CAPITOLO

5

I vettori

Wonder en is gheen wonder. «Una meraviglia, eppure non è una meraviglia.» — Simon Stevin, motto della corona di sfere (traduzione della redazione)

OBIETTIVI

1. Distinguere le grandezze scalari dalle vettoriali e descrivere un vettore con modulo, direzione e verso.
2. Distinguere lo spostamento dalla distanza percorsa.
3. Sommare e sottrarre vettori con il metodo punta-coda e la regola del parallelogramma, e moltiplicarli per uno scalare.
4. Scomporre un vettore, calcolarne le componenti cartesiane con il segno e ricostruirlo da esse.
5. Ricavare dai triangoli notevoli le componenti di vettori inclinati di 30°, 45° e 60°, e risolvere gli altri casi con un disegno in scala.

INDICE DEL CAPITOLO

5.1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali 2

5.2 La somma di vettori 4

5.3 Vettore opposto, differenza e prodotto per uno scalare 7

5.4 Scomporre un vettore: le componenti 8

5.5 Vettori inclinati: triangoli notevoli e disegni in scala 10

Fisica 3 · Parte II · Vettori e forze · versione 1.0
Capitolo 5: I vettori · pagine 117–138 del volume completo · estratto per lo studio

Chiedi a un passante la strada per il teatro e ti risponderà così: «Vada avanti per trecento metri, poi giri a sinistra e faccia ancora cento metri». Nessuno si limita a dire «quattrocento metri»: quel numero, da solo, non serve a niente, perché da un punto qualsiasi della città si possono percorrere quattrocento metri in infinite direzioni diverse. Per arrivare al teatro bisogna sapere *quanto* camminare, ma anche *lungo quale strada* e *da che parte*.

Molte grandezze della fisica si comportano come quelle indicazioni: servono un numero, una direzione e un verso. Sono le grandezze vettoriali, rappresentate da frecce con regole di calcolo proprie: i vettori. Nel capitolo 6 li useremo per le forze, e da allora non li lasceremo più.

5.1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

5.1.1 Quando un numero non basta

La massa di un libro, la temperatura di una stanza, la durata di una lezione: per queste grandezze un numero con la sua unità dice tutto. Si chiamano **grandezze scalari** le grandezze descritte completamente da un numero e da un'unità di misura; si sommano con le regole dell'aritmetica: 2 kg di farina più 3 kg fanno sempre 5 kg.

Altre grandezze hanno un orientamento: se una barca si sposta di 5 km, vogliamo sapere verso dove. Si chiamano **grandezze vettoriali** le grandezze che richiedono un numero con la sua unità, una direzione e un verso: lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza.

5.1.2 Che cos'è un vettore

Una grandezza vettoriale si rappresenta con un **vettore**, cioè con un segmento orientato: una freccia. La freccia porta con sé tre informazioni:

- il **modulo**, la lunghezza della freccia, che rappresenta in una scala scelta il valore numerico della grandezza (per esempio 1 cm del disegno ↔ 100 m di spostamento); il modulo è sempre un numero positivo o nullo, accompagnato dall'unità di misura;
- la **direzione**, la retta su cui giace la freccia (orizzontale, verticale, inclinata di 30° sull'orizzontale...);
- il **verso**, indicato dalla punta: su ogni direzione ci sono due versi opposti (verso est o verso ovest, verso l'alto o verso il basso).

Per una forza conta anche dove agisce: spingere una porta vicino alla maniglia o vicino ai cardini non ha lo stesso effetto. Il vettore di una forza si disegna quindi con la coda nel suo **punto di applicazione**. Per lo spostamento conta solo la freccia: frecce parallele, ugualmente lunghe e con lo stesso verso sono lo stesso vettore, ovunque siano disegnate.

A stampa un vettore si indica con una lettera in grassetto corsivo, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$; a mano, con una piccola freccia sopra la lettera, come nelle figure. Il modulo si scrive in corsivo semplice, a, oppure $|\boldsymbol{a}|$: «$\boldsymbol{F}$» è una forza con direzione e verso, «$F = 20$ N» ne dà solo il modulo.

DA RICORDARE

Un vettore è definito da **modulo** (quanto), **direzione** (lungo quale retta) e **verso** (da che parte su quella retta); per una forza si aggiunge il **punto di applicazione**. Due vettori sono uguali solo se hanno uguali modulo, direzione e verso: 3 m verso nord e 3 m verso sud hanno lo stesso modulo e la stessa direzione, ma sono vettori diversi.

5.1.3 Lo spostamento, il prototipo dei vettori

Il vettore più semplice è lo **spostamento**: la freccia dalla posizione iniziale A di un corpo alla posizione finale B. Si indica con $\Delta\boldsymbol{s}$, dove Δ (delta maiuscola) si legge «variazione di». Dice di quanto e in che direzione è cambiata la posizione, non quale strada si è seguita.

Nella Figura 5.1 una studentessa va da casa (A) al liceo (B) lungo le strade di un quartiere a scacchiera: 500 m verso est, 400 m verso nord, 700 m verso est, 500 m verso nord. La **distanza percorsa**, la lunghezza del percorso effettivo, è uno scalare: 2100 m. Lo spostamento è la freccia da A a B: in tutto 1200 m verso est e 900 m verso nord, cateti di un triangolo rettangolo di cui $\Delta\boldsymbol{s}$ è l'ipotenusa. Con il teorema di Pitagora:

$$|\Delta\boldsymbol{s}| = \sqrt{[(1200\ \text{m})^2 + (900\ \text{m})^2]} = \sqrt{(2\,250\,000\ \text{m}^2)} = 1500\ \text{m}$$

La distanza percorsa non è mai minore del modulo dello spostamento, perché la retta è il percorso più breve fra due punti; coincidono solo in un moto rettilineo senza inversioni. Chi corre un giro di pista ha percorso 400 m, ma il suo spostamento è nullo.

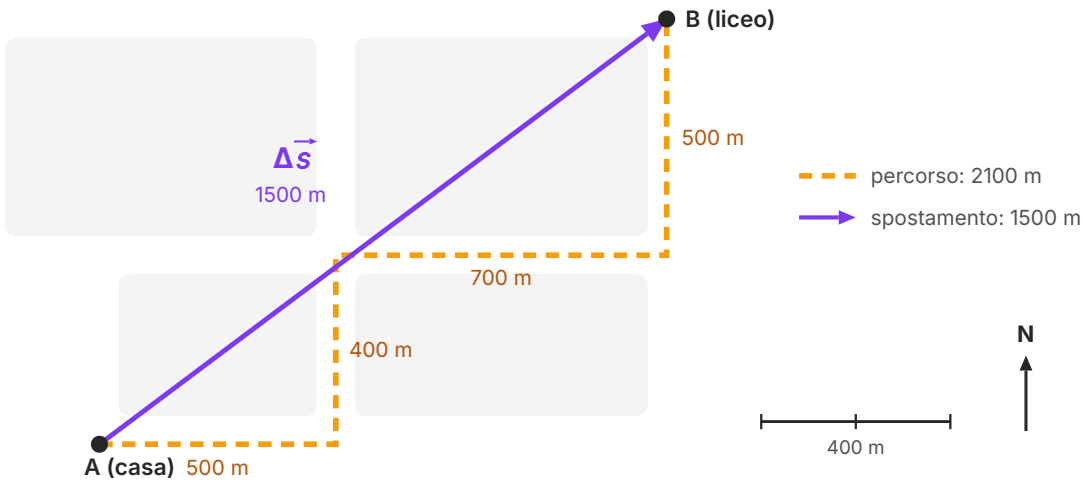


Figura 5.1 Da casa (A) al liceo (B). Il percorso lungo le strade (tratteggio arancione) misura 2100 m; lo spostamento $\Delta\boldsymbol{s}$ (freccia viola) va direttamente da A a B e ha modulo 1500 m, perché i suoi spostamenti verso est (1200 m) e verso nord (900 m) sono i cateti di un triangolo rettangolo.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Vettore viene dal latino *vector*, nome d'agente di *vehere*, «trasportare»: «colui che porta», ma anche il passeggero di una nave. L'immagine si adatta allo spostamento, che «trasporta» un punto da A a B. Il termine, con il compagno **scalare** (da *scala*: un numero che si colloca su una scala graduata), entrò in matematica a metà Ottocento con l'irlandese William Rowan Hamilton.

Modulo è il latino *modulus*, diminutivo di *modus*, «misura». Per Vitruvio, nel *De architectura* (IV, 3, 3), il *modulus* è l'unità di misura su cui si proporziona un intero tempio dorico; nel linguaggio dei vettori il modulo è la «misura» della freccia.

Parallelogramma è il greco παραλληλόγραμμον, la figura «racchiusa da linee parallele», da παράλληλος, «parallelo» (letteralmente «l'uno accanto all'altro»), e γραμμή, «linea». È la parola che Euclide usa negli *Elementi*, e la incontreremo subito nella regola per sommare due vettori.

5.2 La somma di vettori

5.2.1 Il metodo punta-coda

Uno spostamento di 4 km seguito da uno di 3 km non porta necessariamente a 7 km dalla partenza: dipende dalle direzioni. Per sommare due vettori bisogna combinare le frecce. Nel **meto-**

do punta-coda si disegna $\vec{a}$ e si trasporta $\vec{b}$ parallelamente a se stesso finché la sua coda coincide con la punta di $\vec{a}$; la somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ va dalla coda di $\vec{a}$ alla punta di $\vec{b}$ (Figura 5.2a).

Per gli spostamenti il significato è immediato: spostarsi di $\vec{a}$ e poi di $\vec{b}$ porta dove porta $\vec{s}$. Che anche le forze si sommino così è un fatto sperimentale, che verificherai nel laboratorio di fine capitolo.

5.2.2 La regola del parallelogramma

Con la **regola del parallelogramma** si disegnano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con le code nello stesso punto e si completa il parallelogramma che li ha come lati: la somma è la diagonale che parte dalle code (Figura 5.2b). I due metodi sono equivalenti, perché il lato opposto ad $\vec{a}$ è proprio $\vec{b}$ trasportato sulla punta di $\vec{a}$. Il parallelogramma è comodo quando i vettori partono davvero dallo stesso punto, come due forze applicate a un corpo.

Dal parallelogramma si legge anche che l'ordine non conta: la somma è commutativa, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

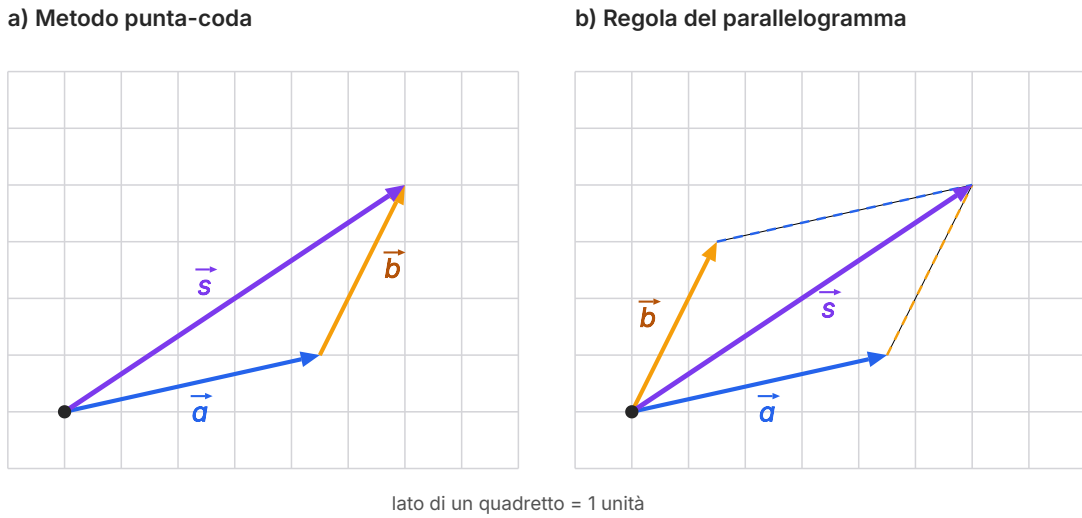


Figura 5.2 Due modi equivalenti di sommare i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. a) Metodo punta-coda: la coda di $\vec{b}$ si appoggia sulla punta di $\vec{a}$. b) Regola del parallelogramma: $\vec{a}$ e $\vec{b}$ partono dallo stesso punto e la somma $\vec{s}$ è la diagonale. Sulla griglia $\vec{a}$ avanza di 4,5 quadretti e sale di 1, $\vec{b}$ avanza di 1,5 e sale di 3: la somma avanza di 6 e sale di 4 in entrambi i disegni.

5.2.3 Più di due vettori

Tre o più vettori si sommano in catena: ogni coda sulla punta del precedente, e la somma va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo; il percorso della Figura 5.1 è una catena di quattro

spostamenti. Se la catena si chiude, la somma è il **vettore nullo** $\mathbf{0}$, di modulo zero e senza direzione: è lo spostamento di chi completa un giro di pista.

5.2.4 Casi particolari: vettori paralleli e perpendicolari

Tre casi si risolvono con un semplice calcolo (Figura 5.3). Vettori con la stessa direzione e lo stesso verso (*concordi*): la somma ha quel verso e modulo $s = a + b$. Stessa direzione e versi opposti (*discordi*): la somma ha il verso del vettore più lungo e modulo $s = |a - b|$. Vettori perpendicolari: nel metodo punta-coda sono i cateti di un triangolo rettangolo, e il modulo della somma è l'ipotenusa:

$$s = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

In generale $|a - b| \le s \le a + b$: è la disuguaglianza triangolare, per cui in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

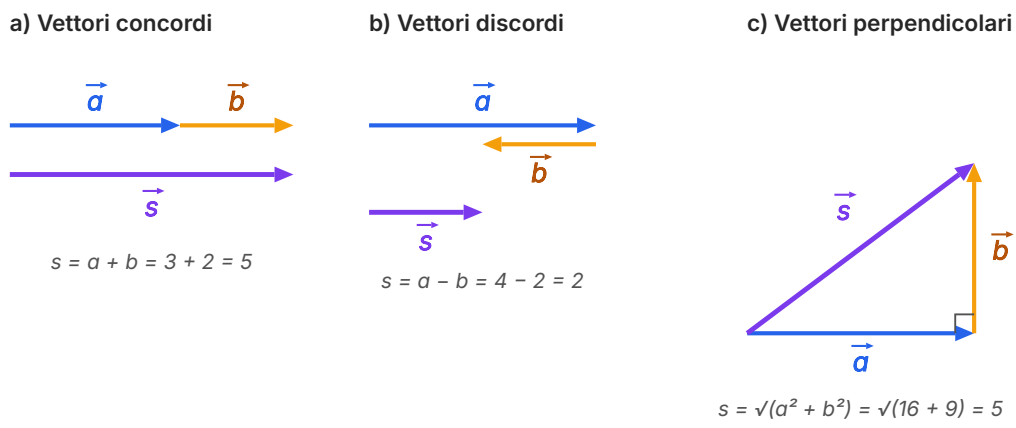


Figura 5.3 Casi particolari della somma. a) Vettori concordi: i moduli si sommano. b) Vettori discordi: i moduli si sottraggono e la somma ha il verso del vettore più lungo. c) Vettori perpendicolari: il modulo della somma è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti i due vettori.

ERRORE FREQUENTE

«Ho sommato una forza di 3 N e una di 4 N: la risultante è 7 N.» Vero solo se le forze sono concordi. Il modulo della somma **non** è, in generale, la somma dei moduli: con 3 N e 4 N si ottiene qualsiasi valore fra 1 N e 7 N, e 5 N se le forze sono perpendicolari. Prima di sommare due moduli, guarda come sono orientati i vettori.

ESEMPIO SVOLTO

Una barca in tre tratti

Problema. Una barca a vela, per sfruttare il vento, naviga per 12 km verso est, poi per 9 km verso nord e infine per 4 km verso ovest. Calcola la distanza percorsa e il modulo dello spostamento complessivo; descrivi la direzione dello spostamento.

Soluzione. La distanza percorsa è la somma delle lunghezze dei tratti: 12 km + 9 km + 4 km = 25 km.

Per lo spostamento usiamo la proprietà commutativa e sommiamo prima i due tratti paralleli. Il primo (12 km verso est) e il terzo (4 km verso ovest) sono discordi: insieme danno 12 km − 4 km = 8 km verso est. Resta da sommare questo vettore con i 9 km verso nord, che gli sono perpendicolari:

$$|\Delta \boldsymbol{s}| = \sqrt{[(8\ \text{km})^2 + (9\ \text{km})^2]} = \sqrt{(145\ \text{km}^2)} \approx 12\ \text{km}$$

La direzione è data dal rapporto fra i cateti: lo spostamento sale di 9 km verso nord ogni 8 km verso est, circa 1,1 km per chilometro: poco più ripido del nord-est esatto.

Controllo. Il modulo dello spostamento (12 km) è minore della distanza percorsa (25 km), come deve essere; ed è maggiore di ciascuno dei due cateti, 8 km e 9 km, come ogni ipotenusa.

5.3 Vettore opposto, differenza e prodotto per uno scalare

5.3.1 Il vettore opposto e la differenza

Il **vettore opposto** di $\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{a}$, ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$ ma verso opposto (Figura 5.4a): $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. Chi sale di 300 m lungo un sentiero e ridiscende per la stessa strada compie due spostamenti opposti.

Con il vettore opposto si definisce la **differenza** di due vettori: sottrarre $\boldsymbol{b}$ significa sommare il suo opposto,

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

Si inverte la freccia di $\boldsymbol{b}$ e la si somma ad $\boldsymbol{a}$ (Figura 5.4b). Più in fretta: se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ partono dallo stesso punto, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ va dalla punta di $\boldsymbol{b}$ alla punta di $\boldsymbol{a}$, perché $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$. L'ordine conta: $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ è l'opposto di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. La differenza ci servirà per calcolare come cambia una velocità che cambia direzione (capitolo 12).

5.3.2 Moltiplicare un vettore per un numero

Il **prodotto di un vettore per uno scalare** k è il vettore $k\boldsymbol{a}$ con la direzione di $\boldsymbol{a}$, modulo $|k|$ volte quello di $\boldsymbol{a}$, e verso uguale a quello di $\boldsymbol{a}$ se k è positivo, opposto se è negativo (Figura 5.4c). Così

$2\boldsymbol{a}$ è lungo il doppio di $\boldsymbol{a}$ e $-1{,}5\boldsymbol{a}$ una volta e mezzo, in verso opposto; per $k = -1$ si ottiene l'opposto, per $k = 0$ il vettore nullo. Nel capitolo 6 la forza-peso sarà il prodotto della massa, uno scalare, per un vettore diretto verso il basso.

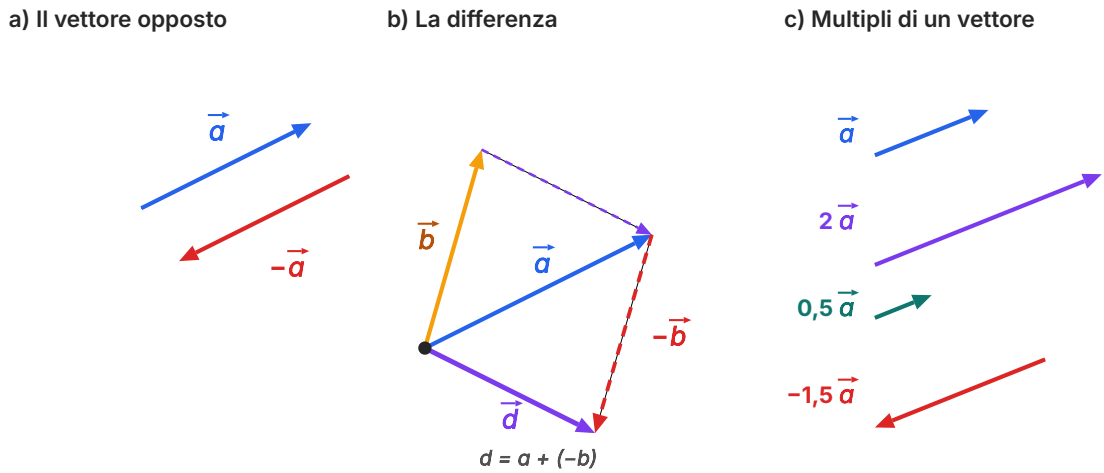


Figura 5.4 a) Il vettore opposto $-\boldsymbol{a}$: stesso modulo e stessa direzione di $\boldsymbol{a}$, verso opposto. b) La differenza $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ si ottiene sommando ad $\boldsymbol{a}$ il vettore $-\boldsymbol{b}$; la freccia tratteggiata sottile, dalla punta di $\boldsymbol{b}$ alla punta di $\boldsymbol{a}$, è lo stesso vettore $\boldsymbol{d}$. c) Multipli di uno stesso vettore: tutti paralleli ad $\boldsymbol{a}$, con lunghezze 1, 2, 0,5 e 1,5 volte la sua; il multiplo con coefficiente negativo ha verso opposto.

5.4 Scomporre un vettore: le componenti

5.4.1 Scomposizione lungo due direzioni

Il problema inverso della somma è la **scomposizione**: dato un vettore $\boldsymbol{v}$ e due direzioni r e t per la sua coda, trovare due vettori, uno lungo r e uno lungo t, la cui somma sia $\boldsymbol{v}$. Dalla punta di $\boldsymbol{v}$ si tracciano le parallele a r e a t: si ottiene il parallelogramma che ha $\boldsymbol{v}$ come diagonale, e i suoi lati sono i vettori cercati. Fissate le direzioni, la scomposizione è unica.

Scomporre serve a separare gli effetti di una grandezza: una corda inclinata in parte trascina una slitta in avanti e in parte la solleva. Nel capitolo 7 scomporremo così il peso di un corpo su un piano inclinato.

5.4.2 Le componenti cartesiane

Il caso più importante è la scomposizione lungo gli assi x e y di un piano cartesiano. Ciascuno dei due vettori ottenuti si descrive con un solo numero con segno: le **componenti cartesiane** v_x e v_y di $\boldsymbol{v}$. Il valore assoluto di v_x è la lunghezza della proiezione di $\boldsymbol{v}$ sull'asse x; il segno è positivo se la proiezione punta nel verso dell'asse, negativo altrimenti. Lo stesso vale per v_y.

Se la coda di $\boldsymbol{v}$ è in $(x_1; y_1)$ e la punta in $(x_2; y_2)$, allora $v_x = x_2 - x_1$ e $v_y = y_2 - y_1$. Nella Figura 5.5 $\boldsymbol{a}$ va verso destra e verso l'alto: $a_x = +4$ m, $a_y = +3$ m. $\boldsymbol{b}$ va verso sinistra e verso l'alto: $b_x = -2$ m, $b_y = +4$ m. $\boldsymbol{c}$ va verso destra e verso il basso: $c_x = +3$ m, $c_y = -2$ m. Le componenti possono essere negative; il modulo mai.

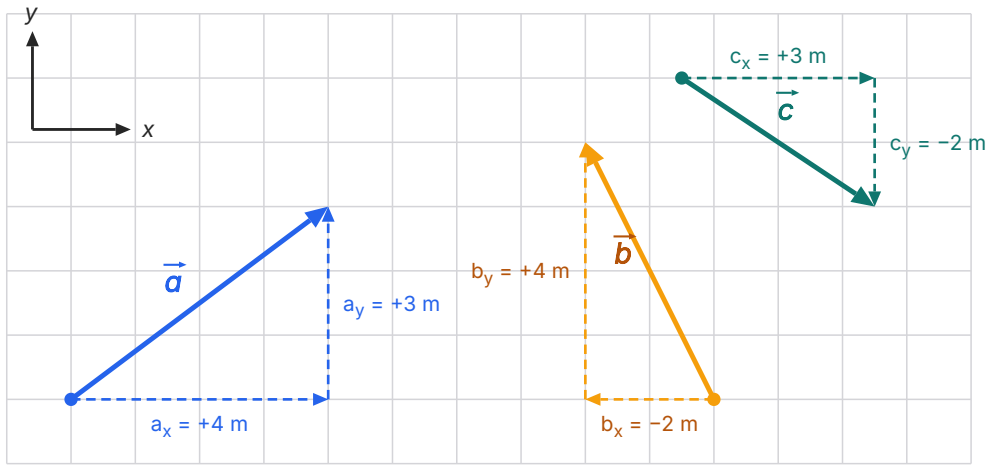


Figura 5.5 Tre vettori su una griglia di quadretti di 1 m di lato, con le loro componenti cartesiane (frecce tratteggiate). Il segno di ogni componente dice se la proiezione punta nel verso positivo o negativo dell'asse: $\boldsymbol{a}$ = (+4 m; +3 m), $\boldsymbol{b}$ = (−2 m; +4 m), $\boldsymbol{c}$ = (+3 m; −2 m).

5.4.3 Dalle componenti al vettore

Le componenti contengono tutta l'informazione del vettore. Il vettore e le sue due proiezioni formano un triangolo rettangolo in cui il vettore è l'ipotenusa, quindi il modulo si trova con il teorema di Pitagora:

$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$$

I quadrati sono sempre positivi, e il risultato non dipende dai segni delle componenti. Per $\boldsymbol{a}$ della Figura 5.5: $a = \sqrt{(4^2 + 3^2)}$ m = 5 m; per $\boldsymbol{b}$: $b = \sqrt{[(-2)^2 + 4^2]}$ m = $\sqrt{20}$ m ≈ 4,5 m.

La direzione si descrive con il rapporto v_y/v_x, che dice di quanto il vettore sale per ogni unità di avanzamento orizzontale: è la *pendenza* $m = \Delta y/\Delta x$ delle rette in matematica. $\boldsymbol{a}$ ha pendenza 3/4 = 0,75: sale di 3 m ogni 4 m. Due vettori opposti hanno la stessa pendenza: sono i segni delle componenti a dire in quale quadrante punta la freccia. Se $v_x = 0$ il vettore è verticale, come una retta verticale, che non ha pendenza.

5.4.4 Sommare vettori per componenti

Le componenti trasformano la somma di frecce in una somma di numeri. Se $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, la componente x della somma è la somma delle componenti x, e lo stesso vale per y:

$$s_x = a_x + b_x \text{ e } s_y = a_y + b_y$$

Proiettando sull'asse x la catena punta-coda di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si ottengono segmenti allineati, che si sommano con il segno come spostamenti lungo una retta. Il metodo vale per qualsiasi numero di vettori e non richiede disegni precisi: si scompone, si sommano le componenti, si ricostruisce il vettore con Pitagora e con la pendenza. Per sottrarre si sottraggono le componenti; per moltiplicare per k si moltiplica ogni componente per k.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere vettori su una griglia

Problema. Un robot da competizione esegue in sequenza i tre spostamenti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ della Figura 5.5. Leggi le componenti dal disegno, calcola lo spostamento totale $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ per componenti, il suo modulo e la sua direzione, e confronta il modulo con la somma dei moduli.

Soluzione. Dal disegno, contando i quadretti con il segno: $\boldsymbol{a}$ = (+4 m; +3 m), $\boldsymbol{b}$ = (−2 m; +4 m), $\boldsymbol{c}$ = (+3 m; −2 m). Sommiamo le componenti:

$$s_x = 4\text{ m} - 2\text{ m} + 3\text{ m} = 5\text{ m}\quad s_y = 3\text{ m} + 4\text{ m} - 2\text{ m} = 5\text{ m}$$

Il modulo è $s = \sqrt{(5^2 + 5^2)}\text{ m} = \sqrt{50}\text{ m} \approx 7{,}1\text{ m}$. La pendenza è $s_y/s_x = 1$, con entrambe le componenti positive: il robot è finito spostato verso destra e verso l'alto, lungo la bisettrice del primo quadrante, cioè a 45° dagli assi.

Controllo. I moduli dei tre spostamenti sono 5 m, $\sqrt{20}$ m ≈ 4,5 m e $\sqrt{13}$ m ≈ 3,6 m: la loro somma, circa 13,1 m, supera s, come prevede la disuguaglianza triangolare. Sulla griglia, disegnando i tre vettori in catena, la punta dell'ultimo cade 5 quadretti a destra e 5 in alto rispetto alla coda del primo.

5.5 Vettori inclinati: triangoli notevoli e disegni in scala

Spesso un vettore è dato con il modulo e un angolo: «una forza di 20 N inclinata di 30° sull'orizzontale». Per 30°, 45° e 60° le componenti si trovano con il teorema di Pitagora; per gli altri angoli useremo un disegno in scala.

5.5.1 I due triangoli rettangoli notevoli

Metà di un quadrato. La diagonale divide un quadrato in due triangoli rettangoli isosceli, con gli angoli acuti di 45° (Figura 5.6a). Chiamiamo l l'ipotenusa, cioè la diagonale, e c ciascuno dei

due cateti uguali. Per il teorema di Pitagora $c^2 + c^2 = l^2$, cioè $2c^2 = l^2$, da cui

$$c = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l \approx 0{,}707\, l$$

Metà di un triangolo equilatero. In un triangolo equilatero di lato l tutti gli angoli misurano 60°. L'altezza lo divide in due triangoli rettangoli uguali: ciascuno ha per ipotenusa un lato l, per cateto minore metà della base, $l/2$, e angoli acuti di 60° (quello alla base) e di 30° (metà dell'angolo al vertice, che l'altezza divide a metà) (Figura 5.6b). Il cateto maggiore h, l'altezza, si trova con Pitagora: $h^2 = l^2 - (l/2)^2 = (3/4)l^2$, quindi

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \approx 0{,}866\, l$$

Per non confondere i cateti: il lato più corto sta di fronte all'angolo più piccolo, quindi **il cateto opposto all'angolo di 30° è metà dell'ipotenusa**, e quello opposto a 60° vale $(\sqrt{3}/2)l$. I due triangoli sono raccolti anche nella Tabella A.6 dell'Appendice.

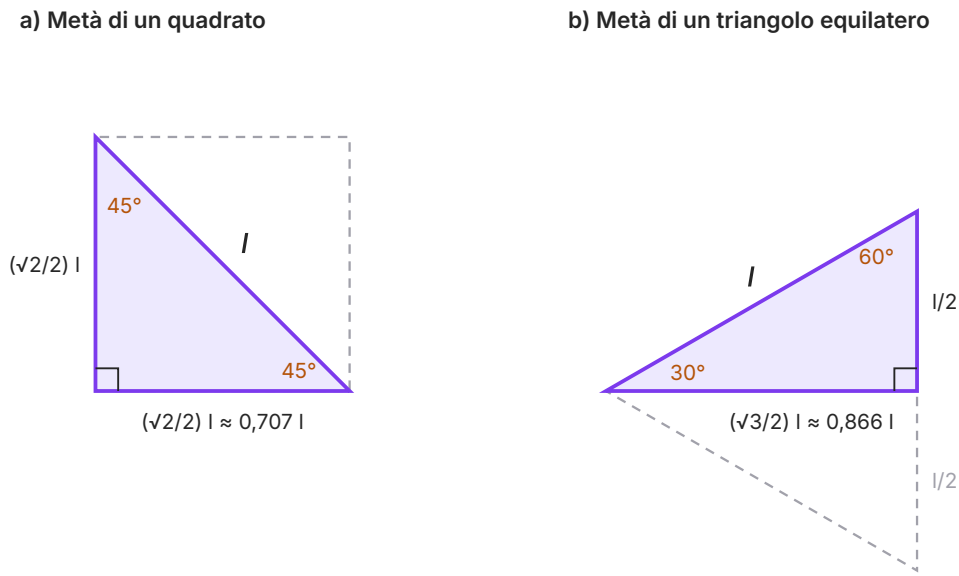


Figura 5.6 I due triangoli rettangoli notevoli, con i lati espressi in funzione dell'ipotenusa *l*. a) Metà di un quadrato (tratteggiato): i cateti sono uguali e valgono $(\sqrt{2}/2)\, l$. b) Metà di un triangolo equilatero (tratteggiato): il cateto opposto all'angolo di 30° vale $l/2$, quello opposto all'angolo di 60° vale $(\sqrt{3}/2)\, l$.

DA RICORDARE

I rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo dipendono solo dai suoi angoli, non dalle sue dimensioni: tutti i triangoli rettangoli con un angolo di 30° sono simili, e in ognuno il cateto opposto a quell'angolo è metà dell'ipotenusa. Questi rapporti tra i lati, che dipendono solo dall'angolo, in matematica prenderanno il nome di seno e coseno.

5.5.2 Componenti di vettori inclinati di 30°, 45° e 60°

Un vettore $\boldsymbol{v}$ inclinato sull'asse x è l'ipotenusa del triangolo formato dalle sue componenti. A 30° dall'asse x la componente verticale sta di fronte all'angolo di 30° e vale $v/2$; quella orizzontale vale $(\sqrt{3}/2)v$. A 60° si scambiano: $v_x = v/2$, $v_y = (\sqrt{3}/2)v$. A 45° sono uguali, $(\sqrt{2}/2)v$. I segni si aggiungono alla fine, guardando il quadrante.

ESEMPIO SVOLTO

Il volo di un aereo da turismo

Problema. Un piccolo aereo vola per 100 km in una direzione inclinata di 30° a nord rispetto all'est; poi vira e vola per 60 km verso nord-ovest, cioè a 45° fra il nord e l'ovest. Prendi l'asse x verso est e l'asse y verso nord. Calcola lo spostamento complessivo per componenti.

Soluzione. Primo tratto, $\boldsymbol{a}$: l'angolo di 30° è con l'asse x, quindi la componente nord, opposta all'angolo di 30°, è metà del modulo:

$$a_x = (\sqrt{3}/2) \times 100\ \text{km} \approx 86{,}6\ \text{km}\quad a_y = 100\ \text{km} / 2 = 50{,}0\ \text{km}$$

Secondo tratto, $\boldsymbol{b}$: a 45° le componenti hanno lo stesso valore assoluto, $(\sqrt{2}/2) \times 60\ \text{km} \approx 42{,}4\ \text{km}$. La freccia punta verso ovest e verso nord, quindi $b_x = -42{,}4\ \text{km}$ e $b_y = +42{,}4\ \text{km}$.

Somma: $s_x = 86{,}6\ \text{km} - 42{,}4\ \text{km} = 44{,}2\ \text{km}$; $s_y = 50{,}0\ \text{km} + 42{,}4\ \text{km} = 92{,}4\ \text{km}$. Il modulo è $s = \sqrt{[(44{,}2\ \text{km})^2 + (92{,}4\ \text{km})^2]} \approx 102\ \text{km}$; la pendenza è $92{,}4/44{,}2 \approx 2{,}1$: l'aereo si trova circa 2,1 km più a nord per ogni chilometro verso est.

Controllo. Dopo 160 km di volo l'aereo dista 102 km dalla partenza: la virata verso nord-ovest lo ha riportato in parte verso ovest. Le componenti positive dicono che è a nord-est della partenza.

5.5.3 Direzioni date come pendenze

Spesso la direzione è data da una pendenza: «la strada sale di 3 m ogni 4 m in orizzontale». Bastano allora i triangoli simili. Il triangolo di cateti 3 m e 4 m ha ipotenusa $\sqrt{(3^2 + 4^2)}\ \text{m} = 5\ \text{m}$; uno spostamento di 25 m lungo la strada è l'ipotenusa di un triangolo simile cinque volte più grande, con componenti $4 \times 5\ \text{m} = 20\ \text{m}$ in orizzontale e $3 \times 5\ \text{m} = 15\ \text{m}$ in verticale. Ogni componente

sta al modulo come il cateto corrispondente sta all'ipotenusa. Nel capitolo 7 così troveremo le componenti del peso su un piano inclinato.

5.5.4 Ogni altro angolo: il disegno in scala

Per un angolo qualsiasi, per esempio 50°, Pitagora non basta. Si usa un **disegno in scala**: scelta una scala (per esempio 1 cm ↔ 10 N), si tracciano i vettori con righello e goniometro, si costruisce la somma, se ne misurano lunghezza e angolo e si riconverte con la scala. Con un disegno di una decina di centimetri, curato al millimetro e al grado, l'incertezza è dell'ordine dell'1-2%.

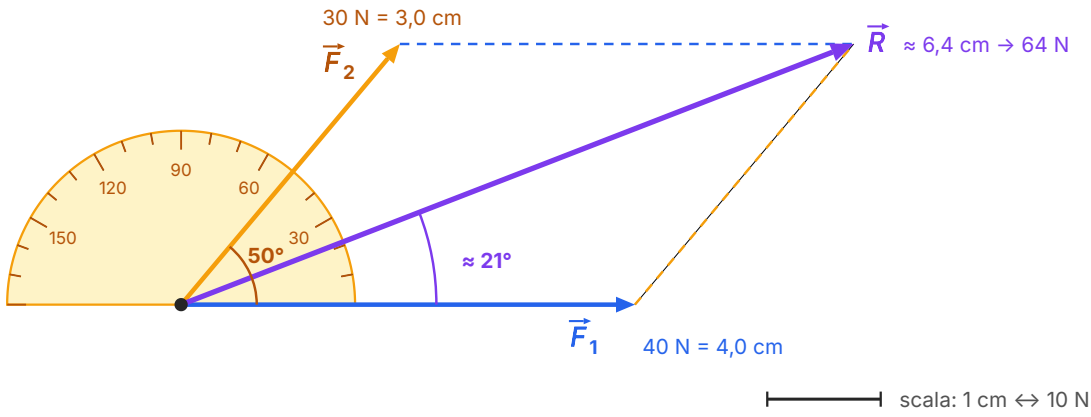


Figura 5.7 Somma di due forze con un disegno in scala (1 cm ↔ 10 N). F_1 = 40 N è orizzontale, F_2 = 30 N è tracciata con il goniometro a 50° da F_1. La diagonale del parallelogramma misura circa 6,4 cm, cioè $R \approx 64$ N, e forma un angolo di circa 21° con F_1.

ESEMPIO SVOLTO

Due funi su un anello

Problema. Due funi tirano un anello: la prima con una forza $\boldsymbol{F}_1$ di 40 N verso destra, la seconda con una forza $\boldsymbol{F}_2$ di 30 N inclinata di 50° rispetto alla prima. Trova con un disegno in scala la forza risultante $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.

Soluzione. Con la scala 1 cm ↔ 10 N, $\boldsymbol{F}_1$ diventa una freccia orizzontale di 4,0 cm e $\boldsymbol{F}_2$ una freccia di 3,0 cm dallo stesso punto, tracciata con il goniometro a 50° (Figura 5.7). Completato il parallelogramma, la diagonale $\boldsymbol{R}$ misura circa 6,4 cm e forma con $\boldsymbol{F}_1$ un angolo di circa 21°.

Riconvertendo con la scala: $R \approx 6{,}4 \times 10\ \text{N} = 64\ \text{N}$, inclinata di circa 21° rispetto a $\boldsymbol{F}_1$.

Controllo. Il risultato è fra 40 N − 30 N = 10 N e 40 N + 30 N = 70 N, più vicino a 70 N perché l'angolo fra le forze è piccolo; $\boldsymbol{R}$ è più vicina a $\boldsymbol{F}_1$, la forza maggiore. Il calcolo trigonometrico, che imparerai in matematica, dà 63,6 N e 21,2°.

IN SINTESI

Le regole dei vettori

Somma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$: metodo punta-coda o regola del parallelogramma. Vettori concordi: $s = a + b$; discordi: $s = |a - b|$; perpendicolari: $s = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Sempre $|a - b| \le s \le a + b$.

Differenza $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$: si somma l'opposto. **Prodotto per uno scalare** $k\boldsymbol{a}$: modulo $|k|a$, stessa direzione, verso concorde se $k > 0$ e opposto se $k < 0$.

Componenti cartesiane v_x, v_y: numeri con segno (positivo se la proiezione punta nel verso dell'asse). Modulo $v = \sqrt{(v_x{}^2 + v_y{}^2)}$; direzione data dalla pendenza v_y/v_x e dai segni. Somma per componenti: $s_x = a_x + b_x$, $s_y = a_y + b_y$.

Triangoli notevoli (ipotenusa l): a 45° i cateti valgono $(\sqrt{2}/2)l \approx 0{,}707l$; a 30° e 60°, il cateto opposto a 30° vale $l/2$ e quello opposto a 60° vale $(\sqrt{3}/2)l \approx 0{,}866l$. Ogni altro angolo: disegno in scala; pendenza data: triangoli simili.

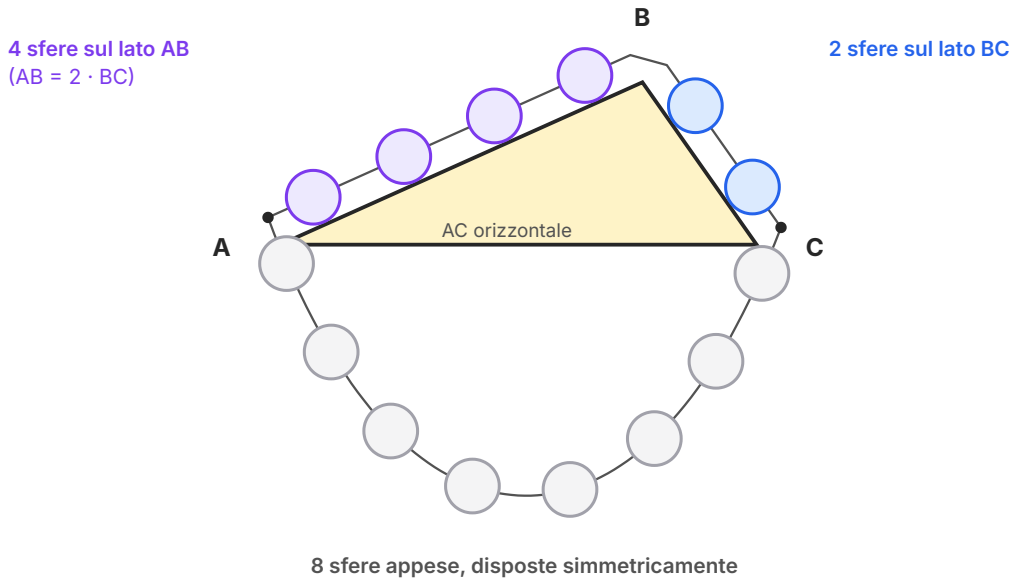


Figura 5.8 Ricostruzione schematica della corona di sfere di Stevin (1586). Il prisma ha la base AC orizzontale e il lato AB doppio di BC; quattordici sfere uguali ed equidistanti sono infilate su un filo chiuso che scorre sui vertici. Le otto sfere appese si bilanciano da sole; ne segue che le quattro sfere sul lato AB bilanciano le due sul lato BC.

APPROFONDIMENTO

La corona di sfere di Simon Stevin

Simon Stevin (1548-1620), ingegnere e matematico fiammingo, pubblicò nel 1586 *De Beghinselen der Weeghconst* («I principi dell'arte di pesare»), un trattato di statica scritto in olandese anziché in latino. Vi studia l'equilibrio di pesi su piani di diversa pendenza con un argomento rimasto celebre, la «corona di sfere» (*clootcrans*).

Stevin considera un prisma a sezione triangolare ABC con la base AC orizzontale e il lato AB doppio di BC (Figura 5.8). Intorno al prisma mette una collana di quattordici sfere uguali ed equidistanti, su un filo chiuso che scorre senza attrito: quattro sfere stanno su AB, due su BC, otto pendono sotto. Se la collana si mettesse in moto da sola, dopo lo spostamento di una sfera la situazione sarebbe identica a quella iniziale e il moto continuerebbe per sempre: un moto perpetuo, che Stevin giudica assurdo. La collana è dunque ferma. Le otto sfere appese, simmetriche, tirano ugualmente dalle due parti e si possono togliere: restano quattro sfere sul lato lungo che bilanciano due sfere sul lato corto.

Dunque, su piani della stessa altezza, l'effetto di un peso lungo il piano è inversamente proporzionale alla lunghezza del piano: è la regola del piano inclinato che ritroveremo con i vettori nel capitolo 7. Stevin ne fece un emblema, che compare come vignetta nelle sue opere con il motto *Wonder en is gheen wonder*, «una meraviglia, eppure non è una meraviglia» (traduzione della redazione).

COLLEGAMENTI

In laboratorio: tre dinamometri in equilibrio

Le forze (capitolo 6) si misurano con il *dinamometro*, una molla tarata che le indica in newton (N). Qui lo usiamo per verificare che le forze si sommano come vettori.

Materiali. Tre dinamometri uguali (portata 10 N, sensibilità 0,1 N); un anellino metallico leggero; tre spezzoni di filo; un grande foglio di carta fissato al tavolo con nastro adesivo; tre morsetti o chiodini per bloccare i dinamometri; goniometro, righello millimetrato, matita.

Procedimento. Aggancia i dinamometri all'anellino e azzerali tenendoli orizzontali. Tirali sul tavolo in tre direzioni e bloccali con i morsetti, in modo che l'anellino resti fermo al centro del foglio senza toccarlo. Segna il centro dell'anello e un punto lungo ciascun filo, e leggi F_1, F_2, F_3. Sul foglio disegna in scala (1 cm ↔ 1 N) $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$, costruisci il parallelogramma e misura la diagonale $\boldsymbol{R}$ e l'angolo fra $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{F}_3$. Ripeti con 90°, 60° e 120° fra i primi due fili.

Tabella 5.1 Misure di un gruppo di studenti. Le forze sono lette sui dinamometri (± 0,1 N); R è la diagonale del disegno in scala (± 0,2 N); l'angolo fra $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{F}_3$ è misurato con il goniometro (± 2°).

Angolo fra F_1 e F_2	F_1 (N)	F_2 (N)	R dal disegno (N)	F_3 (N)	Angolo fra R e F_3
90°	3,0	4,0	5,0	5,1	179°
60°	3,0	3,0	5,2	5,1	181°
120°	4,0	4,0	4,0	4,1	178°

Che cosa concludere. In ogni prova R e F_3 differiscono al più di 0,1 N, meno della somma delle incertezze (0,3 N): sono compatibili; e l'angolo fra $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{F}_3$ è 180° entro l'incertezza. Quindi $\boldsymbol{F}_3$ è l'opposto di $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, cioè $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{0}$: le forze si sommano con la regola del parallelogramma. I disegni si controllano con il calcolo: a 90°, $\sqrt{(3{,}0^2 + 4{,}0^2)}$ N = 5,0 N; a 60° il rombo ha diagonale $2 \times (\sqrt{3}/2) \times 3{,}0$ N ≈ 5,2 N; a 120° il rombo è fatto di due triangoli equilateri e la diagonale vale 4,0 N.

Sicurezza. Non tendere i dinamometri oltre la portata e non lasciarli andare di colpo quando sono tesi: la molla scatta e il gancio può colpire chi sta vicino.

Per la relazione. Segui lo schema del capitolo 4: tabella con le incertezze, i tre disegni in scala, il confronto fra R e F_3 con la compatibilità. Fra gli errori sistematici: l'azzeramento dei dinamometri, l'attrito di fili e anello sul tavolo, i fili non paralleli al foglio, la precisione delle direzioni riportate.

SINTESI

- Le grandezze scalari sono descritte da un numero con la sua unità; le grandezze vettoriali richiedono anche una direzione e un verso, e si rappresentano con vettori.
- Un vettore ha modulo (mai negativo), direzione e verso; un vettore che rappresenta una forza ha anche un punto di applicazione.
- Lo spostamento è il vettore che va dalla posizione iniziale a quella finale; il suo modulo non supera mai la distanza percorsa.
- Due vettori si sommano con il metodo punta-coda o con la regola del parallelogramma; la somma è commutativa e il suo modulo è compreso fra $|a - b|$ e $a + b$.
- Per vettori perpendicolari il modulo della somma si calcola con il teorema di Pitagora.
- Il vettore opposto $-\boldsymbol{a}$ ha verso contrario; la differenza $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ è la somma di $\boldsymbol{a}$ con $-\boldsymbol{b}$.
- Il prodotto $k\boldsymbol{a}$ ha la direzione di $\boldsymbol{a}$, modulo $|k|$ volte maggiore e verso concorde o opposto secondo il segno di k.
- Un vettore si scompone in modo unico lungo due direzioni date; lungo gli assi cartesiani si ottengono le componenti, numeri con segno.
- Dalle componenti si ricava il modulo con Pitagora e la direzione con la pendenza v_y/v_x e i segni; la somma di vettori si esegue sommando le componenti.
- Nei triangoli notevoli il cateto opposto a 30° è metà dell'ipotenusa, quello opposto a 60° ne è i $\sqrt{3}/2$, i cateti a 45° ne sono i $\sqrt{2}/2$: così si trovano le componenti a 30°, 45° e 60°.
- Per un angolo qualsiasi si usa un disegno in scala con righello e goniometro; per una direzione data come pendenza, i triangoli simili.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Quale delle seguenti grandezze è vettoriale?
   - **A.** la massa di un'automobile
   - **B.** la temperatura dell'aria
   - **C.** lo spostamento di un ciclista
   - **D.** la durata di una partita

2. ● Per descrivere completamente un vettore spostamento occorrono:
   - **A.** modulo, direzione e verso
   - **B.** soltanto il modulo e l'unità di misura
   - **C.** la direzione e l'unità di misura
   - **D.** il modulo e il segno

3. ● Due spostamenti perpendicolari misurano 6 m e 8 m. Il modulo della loro somma è:

   A. 14 m
   B. 2 m
   C. 10 m
   D. 48 m

4. ●● Due vettori hanno moduli 5 N e 3 N. Quale valore **non** può avere il modulo della loro somma?

   A. 2 N
   B. 8 N
   C. 5 N
   D. 9 N

5. ● Il vettore $-2\boldsymbol{a}$, rispetto ad $\boldsymbol{a}$:

   A. ha lo stesso verso e modulo doppio
   B. ha verso opposto e modulo doppio
   C. ha verso opposto e modulo dimezzato
   D. ha direzione perpendicolare e modulo doppio

6. ●● Un vettore ha componenti $v_x = -3$ m e $v_y = 4$ m. Il suo modulo è:

   A. 1 m
   B. 5 m
   C. 7 m
   D. −5 m

7. ●● In un triangolo rettangolo con un angolo di 30° l'ipotenusa misura 10 cm. Il cateto opposto all'angolo di 30° misura:

   A. 5,0 cm
   B. 8,7 cm
   C. 7,1 cm
   D. 10 cm

8. ●● Un vettore di modulo 20 N forma un angolo di 60° con il semiasse positivo delle x e punta nel primo quadrante. Le sue componenti v_x e v_y valgono:

   A. 17 N e 10 N
   B. 14 N e 14 N
   C. 20 N e 0 N
   D. 10 N e 17 N

Vero o falso

9. ● La distanza percorsa da un corpo è sempre maggiore o uguale al modulo del suo spostamento. V / F

10. ● Il modulo di un vettore è negativo quando il vettore punta verso sinistra. V / F

11. ● Il risultato della somma di due vettori non dipende dall'ordine in cui si sommano. V / F

12. ●● I vettori $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ hanno lo stesso modulo. V / F

13. ●● In un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°, il cateto più corto è quello opposto all'angolo di 60°. V / F

Applicare

14. ● Un cane al guinzaglio percorre 350 m verso nord lungo un viale rettilineo, poi torna indietro di 120 m. Calcola la distanza percorsa e lo spostamento complessivo (modulo, direzione e verso).

15. ● Una nave si sposta di 2,4 km verso est e poi di 1,0 km verso nord. Calcola il modulo dello spostamento complessivo e la sua pendenza rispetto alla direzione est.

16. ● Il vettore $\boldsymbol{a}$ ha modulo 3,0 m ed è diretto verso est. Descrivi (modulo, direzione e verso) i vettori $4\boldsymbol{a}$ e $-0{,}5\boldsymbol{a}$.

17. ●● Un vettore ha componenti $v_x = -6{,}0$ N e $v_y = -8{,}0$ N. Calcola il modulo, la pendenza e indica in quale quadrante punta la freccia.

18. ●● Un vettore spostamento di modulo 50 m forma un angolo di 45° con il semiasse positivo delle x e punta nel primo quadrante. Calcola le sue componenti.

19. ●● Con i vettori $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ della Figura 5.5 calcola per componenti la differenza $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ e il suo modulo.

20. ● Completa. Una forza di modulo 16 N, inclinata di 30° sopra l'orizzontale, ha componente orizzontale di modulo _____ e componente verticale di modulo _____ .

Problemi

21. ●● Un'escursionista cammina 3,0 km verso nord, poi 4,0 km verso est e infine 1,0 km verso sud. a) Calcola la distanza percorsa. b) Trova lo spostamento complessivo per componenti (asse x verso est, y verso nord), il suo modulo e la sua pendenza.

22. ●●● La rampa di un parcheggio sale di 1,5 m ogni 8,0 m percorsi in orizzontale. Un'auto percorre 34 m lungo la rampa. Di quanto si è alzata e di quanto è avanzata in orizzontale?

23. ●●● Due funi tirano un anello con forze di 30 N ciascuna: la prima verso est, la seconda inclinata di 60° verso nord rispetto alla prima. a) Calcola per componenti la forza risultante, il suo modulo e la sua pendenza. b) Mostra che la risultante è diretta lungo la bisettrice dell'angolo fra le due funi. c) Quale forza deve esercitare una terza fune perché l'anello resti fermo?

24. ●●● Due forze agiscono sullo stesso punto: $\boldsymbol{F}_1 = 50$ N verso est e $\boldsymbol{F}_2 = 35$ N inclinata di 70° rispetto all'ovest, verso nord. Trova con un disegno in scala (1 cm ↔ 10 N) il modulo della risultante e l'angolo che forma con la direzione est.

25. ●●● Due vettori disegnati su un foglio hanno componenti misurate con un righello millimetrato: $\boldsymbol{a}$ = (12,0 cm; 5,0 cm) e $\boldsymbol{b}$ = (−4,5 cm; 5,0 cm), ciascuna con un'incertezza di 0,1 cm. a) Calcola le componenti della somma con le loro incertezze assolute (capitolo 3). b) Calcola l'incertezza relativa di ciascuna componente della somma. c) Calcola il modulo della somma.

26. ●● Un drone per riprese aeree vola in orizzontale per 200 m verso nord e poi per 200 m verso nord-est. Calcola la distanza percorsa, il modulo dello spostamento complessivo e la sua pendenza rispetto alla direzione est.

Ragionare e argomentare

27. ●● Trova l'errore. Uno studente scrive: «Una barca percorre 6 km verso est e poi 8 km verso nord; quindi si trova a 14 km dal porto». Spiega dov'è l'errore e correggi il risultato.

28. ●●● Commenta la fonte. Nei *Principia* (1687) Newton enuncia così il primo corollario delle leggi del moto: *Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis*, «Un corpo, sotto l'azione congiunta di due forze, descrive la diagonale di un parallelogramma nello stesso tempo in cui, sotto l'azione di ciascuna separatamente, ne descriverebbe i lati» (traduzione della redazione). Che cosa afferma? Quale regola di questo capitolo vi riconosci? Come potresti verificarla con un esperimento?

29. ●● Tre vettori hanno lo stesso modulo. È possibile che la loro somma sia il vettore nullo? Se sì, come devono essere disposti? E due vettori di modulo uguale?

30. ●● Nella corona di sfere di Stevin il lato AB è doppio del lato BC. Spiega perché si possono togliere le otto sfere appese senza alterare l'equilibrio. Che cosa concluderesti con un prisma il cui lato AB fosse triplo di BC?

PER APPROFONDIRE

- [NEW] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*: subito dopo le tre leggi del moto, il primo corollario enuncia la regola del parallelogramma per le forze.
- [FEY] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: il capitolo sui vettori spiega perché le leggi della fisica si scrivono in forma vettoriale, indipendente dalla scelta degli assi.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo sui vettori, con molti esercizi su somme e componenti.
- [RUS] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*: la statica e la geometria della scienza ellenistica, da cui discende il modo di ragionare di Stevin.

Glossario del capitolo

Componenti cartesiane
Numeri con segno che descrivono le proiezioni di un vettore sugli assi x e y; positivi se la proiezione punta nel verso dell'asse, negativi altrimenti.

Differenza di due vettori
Il vettore $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$: si somma ad $\boldsymbol{a}$ l'opposto di $\boldsymbol{b}$.

Direzione
La retta su cui giace un vettore.

Disegno in scala
Rappresentazione dei vettori con frecce di lunghezza proporzionale al modulo secondo una scala dichiarata (per esempio 1 cm ↔ 10 N), tracciate con righello e goniometro.

Distanza percorsa
Lunghezza del percorso effettivamente seguito da un corpo; è una grandezza scalare, mai minore del modulo dello spostamento.

Grandezza scalare
Grandezza descritta completamente da un numero e da un'unità di misura (massa, tempo, temperatura).

Grandezza vettoriale
Grandezza che, per essere descritta, richiede un modulo con la sua unità, una direzione e un verso (spostamento, velocità, forza).

Metodo punta-coda
Metodo per sommare vettori: la coda di ciascun vettore si appoggia sulla punta del precedente; la somma va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo.

Modulo
Valore numerico di un vettore, con la sua unità, rappresentato dalla lunghezza della freccia; non è mai negativo.

Prodotto di un vettore per uno scalare
Il vettore $k\boldsymbol{a}$: stessa direzione di $\boldsymbol{a}$, modulo $|k|$ volte quello di $\boldsymbol{a}$, verso concorde se $k > 0$, opposto se $k < 0$.

Punto di applicazione
Il punto in cui agisce una forza; vi si disegna la coda del vettore.

Regola del parallelogramma
Due vettori con la coda in comune si sommano costruendo il parallelogramma che li ha come lati: la somma è la diagonale che parte dalla coda comune.

Scomposizione
Operazione inversa della somma: trovare due vettori, lungo due direzioni date, la cui somma sia un vettore assegnato.

Spostamento
Vettore che va dalla posizione iniziale alla posizione finale di un corpo, indipendentemente dal percorso seguito.

Verso
Il senso in cui punta un vettore lungo la sua direzione, indicato dalla punta della freccia.

Vettore
Segmento orientato (freccia) che rappresenta una grandezza vettoriale con il suo modulo, la sua direzione e il suo verso.

Vettore nullo
Vettore di modulo zero, senza direzione; è la somma di un vettore e del suo opposto.

Vettore opposto
Il vettore $-\boldsymbol{a}$, con lo stesso modulo e la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$ ma verso contrario.

Soluzioni

1. C. Lo spostamento ha direzione e verso; massa, temperatura e durata sono scalari.

2. A. Modulo, direzione e verso.

3. C. $s = \sqrt{(6^2 + 8^2)}$ m $= \sqrt{100}$ m $= 10$ m.

4. D. Il modulo della somma è compreso fra 5 N − 3 N = 2 N e 5 N + 3 N = 8 N: 9 N è impossibile.

5. B. Il coefficiente −2 raddoppia il modulo e, essendo negativo, inverte il verso; la direzione resta la stessa.

6. B. $v = \sqrt{[(-3)^2 + 4^2]}$ m $= \sqrt{25}$ m $= 5$ m; il modulo non è mai negativo.

7. A. Il cateto opposto a 30° è metà dell'ipotenusa: 10 cm / 2 = 5,0 cm.

8. D. A 60° dall'asse x la componente x sta di fronte all'angolo di 30°: $v_x = 20$ N / 2 = 10 N, $v_y = (\sqrt{3}/2) \times 20$ N ≈ 17 N.

9. V. Il segmento rettilineo è il percorso più breve fra due punti; l'uguaglianza vale solo per un moto rettilineo senza inversioni.

10. F. Il modulo è sempre positivo o nullo; è la componente v_x a essere negativa quando la freccia punta verso le x negative.

11. V. La somma è commutativa: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (i due percorsi lungo il parallelogramma arrivano allo stesso vertice).

12. V. I due vettori sono uno l'opposto dell'altro: stesso modulo e stessa direzione, verso opposto.

13. F. Il cateto più corto è opposto all'angolo più piccolo, 30°, e vale metà dell'ipotenusa.

14. Distanza percorsa: 350 m + 120 m = 470 m. Spostamento: i due tratti sono discordi, 350 m − 120 m = 230 m, diretto verso nord.

15. $s = \sqrt{[(2{,}4\text{ km})^2 + (1{,}0\text{ km})^2]} = \sqrt{6{,}76}$ km ≈ 2,6 km; pendenza 1,0/2,4 ≈ 0,42 (0,42 km verso nord per ogni km verso est).

16. $4\boldsymbol{a}$: modulo 4 × 3,0 m = 12 m, direzione est-ovest, verso est. $-0{,}5\boldsymbol{a}$: modulo 0,5 × 3,0 m = 1,5 m, stessa direzione, verso ovest.

17. $v = \sqrt{[(-6{,}0)^2 + (-8{,}0)^2]}$ N $= \sqrt{100}$ N $= 10$ N; pendenza (−8,0)/(−6,0) ≈ 1,3; entrambe le componenti negative: la freccia punta verso sinistra e verso il basso, nel terzo quadrante.

18. A 45° le componenti sono uguali: $v_x = v_y = (\sqrt{2}/2) \times 50$ m ≈ 35 m.

19. $\boldsymbol{b} = (-2\text{ m}; +4\text{ m})$, $\boldsymbol{c} = (+3\text{ m}; -2\text{ m})$. $d_x = -2$ m − 3 m = −5 m; $d_y = 4$ m − (−2 m) = 6 m. $d = \sqrt{(25 + 36)}$ m $= \sqrt{61}$ m ≈ 7,8 m.

20. La componente verticale è opposta all'angolo di 30°: 16 N / 2 = 8,0 N; quella orizzontale vale $(\sqrt{3}/2) \times 16$ N ≈ 14 N.

21. a) 3,0 km + 4,0 km + 1,0 km = 8,0 km. b) $s_x = 4{,}0$ km; $s_y = 3{,}0$ km − 1,0 km = 2,0 km. $s = \sqrt{(4{,}0^2 + 2{,}0^2)}$ km $= \sqrt{20}$ km ≈ 4,5 km; pendenza 2,0/4,0 = 0,50: 1 km verso nord ogni 2 km verso est.

22. Il triangolo della pendenza ha cateti 1,5 m e 8,0 m e ipotenusa $\sqrt{(1{,}5^2 + 8{,}0^2)}$ m $= \sqrt{66{,}25}$ m ≈ 8,14 m. Lo spostamento di 34 m è l'ipotenusa di un triangolo simile, con rapporto di similitudine 34/8,14 ≈ 4,18. Salita: 1,5 m × 4,18 ≈ 6,3 m; avanzamento orizzontale: 8,0 m × 4,18 ≈ 33 m. Controllo: $\sqrt{(6{,}3^2 + 33{,}4^2)}$ m ≈ 34 m.

23. a) $\boldsymbol{F}_1 = (30\text{ N}; 0)$. $\boldsymbol{F}_2$ a 60° dall'asse x: componente $x = 30$ N / 2 = 15 N, componente $y = (\sqrt{3}/2) \times 30$ N ≈ 26,0 N. Risultante: $R_x = 45$ N, $R_y \approx 26{,}0$ N; $R = \sqrt{(45^2 + 26{,}0^2)}$ N $= \sqrt{2700}$ N ≈ 52 N; pendenza 26,0/45 ≈ 0,577. b) Nel triangolo 30°-60°-90° il rapporto fra il cateto opposto a 30° e quello opposto a 60° è $(1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}577$: la risultante forma 30° con l'est, a metà dell'angolo di 60° fra le funi (il parallelogramma di due lati uguali è un rombo, e la diagonale è bisettrice). c) Una forza opposta alla risultante: 52 N, inclinata di 30° verso sud rispetto all'ovest.

24. Con la scala 1 cm ↔ 10 N: $\vec{F}_1$ è una freccia di 5,0 cm verso est; $\vec{F}_2$ una freccia di 3,5 cm che forma 70° con la direzione ovest, cioè 110° con la direzione est. La diagonale del parallelogramma misura circa 5,0 cm e forma circa 41° con l'est: $R \approx 50$ N (con un'incertezza di lettura di circa 1-2 N e 1-2°). Il calcolo trigonometrico dà 50,3 N e 40,9°.

25. a) $s_x = 12{,}0\text{ cm} - 4{,}5\text{ cm} = 7{,}5\text{ cm}$; $s_y = 5{,}0\text{ cm} + 5{,}0\text{ cm} = 10{,}0\text{ cm}$. Nelle somme e nelle differenze le incertezze assolute si sommano: 0,1 cm + 0,1 cm = 0,2 cm. Quindi $s_x = (7{,}5 \pm 0{,}2)$ cm, $s_y = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ cm. b) $e_r(s_x) = 0{,}2/7{,}5 \approx 0{,}03$ (3%); $e_r(s_y) = 0{,}2/10{,}0 = 0{,}02$ (2%): la sottrazione fa crescere l'incertezza relativa. c) $s = \sqrt{(7{,}5^2 + 10{,}0^2)}\text{ cm} = \sqrt{156{,}25}\text{ cm} = 12{,}5$ cm.

26. Distanza: 400 m. Asse x verso est, y verso nord. Secondo tratto a 45°: componenti $(\sqrt{2}/2) \times 200\text{ m} \approx 141$ m ciascuna. $s_x \approx 141$ m; $s_y \approx 200\text{ m} + 141\text{ m} = 341$ m. $s = \sqrt{(141^2 + 341^2)}\text{ m} \approx 370$ m; pendenza $341/141 \approx 2{,}4$.

27. Lo studente ha sommato i moduli come se gli spostamenti fossero concordi. Sono perpendicolari, quindi il modulo della somma è l'ipotenusa: $\sqrt{(6^2 + 8^2)}\text{ km} = 10$ km. I 14 km sono la distanza percorsa, non la distanza dal porto.

28. Traccia di risposta. Newton afferma che due forze che agiscono insieme producono lo stesso effetto di una sola forza diretta lungo la diagonale del parallelogramma costruito sulle due: è la regola del parallelogramma, cioè la somma vettoriale delle forze (Newton la dimostra a partire dalle sue leggi del moto, che studierai nel capitolo 13). Una verifica statica è l'esperimento dei tre dinamometri in equilibrio di questo capitolo: la diagonale costruita con due forze risulta uguale e opposta alla terza. Una verifica dinamica: una pallina su un tavolo liscio colpita contemporaneamente da due spinte perpendicolari si muove lungo la diagonale.

29. Sì: se i tre vettori, messi in catena punta-coda, formano un triangolo equilatero chiuso, cioè se ogni coppia forma un angolo di 120° quando partono dallo stesso punto. Due vettori di modulo uguale hanno somma nulla solo se sono opposti.

30. Le otto sfere appese sono disposte simmetricamente rispetto alla verticale del loro punto più basso: tirano il filo ugualmente dalle due parti, e togliendole non si favorisce né l'uno né l'altro lato. Restano 4 sfere su AB che bilanciano 2 sfere su BC: l'effetto di un peso lungo il piano è inversamente proporzionale alla lunghezza del piano. Con AB triplo di BC (e sfere equidistanti) ci sarebbero 3 sfere su AB per ogni sfera su BC: una sfera su BC bilancerebbe tre sfere su AB.