CAPITOLO

4

Tabelle, grafici e leggi fisiche

Una misura sola è un fatto; molte misure ben ordinate possono diventare una legge.

OBIETTIVI

1. Organizzare i dati di un esperimento in una tabella con simboli, unità e incertezze.
2. Costruire un grafico cartesiano con scale, unità e barre d'errore; tracciare la retta di miglior accordo e ricavarne la pendenza con la sua incertezza.
3. Riconoscere proporzionalità diretta, dipendenza lineare, proporzionalità inversa e quadratica da una tabella e da un grafico, e linearizzarle.
4. Usare una legge per interpolare ed estrapolare, consapevoli dei rischi, e ricavarne le formule inverse con le unità.
5. Scrivere una relazione di laboratorio completa, con una discussione critica dei risultati.

INDICE DEL CAPITOLO

4.1 Le tabelle di dati 2
4.2 I grafici cartesiani 3
4.3 Le relazioni fra due grandezze 7
4.4 Dai dati alla legge, e ritorno 13
4.5 La relazione di laboratorio 15

Fisica 3 · Parte I · Il linguaggio della fisica · versione 1.0
Capitolo 4: Tabelle, grafici e leggi fisiche · pagine 85–108 del volume completo · estratto per lo studio

Alla fine di un esperimento, sul quaderno c'è una colonna di numeri, e il lavoro più interessante comincia lì: capire se obbediscono a una regola, quale, e con quanta sicurezza. Nei capitoli precedenti hai imparato a definire una grandezza, a misurarla con l'unità giusta e a stimarne l'incertezza. Questo capitolo completa la prima parte del libro e risponde alla domanda che da Galileo in poi sta al centro della fisica: come si passa dalle misure a una *legge*?

Gli strumenti sono tre: la tabella, che conserva i dati in ordine; il grafico, che li rende visibili; la formula, che li riassume e permette di prevedere. Alla fine imparerai a raccontare un esperimento in una relazione di laboratorio.

4.1 Le tabelle di dati

Un esperimento da cucina: con un cilindro graduato si versano volumi crescenti di olio d'oliva in un contenitore posato su una bilancia azzerata, e si legge ogni volta la massa dell'olio. La variabile indipendente, scelta da chi sperimenta (capitolo 1), è il volume V; la variabile dipendente, che si misura, è la massa m. Il risultato è la Tabella 4.1.

Tabella 4.1 Massa di campioni di olio d'oliva in funzione del volume. Il cilindro graduato ha sensibilità 1 cm³; la bilancia, 0,1 g. L'ultima colonna è calcolata.

V (cm³) ± 1 cm³	m (g) ± 0,1 g	m/V (g/cm³)
20	18,3	0,915
40	36,9	0,922
60	55,0	0,917
80	73,8	0,922
100	91,9	0,919

Una **tabella di dati** dispone le misure in righe e colonne, in modo che ogni coppia di valori si legga senza ambiguità. Nell'intestazione di ogni colonna si scrivono il simbolo della grandezza e, tra parentesi, l'unità: nelle caselle restano solo numeri, e nessuno deve chiedersi se 55,0 siano grammi o chilogrammi. Se l'incertezza è la stessa per tutte le misure, si scrive anch'essa nell'intestazione; se cambia da riga a riga, le si dedica una colonna. Ogni colonna di misure ha lo stesso numero di decimali, quello consentito dallo strumento (capitolo 3); la variabile indipendente occupa la prima colonna, in ordine crescente.

L'ultima colonna della tabella non contiene misure ma un *calcolo*, il rapporto m/V. Aggiungere colonne di grandezze calcolate è la mossa più fruttuosa dell'analisi dei dati: qui il rapporto oscilla tra 0,915 e 0,922 g/cm³ senza una tendenza precisa, cioè resta costante entro le incertez-

ze. È il primo indizio di una legge, e il numero che compare è una grandezza che conosci dal capitolo 2: la densità dell'olio.

4.2 I grafici cartesiani

4.2.1 Assi, scale e unità

Un **grafico cartesiano** rappresenta ogni coppia di valori come un punto del piano, individuato da due coordinate misurate su due assi perpendicolari. Lo conosci dalla matematica, ma in fisica ogni asse porta una grandezza, con la sua unità, e ogni punto è una misura, non un numero esatto. Per tracciare il grafico della Tabella 4.1 si procede così.

1. **Gli assi.** Per convenzione la variabile indipendente va sull'asse orizzontale, l'**asse delle ascisse**; la variabile dipendente sull'asse verticale, l'**asse delle ordinate**. Accanto a ciascun asse si scrivono simbolo e unità: V (cm^3), m (g).
2. **Le scale.** La **scala** di un asse è la corrispondenza tra la lunghezza sul foglio e il valore della grandezza. Si sceglie in modo che i dati occupino gran parte del foglio e che i valori si leggano facilmente: 1 cm per 10 cm^3 va bene, 1 cm per 7 cm^3 costringe a calcoli continui. Le due scale sono indipendenti l'una dall'altra.
3. **I punti.** Ogni coppia della tabella diventa un punto, segnato con un piccolo cerchio o una croce; i valori non si scrivono accanto ai punti, perché si leggono sugli assi.
4. **Le incertezze.** Accanto a ogni punto si disegna la sua barra d'errore, come spiegato qui sotto.

Il risultato è la Figura 4.1. È il grafico massa-volume che hai incontrato nel capitolo 2, ora costruito con tutte le regole. Gli assi partono da zero perché l'origine ha qui un significato fisico: zero centimetri cubi di olio hanno massa zero.

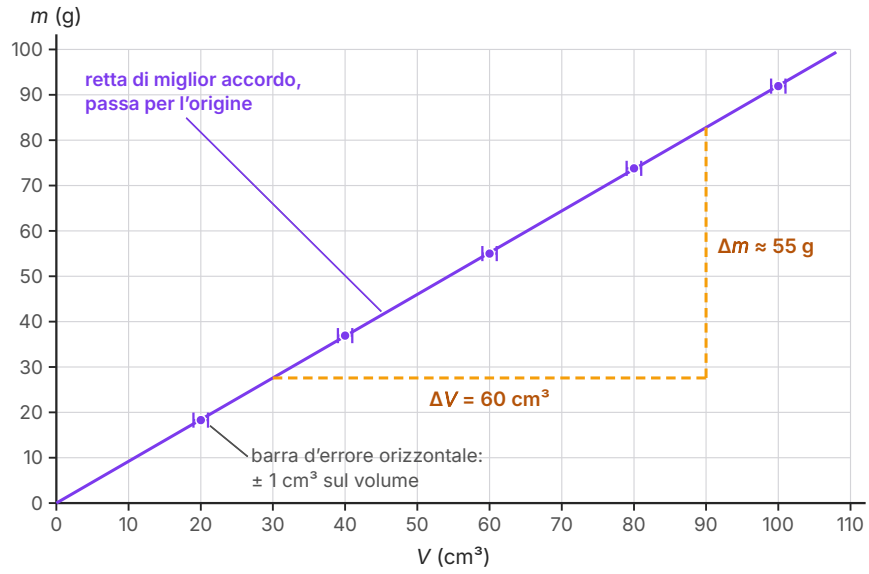


Figura 4.1 Il grafico dei dati della Tabella 4.1. Le barre d'errore sono orizzontali perché l'incertezza che conta è quella sul volume (± 1 cm³); quella sulla massa (± 0,1 g) è troppo piccola per vedersi a questa scala. Il triangolo arancione serve a calcolare la pendenza della retta: (55 g)/(60 cm³) ≈ 0,92 g/cm³.

4.2.2 Le barre d'errore

Un grafico onesto mostra anche l'incertezza delle misure. Ogni punto si disegna con una **barra d'errore**: un segmento centrato sul punto e lungo, in tutto, il doppio dell'incertezza assoluta, che rappresenta l'intervallo in cui cade la misura (capitolo 3). Se l'incertezza riguarda la grandezza in ordinata la barra è verticale; se riguarda quella in ascissa, è orizzontale; se entrambe le incertezze sono apprezzabili, si disegnano tutte e due e il punto diventa una piccola croce. Nel nostro caso il volume è incerto di 1 cm³ su 20 cm³, cioè del 5% per il primo punto, mentre la massa è incerta di 0,1 g su 18,3 g, meno dell'1%: conta solo la barra orizzontale. Con le barre, la domanda «i punti stanno su una retta?» diventa: «esiste una retta che attraversa tutte le barre?».

APPROFONDIMENTO

Nicola d'Oresme e le «configurazioni delle qualità»

L'idea di rappresentare una grandezza con un segmento è molto più antica del piano cartesiano. Nel Trecento il filosofo Nicola d'Oresme, maestro a Parigi e poi vescovo di Lisieux, scrisse un *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, il «trattato sulle configurazioni delle qualità e dei moti». Una «qualità», nel linguaggio delle scuole medievali, era qualcosa che può essere più o meno intensa: il calore di un corpo, la velocità di un moto. Oresme rappresentava l'estensione della qualità, per esempio la durata di un moto, con un segmento orizzontale, la *longitudo*; e in ogni punto innalzava un segmento perpendicolare, la *latitudo*, lungo quanto l'intensità della qualità in quel punto. Le cime dei segmenti disegnano una figura (Figura 4.2): un rettangolo per una qualità uniforme, un triangolo rettangolo per una qualità che cresce in modo uniforme.

Non era ancora un grafico di dati: Oresme non misurava nulla, e le sue figure non avevano scale né unità. Ma l'idea di vedere come una grandezza cambia dalla forma di una figura è quella dei grafici di questo capitolo; e il ragionamento sull'area di quelle figure tornerà nel capitolo 11.

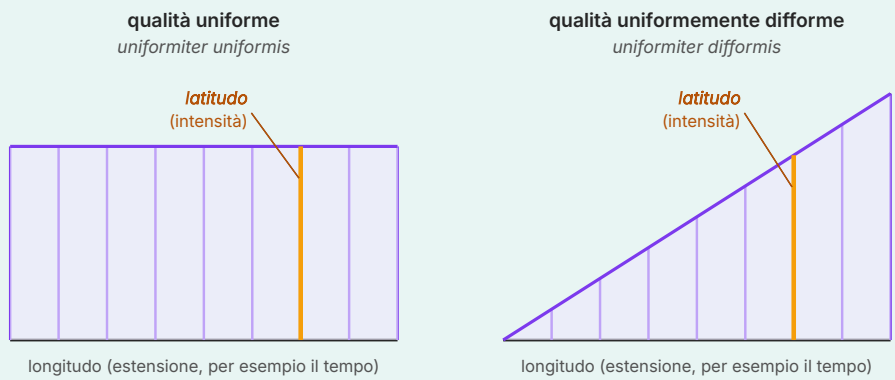


Figura 4.2 Le due figure fondamentali di Oresme, ridisegnate in forma schematica: a ogni punto della *longitudo* corrisponde un segmento verticale, la *latitudo*, lungo quanto l'intensità della qualità. Una qualità uniforme dà un rettangolo; una qualità che cresce in modo uniforme («uniformemente difforme»), un triangolo.

4.2.3 La retta di miglior accordo

I punti della Figura 4.1 sono quasi allineati, ma non perfettamente, perché ogni misura porta con sé piccoli scarti casuali. Collegarli con una spezzata sarebbe un errore: si seguirebbero gli

scarti invece della legge. Si traccia invece, con un righello trasparente, la **retta di miglior accordo**: la retta che passa il più vicino possibile a tutti i punti, lasciandone all'incirca metà da una parte e metà dall'altra e attraversando, se possibile, tutte le barre d'errore. Non deve passare per forza per il primo o per l'ultimo punto, che sono misure come le altre. Qui la retta passa anche per l'origine, come ci si aspetta. Tracciata a mano, però, dipende un po' da chi la disegna: quanto è incerta?

4.2.4 Le rette di massima e minima pendenza

Fra tutte le rette che attraversano ogni barra d'errore, ce n'è una più ripida di tutte e una meno ripida di tutte: la **retta di massima pendenza** e la **retta di minima pendenza**. In genere si ottengono unendo gli estremi opposti delle barre del primo e dell'ultimo punto (Figura 4.3); bisogna poi controllare che attraversino anche le barre intermedie. Il valore della pendenza si prende uguale alla media delle due pendenze estreme, e la sua incertezza uguale a metà della loro differenza: è la stessa idea della semidispersione massima del capitolo 3, applicata a una retta.

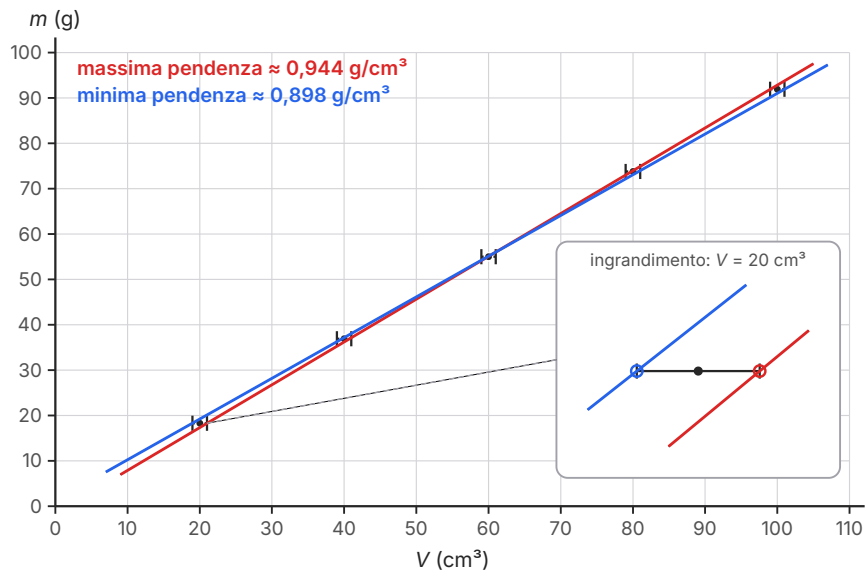


Figura 4.3 Le rette di massima (rosso) e di minima pendenza (blu) per i dati della Tabella 4.1. La retta rossa unisce l'estremo destro della barra del primo punto (21 cm³; 18,3 g) con l'estremo sinistro di quella dell'ultimo (99 cm³; 91,9 g); la blu unisce gli estremi opposti. Entrambe attraversano le barre dei punti intermedi. Nel riquadro, il primo punto ingrandito.

ESEMPIO SVOLTO

La densità dell'olio dal grafico

Problema. Dalle rette estreme della Figura 4.3 ricava la pendenza della retta dei dati della Tabella 4.1, con la sua incertezza. Che cosa rappresenta? Il risultato è compatibile con il valore indicativo della Tabella A.4 in Appendice, 920 kg/m^3?

Pendenze estreme. Retta rossa: sale da 18,3 g a 91,9 g, cioè di 73,6 g, mentre il volume passa da 21 cm^3 a 99 cm^3, cioè di 78 cm^3: p_{max} = 73,6 g / 78 cm^3 = 0,944 g/cm^3. Retta blu: stessa salita, su 101 cm^3 − 19 cm^3 = 82 cm^3: p_{min} = 73,6 g / 82 cm^3 = 0,898 g/cm^3.

$$p = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} = 0{,}921 \text{ g/cm}^3 \qquad e_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2} = 0{,}023 \text{ g/cm}^3$$

Risultato. L'incertezza, arrotondata a una cifra significativa, è 0,02 g/cm^3; il valore si arrotonda allo stesso decimale: p = (0,92 ± 0,02) g/cm^3, con un'incertezza relativa di circa il 2%.

Significato. La pendenza è la densità dell'olio, d = (0,92 ± 0,02) g/cm^3 = (920 ± 20) kg/m^3 (ricorda il fattore 1000 del capitolo 2). Il valore 920 kg/m^3 cade nell'intervallo da 900 a 940 kg/m^3: la misura è compatibile con il valore delle tabelle.

Controllo. I rapporti m/V della Tabella 4.1 cadono tutti nell'intervallo trovato.

4.3 Le relazioni fra due grandezze

4.3.1 La proporzionalità diretta

Nella Tabella 4.1 il rapporto m/V è costante e nella Figura 4.1 i punti stanno su una retta che passa per l'origine: sono due modi di dire la stessa cosa. Due grandezze x e y sono in **proporzionalità diretta** (o direttamente proporzionali) quando il loro rapporto è costante:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ovvero} \quad y = k\,x$$

Il numero k si chiama **costante di proporzionalità**, e in fisica quasi mai è un numero puro: la sua unità è il rapporto tra l'unità di y e quella di x. Per l'olio k = 0,92 g/cm^3. Riconosci una proporzionalità diretta da tre proprietà equivalenti: se x viene moltiplicata per un numero, anche y viene moltiplicata per lo stesso numero; per x = 0 anche y = 0; il grafico è una retta che passa per l'origine.

Nel grafico, k è la **pendenza** della retta: il rapporto $\Delta y/\Delta x$ tra la variazione della grandezza in ordinata e la corrispondente variazione di quella in ascissa, calcolato fra due punti qualsiasi della retta. Per calcolarla si scelgono due punti *della retta*, non due dati, lontani tra loro e con coordinate facili da leggere, come nel triangolo della Figura 4.1. La pendenza è una grandezza

fisica: dice di quanto cambia y per ogni unità di x, e la sua unità è quella dell'ordinata divisa per quella dell'ascissa.

4.3.2 La dipendenza lineare

Appendiamo a una molla masse via via maggiori e misuriamo, con un righello verticale, la sua *lunghezza totale* L. Senza carico la molla è lunga $L_0 = 12{,}0$ cm; i dati sono nella Figura 4.4. I punti stanno ancora su una retta, ma la retta non passa per l'origine: con massa zero la molla non ha lunghezza zero. Il rapporto L/m non è costante (vale 15,1 cm / 50 g ≈ 0,30 cm/g con il primo carico e 27,0 cm / 250 g ≈ 0,11 cm/g con l'ultimo), quindi L e m non sono direttamente proporzionali. Costante è invece il rapporto tra le *variazioni*: ogni 50 g in più la molla si allunga di circa 3 cm.

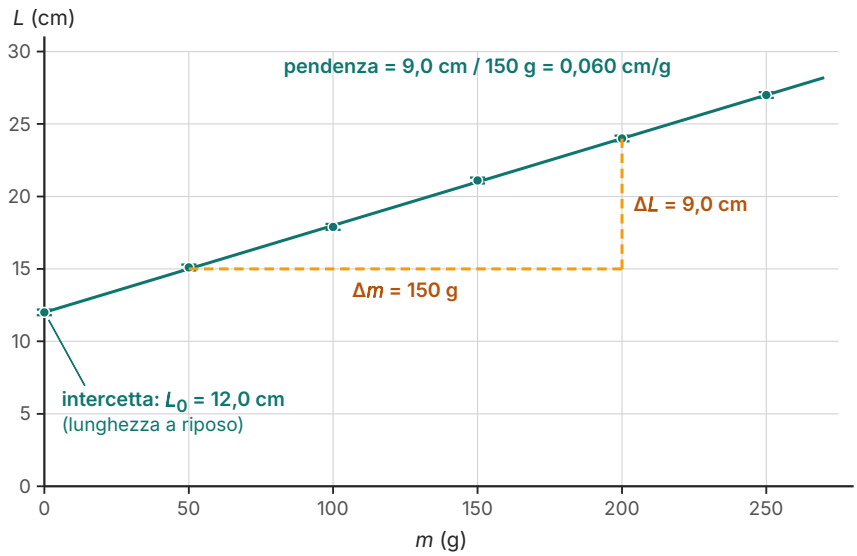


Figura 4.4 Lunghezza totale L di una molla in funzione della massa appesa m (barre d'errore ± 0,2 cm). La retta non passa per l'origine: l'intercetta è la lunghezza a riposo, 12,0 cm; la pendenza, 0,060 cm/g, è l'allungamento per ogni grammo di carico.

Una relazione di questo tipo si chiama **dipendenza lineare**:

$$y = m\,x + q$$

m è la pendenza; q, l'**intercetta**, è il valore di y per $x = 0$, dove la retta incontra l'asse delle ordinate. In fisica entrambi hanno un significato. Per la molla della Figura 4.4 la pendenza vale 9,0 cm / 150 g = 0,060 cm/g, cioè l'allungamento prodotto da ogni grammo di carico; l'intercetta vale 12,0 cm, la lunghezza a riposo. La legge è $L = 12{,}0$ cm + 0,060 cm/g · m. (Non confondere la m della pendenza, quella dei libri di matematica, con il simbolo della massa.)

La proporzionalità diretta è il caso particolare $q = 0$. Basta cambiare la grandezza in ordinata per passare dall'una all'altra: l'*allungamento* $\Delta L = L - L_0$ è direttamente proporzionale alla massa, mentre la lunghezza totale ne dipende linearmente. Nel capitolo 6 questa proprietà delle molle diventerà la legge di Hooke.

ERRORE FREQUENTE

«Lineare» non vuol dire «proporzionale»

Due grandezze legate da una retta sono direttamente proporzionali solo se la retta passa per l'origine. Una bolletta con una quota fissa più una quota per unità consumata cresce linearmente con il consumo, ma consumare il doppio non costa il doppio. Allo stesso modo, «crescente» non vuol dire «direttamente proporzionale», e «decrescente» non vuol dire «inversamente proporzionale»: un cero che si consuma si accorcia linearmente con il tempo, e dopo un tempo doppio non è alto la metà.

4.3.3 La proporzionalità inversa

Versiamo sempre 600 cm³ d'acqua in recipienti cilindrici di sezione S diversa e misuriamo l'altezza h raggiunta dall'acqua (Tabella 4.2). Più il recipiente è largo, più l'acqua resta bassa.

Tabella 4.2 Altezza dell'acqua in recipienti cilindrici di sezione diversa, contenenti tutti 600 cm³ d'acqua. L'ultima riga è calcolata.

S (cm²)	30	40	50	60	75	100
h (cm) ± 0,1 cm	20,1	14,9	12,0	10,1	7,9	6,0
$S \cdot h$ (cm³)	603	596	600	606	593	600

Il rapporto h/S cambia moltissimo, ma il *prodotto* $S \cdot h$ resta circa 600 cm³: è il volume dell'acqua, come ci si aspetta dalla geometria del cilindro (capitolo 2). Due grandezze sono in **proporzionalità inversa** quando il loro prodotto è costante:

$$x \cdot y = k \quad \text{ovvero} \quad y = \frac{k}{x}$$

Se x raddoppia, y si dimezza; se x triplica, y diventa un terzo; e nessuna delle due può annullarsi. Il grafico di h in funzione di S (Figura 4.5a) è una curva che scende sempre più lentamente avvicinandosi agli assi senza toccarli: un ramo di **iperbole** equilatera, che conosci dalla matematica come grafico di $y = k/x$.

Ma molte curve decrescenti somigliano a un'iperbole. Conviene allora la **linearizzazione**: scegliere la grandezza da riportare su un asse in modo che, se l'ipotesi è giusta, i punti stiano su una retta per l'origine. Se $h = k/S$, allora $h = k \cdot (1/S)$: h è direttamente proporzionale a $1/S$. Ripor-

tando h in funzione di $1/S$ (Figura 4.5b) i punti si allineano lungo una retta per l'origine, e la sua pendenza è proprio $k = 600\ \text{cm}^3$.

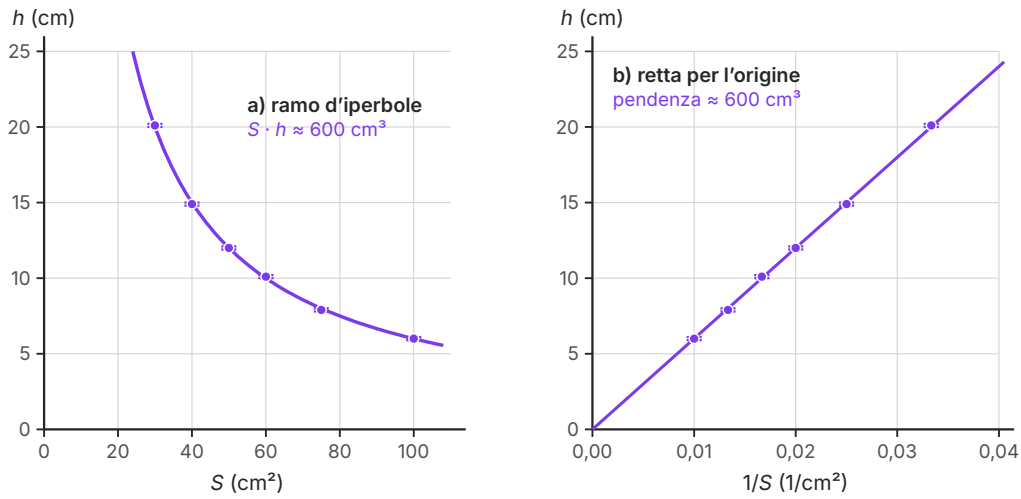


Figura 4.5 a) L'altezza dell'acqua in funzione della sezione del recipiente (dati della Tabella 4.2): i punti stanno su un ramo d'iperbole. b) Le stesse altezze in funzione di $1/S$: i punti si allineano lungo una retta per l'origine, la cui pendenza è il volume costante, circa 600 cm³.

4.3.4 La proporzionalità quadratica

La Tabella 4.3 riporta lo spazio di frenata d di un'automobile, cioè la distanza percorsa dal momento in cui i freni cominciano ad agire fino all'arresto, per diverse velocità iniziali v. Sono dati tipici per un'auto in buone condizioni su asfalto asciutto.

Tabella 4.3 Spazio di frenata di un'automobile in funzione della velocità iniziale (asfalto asciutto; dati tipici). Le ultime due righe sono calcolate.

v (m/s)	5	10	15	20	25	30
d (m)	1,8	7,1	16,1	28,6	44,6	64,3
d/v (s)	0,36	0,71	1,07	1,43	1,78	2,14
d/v^2 (s²/m)	0,072	0,071	0,072	0,072	0,071	0,071

Il rapporto d/v cresce, quindi non c'è proporzionalità diretta; il rapporto d/v^2, invece, resta circa 0,071 s²/m. Due grandezze sono in **proporzionalità quadratica** quando una è direttamente proporzionale al quadrato dell'altra:

$$\frac{y}{x^2} = k \quad \text{ovvero} \quad y = k\,x^2$$

Se x raddoppia, y quadruplica; se x triplica, y diventa nove volte più grande. Nella tabella, da 10 a 20 m/s lo spazio di frenata passa da 7,1 a 28,6 m: circa quattro volte. Il grafico di d in funzione di v (Figura 4.6a) è un ramo di **parabola** con il vertice nell'origine, il grafico di $y = ax^2$ che conosci; e anche qui conviene linearizzare. Se $d = k\,v^2$, riportando d in funzione di v^2 si ottiene una retta per l'origine con pendenza k (Figura 4.6b). Perché lo spazio di frenata segua proprio questa legge lo scoprirai nel capitolo 11.

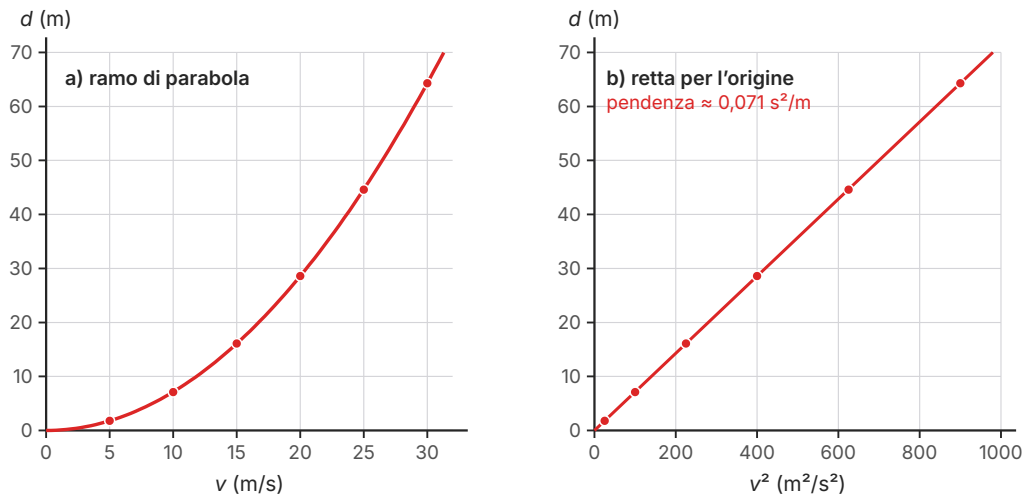


Figura 4.6 a) Spazio di frenata in funzione della velocità iniziale (dati della Tabella 4.3): un ramo di parabola. b) Lo stesso spazio in funzione di v^2: una retta per l'origine con pendenza circa 0,071 s²/m.

4.3.5 La proporzionalità inversa al quadrato

Incontrerai spesso anche la **proporzionalità inversa al quadrato**: $y = k/x^2$, cioè $y \cdot x^2 = k$. Se x raddoppia, y diventa un quarto; se x triplica, un nono. Per linearizzarla si riporta y in funzione di $1/x^2$.

ESEMPIO SVOLTO

Una legge da una tabella

Problema. Con l'app «luxmetro» di uno smartphone si misura, in una stanza buia, l'illuminamento E (in lux, lx) prodotto da una piccola lampada a diverse distanze d. Risultati: d = 0,50 m, E = 640 lx; d = 1,00 m, E = 162 lx; d = 1,50 m, E = 71 lx; d = 2,00 m, E = 40 lx. Quale legge lega E a d? Quale illuminamento prevedi a 1,20 m?

Prova 1: proporzionalità inversa? I prodotti $E \cdot d$ valgono 320, 162, 107 e 80 lx·m: non sono costanti. Dimezzando la distanza (da 1,00 a 0,50 m) l'illuminamento non raddoppia ma quasi quadruplica.

Prova 2: inversa al quadrato? I prodotti $E \cdot d^2$ valgono 640 × 0,25 = 160; 162 × 1,00 = 162; 71 × 2,25 ≈ 160; 40 × 4,00 = 160 lx·m^2. Sono uguali entro le incertezze: $E \cdot d^2$ = 160 lx·m^2, ovvero E = 160 lx·m^2 / d^2.

Previsione. A 1,20 m: E = 160 lx·m^2 / (1,20 m)^2 = 160 lx·m^2 / 1,44 m^2 ≈ 111 lx. **Controllo:** 111 lx cade fra 162 e 71 lx, come 1,20 m fra 1,00 e 1,50 m. La spiegazione è geometrica: la stessa luce si distribuisce su sfere la cui superficie cresce come il quadrato del raggio.

DA RICORDARE

Come linearizzare

Ipotesi $y = k/x$: riporta y in funzione di $1/x$. Ipotesi $y = k\,x^2$: riporta y in funzione di x^2. Ipotesi $y = k/x^2$: riporta y in funzione di $1/x^2$. Se l'ipotesi è giusta ottieni una retta per l'origine, e la sua pendenza, con la sua unità, è la costante k. Se i punti non si allineano, l'ipotesi va cambiata.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Grafico viene dal greco γραφικός, aggettivo di γράφω, che significa insieme «scrivere» e «disegnare»: un grafico è un disegno che si legge come uno scritto.

Parabola e **iperbole** sono due nomi della geometria greca. Apollonio di Perga, matematico vissuto tra il III e il II secolo a.C., li diede a due delle sezioni di un cono, ricavandoli da un confronto tra aree: παραβολή, da παραβάλλω, «mettere accanto», indica un accostamento esatto; ὑπερβολή, da ὑπερβάλλω, «gettare oltre», un eccesso. Dalle stesse parole vengono la *parabola* dei Vangeli, un racconto «accostato» a un insegnamento, e l'*iperbole* della retorica, la figura dell'esagerazione.

Ascissa viene dal latino *abscissa* (sottinteso *linea*), participio di *abscindere*, «tagliare via»: il segmento «tagliato» sull'asse orizzontale.

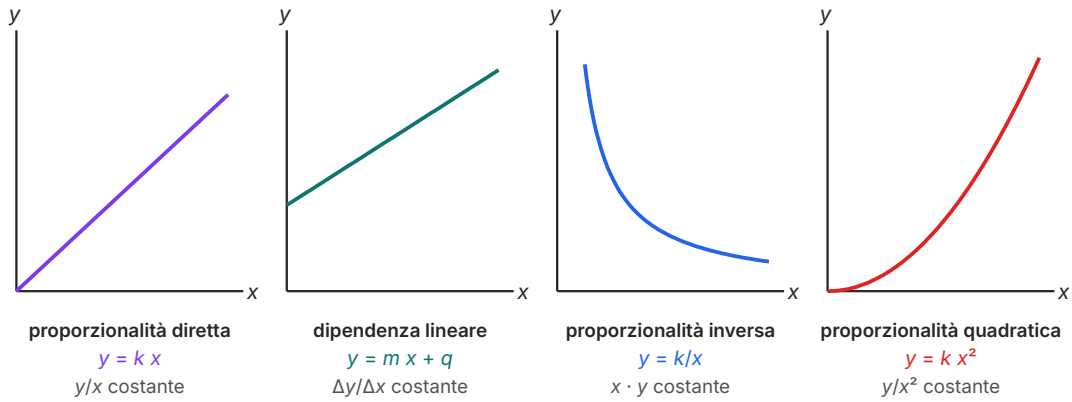


Figura 4.7 Le quattro relazioni principali del capitolo e la grandezza che resta costante in ciascuna. Solo la proporzionalità diretta e la dipendenza lineare hanno per grafico una retta; solo la prima passa per l'origine.

4.4 Dai dati alla legge, e ritorno

4.4.1 Riconoscere una legge

Ora disponi di un piccolo catalogo di relazioni, riassunto nella Figura 4.7. Davanti a una tabella di dati nuova conviene procedere con ordine.

1. **Guarda il grafico.** I punti stanno su una retta o su una curva? La retta passa per l'origine? La curva sale sempre più ripida, come una parabola, o scende avvicinandosi agli assi, come un'iperbole?
2. **Formula un'ipotesi e controllala con i numeri.** Calcola in una nuova colonna la grandezza che dovrebbe restare costante: y/x per la proporzionalità diretta, $\Delta y/\Delta x$ per la dipendenza lineare, $x\,y$ per la proporzionalità inversa, y/x^2 per quella quadratica.
3. **Conferma con un grafico linearizzato** e ricava dalla pendenza la costante, con unità e incertezza.
4. **Scrivi la legge** con i valori numerici e le unità, e indica l'intervallo in cui è stata verificata.

«Costante» significa sempre *costante entro le incertezze*. Un rapporto che oscilla senza tendenza, come m/V nella Tabella 4.1, è costante; uno che cresce o cala con regolarità, anche di poco, no. Una regola ricavata così dalle misure, senza ancora sapere *perché* le cose vanno in quel modo, si chiama **legge empirica**. Spiegarla, cioè dedurla da principi più generali, è il compito di una teoria (capitolo 1): lo spazio di frenata della Tabella 4.3 è per ora una legge empirica, e diventerà una conseguenza delle leggi del moto nel capitolo 11.

4.4.2 Interpolare ed estrapolare

Una legge serve a prevedere. Usarla per calcolare un valore *compreso* fra quelli misurati si chiama **interpolazione**, ed è di solito affidabile: i dati circondano il punto richiesto da entrambe le parti. Usarla *fuori* dall'intervallo delle misure si chiama **estrapolazione**, ed è molto più rischioso, perché nessuno garantisce che la legge valga dove non si è misurato. Oltre un certo carico la molla della Figura 4.4 resta deformata, e la retta prolungata sbaglia; la legge della frenata, ricavata su asfalto asciutto, estrapolata a una strada ghiacciata darebbe un errore pericoloso.

Estrapolare non è vietato, e una previsione estrapolata che non si avvera rivela spesso qualcosa di nuovo; ma un valore estrapolato è un'ipotesi da controllare, non un risultato.

4.4.3 Le formule come relazioni fra grandezze

Una formula è un'uguaglianza fra grandezze, e si può risolvere rispetto a una qualunque di esse con i principi di equivalenza dell'algebra. Le espressioni che si ottengono si chiamano **formule inverse**. Da $d = m/V$, moltiplicando per V, si ha $m = d\,V$, e dividendo per d, $V = m/d$. Da $y = k\,x^2$, con x positivo, si ha $x^2 = y/k$ e quindi $x = \sqrt{(y/k)}$.

Un'abitudine da prendere subito: *porta le unità di misura dentro i calcoli* e controlla che il risultato abbia l'unità giusta. È un'analisi dimensionale (capitolo 2) gratuita, che scopre molti errori di algebra: se, cercando un volume, ottieni $\mathrm{g^2/cm^3}$, hai moltiplicato dove dovevi dividere.

ESEMPIO SVOLTO

Formule inverse con le unità

Problema. a) Quale massa bisogna appendere alla molla della Figura 4.4 perché la sua lunghezza diventi 20,4 cm? b) Secondo la legge della Tabella 4.3, da quale velocità un'auto si ferma in 50 m su asfalto asciutto? Esprimila anche in km/h.

a) Dalla legge $L = L_0 + c\,m$, dove $c = 0{,}060$ cm/g è l'allungamento per grammo, sottraendo L_0 e dividendo per c:

$$m = \frac{L - L_0}{c} = \frac{20{,}4\ \text{cm} - 12{,}0\ \text{cm}}{0{,}060\ \text{cm/g}} = \frac{8{,}4\ \text{cm}}{0{,}060\ \text{cm/g}} = 140\ \text{g}$$

Le unità si semplificano come devono: cm diviso cm/g dà g. Il valore cade fra 100 e 150 g, dentro l'intervallo misurato: è un'interpolazione.

b) Dalla legge $d = k\,v^2$, con $k = 0{,}071\ \text{s}^2/\text{m}$: $v^2 = d/k$, e quindi

$$v = \sqrt{\frac{d}{k}} = \sqrt{\frac{50\ \text{m}}{0{,}071\ \text{s}^2/\text{m}}} = \sqrt{(704\ \text{m}^2/\text{s}^2)} \approx 27\ \text{m/s}$$

In km/h: 26,5 m/s × 3,6 ≈ 96 km/h. Le unità: m diviso s^2/m dà m^2/s^2, la cui radice è m/s. **Controllo:** 50 m è compreso fra 44,6 m (25 m/s) e 64,3 m (30 m/s), e infatti 27 m/s è compreso fra 25 e 30 m/s.

COLLEGAMENTI

Matematica: le funzioni che già conosci

Le relazioni di questo capitolo sono le funzioni studiate in matematica: $y = kx$, $y = mx + q$, $y = k/x$, $y = ax^2$. In fisica cambiano tre cose: le variabili hanno un'unità, che entra nella pendenza e nelle costanti; spesso ha senso solo una parte del grafico (una sezione non è mai negativa, e il ramo d'iperbole del terzo quadrante non descrive nessun recipiente); i punti sono misure, con le loro barre d'errore, e la retta non «passa per i punti» ma li descrive al meglio.

4.5 La relazione di laboratorio

Finché i risultati restano su un foglio di appunti, nessuno può controllarli, ripeterli o usarli. Per questo ogni attività sperimentale si conclude con una **relazione di laboratorio**: un testo breve e ordinato che permette a un lettore di capire che cosa si è fatto, di rifare l'esperimento e di giudicare il risultato. È la versione scolastica dell'articolo scientifico (capitolo 1). In tutti i capitoli seguenti, il riquadro «In laboratorio» rimanda a questa struttura.

4.5.1 Le parti di una relazione

1. **Titolo e scopo.** La domanda a cui si vuole rispondere o la legge da verificare, in una o due frasi.
2. **Materiali e strumenti.** Per ogni strumento di misura, portata e sensibilità (capitolo 3).
3. **Procedimento.** Che cosa si è fatto, in ordine, con le precauzioni prese. Si scrive al passato, in forma impersonale o alla prima persona plurale, senza cambiare forma; uno schema dell'apparato aiuta.
4. **Dati.** La tabella delle misure, costruita come nel primo paragrafo di questo capitolo.
5. **Grafico.** Con assi, unità, scale, barre d'errore, retta di miglior accordo ed eventualmente rette estreme.
6. **Analisi dei dati.** Le formule usate, un esempio di calcolo e il risultato nella forma (valore ± incertezza) unità, con le cifre significative corrette e l'incertezza relativa.
7. **Conclusioni e discussione critica.** La risposta alla domanda dello scopo, il confronto con un valore atteso o con la misura di un altro gruppo (compatibilità, capitolo 3), le cause d'errore e il modo di ridurle.

4.5.2 Discutere i risultati

Le conclusioni sono la parte più difficile: il risultato va giudicato, non ricopiato. Il risultato risponde allo scopo? Se volevi verificare una proporzionalità diretta devi dire se i dati la confermano entro le incertezze, e con quale criterio. È compatibile con il valore atteso? Se non lo è, quale errore sistematico potrebbe spiegarlo, e in quale verso sposterebbe il valore? Quale misura pesa di più sull'incertezza finale, e come la si potrebbe migliorare?

Una frase da evitare è «la differenza è dovuta a errori umani», che non spiega nulla. Una buona discussione è concreta: «l'indice era a 1 cm dal righello e lo leggevamo dall'alto: la parallasse può spostare la lettura di 1–2 mm; per ridurla abbiamo tenuto l'occhio alla quota dell'indice». E un risultato non compatibile con le attese non è un fallimento da nascondere: è un'informazione.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la molla e i suoi carichi

Materiali. Una molla a spirale leggera; un sostegno con asta e morsetto; un portapesi e sei masse da 20 g; un righello millimetrato fissato in verticale accanto alla molla; un indice (uno spillo o una striscia di carta) fissato all'estremo inferiore della molla.

Procedimento. Leggi la posizione x_0 dell'indice con il portapesi vuoto, l'occhio alla sua altezza; aggiungi una massa alla volta e, a molla ferma, leggi la posizione x. L'allungamento è $\Delta L = x - x_0$: ogni lettura ha incertezza 0,1 cm, e la differenza di due letture ha incertezza 0,1 + 0,1 = 0,2 cm (capitolo 3). Alla fine togli le masse una alla volta e controlla che l'indice torni alle posizioni di prima.

Tabella 4.4 Dati tipici dell'esperimento: x_0 = 10,0 cm. Le masse campione hanno incertezza trascurabile. L'ultima colonna è calcolata.

m (g)	x (cm) ± 0,1 cm	ΔL (cm) ± 0,2 cm	$\Delta L/m$ (cm/g)
20	12,1	2,1	0,105
40	14,2	4,2	0,105
60	16,4	6,4	0,107
80	18,3	8,3	0,104
100	20,5	10,5	0,105
120	22,6	12,6	0,105

Che cosa concludere. Il rapporto $\Delta L/m$ resta fra 0,104 e 0,107 cm/g senza una tendenza: costante entro le incertezze. Sul grafico ΔL–m, con barre d'errore di ± 0,2 cm, una retta per l'origine attraversa tutte le barre. La retta di massima pendenza, da (20 g; 1,9 cm) a (120 g; 12,8 cm), ha pendenza 0,109 cm/g; quella di minima pendenza, da (20 g; 2,3 cm) a (120 g; 12,4 cm), 0,101 cm/g. Quindi $\Delta L/m$ = (0,105 ± 0,004) cm/g, con un'incertezza relativa del 4%: fra 20 e 120 g l'allungamento è direttamente proporzionale alla massa appesa.

Sicurezza. Non superare il carico indicato per la molla e fissa bene il sostegno al banco: una massa che cade può ferire.

Per la relazione. Segui la struttura di questo capitolo. Includi: la tabella con letture e allungamenti; il grafico con barre d'errore, retta di miglior accordo e rette estreme; il risultato con l'incertezza relativa; la compatibilità con il valore di un altro gruppo che ha usato una molla uguale; gli errori sistematici (parallasse, tolleranza delle masse) e il controllo che la molla sia tornata alla posizione iniziale.

IN SINTESI

Le relazioni del capitolo e il loro significato

Pendenza di una retta: $\Delta y/\Delta x$ fra due punti della retta: di quanto cambia y per ogni unità di x; la sua unità è quella dell'ordinata divisa per quella dell'ascissa.

Rette estreme: pendenza = $(p_{max} + p_{min})/2$; incertezza = $(p_{max} - p_{min})/2$.

Proporzionalità diretta: $y = k\,x$: y/x costante; x doppia, y doppia; retta per l'origine di pendenza k (unità di y / unità di x).

Dipendenza lineare: $y = m\,x + q$: $\Delta y/\Delta x$ costante; q è il valore di y per $x = 0$ (ha l'unità di y).

Proporzionalità inversa: $y = k/x$: $x\,y$ costante; x doppia, y metà; iperbole; retta per l'origine riportando y in funzione di $1/x$.

Proporzionalità quadratica: $y = k\,x^2$: y/x^2 costante; x doppia, y quadrupla; parabola; retta riportando y in funzione di x^2; formula inversa $x = \sqrt{(y/k)}$.

Inversa al quadrato: $y = k/x^2$: $y\,x^2$ costante; x doppia, y un quarto.

Si chiude così la prima parte del libro: sai misurare, valutare l'incertezza, riconoscere una legge nei dati e raccontare un esperimento. Nella seconda parte userai questi strumenti per studiare i vettori e le forze.

SINTESI

- Una tabella di dati riporta, nell'intestazione di ogni colonna, simbolo, unità e (se è comune) incertezza della grandezza; la variabile indipendente va nella prima colonna; le colonne calcolate aiutano a scoprire le leggi.
- In un grafico cartesiano la variabile indipendente va sull'asse delle ascisse, quella dipendente sull'asse delle ordinate; ogni asse ha grandezza, unità e una scala comoda.
- Ogni punto si disegna con la sua barra d'errore, lunga in tutto il doppio dell'incertezza assoluta, nella direzione della grandezza incerta.
- La retta di miglior accordo passa il più vicino possibile a tutti i punti e attraversa le barre d'errore; le rette di massima e minima pendenza danno il valore e l'incertezza della pendenza.
- La pendenza $\Delta y/\Delta x$ è una grandezza fisica, con l'unità dell'ordinata divisa per quella dell'ascissa.
- Proporzionalità diretta: y/x costante, retta per l'origine. Dipendenza lineare: $y = m\,x + q$, retta con intercetta q; lineare non vuol dire proporzionale.
- Proporzionalità inversa: $x\,y$ costante, ramo d'iperbole. Proporzionalità quadratica: y/x^2 costante, ramo di parabola. Inversa al quadrato: $y\,x^2$ costante.
- Linearizzare significa scegliere le grandezze sugli assi ($1/x$, x^2, $1/x^2$) in modo che una legge ipotizzata dia una retta per l'origine.
- Una legge si riconosce da una tabella calcolando la grandezza che dovrebbe restare costante, entro le incertezze; una legge ricavata dalle misure è una legge empirica.
- L'interpolazione (dentro l'intervallo misurato) è di solito affidabile; l'estrapolazione (fuori) è un'ipotesi da controllare.
- Le formule inverse si ricavano con i principi di equivalenza, portando le unità nei calcoli come controllo.
- La relazione di laboratorio ha una struttura fissa: titolo e scopo, materiali, procedimento, dati, grafico, analisi con incertezze, conclusioni e discussione critica.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● In un grafico costruito secondo le convenzioni, sull'asse delle ascisse si riporta:
   - **A.** la grandezza con i valori più grandi
   - **B.** la variabile indipendente
   - **C.** la variabile dipendente
   - **D.** la grandezza che ha l'incertezza maggiore

2. ● Due grandezze sono direttamente proporzionali quando:
   A. crescono entrambe
   B. la loro differenza è costante
   C. il loro rapporto è costante
   D. il loro prodotto è costante

3. ● Il grafico della legge $L = 12{,}0\ \text{cm} + 0{,}060\ \text{cm/g} \cdot m$ è:
   A. una retta di pendenza 0,060 cm/g che incontra l'asse delle ordinate a 12,0 cm
   B. una retta per l'origine di pendenza 12,0 cm
   C. un ramo di parabola
   D. un ramo d'iperbole

4. ● Se y è inversamente proporzionale a x e x quadruplica, y:
   A. quadruplica
   B. non cambia
   C. diventa un sedicesimo
   D. diventa un quarto

5. ●● Se $y = k\,x^2$ e x triplica, y:
   A. triplica
   B. diventa nove volte più grande
   C. diventa sei volte più grande
   D. diventa un nono

6. ●● La pendenza della retta della Figura 4.1 si misura in:
   A. g
   B. cm^3/g
   C. g/cm^3
   D. $\text{g} \cdot \text{cm}^3$

7. ●● Per controllare se $y = k/x^2$ conviene riportare in un grafico:
   A. y in funzione di x
   B. y in funzione di x^2
   C. y in funzione di $1/x$
   D. y in funzione di $1/x^2$

8. ● Usare una legge per prevedere un valore fuori dall'intervallo delle misure si chiama:
   A. estrapolazione
   B. interpolazione
   C. linearizzazione
   D. approssimazione

Vero o falso

9. ● Se nell'intestazione di una colonna sono indicati simbolo e unità, nelle caselle della colonna si scrivono solo numeri. V / F

10. ● Una retta che non passa per l'origine rappresenta una proporzionalità diretta. V / F

11. ●● Se y diminuisce quando x aumenta, allora y è inversamente proporzionale a x. V / F

12. ● La retta di miglior accordo deve passare esattamente per il primo e per l'ultimo punto. V / F

13. ●● Secondo i dati della Tabella 4.3, raddoppiando la velocità iniziale raddoppia anche lo spazio di frenata. V / F

Applicare

14. ● Alle misure $x = 3, 6, 9, 12$ corrispondono, nell'ordine, $y = 4{,}5; 9{,}0; 13{,}5; 18{,}0$. Che relazione lega y a x? Scrivi la legge.

15. ● Completa: se $y = 48/x$, per $x = 4$ si ha $y =$ _____ ; per $x = 12$ si ha $y =$ _____ ; il prodotto $x \cdot y$ vale sempre _____ .

16. ●● Usa il grafico della Figura 4.4. a) Quanto è lunga la molla con un carico di 100 g? b) Quale carico la porta a 21,0 cm? c) Di quanto si allunga, rispetto alla lunghezza a riposo, con 250 g?

17. ●● Usa la legge trovata nel secondo esempio svolto del paragrafo sulle relazioni fra grandezze, $E = 160\ \text{lx}\cdot\text{m}^2 / d^2$. a) Quale illuminamento produce la lampada a 0,80 m? b) A quale distanza l'illuminamento scende a 10 lx? È un'interpolazione o un'estrapolazione?

18. ● Ricava le formule inverse indicate: a) V da $d = m/V$; b) m da $L = L_0 + c\,m$; c) x (positivo) da $y = k\,x^2$.

19. ●● In un grafico, una retta passa per i punti (2,0 s; 3,0 m) e (8,0 s; 15,0 m). a) Calcola la pendenza, con l'unità. b) Calcola l'intercetta. c) Scrivi la legge. Le due grandezze sono direttamente proporzionali?

20. ●● Nel grafico massa–volume di un metallo, le rette di massima e minima pendenza hanno pendenze $2{,}78\ \text{g/cm}^3$ e $2{,}62\ \text{g/cm}^3$. a) Scrivi la densità con la sua incertezza e calcola l'incertezza relativa. b) Con la Tabella A.4 dell'Appendice, di quale metallo potrebbe trattarsi?

Problemi

21. ●● Una molla viene caricata con masse crescenti e se ne misura la lunghezza totale: $m = 0, 40, 80, 120, 160$ g; $L = 8{,}0; 10{,}1; 11{,}9; 14{,}0; 16{,}0$ cm ($\pm$ 0,1 cm). a) Che relazione lega L a m? b) Trova pendenza e intercetta e scrivi la legge. c) Prevedi la lunghezza con 100 g. d) Quale carico porta la molla a 15,0 cm?

22. ●●● Piastrelle quadrate di ceramica, tutte spesse 1,0 cm, hanno lato l e massa m: l = 10, 15, 20, 30 cm; m = 0,23; 0,52; 0,92; 2,07 kg. a) Mostra con un calcolo che m non è direttamente proporzionale a l. b) Verifica che m è proporzionale a l^2 e trova la costante con la sua unità. c) Spiega perché ci si poteva aspettare questa legge. d) Quale lato ha una piastrella dello stesso tipo di massa 1,40 kg? e) Ricava dalla costante la densità della ceramica, in g/cm^3 e in kg/m^3 (capitolo 2).

23. ●●● Due gruppi misurano l'allungamento per grammo di due molle dello stesso modello. Il gruppo A trova (0,105 ± 0,004) cm/g (Tabella 4.4); il gruppo B ottiene rette di massima e minima pendenza di 0,118 cm/g e 0,110 cm/g. a) Scrivi il risultato del gruppo B. b) Confronta le incertezze relative. c) Le due misure sono compatibili? d) Proponi due possibili spiegazioni e un modo per decidere fra esse.

24. ●● Una ruota di bicicletta deve percorrere 1,0 km; il numero di giri n dipende dalla circonferenza C della ruota: C = 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 m; n = 1000; 667; 500; 400. a) Che relazione lega n a C? b) Quanti giri fa una ruota di circonferenza 2,2 m? c) Quale grafico daresti per mostrare la legge con una retta, e quale sarebbe la pendenza?

25. ●●● Usa la legge della frenata ricavata dalla Tabella 4.3, $d = 0{,}071\ \text{s}^2/\text{m} \cdot v^2$. a) Calcola lo spazio di frenata a 50 km/h. b) Da quale velocità, in km/h, l'auto si ferma in 25 m? c) Un automobilista usa la stessa legge per calcolare lo spazio di frenata a 130 km/h su una strada bagnata. Che valore ottiene? Commenta il risultato.

Ragionare e argomentare

26. ●● Trova l'errore. Con i dati x = 1, 2, 3, 4 e y = 9, 7, 5, 3, uno studente scrive: «y diminuisce quando x aumenta, quindi y è inversamente proporzionale a x». Spiega perché sbaglia e trova la legge corretta.

27. ●●● Progetta un esperimento per stabilire come l'altezza del primo rimbalzo di una pallina dipende dall'altezza da cui la si lascia cadere. Indica variabile indipendente, dipendente e controllate, gli strumenti, la tabella e il grafico che costruiresti, e il criterio con cui sceglieresti la legge.

28. ●●● Commenta una fonte. Nel libro IV della *Fisica* (cap. 8, 215b) Aristotele prosegue il ragionamento che hai letto nel capitolo 1, su un corpo A che si muove attraverso l'acqua (B) o attraverso l'aria (D): ὅσῳ δὴ λεπτότερον ἀὴρ ὕδατος καὶ ἀσωματώτερον, τοσούτῳ θᾶττον τὸ A διὰ τοῦ Δ οἰσθήσεται ἢ διὰ τοῦ B, «quanto più l'aria è sottile e incorporea rispetto all'acqua, tanto più velocemente A si muoverà attraverso D che attraverso B» (traduzione della redazione). Poco oltre aggiunge che, se l'aria è sottile il doppio, il tempo nell'acqua sarà doppio di quello nell'aria. a) Quale relazione fra grandezze afferma Aristotele, nel linguaggio di questo capitolo? b) La densità dell'aria è circa 1/800 di quella dell'acqua: che cosa prevede la regola per un sasso che cade per un metro nei due mezzi? È ciò che si osserva? c) Come la metteresti alla prova in laboratorio?

PER APPROFONDIRE

- [TAY] J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: i capitoli sui grafici e sul metodo dei minimi quadrati, che sostituisce la retta tracciata a occhio con una retta calcolata.
- [GAL] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata terza: il racconto dell'esperimento del piano inclinato, con i tempi misurati pesando l'acqua.
- [ARI] Aristotele, *Fisica*, libro IV, capitolo 8: un ragionamento sul moto in un mezzo costruito come una proporzione fra grandezze.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: i primi capitoli, su che cosa sia una legge fisica e come la si verifica.

Glossario del capitolo

Asse delle ascisse
L'asse orizzontale di un grafico; per convenzione vi si riporta la variabile indipendente.

Asse delle ordinate
L'asse verticale di un grafico; per convenzione vi si riporta la variabile dipendente.

Barra d'errore
Segmento centrato su un punto del grafico, lungo il doppio dell'incertezza assoluta, che rappresenta l'intervallo della misura.

Costante di proporzionalità
Il valore costante k di una legge di proporzionalità, con la sua unità di misura.

Dipendenza lineare
Relazione $y = m\,x + q$: il grafico è una retta di pendenza m che incontra l'asse delle ordinate in q.

Estrapolazione
Uso di una legge per prevedere un valore fuori dall'intervallo delle misure: un'ipotesi da verificare.

Grafico cartesiano
Rappresentazione delle coppie di valori di due grandezze come punti di un piano, individuati su due assi perpendicolari dotati di grandezza, unità e scala.

Intercetta
In una dipendenza lineare, il valore q di y quando $x = 0$.

Interpolazione
Uso di una legge per prevedere un valore compreso nell'intervallo delle misure.

Legge empirica
Legge ricavata dalle misure, senza dedurla da principi più generali.

Linearizzazione
Scelta delle grandezze da riportare sugli assi (per esempio $1/x$ o x^2) in modo che una legge ipotizzata dia una retta per l'origine.

Pendenza
Rapporto $\Delta y/\Delta x$ fra due punti di una retta; ha come unità quella dell'ordinata divisa per quella dell'ascissa.

Proporzionalità diretta
Relazione $y = k\,x$: il rapporto fra le due grandezze è costante; il grafico è una retta per l'origine.

Proporzionalità inversa
Relazione $y = k/x$: il prodotto delle due grandezze è costante; il grafico è un ramo d'iperbole.

Proporzionalità inversa al quadrato
Relazione $y = k/x^2$: il prodotto di y per il quadrato di x è costante.

Proporzionalità quadratica
Relazione $y = k\,x^2$: una grandezza è direttamente proporzionale al quadrato dell'altra; il grafico è un ramo di parabola.

Relazione di laboratorio
Testo che documenta un esperimento: scopo, materiali, procedimento, dati, grafico, analisi con incertezze, conclusioni e discussione critica.

Retta di miglior accordo
La retta che descrive al meglio un insieme di punti: passa il più vicino possibile a tutti e attraversa le barre d'errore.

Rette di massima e minima pendenza
La più ripida e la meno ripida fra le rette che attraversano tutte le barre d'errore; la loro media e la loro semidifferenza danno valore e incertezza della pendenza.

Tabella di dati
Disposizione delle misure in righe e colonne; ogni colonna riporta nell'intestazione simbolo, unità e, se comune a tutte le misure, l'incertezza della grandezza.

Soluzioni

1. B. Per convenzione la variabile indipendente, scelta da chi sperimenta, va sull'asse orizzontale.

2. C. Proporzionalità diretta: $y/x = k$. A descrive solo due grandezze crescenti; D è la proporzionalità inversa.

3. A. È una dipendenza lineare: pendenza 0,060 cm/g, intercetta 12,0 cm.

4. D. Il prodotto $x\,y$ resta costante: se x è moltiplicata per 4, y è divisa per 4.

5. B. $k(3x)^2 = 9k\,x^2$.

6. C. Pendenza = $\Delta m/\Delta V$: unità dell'ordinata divisa per quella dell'ascissa, g/cm^3.

7. D. Se $y = k \cdot (1/x^2)$, il grafico di y in funzione di $1/x^2$ è una retta per l'origine di pendenza k.

8. A. Estrapolare è prevedere fuori dall'intervallo misurato; interpolare, dentro.

9. V. È proprio lo scopo dell'intestazione: l'unità vale per tutta la colonna.

10. F. È una dipendenza lineare con $q \neq 0$: il rapporto y/x non è costante.

11. F. Serve che il prodotto $x\,y$ sia costante; una dipendenza lineare con pendenza negativa, per esempio, è decrescente ma non è una proporzionalità inversa.

12. F. Il primo e l'ultimo punto sono misure come le altre: la retta deve passare il più vicino possibile a tutti i punti, attraversando le barre d'errore.

13. F. Lo spazio di frenata è proporzionale a v^2: raddoppiando la velocità quadruplica (da 10 a 20 m/s passa da 7,1 a 28,6 m).

14. Il rapporto y/x vale sempre 1,5: proporzionalità diretta, $y = 1{,}5\,x$.

15. 12; 4; 48. Triplicando x (da 4 a 12), y diventa un terzo (da 12 a 4).

16. a) Sulla retta, a 100 g: L = 12,0 cm + 0,060 cm/g × 100 g = 18,0 cm. b) m = (21,0 cm − 12,0 cm)/(0,060 cm/g) = 9,0 cm / 0,060 cm/g = 150 g. c) ΔL = 0,060 cm/g × 250 g = 15,0 cm (infatti 27,0 cm − 12,0 cm).

17. a) E = 160 lx·m^2 / (0,80 m)^2 = 160 lx·m^2 / 0,64 m^2 = 250 lx. b) $d = \sqrt{(160\text{ lx}\cdot\text{m}^2 / 10\text{ lx})} = \sqrt{(16\text{ m}^2)}$ = 4,0 m. Le misure arrivano a 2,00 m: è un'estrapolazione, da controllare (per esempio, le pareti della stanza possono riflettere luce e falsare il risultato).

18. a) $V = m/d$. b) $m = (L - L_0)/c$. c) $x = \sqrt{(y/k)}$.

19. a) Pendenza = (15,0 m − 3,0 m)/(8,0 s − 2,0 s) = 12,0 m / 6,0 s = 2,0 m/s. b) q = 3,0 m − 2,0 m/s × 2,0 s = −1,0 m. c) Detta t la grandezza in ascissa (in secondi) e y quella in ordinata (in metri): y = 2,0 m/s · t − 1,0 m. Non sono direttamente proporzionali: l'intercetta non è zero.

20. a) d = (2,78 + 2,62)/2 g/cm^3 = 2,70 g/cm^3; e_a = (2,78 − 2,62)/2 g/cm^3 = 0,08 g/cm^3; d = (2,70 ± 0,08) g/cm^3; e_r = 0,08/2,70 ≈ 0,03 = 3%. b) L'alluminio, 2700 kg/m^3 = 2,70 g/cm^3, cade nell'intervallo 2,62–2,78 g/cm^3: la misura è compatibile; nessun altro metallo della tabella lo è.

21. a) Ogni 40 g la lunghezza cresce di circa 2,0 cm, ma per m = 0 la lunghezza è 8,0 cm: dipendenza lineare (non proporzionalità diretta: L/m non è costante). b) Pendenza = (16,0 cm − 8,0 cm)/160 g = 0,050 cm/g; intercetta 8,0 cm (lunghezza a riposo); L = 8,0 cm + 0,050 cm/g · m. c) L = 8,0 cm + 0,050 cm/g × 100 g = 13,0 cm (interpolazione). d) m = (15,0 cm − 8,0 cm)/(0,050 cm/g) = 140 g.

22. a) m/l vale 0,023; 0,035; 0,046; 0,069 kg/cm: cresce, quindi non è costante. b) m/l^2 vale 0,23/100 = 0,0023; 0,52/225 ≈ 0,0023; 0,92/400 = 0,0023; 2,07/900 = 0,0023 kg/cm^2: costante, $m = 0{,}0023\text{ kg/cm}^2 \cdot l^2$. c) Lo spessore è fisso, quindi il volume è proporzionale all'area l^2, e la massa al volume ($m = d\,V$). d) $l = \sqrt{(1{,}40\text{ kg} / 0{,}0023\text{ kg/cm}^2)} = \sqrt{(609\text{ cm}^2)} \approx 25$ cm. e) m

vale 0,23/100 = 0,0023; 0,52/225 ≈ 0,0023; 0,92/400 = 0,0023; 2,07/900 = 0,0023 kg/cm^2: costante, $m = 0{,}0023\ \text{kg/cm}^2 \cdot l^2$. c) Lo spessore è fisso, quindi il volume è proporzionale all'area l^2, e la massa al volume ($m = d\,V$). d) $l = \sqrt{(1{,}40\ \text{kg} / 0{,}0023\ \text{kg/cm}^2)} = \sqrt{(609\ \text{cm}^2)} \approx 25$ cm. e) $m = d \cdot l^2 \cdot 1{,}0$ cm, quindi $d = 0{,}0023\ \text{kg/cm}^2 / 1{,}0\ \text{cm} = 0{,}0023\ \text{kg/cm}^3 = 2{,}3\ \text{g/cm}^3 = 2{,}3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

23. a) (0,118 + 0,110)/2 = 0,114 cm/g; (0,118 − 0,110)/2 = 0,004 cm/g: (0,114 ± 0,004) cm/g. b) A: 0,004/0,105 ≈ 4%; B: 0,004/0,114 ≈ 4%: precisione simile. c) Intervalli: A da 0,101 a 0,109 cm/g, B da 0,110 a 0,118 cm/g. Non si sovrappongono: le misure non sono compatibili. d) Le molle, pur dello stesso modello, possono essere davvero diverse (tolleranza di fabbricazione, o una delle due è stata deformata oltre il limite in un uso precedente); oppure c'è un errore sistematico in uno dei due esperimenti (parallasse nella lettura dell'indice, masse campione non tarate). Per decidere: i due gruppi si scambiano le molle e ripetono le misure; se i risultati seguono la molla, le molle sono diverse; se seguono il gruppo, l'errore è nel procedimento.

24. a) $n \cdot C = 1000$ m per tutte le coppie: proporzionalità inversa, $n = 1000\ \text{m} / C$. b) $n = 1000\ \text{m} / 2{,}2\ \text{m} \approx 455$ giri ($\approx 4{,}5 \times 10^2$ con due cifre significative). c) n in funzione di $1/C$: una retta per l'origine di pendenza 1000 m (la distanza da percorrere).

25. a) 50 km/h = 50/3,6 m/s ≈ 13,9 m/s; $d = 0{,}071\ \text{s}^2/\text{m} \times (13{,}9\ \text{m/s})^2 \approx 14$ m. b) $v = \sqrt{(25\ \text{m} / 0{,}071\ \text{s}^2/\text{m})} \approx \sqrt{(352\ \text{m}^2/\text{s}^2)} \approx 18{,}8$ m/s ≈ 68 km/h. c) 130 km/h ≈ 36,1 m/s; $d = 0{,}071\ \text{s}^2/\text{m} \times (36{,}1\ \text{m/s})^2 \approx 93$ m. Il valore non è affidabile per due ragioni: è un'estrapolazione oltre 30 m/s, il valore massimo misurato, e la legge è stata ricavata su asfalto asciutto: sul bagnato la costante è diversa e lo spazio di frenata reale è maggiore. Il calcolo sottostima il pericolo.

26. I prodotti $x\,y$ valgono 9, 14, 15, 12: non sono costanti, quindi non c'è proporzionalità inversa. Costanti sono le differenze: ogni volta che x cresce di 1, y cala di 2. È una dipendenza lineare con pendenza −2 e intercetta 11: $y = 11 - 2x$.

27. Traccia di risposta. Variabile indipendente: altezza di partenza h_0 (per esempio da 0,40 a 1,60 m, a passi di 0,20 m); dipendente: altezza del rimbalzo h_1; controllate: stessa pallina, stesso pavimento, pallina lasciata cadere senza spinta. Strumenti: metro a nastro fissato alla parete; conviene filmare il rimbalzo con lo smartphone e leggere h_1 sui fotogrammi, per ridurre l'errore di lettura. Ripetere ogni lancio 5 volte, con media e semidispersione (capitolo 3). Tabella: h_0 (m), h_1 (m) ± incertezza, h_1/h_0. Grafico h_1–h_0 con barre d'errore. Criterio: se h_1/h_0 è costante entro le incertezze e una retta per l'origine attraversa tutte le barre, c'è proporzionalità diretta; altrimenti si prova un'altra relazione. La legge vale solo nell'intervallo di altezze provato.

28. a) Per lo stesso corpo e lo stesso tratto, il tempo di attraversamento è direttamente proporzionale alla «densità» (spessore) del mezzo, e quindi la velocità le è inversamente proporzionale: $t = k\,d$, ovvero $v = k'/d$. b) Il sasso dovrebbe cadere nell'aria circa 800 volte più in fretta che nell'acqua. In realtà, per un sasso che cade per un metro, nell'acqua il tempo è al massimo qualche volta più lungo che nell'aria, ben lontano da un fattore 800: la proporzionalità non vale. Aristotele coglie però un fatto vero, che un mezzo più denso rallenta di più il moto, e il suo ragionamento è un tentativo di esprimere quel fatto come una proporzione, il modo in cui i Greci scrivevano le leggi. c) Si lascia cadere lo stesso corpo per lo stesso tratto in liquidi di densità diversa (acqua, acqua salata, olio, alcol, glicerina) e nell'aria; si misurano i tempi con incertezza, si costruisce il grafico t–d e si controlla se è una retta per l'origine, cioè se t/d è costante entro le incertezze.