il grafico della Figura 7.7 per ricavare la pendenza della retta con la sua incertezza e confrontala con il peso del carrello.

Soluzione. La legge da verificare, $F = P \cdot h/l$, è una proporzionalità diretta: la retta deve passare per l'origine, e possiamo cercare solo rette di questo tipo. L'ultima colonna della tabella mostra che il rapporto $F/(h/l)$ è circa costante, fra 4,83 N e 5,00 N, come ci si aspetta.

Fra le rette per l'origine, quella di pendenza massima che attraversa ancora tutte le barre passa per l'estremo superiore della barra a 0,300 (1,50 N): pendenza 1,50 N/0,300 = 5,00 N. Quella di pendenza minima passa per l'estremo inferiore della barra a 0,500 (2,40 N): pendenza 2,40 N/0,500 = 4,80 N.

Pendenza = (5,00 N + 4,80 N)/2 = 4,90 N, con incertezza (5,00 N − 4,80 N)/2 = 0,10 N; risultato (4,90 ± 0,10) N, incertezza relativa del 2%.

Confronto. Il peso misurato direttamente è (4,90 ± 0,05) N: gli intervalli 4,80–5,00 N e 4,85–4,95 N si sovrappongono, quindi le due misure sono compatibili. I dati confermano, entro le incertezze, che la forza che trattiene il carrello è proporzionale a h/l e che la costante di proporzionalità è il peso.

APPROFONDIMENTO

Una legge difficile: il piano inclinato da Erone a Galileo

La legge della leva, come vedrai nel capitolo 8, fu dimostrata da Archimede nel III secolo a.C. Quella del piano inclinato, che oggi ricaviamo in poche righe, ebbe una storia molto più lunga. Il matematico alessandrino Erone, nella sua *Meccanica* (giunta a noi completa solo in una traduzione araba), e più tardi Pappo di Alessandria, nell'VIII libro della *Collezione matematica*, cercarono la forza necessaria per far salire un peso lungo un piano, ma nessuno dei due arrivò alla relazione corretta.

La prima dimostrazione corretta che conosciamo si trova in un trattato latino del XIII secolo, il *De ratione ponderis*, legato al nome di Giordano Nemorario (*Iordanus de Nemore*): vi si introduce la «gravità secondo la posizione» (*gravitas secundum situm*), l'idea che un corpo «pesi» meno lungo un percorso meno ripido. Nel 1586 Simon Stevin ritrovò la legge con l'argomento della corona di sfere che hai visto nel capitolo 5.

Galileo la dimostrò ancora in un altro modo nelle *Mecaniche*, scritte negli anni dell'insegnamento a Padova, riconducendo il piano inclinato a una leva che si piega. Ecco come enuncia il risultato, riferendosi a un piano AC di altezza CH (nella sua figura AF è la verticale):

«si dimostrerà, il medesimo peso esser sopra il piano elevato AC mosso da minor forza che nella perpendicolare AF (dove viene alzato da forza a sé stesso eguale), secondo la proporzione che la perpendicolare CH è minore della AC» (Galileo Galilei, *Le mecaniche*, Edizione Nazionale, vol. II).

È esattamente $F/P = h/l$. Subito dopo Galileo spiega perché Pappo aveva sbagliato: «si è abbagliato nell'assunto che lui fa, dove suppone, il peso dover esser mosso nel piano orizontale da una forza data: il che è falso». Su un piano orizzontale perfettamente liscio, osserva, non serve alcuna forza sensibile per muovere un corpo. In questa critica c'è già, in germe, un'idea che diventerà il principio d'inerzia (capitolo 13).

IN SINTESI

$\boldsymbol{R = 0}$, cioè $\boldsymbol{R_x = 0}$ **e** $\boldsymbol{R_y = 0}$: un punto materiale fermo resta fermo se, e solo se, la somma vettoriale delle forze è nulla; per componenti, su ciascun asse le componenti positive compensano quelle negative (forze in N).

$\boldsymbol{N = P}$ solo per un corpo fermo su un piano orizzontale senza altre forze verticali: in generale la reazione vincolare si ricava dall'equilibrio.

$\boldsymbol{T = PL/(2h)}$: tensione di ciascuna di due funi simmetriche lunghe L, con il punto di mezzo abbassato di h (lunghezze nella stessa unità): cresce quando le funi si avvicinano all'orizzontale.

$\boldsymbol{P_{\parallel} = P \cdot h/l}$ e $\boldsymbol{P_{\perp} = P \cdot b/l}$: componenti del peso parallela e perpendicolare a un piano inclinato di altezza h, base b e lunghezza l; la prima tende a far scivolare il corpo, la seconda lo preme sul piano.

$\boldsymbol{F = P \cdot h/l}$, $\boldsymbol{N = P \cdot b/l}$: forza parallela al piano liscio che trattiene il corpo e reazione del piano; entrambe minori del peso.

$\boldsymbol{h/b \leq \mu_s}$: condizione perché un corpo resti fermo da solo su un piano scabro; all'inclinazione limite $h/b = \mu_s$. Non dipende dalla massa.

$\boldsymbol{P_{\parallel} - \mu_s P_{\perp} \leq F \leq P_{\parallel} + \mu_s P_{\perp}}$: valori della forza parallela al piano che tengono fermo un corpo su un piano scabro.

Carrucola fissa ideale: la tensione ha lo stesso modulo nei due tratti di fune; il sostegno regge la somma delle due tensioni.

Nel prossimo capitolo lasceremo il punto materiale: scopriremo che per un corpo esteso una risultante nulla non basta, perché due forze uguali e opposte possono farlo ruotare, e incontreremo le leve di Archimede.

SINTESI

- Un corpo si può trattare come un punto materiale, in statica, quando le forze che agiscono su di esso sono concorrenti e non tendono a farlo ruotare.
- Un corpo è in equilibrio statico se, trovandosi fermo, resta fermo; essere fermi per un istante non basta.
- Condizione di equilibrio del punto materiale: la risultante delle forze è nulla, $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$; per componenti, $R_x = 0$ e $R_y = 0$. Graficamente, il poligono delle forze si chiude.
- Il diagramma di corpo libero isola il corpo e mostra soltanto le forze che agiscono su di esso; il metodo procede in sei passi: isolare, disegnare, scegliere gli assi, scrivere le equazioni, risolvere, controllare.
- La reazione vincolare assume il valore richiesto dall'equilibrio: $N = P$ vale solo su un piano orizzontale senza altre forze verticali, e non è una conseguenza del principio di azione e reazione.
- Nei sistemi di funi si studia l'equilibrio del nodo; le componenti delle tensioni si ricavano dai triangoli notevoli (30°, 45°, 60°) o dai triangoli simili formati dalle funi.
- Due funi simmetriche hanno tensione $T = PL/(2h)$, tanto più grande quanto più sono vicine all'orizzontale; un cavo carico non può essere perfettamente orizzontale.
- Sul piano inclinato il triangolo delle forze è simile al triangolo del piano: $P_{\parallel} = P \cdot h/l$, $P_{\perp} = P \cdot b/l$.
- Sul piano liscio la forza parallela che trattiene un corpo vale $P \cdot h/l$ e la reazione vincolare $P \cdot b/l$: entrambe minori del peso.
- Sul piano scabro un corpo resta fermo da solo se $h/b \le \mu_s$; all'inclinazione limite $h/b = \mu_s$, indipendentemente dalla massa. Una forza parallela lo tiene fermo per tutto un intervallo di valori.
- La carrucola fissa ideale cambia la direzione della tensione ma non il suo modulo; il sostegno regge la somma delle tensioni dei due tratti.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un corpo è in equilibrio statico quando:
   - **A.** su di esso non agisce alcuna forza
   - **B.** trovandosi fermo, resta fermo
   - **C.** è fermo anche solo per un istante
   - **D.** il suo peso è uguale alla reazione vincolare

2. ● Su un punto materiale fermo agiscono tre forze. Se il corpo resta fermo, allora:

   A. le tre forze hanno lo stesso modulo

   B. le tre forze sono parallele

   C. la somma vettoriale delle tre forze è nulla

   D. la somma dei moduli delle tre forze è nulla

3. ● Nel diagramma di corpo libero di una valigia appoggiata sul pavimento si disegnano:

   A. la forza che la valigia esercita sul pavimento e il peso

   B. soltanto il peso

   C. il peso, la reazione del pavimento e la forza della valigia sul pavimento

   D. soltanto le forze esercitate sulla valigia da altri corpi

4. ●● Un libro di 2,0 kg è fermo su un tavolo orizzontale e una mano lo preme verso il basso con una forza verticale di 5,0 N. La reazione del tavolo vale circa:

   A. 25 N

   B. 20 N

   C. 15 N

   D. 5,0 N

5. ● Su un piano inclinato liscio di altezza h, base b e lunghezza l, la componente del peso parallela al piano vale:

   A. $P \cdot h/b$

   B. $P \cdot h/l$

   C. $P \cdot b/l$

   D. $P \cdot l/h$

6. ●● Su un piano inclinato di 30° la componente del peso perpendicolare al piano vale:

   A. $P/2$

   B. $(\sqrt{2}/2)\,P$

   C. $(\sqrt{3}/2)\,P \approx 0{,}87\,P$

   D. P

7. ●● Un blocco appoggiato su un piano inclinato scabro resta fermo da solo se:

   A. $h/l \geq \mu_s$

   B. $h/b \geq \mu_s$

   C. $b/h \leq \mu_s$

   D. $h/b \leq \mu_s$

8. ● Una carrucola fissa ideale:
   A. cambia la direzione della tensione, non il suo modulo
   B. dimezza la forza necessaria a sollevare un carico
   C. raddoppia la tensione della fune
   D. annulla il peso del carico

Vero o falso

9. ● Un corpo su cui agiscono forze non può essere in equilibrio. V / F

10. ● La reazione vincolare di un piano orizzontale è sempre uguale al peso del corpo appoggiato. V / F

11. ●● Una lanterna è appesa a due funi simmetriche: più le funi si avvicinano all'orizzontale, più cresce la loro tensione. V / F

12. ●● Sul piano inclinato liscio la reazione vincolare è minore del peso del corpo. V / F

13. ●● Un blocco pesante comincia a scivolare su un'asse inclinata a una pendenza minore di quella di un blocco leggero dello stesso materiale. V / F

Applicare

14. ● Una lampada di massa 1,2 kg è appesa a un filo verticale. Calcola la tensione del filo.

15. ● Una cassa di 15 kg è ferma sul pavimento; una persona la tira verso l'alto con una forza verticale di 60 N, senza riuscire a sollevarla. Calcola la reazione vincolare del pavimento.

16. ●● Un vaso di 20 kg è appeso a due funi simmetriche, inclinate ciascuna di 45° sull'orizzontale. Calcola la tensione di ciascuna fune.

17. ● Un corpo di 8,0 kg è appoggiato su un piano inclinato liscio lungo 2,0 m e alto 0,50 m. Calcola la base del piano, la componente del peso parallela al piano e quella perpendicolare.

18. ●● Completa. Una strada con pendenza del 12% sale di _____ m ogni 100 m percorsi in orizzontale. Un blocco con $\mu_s = 0{,}10$ appoggiato su di essa _____ (resta fermo / scivola), perché _____ .

19. ●● Leggi sul grafico della Figura 7.4 la tensione del cavo quando il punto di mezzo si abbassa di 0,40 m; poi verifica il valore con la formula $T = PL/(2h)$.

20. ●● Un secchio di 3,0 kg è tenuto fermo da una persona con una fune che passa su una carrucola fissa ideale appesa al soffitto; la persona tira la fune verticalmente verso il basso. Calcola la forza della persona e la forza che il gancio della carrucola esercita sulla carrucola.

Problemi

21. ●● Una lampada di 5,0 kg è appesa a due funi fissate al soffitto: la fune 1 forma un angolo di 30° con l'orizzontale, la fune 2 un angolo di 60°. Disegna il diagramma di corpo libero del nodo e calcola le due tensioni.

22. ●●● Un sacchetto di 3,0 kg è appeso a metà di un filo da stendere; ciascuna metà del filo è lunga 3,0 m e il punto di mezzo si trova 0,30 m sotto i due ganci, che sono alla stessa altezza. a) Calcola la distanza orizzontale fra un gancio e il punto di mezzo. b) Calcola la tensione del filo e la sua componente orizzontale. c) Quanto dovrebbe abbassarsi il punto di mezzo, con lo stesso filo (avvicinando i ganci), perché la tensione fosse uguale al peso del sacchetto?

23. ●● Un blocchetto di legno è appoggiato su un'asse lunga 1,50 m. Sollevando lentamente un'estremità, il blocchetto comincia a scivolare quando quell'estremità è a 45 cm dal tavolo. a) Calcola il coefficiente di attrito statico fra blocchetto e asse. b) Se l'estremità viene riportata a 40 cm, il blocchetto, rimesso sull'asse, resta fermo?

24. ●●● Una cassa di 50 kg è appoggiata su una rampa che sale di 3 m ogni 4 m in orizzontale; μ_s = 0,50. a) La cassa resta ferma da sola? b) Calcola la forza minima e la forza massima, parallele alla rampa e dirette verso l'alto, che la tengono ferma. Indica in ciascun caso il verso dell'attrito.

25. ●●● (Con il capitolo 6.) Un carrello di 2,0 kg è tenuto fermo su un piano inclinato liscio di 30° da una molla parallela al piano, di costante elastica 250 N/m, fissata in cima al piano. Calcola l'allungamento della molla e la reazione vincolare del piano.

26. ●●● Un blocco di 4,0 kg è appoggiato su un piano inclinato di 30° ed è collegato, con una fune parallela al piano che passa su una carrucola fissa ideale in cima al piano, a un contrappeso appeso. a) Se il piano è liscio, quale massa deve avere il contrappeso perché il sistema resti fermo? b) Se fra blocco e piano μ_s = 0,20, fra quali valori può essere compresa la massa del contrappeso?

Ragionare e argomentare

27. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Se un corpo è appeso a due funi, ciascuna fune regge sempre metà del suo peso». Spiega perché è sbagliato, usando l'esempio dell'insegna appesa a funi di 30° e 60° e quello delle funi simmetriche quasi orizzontali.

28. ●●● Progetta un esperimento per verificare la legge del piano inclinato senza usare il dinamometro, con un carrello, una guida, una carrucola fissa e una serie di pesetti tarati. Indica che cosa misuri, quali grandezze tieni fisse, che grafico costruisci e che cosa ti aspetti.

29. ●● Le strade di montagna superano un forte dislivello con una serie di tornanti, invece di salire in linea retta lungo il pendio. Spiega perché, usando le grandezze di questo capitolo, e indica che cosa si «paga» in cambio.

30. ●●● Commenta la fonte. Nelle *Mecaniche* Galileo scrive che «i corpi gravi, rimossi tutti l'impedimenti esterni ed adventizii, possono esser mossi nel piano dell'orizonte da qualunque minima forza». Che cosa afferma? È d'accordo con quanto hai studiato sul piano inclinato (considera il caso $h = 0$)? Che cosa sono, in termini moderni, gli «impedimenti»? Come potresti avvicinarti in laboratorio alla situazione ideale che descrive?

PER APPROFONDIRE

- [ARC] Archimede, *Sull'equilibrio dei piani*: il libro I mostra come si costruisce una statica a partire da pochi postulati; lo leggerai nel prossimo capitolo, a proposito della leva.
- [RUS] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*: il capitolo sulla scienza esatta ellenistica racconta la meccanica di Archimede e di Erone e il suo destino.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: i capitoli sulle forze e sull'equilibrio offrono molti problemi su funi, piani inclinati e carrucole.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: nel capitolo sulla conservazione dell'energia c'è una bella discussione della corona di sfere di Stevin e del piano inclinato.

Glossario del capitolo

Carrucola fissa
Ruota con una gola, girevole attorno a un perno fissato a un sostegno, su cui passa una fune.

Carrucola ideale
Carrucola di massa trascurabile che gira senza attrito, con una fune ideale: la tensione ha lo stesso modulo nei due tratti di fune.

Componente parallela del peso
Componente del peso lungo un piano inclinato, diretta verso il basso: $P_{\parallel} = P \cdot h/l$.

Componente perpendicolare del peso
Componente del peso perpendicolare a un piano inclinato, che preme il corpo sul piano: $P_{\perp} = P \cdot b/l$.

Condizione di equilibrio del punto materiale
La risultante delle forze applicate è il vettore nullo; per componenti, $R_x = 0$ e $R_y = 0$.

Diagramma di corpo libero
Disegno in cui il corpo è isolato dall'ambiente e rappresentato con tutte e sole le forze che agiscono su di esso.

Equilibrio statico
Condizione di un corpo che, trovandosi fermo, resta fermo.

Forze concorrenti
Forze le cui rette d'azione passano per uno stesso punto; sono le forze a cui si applica il modello del punto materiale.

Inclinazione limite
Pendenza alla quale un corpo appoggiato su un piano scabro comincia a scivolare: $h/b = \mu_s$.

Lunghezza, altezza e base del piano inclinato
Rispettivamente l'ipotenusa (l), il cateto verticale (h) e il cateto orizzontale (b) del triangolo rettangolo che il piano forma con l'orizzontale.

Piano inclinato
Superficie piana che forma un angolo con l'orizzontale; si descrive con la lunghezza l, l'altezza h e la base b.

Poligono delle forze
Figura ottenuta disponendo punta-coda i vettori delle forze che agiscono su un corpo; se il corpo è in equilibrio, il poligono è chiuso.

Slittamento incipiente
Situazione di un corpo che sta per cominciare a scivolare: l'attrito statico ha raggiunto il suo valore massimo.

Vantaggio del piano inclinato
Rapporto $F/P = h/l$ fra la forza parallela che trattiene un corpo su un piano liscio e il suo peso.

Soluzioni

1. B. L'equilibrio statico richiede che il corpo fermo resti fermo; le forze possono esserci, purché si compensino.

2. C. La condizione di equilibrio è la risultante nulla; i moduli possono essere diversi e le forze non parallele.

3. D. Nel diagramma entrano solo le forze che agiscono sulla valigia: peso e reazione del pavimento. La forza della valigia sul pavimento agisce sul pavimento.

4. A. Asse y verso l'alto: $N - P - F = 0$; $N = 2{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} + 5{,}0\ \text{N} = 19{,}6\ \text{N} + 5{,}0\ \text{N} \approx 25\ \text{N}$.

5. B. Dalla similitudine fra triangolo delle forze e triangolo del piano: $P_{\parallel}/P = h/l$.

6. C. Nel triangolo notevole 30°-60°-90°, $b/l = \sqrt{3}/2$, quindi $P_{\perp} = (\sqrt{3}/2)\,P \approx 0{,}87\,P$.

7. D. Il corpo resta fermo se $P_{\parallel} \le \mu_s P_{\perp}$, cioè $h/b \le \mu_s$.

8. A. La tensione ha lo stesso modulo nei due tratti di fune: cambia soltanto la direzione della forza.

9. F. Un corpo è in equilibrio quando la risultante delle forze è nulla, non quando le forze mancano: una lampada appesa è soggetta al peso e alla tensione.

10. F. $N = P$ solo se non agiscono altre forze verticali; se una mano preme o tira il corpo, N cambia.

11. V. Le componenti verticali delle tensioni devono reggere il peso; se le funi sono quasi orizzontali la componente verticale è una piccola frazione della tensione, che deve quindi diventare grande ($T = PL/(2h)$).

12. V. $N = P_{\perp} = P \cdot b/l$, e $b < l$.

13. F. L'inclinazione limite è data da $h/b = \mu_s$: il peso si semplifica e la pendenza limite non dipende dalla massa.

14. $T = P = mg = 1{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} \approx 12\ \text{N}$.

15. Asse y verso l'alto: $N + F - P = 0$; $N = 15\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} - 60\ \text{N} = 147\ \text{N} - 60\ \text{N} = 87\ \text{N}$.

16. Ogni fune ha componente verticale $(\sqrt{2}/2)\,T$: $2 \cdot (\sqrt{2}/2)\,T = P$, quindi $T = P/\sqrt{2} = 196\ \text{N}/1{,}414 \approx 1{,}4 \times 10^2\ \text{N}$ (circa 139 N).

17. $b = \sqrt{(2{,}0^2 - 0{,}50^2)}\ \text{m} \approx 1{,}9\ \text{m}$; $P = 8{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 78{,}4\ \text{N}$; $P_{\parallel} = 78{,}4\ \text{N} \cdot 0{,}50/2{,}0 = 19{,}6\ \text{N} \approx 20\ \text{N}$; $P_{\perp} = 78{,}4\ \text{N} \cdot 1{,}94/2{,}0 \approx 76\ \text{N}$.

18. 12 m; scivola, perché la pendenza $h/b = 0{,}12$ è maggiore di $\mu_s = 0{,}10$.

19. Dal grafico circa 150 N. Con la formula: $L = \sqrt{(2{,}40^2 + 0{,}40^2)}\ \text{m} \approx 2{,}43\ \text{m}$; $T = 49\ \text{N} \cdot 2{,}43\ \text{m}/(2 \cdot 0{,}40\ \text{m}) \approx 149\ \text{N}$.

20. Sul secchio: $T = P = 3{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 29{,}4\ \text{N} \approx 29\ \text{N}$, che è anche la forza della persona (carrucola ideale). Sulla carrucola tirano verso il basso due tensioni di 29,4 N: il gancio la sostiene con $58{,}8\ \text{N} \approx 59\ \text{N}$, verso l'alto.

21. Sul nodo agiscono la tensione della fune verticale ($P = 5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} = 49\ \text{N}$, verso il basso), $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$. Asse x: $-(\sqrt{3}/2)\,T_1 + T_2/2 = 0 \Rightarrow T_2 = \sqrt{3}\,T_1$. Asse y: $T_1/2 + (\sqrt{3}/2)\,T_2 = P \Rightarrow 2T_1 = P$. $T_1 = 24{,}5\ \text{N} \approx 25\ \text{N}$; $T_2 = \sqrt{3} \cdot 24{,}5\ \text{N} \approx 42\ \text{N}$.

22. a) $\sqrt{(3{,}0^2 - 0{,}30^2)}\ \text{m} \approx 2{,}98\ \text{m} \approx 3{,}0\ \text{m}$. b) $P = 29{,}4\ \text{N}$; $T_y/T = 0{,}30/3{,}0 = 0{,}10$, e $2T_y = P \Rightarrow T = PL/(2h) = 29{,}4\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m}/(2 \cdot 0{,}30\ \text{m}) = 147\ \text{N} \approx 1{,}5 \times 10^2\ \text{N}$; $T_x = T \cdot 2{,}98/3{,}0 \approx 1{,}5 \times 10^2\ \text{N}$ (146 N). c) $T = P$ richiede $L/(2h) = 1$, cioè $h = L/2 = 1{,}5\ \text{m}$ (i ganci si troverebbero allora a $\sqrt{(3{,}0^2 - 1{,}5^2)}\ \text{m} \approx 2{,}6\ \text{m}$ dal punto di mezzo).

23. a) $b = \sqrt{(1{,}50^2 - 0{,}45^2)}\ \text{m} \approx 1{,}43\ \text{m}$; $\mu_s = h/b = 0{,}45/1{,}43 \approx 0{,}31$. b) Con $h = 0{,}40\ \text{m}$, $b = \sqrt{(1{,}50^2 - 0{,}40^2)}\ \text{m} \approx 1{,}45\ \text{m}$ e $h/b \approx 0{,}28 < 0{,}31$: resta fermo.

24. Sulla cassa agiscono il peso, la reazione della rampa, l'attrito statico e (in b) la forza F. Rampa 3 : 4 : 5: $h/b = 0{,}75$, $h/l = 0{,}60$, $b/l = 0{,}80$. a) $0{,}75 > 0{,}50$: la cassa scivola. b) $P = 490\ \text{N}$; $P_{\parallel} = 294\ \text{N}$; $P_{\perp} = 392\ \text{N}$; $\mu_s P_{\perp} = 196\ \text{N}$. $F_{\text{min}} = 294\ \text{N} - 196\ \text{N} = 98\ \text{N}$ (attrito

verso l'alto, la cassa sta per scendere); F_{max} = 294 N + 196 N = 490 N (attrito verso il basso, la cassa sta per salire).

25. Sul carrello agiscono peso, reazione del piano e forza elastica, parallela al piano verso l'alto. P = 19,6 N. Lungo il piano: $k\Delta x = P \cdot h/l$ = 19,6 N/2 = 9,8 N ⇒ Δx = 9,8 N/(250 N/m) ≈ 0,039 m = 3,9 cm. Perpendicolare: $N = (\sqrt{3}/2) \cdot 19{,}6$ N ≈ 17 N.

26. a) Contrappeso: $T = m_2 g$; blocco: $T = m_1 g \cdot h/l$. m_2 = 4,0 kg · 1/2 = 2,0 kg. b) Sul blocco l'attrito può valere al massimo $\mu_s\, m_1 g \cdot b/l$, verso l'alto o verso il basso: $m_1(h/l - \mu_s b/l) \le m_2 \le m_1(h/l + \mu_s b/l)$, cioè 4,0 kg · (0,50 − 0,20 · 0,866) ≤ m_2 ≤ 4,0 kg · (0,50 + 0,20 · 0,866): fra circa 1,3 kg e 2,7 kg.

27. Traccia: l'equilibrio chiede che la somma **vettoriale** delle tensioni bilanci il peso, non che i moduli si dividano a metà. Con funi di 30° e 60° la tensione della fune più ripida è $(\sqrt{3}/2)P \approx 0{,}87P$ e quella dell'altra $P/2$; con funi simmetriche le tensioni sono uguali, ma valgono $P/2$ solo se le funi sono verticali: quasi orizzontali, ciascuna può superare di molto il peso intero ($T = PL/(2h)$).

28. Traccia: si fissa la guida con la carrucola in cima e si collega il carrello, con un filo parallelo alla guida, a un piattello su cui si mettono i pesetti; si misura la massa m_1 del carrello con la bilancia. Per diverse altezze h (lunghezza l fissa) si cerca la massa m_2 (piattello compreso) che tiene il carrello fermo, o lo fa muovere appena se lo si spinge da una parte o dall'altra. Grafico di m_2 in funzione di h/l: ci si aspetta una retta per l'origine con pendenza m_1. Fonti di errore: attrito delle ruote e della carrucola, filo non parallelo alla guida.

29. Traccia: i tornanti riducono la pendenza h/b della strada; quindi si riduce la componente parallela del peso, che un veicolo deve vincere salendo e trattenere frenando in discesa, e si resta lontani dall'inclinazione limite oltre la quale le ruote frenate scivolerebbero (importante con fondo bagnato o ghiacciato). In cambio la strada è molto più lunga: per salire della stessa quota si percorre un tratto maggiore.

30. Traccia: Galileo afferma che su un piano orizzontale, tolti gli ostacoli esterni, un corpo pesante si può muovere con una forza piccola a piacere. È coerente con la legge del piano inclinato: con h = 0, $F = P \cdot h/l$ = 0, cioè non serve alcuna forza parallela per trattenere o spostare il corpo. Gli «impedimenti» sono in termini moderni l'attrito con il piano e la resistenza dell'aria; nella realtà l'attrito statico richiede una forza minima per partire. Ci si avvicina alla situazione ideale con un carrello su una guida a basso attrito ben livellata, o con un disco su una rotaia a cuscino d'aria: una spinta piccolissima basta a metterlo in moto. È il ragionamento da cui Galileo arriverà all'idea di inerzia (capitolo 13).