CAPITOLO

3

La misura e la sua incertezza

Una misura senza la sua incertezza dice quanto vale una grandezza, ma non dice quanto possiamo fidarci di quel numero.

OBIETTIVI

1. Descrivere uno strumento con portata, sensibilità e prontezza e leggere righello, cronometro, bilancia e calibro con il nonio.
2. Distinguere errori casuali e sistematici, precisione e accuratezza.
3. Usare correttamente le cifre significative nelle misure e nei calcoli.
4. Ricavare valore medio e incertezza da una serie di misure e scrivere il risultato secondo la convenzione.
5. Calcolare incertezze relative e percentuali e propagarle in somme, differenze, prodotti, quozienti e potenze.
6. Stabilire se due misure sono compatibili.

INDICE DEL CAPITOLO

3.1 Gli strumenti di misura 2
3.2 Ogni misura è incerta 5
3.3 Le cifre significative 7
3.4 Il risultato di una misura 8
3.5 Misure che si combinano e misure che si confrontano 12

Fisica 3 · Parte I · Il linguaggio della fisica · versione 1.0
Capitolo 3: La misura e la sua incertezza · pagine 65–84 del volume completo · estratto per lo studio

Pesa una mela sulla bilancia della cucina: 182 g. Pesala su quella del fruttivendolo: 185 g. Quale dei due numeri è quello «giusto»? Per la fisica nessuno dei due è il valore esatto, e nessuno strumento può darcelo: ogni misura ha un margine di incertezza, e una misura scritta senza dichiararlo è un'informazione a metà.

Nel capitolo 2 abbiamo visto che misurare significa confrontare una grandezza con un'unità; qui impariamo a dire *quanto* ci possiamo fidare del confronto. Conosceremo gli strumenti, le cause degli errori, le regole per scrivere un risultato e per calcolare l'incertezza di una grandezza ottenuta da altre misure. Alla fine sapremo rispondere a una domanda che in laboratorio torna di continuo: due misure diverse della stessa grandezza sono in disaccordo, o diverse solo in apparenza?

3.1 Gli strumenti di misura

3.1.1 Strumenti analogici e digitali

Uno strumento di misura trasforma la grandezza che ci interessa in qualcosa che possiamo leggere. In uno **strumento analogico** la lettura è la posizione di un indice, o di un livello, davanti a una scala graduata: le tacche di un righello, la lancetta di una vecchia bilancia pesapersone, la colonnina di un termometro a liquido. In uno **strumento digitale** la grandezza è convertita in un numero che compare su un display: il cronometro del telefono, la bilancia elettronica, il termometro clinico digitale.

Le cifre di un display sembrano esatte, ma anche lo strumento digitale ha un'ultima cifra oltre la quale non va, e può essere tarato male: i due tipi differiscono nel modo di leggere, non nell'esistenza dell'incertezza.

3.1.2 Portata, sensibilità, prontezza

Tre caratteristiche descrivono le prestazioni di uno strumento e si leggono di solito sulla sua scala o nel suo libretto di istruzioni.

- La **portata** è il valore massimo che lo strumento può misurare: 30 cm per un righello scolastico, 5 kg per una bilancia da cucina.
- La **sensibilità** è la più piccola variazione della grandezza che lo strumento riesce a rilevare: per uno strumento analogico è il valore di una divisione della scala (1 mm per il righello millimetrato), per uno digitale è il valore di un'unità dell'ultima cifra (0,01 s per un cronometro che mostra i centesimi, 1 g per una bilancia da cucina).
- La **prontezza** indica la rapidità con cui lo strumento raggiunge l'indicazione definitiva. Un vecchio termometro clinico a liquido richiede qualche minuto, uno digitale pochi secondi.

3.1.3 Leggere un righello, un cronometro, una bilancia

Con il righello si allinea uno degli estremi dell'oggetto con lo zero e si guarda dove cade l'altro. Quasi mai l'estremo coincide con una tacca: nella Figura 3.1 cade tra 73 e 74 mm, più vicino al primo. La lettura è 73 mm, e poiché il righello non distingue nulla di più piccolo di un millimetro, l'incertezza della singola lettura è 1 mm. Lo stesso disegno mostra un errore tipico: se l'occhio non guarda perpendicolarmente alla scala, la linea di vista proietta l'indice su una tacca sbagliata. È l'**errore di parallasse**; si evita mettendo l'occhio sulla verticale dell'indice, o, nel caso del righello, appoggiandolo bene all'oggetto in modo che le tacche lo tocchino.

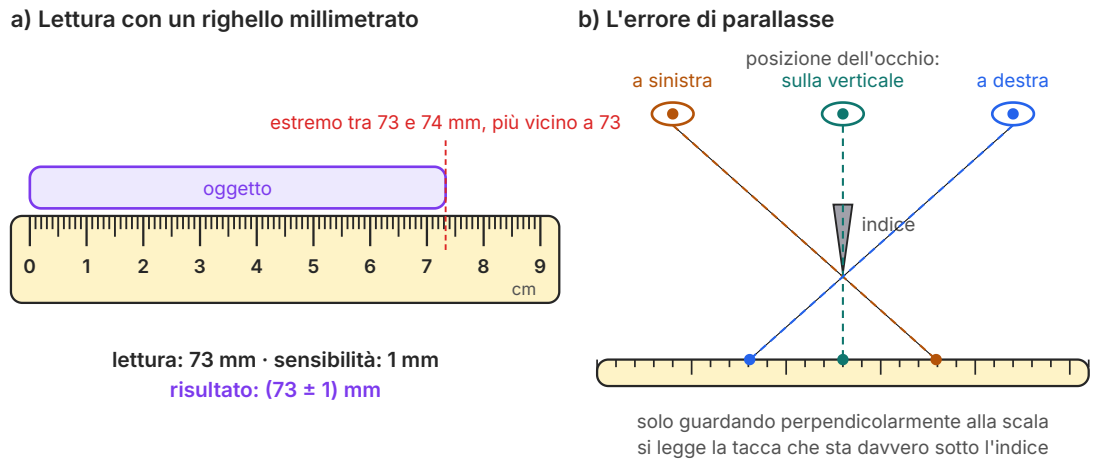


Figura 3.1 a) La misura di una lunghezza con un righello millimetrato: l'estremo dell'oggetto cade tra due tacche, la lettura è 73 mm con incertezza pari alla sensibilità, 1 mm. b) L'errore di parallasse: un indice sollevato sopra la scala, guardato da tre posizioni, sembra indicare tre tacche diverse; è corretta solo la lettura fatta con l'occhio sulla verticale dell'indice.

Con il cronometro il limite non è lo strumento, ma chi lo usa: il display mostra i centesimi, ma la mano reagisce con un ritardo di uno o due decimi di secondo, diverso ogni volta.

La bilancia elettronica, infine, va *azzerata* prima dell'uso: a piatto vuoto deve segnare 0 (con il tasto di tara si azzera anche con un recipiente sul piatto).

3.1.4 Il calibro con il nonio

Quando il millimetro non basta, per esempio per lo spessore di una moneta, si usa il **calibro**: un'asta millimetrata con un becco fisso e un cursore con un becco mobile, tra i quali si stringe l'oggetto. Sul cursore è incisa una piccola scala ausiliaria, il **nonio**, che permette di leggere le frazioni di millimetro.

Nel **calibro ventesimale**, il più diffuso a scuola, il nonio ha 20 divisioni che occupano in tutto 39 mm: ogni sua divisione è lunga 39/20 = 1,95 mm, cioè 0,05 mm meno di 2 mm. A curso-

re chiuso la tacca 1 del nonio è indietro di 0,05 mm rispetto alla tacca dei 2 mm, la tacca 2 di 0,10 mm rispetto a quella dei 4 mm, e così via: spostando il cursore di 0,05 mm si allinea la tacca 1, di 0,10 mm la tacca 2. Il numero della tacca allineata conta i ventesimi di millimetro. La sensibilità del calibro ventesimale è quindi 0,05 mm, venti volte migliore di quella del righello.

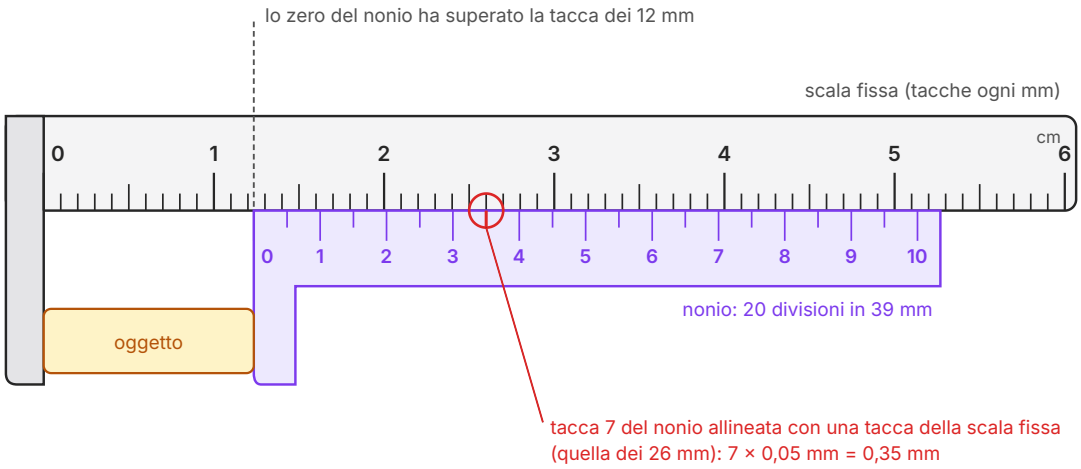


Figura 3.2 Lettura di un calibro ventesimale. Lo zero del nonio ha superato la tacca dei 12 mm della scala fissa; la tacca 7 del nonio è allineata con una tacca della scala fissa (quella dei 26 mm), quindi alla parte intera si aggiungono 7 × 0,05 mm = 0,35 mm. Sul nonio i numeri 0, 1, … 10 sono scritti ogni due tacche e indicano i decimi di millimetro.

ESEMPIO SVOLTO

Leggere il calibro

Situazione. Il calibro della Figura 3.2 stringe un piccolo cilindro. Qual è la misura?

Parte intera. Si guarda dove cade lo zero del nonio sulla scala fissa: ha superato la tacca dei 12 mm, ma non quella dei 13 mm. La parte intera è 12 mm.

Parte decimale. Si cerca, lungo il nonio, la tacca che è allineata con una tacca qualsiasi della scala fissa: è la tacca 7. Ogni tacca del nonio vale 0,05 mm, quindi la parte decimale è 7 × 0,05 mm = 0,35 mm. (Controllo: la tacca 7 del nonio dista 7 × 1,95 mm = 13,65 mm dal suo zero, e 12,35 mm + 13,65 mm = 26,00 mm: cade proprio sulla tacca dei 26 mm.)

Risultato. 12 mm + 0,35 mm = 12,35 mm, con incertezza pari alla sensibilità: $D = (12{,}35 \pm 0{,}05)$ mm.

Attenzione. A becchi chiusi lo zero del nonio deve coincidere con lo zero della scala; altrimenti c'è un errore di zero da sottrarre a ogni lettura.

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Errore viene dal latino *error*, legato al verbo *errare*, «vagare, andare qua e là», e solo per estensione «sbagliare strada». Le misure ripetute, infatti, «vagano» intorno al valore vero.

Precisione viene dal latino *praecisio*, da *praecidere*, «tagliare via davanti» (*prae* + *caedere*): preciso è ciò che è stato rifilato, senza parti superflue. **Accuratezza** viene da *accuratus*, participio di *accurare*, «curare con attenzione» (*ad* + *cura*): accurato è ciò che è stato fatto con cura.

Il greco aveva una parola sola per l'esattezza scrupolosa: ἀκρίβεια, da cui l'italiano colto *acribia*, la cura minuziosa del filologo. Aristotele usa l'aggettivo corrispondente, ἀκριβής, in un passo che leggerai più avanti in questo capitolo.

Nonio è un nome proprio: *Nonius* è la forma latina del nome del matematico portoghese Pedro Nunes, che nel Cinquecento ideò un dispositivo per leggere frazioni di grado sugli strumenti astronomici; la scala scorrevole di oggi la descrisse il francese Pierre Vernier nel 1631, e in inglese e francese porta il suo nome, *vernier*.

3.2 Ogni misura è incerta

3.2.1 Errori casuali ed errori sistematici

Prova a misurare cinque volte, con il cronometro, il tempo che una pallina impiega a rotolare giù da un piano inclinato. Otterrai cinque numeri diversi, per esempio 1,62 s, 1,58 s, 1,71 s, 1,65 s, 1,60 s. Non hai sbagliato nulla: in fisica *errore* non è uno sbaglio, ma lo scarto inevitabile tra il valore misurato e il valore vero, che nessuno conosce. Gli errori sono di due tipi, con cause e rimedi diversi.

Gli **errori casuali** fanno variare il risultato in modo imprevedibile, a volte in più e a volte in meno: il tempo di reazione della mano, la posizione dell'occhio che cambia un poco, una corrente d'aria. Poiché agiscono in entrambi i versi, i loro effetti si compensano in parte nella media di molte misure: ripetere le misure è il rimedio.

Gli **errori sistematici** spostano invece tutte le misure *nello stesso verso*: una bilancia che a piatto vuoto segna già 2 g (errore di zero), un righello di plastica deformato dal calore, un cronometrista che ferma sempre il tempo in ritardo, un occhio che guarda sempre la scala dallo stesso lato. Ripetere la misura non serve a nulla: si ottiene cento volte lo stesso valore sbagliato. Si scoprono controllando lo strumento con un campione noto o misurando con un metodo diverso. Il controllo periodico di uno strumento rispetto a un campione si chiama **taratura**.

3.2.2 Precisione e accuratezza

I due tipi di errore corrispondono a due qualità di una serie di misure, che il linguaggio comune confonde ma la fisica distingue con cura. Una serie è **precisa** quando le misure sono vicine tra loro: gli errori casuali sono piccoli. È **accurata** quando il suo valore medio è vicino al valore vero: gli errori sistematici sono piccoli. L'immagine classica è quella del bersaglio (Figura 3.3): un buon tiratore con un mirino storto mette i colpi vicini ma spostati (precisi, non accurati); un tiratore incerto con un mirino perfetto li sparpaglia intorno al centro (accurati, non precisi).

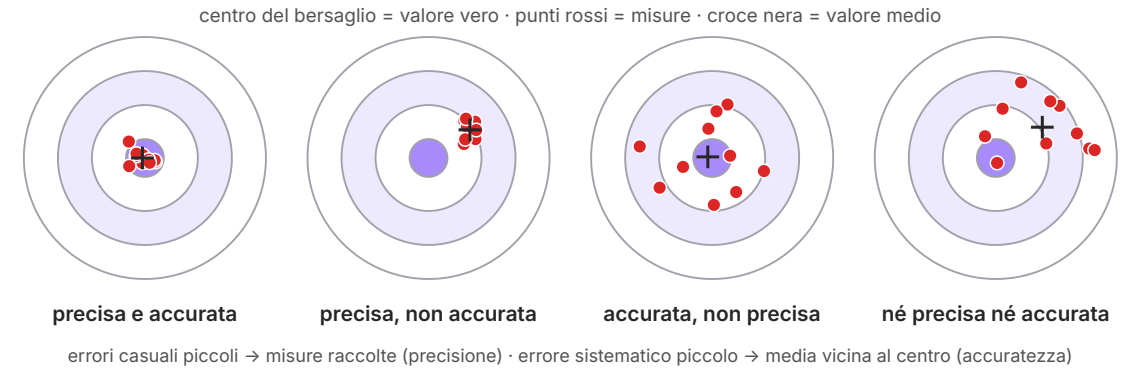


Figura 3.3 Precisione e accuratezza sul bersaglio. Il centro rappresenta il valore vero, i punti dieci misure, la croce il loro valore medio. Gli errori casuali allargano la nuvola dei punti; l'errore sistematico sposta la nuvola intera, e con essa la media.

In laboratorio il bersaglio non si vede, perché il valore vero è ignoto: la precisione si riconosce dalla dispersione delle misure, l'accuratezza no. Per questo gli errori sistematici sono i più insidiosi.

ERRORE FREQUENTE

«Il display ha tre decimali, quindi la misura è esatta.» Le cifre di un display dicono soltanto la sensibilità dello strumento; non dicono nulla sulla sua taratura né sul modo in cui è stato usato. Un cronometro al centesimo azionato a mano misura un intervallo con un'incertezza di qualche decimo di secondo.

«Ho fatto un errore, rifaccio la misura.» Se hai letto 37 invece di 73, quello è uno sbaglio, e la misura va semplicemente scartata. Gli errori casuali e sistematici sono un'altra cosa: ci sono anche quando tutto è fatto bene, e vanno stimati e dichiarati, non eliminati.

COLLEGAMENTI

Una misura che decide una multa

Anche gli apparecchi che misurano la velocità dei veicoli hanno un'incertezza, e la legge ne tiene conto. Secondo la norma in vigore (art. 345 del regolamento di esecuzione del Codice della strada) alla velocità misurata si sottrae il 5%, con un minimo di 5 km/h, prima di confrontarla con il limite: un veicolo misurato a 148 km/h viene considerato a $148 \times 0{,}95 = 140{,}6$ km/h. È un'incertezza dichiarata a favore di chi viene misurato. E poiché ha senso solo se lo strumento è in ordine, la Corte costituzionale, con la sentenza n. 113 del 2015, ha stabilito che questi apparecchi devono essere sottoposti a verifiche periodiche di taratura.

3.3 Le cifre significative

3.3.1 Contare le cifre significative

Scrivere «73 mm» e scrivere «73,0 mm» non è la stessa cosa. Nel primo caso dichiaro di conoscere la lunghezza al millimetro; nel secondo al decimo di millimetro, cioè con uno strumento dieci volte più sensibile. In fisica il modo di scrivere un numero comunica già la sua precisione. Le **cifre significative** di una misura sono le cifre certe più la prima cifra incerta: tutte quelle che lo strumento permette di leggere, e nessuna di più.

Le cifre diverse da zero sono sempre significative. Per gli zeri serve qualche regola, raccolta nella Tabella 3.1: il criterio è chiedersi se lo zero è stato *misurato* o serve soltanto a collocare la virgola.

Tabella 3.1 Le regole per contare le cifre significative.

Regola	Esempio	Cifre significative
cifre diverse da zero: sempre significative	4,58 s	3
zeri tra cifre diverse da zero: significativi	2,05 m	3
zeri iniziali: non significativi (indicano solo la posizione della virgola)	0,0072 kg	2
zeri finali dopo la virgola: significativi (sono stati letti)	3,40 cm	3
zeri finali di un numero intero: ambigui	1200 m	2, 3 o 4
in notazione scientifica: tutte le cifre della mantissa	$1{,}20 \times 10^3$ m	3

L'ultima riga mostra come si scioglie l'ambiguità degli interi: se 1200 m è noto al decametro si scrive $1{,}20 \times 10^3$ m, se è noto al centinaio di metri $1{,}2 \times 10^3$ m. Cambiare unità non cambia il numero di cifre significative: 0,0072 kg = 7,2 g = $7{,}2 \times 10^{-3}$ kg ha sempre due cifre significative.

3.3.2 Arrotondare

Per arrotondare un numero a un certo numero di cifre si guarda la prima cifra da eliminare: se è minore di 5 si lascia invariata l'ultima cifra tenuta, se è 5 o maggiore la si aumenta di uno. Così 9,8065 arrotondato a tre cifre significative diventa 9,81; 0,024449 diventa 0,0244; 2,995 diventa 3,00 (e lo zero finale va scritto, perché è significativo). Si arrotonda in un solo passaggio, guardando soltanto la prima cifra eliminata: arrotondare a tappe può spostare il risultato.

3.3.3 Le cifre significative nei calcoli

Un risultato calcolato non può essere più preciso delle misure da cui nasce. Quando le incertezze dei dati non sono dichiarate, si seguono due regole pratiche.

- **Prodotti e quozienti:** il risultato ha tante cifre significative quante il dato che ne ha di meno. L'area di un foglio di 29,7 cm × 21,0 cm è 623,7 cm^2 sulla calcolatrice, e si scrive 624 cm^2; la densità di un sasso di 7,25 g e 2,5 cm^3 è 2,9 g/cm^3.
- **Somme e differenze:** il risultato ha tante cifre *decimali* quante il dato che ne ha di meno (con i dati nella stessa unità). 12,4 cm + 3,25 cm = 15,65 cm, che si scrive 15,7 cm: il primo dato è noto solo ai decimi, e la somma non può esserlo ai centesimi.

Nei calcoli a più passaggi si tiene una cifra in più e si arrotonda solo il risultato finale. Fanno eccezione i **numeri esatti**, che non provengono da misure e non hanno incertezza: i numeri che contano oggetti (12 studenti, 10 oscillazioni), i fattori delle definizioni (1 km = 1000 m), i coefficienti delle formule (il 2 di un diametro doppio del raggio). Non limitano le cifre del risultato: 10 oscillazioni che durano in tutto 17,96 s danno un periodo di 1,796 s, con quattro cifre come il dato misurato.

> **ERRORE FREQUENTE**
>
> **Copiare la calcolatrice.** Il volume di un cubetto di lato 1,5 cm non è 3,375 cm^3: il lato ha due cifre significative e il volume si scrive 3,4 cm^3. Le cifre in più del display dichiarano una precisione che nessuno ha misurato.
>
> **Togliere gli zeri finali.** In matematica 2,50 = 2,5; in fisica 2,50 m dice che la lunghezza è nota al centimetro, 2,5 m solo al decimetro. Lo zero letto sullo strumento si scrive.

3.4 Il risultato di una misura

3.4.1 Una misura sola

Ogni risultato di misura si scrive nella forma

$$x = (\text{valore} \pm e_a)\ \text{unità di misura}$$

dove e_a è l'**incertezza assoluta**: la scrittura dichiara che il valore vero sta, con buona fiducia, nell'intervallo tra valore − e_a e valore + e_a. L'incertezza ha la stessa unità della grandezza. Quando si fa una misura sola, l'incertezza si prende uguale alla sensibilità dello strumento: (73 ± 1) mm con il righello, (12,35 ± 0,05) mm con il calibro.

3.4.2 Misure ripetute: valore medio e semidispersione

Se la misura risente di errori casuali, una lettura sola non basta: si ripete la misura n volte nelle stesse condizioni e si usa come migliore stima il **valore medio**, cioè la somma delle misure divisa per il loro numero:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Come incertezza si usa la **semidispersione massima**, metà della differenza tra la misura più grande e la più piccola:

$$e_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

È un'incertezza prudente. Se però le misure sono tutte uguali, o quasi, la semidispersione risulta minore della sensibilità (perfino zero): in quel caso si usa la sensibilità, perché nessuna ripetizione può rendere lo strumento più fine di quanto è.

3.4.3 Come si scrive il risultato

La convenzione di questo libro, che seguirai sempre, ha due regole.

1. L'incertezza si arrotonda a **una** cifra significativa; a **due** se la prima cifra è 1. Così 0,0237 diventa 0,02; 0,085 diventa 0,09; 0,147 diventa 0,15 (la prima cifra è 1, e arrotondare 0,147 a 0,1 cambierebbe l'incertezza di un terzo).
2. Il valore si arrotonda **alla stessa posizione decimale** dell'incertezza. Se l'incertezza è 0,09 s, il valore 1,636 s diventa 1,64 s: scrivere 1,636 dichiarerebbe di conoscere i millesimi quando già i centesimi sono incerti.

ESEMPIO SVOLTO

Venti misure di un tempo

Dati. Una classe misura venti volte, con un cronometro al centesimo di secondo, il tempo che una pallina impiega a scendere lungo una guida inclinata. I risultati sono nella Tabella 3.2.

Tabella 3.2 Venti misure del tempo di discesa della pallina (dati tipici), in secondi.

1–5	6–10	11–15	16–20
1,62	1,67	1,61	1,62
1,58	1,63	1,66	1,73
1,71	1,55	1,59	1,65
1,65	1,69	1,68	1,57
1,60	1,64	1,64	1,63

Valore medio. La somma delle venti misure è 32,72 s, quindi $\bar{x} = 32{,}72\ \text{s} / 20 = 1{,}636\ \text{s}$.

Incertezza. La misura più grande è 1,73 s, la più piccola 1,55 s: $e_a = (1{,}73\ \text{s} - 1{,}55\ \text{s})/2 = 0{,}09\ \text{s}$, molto più grande della sensibilità (0,01 s). Gli errori casuali, qui dovuti soprattutto alla reazione della mano, contano più dello strumento.

Risultato. L'incertezza ha già una cifra significativa; il valore si arrotonda ai centesimi: $t = (1{,}64 \pm 0{,}09)\ \text{s}$.

Il grafico. L'istogramma della Figura 3.4 raggruppa le misure in classi larghe 0,05 s. Le misure si addensano intorno al valore medio e diventano rare allontanandosi da esso: è l'aspetto tipico di misure soggette solo a errori casuali.

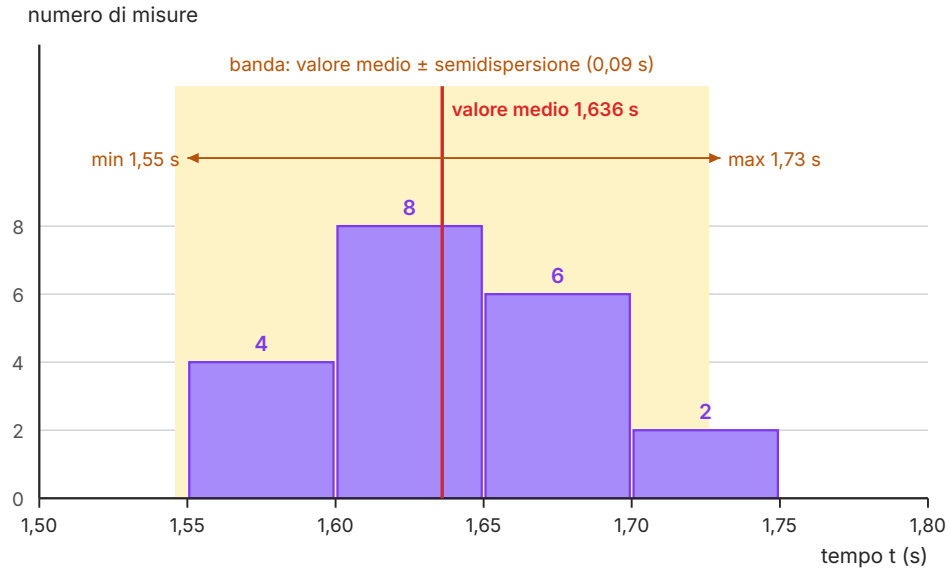


Figura 3.4 Istogramma delle venti misure della Tabella 3.2, in classi larghe 0,05 s (ogni classe comprende il suo estremo sinistro ed esclude il destro). La linea rossa è il valore medio, la banda gialla l'intervallo valore medio ± semidispersione. La banda è centrata sulla media, non sul punto di mezzo fra minimo e massimo: per questo la misura più grande, 1,73 s, ne resta appena fuori.

3.4.4 Incertezza relativa e percentuale

Un'incertezza di 1 mm è enorme sullo spessore di una moneta e trascurabile sulla lunghezza di un'aula. Per giudicare la qualità di una misura si confronta l'incertezza con il valore misurato. L'**incertezza relativa** è il rapporto

$$e_\mathrm{r} = \frac{e_\mathrm{a}}{\bar{x}}$$

ed è un numero puro, senza unità di misura; moltiplicata per 100 dà l'**incertezza percentuale** $e_{\%}$. Per il tempo della pallina $e_\mathrm{r} = 0{,}09/1{,}64 \approx 0{,}055$, cioè circa il 5%. Per l'aula lunga $(8{,}46 \pm 0{,}02)$ m, invece, $e_{\%} = 0{,}02/8{,}46 \times 100 \approx 0{,}2\%$: un'incertezza assoluta di 2 cm, eppure una misura molto più precisa. Fra due misure, anche di grandezze diverse, è più precisa quella con l'incertezza relativa minore.

APPROFONDIMENTO

Ceres, Gauss e la curva degli errori

Il 1° gennaio 1801, dall'osservatorio di Palermo, Giuseppe Piazzi notò un debole oggetto che si spostava tra le stelle: era Ceres, il primo degli asteroidi a essere scoperto (oggi è classificato come pianeta nano). Piazzi lo seguì per circa sei settimane, poi l'oggetto si perse nel bagliore del Sole. Da quelle poche posizioni, tutte affette da errori di misura, bisognava prevedere dove cercarlo mesi dopo. Ci riuscì un matematico di ventiquattro anni, Carl Friedrich Gauss: alla fine del 1801 Ceres fu ritrovato vicino al punto da lui indicato.

Il metodo per estrarre la stima migliore da molte misure imprecise, detto dei *minimi quadrati*, fu pubblicato per primo dal francese Adrien-Marie Legendre nel 1805; Gauss lo espose nel 1809 nella *Theoria motus corporum coelestium*, legandolo a una legge per la distribuzione degli errori casuali. È la «curva a campana» che oggi porta il suo nome, e che un istogramma come quello della Figura 3.4 tende a disegnare quando le misure diventano moltissime.

Da questa teoria nasce una misura della dispersione più raffinata, la *deviazione standard*, calcolata dagli scarti di tutte le misure dal valore medio e non solo dalle due estreme: per le venti misure della Tabella 3.2 vale circa 0,05 s. In questo libro useremo sempre la semidispersione massima, più semplice e più prudente.

3.5 Misure che si combinano e misure che si confrontano

3.5.1 La propagazione delle incertezze

Molte grandezze non si misurano direttamente, ma si calcolano da altre misure: un'area da due lati, una densità da una massa e un volume. L'incertezza dei dati si trasmette al risultato; calcolarla si chiama **propagazione delle incertezze**. Noi stimeremo l'incertezza massima, cioè supporremo che gli errori dei dati si sommino nel caso peggiore. Bastano quattro regole.

1. **Somme e differenze: si sommano le incertezze assolute.** Due tavoli lunghi (1,250 ± 0,002) m e (0,845 ± 0,002) m messi in fila misurano (2,095 ± 0,004) m. Attenzione: anche in una *differenza* le incertezze si sommano, perché nel caso peggiore un dato è in eccesso e l'altro in difetto.
2. **Prodotti e quozienti: si sommano le incertezze relative.** Se $z = x \cdot y$ oppure $z = x/y$, allora $e_r(z) = e_r(x) + e_r(y)$; l'incertezza assoluta si ricava poi come $e_a(z) = e_r(z) \cdot z$.
3. **Prodotto per un numero esatto:** l'incertezza assoluta si moltiplica per quel numero, e quella relativa non cambia. Se dieci oscillazioni durano (17,96 ± 0,08) s, una oscillazione dura (1,796 ± 0,008) s.
4. **Quadrati e cubi:** l'incertezza relativa si moltiplica per l'esponente. Se $z = x^2$, $e_r(z) = 2\, e_r(x)$; se $z = x^3$, $e_r(z) = 3\, e_r(x)$. È la regola del prodotto applicata a $x \cdot x$ e a $x \cdot x \cdot x$.

Perché nei prodotti si sommano le incertezze relative e non quelle assolute? Basta un caso semplice. Un rettangolo ha lati (10,0 ± 0,1) cm e (5,0 ± 0,1) cm. Nel caso peggiore per eccesso i lati sono 10,1 cm e 5,1 cm, e l'area è 51,51 cm^2 invece di 50,0 cm^2: lo scarto, circa 1,5 cm^2, è il 3% dell'area, cioè la somma dell'1% del primo lato e del 2% del secondo. Le incertezze assolute (0,1 cm e 0,1 cm) non si potrebbero nemmeno sommare all'area: sono lunghezze, non superfici.

ESEMPIO SVOLTO

La densità di un cilindretto metallico

Dati. Un cilindretto di metallo chiaro ha diametro D = (20,00 ± 0,05) mm e altezza h = (35,10 ± 0,05) mm, misurati con il calibro, e massa m = (29,7 ± 0,1) g, misurata con una bilancia al decimo di grammo. Di che metallo può essere fatto?

Volume. $V = \pi D^2 h/4 = \pi \times (20{,}00\ \text{mm})^2 \times 35{,}10\ \text{mm} / 4 = 11\,027\ \text{mm}^3 = 11{,}027\ \text{cm}^3$ (1 cm^3 = 1000 mm^3). Il 4 e π sono numeri esatti, o noti con tutte le cifre che vogliamo.

Densità. $d = m/V = 29{,}7\ \text{g} / 11{,}027\ \text{cm}^3 = 2{,}693\ \text{g/cm}^3$.

Incertezze relative. massa: 0,1/29,7 = 0,0034; diametro: 0,05/20,00 = 0,0025, che entra *al quadrato* e quindi conta due volte, 0,0050; altezza: 0,05/35,10 = 0,0014. Somma: $e_r(d)$ = 0,0034 + 0,0050 + 0,0014 = 0,0098, circa l'1%.

Risultato. e_a = 0,0098 × 2,693 g/cm^3 = 0,026 g/cm^3, che si arrotonda a 0,03 g/cm^3; quindi d = (2,69 ± 0,03) g/cm^3.

Interpretazione. L'intervallo va da 2,66 a 2,72 g/cm^3 e contiene la densità dell'alluminio, 2,70 g/cm^3 (capitolo 2): il cilindretto è compatibile con l'alluminio, e certamente non è di ferro (7,87 g/cm^3). L'incertezza è dominata dal diametro, che compare al quadrato: è lui che conviene misurare meglio.

3.5.2 Quando due misure sono compatibili

Due gruppi misurano la densità dello stesso cilindretto e trovano valori diversi. Uno dei due ha sbagliato? Non necessariamente. Ogni risultato individua un intervallo, e due misure della stessa grandezza si dicono **compatibili** quando i loro intervalli hanno almeno un punto in comune: c'è almeno un valore della grandezza che è in accordo con entrambe. In modo equivalente: la differenza tra i due valori non supera la somma delle due incertezze assolute.

Nella Figura 3.5 il gruppo A ha trovato (2,69 ± 0,03) g/cm^3, il gruppo B (2,71 ± 0,04) g/cm^3: la differenza è 0,02 g/cm^3, minore di 0,03 + 0,04 = 0,07 g/cm^3, e gli intervalli si sovrappongono. Le misure sono compatibili. Il gruppo C ha trovato (2,78 ± 0,02) g/cm^3: la differenza con A è 0,09 g/cm^3, più grande di 0,05 g/cm^3, e tra i due intervalli resta un vuoto. Qui c'è un problema da cercare: un errore sistematico, un'incertezza sottostimata, un cilindretto diverso. Allo stesso modo si confronta una misura con un valore di riferimento.

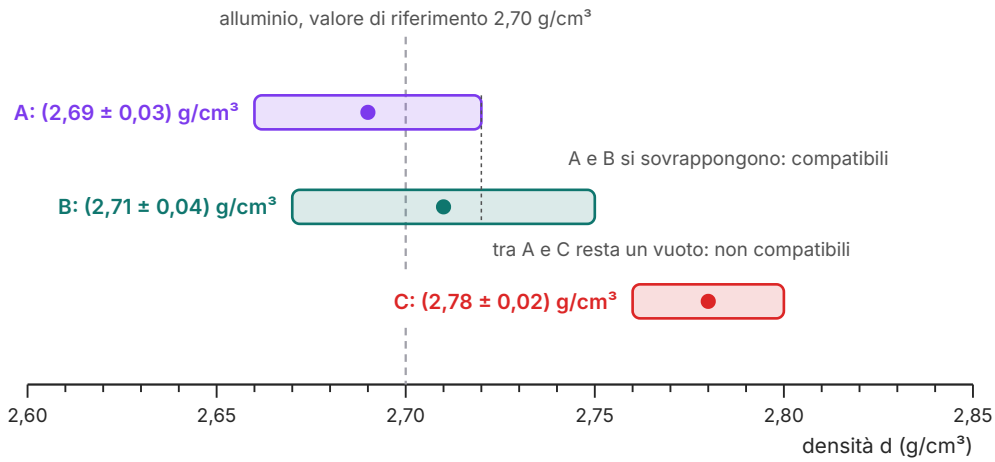


Figura 3.5 Compatibilità di tre misure della densità dello stesso cilindretto. Ogni misura è un intervallo (valore ± incertezza). A e B si sovrappongono e sono compatibili; tra A e C resta un vuoto, quindi non sono compatibili. La linea tratteggiata è il valore di riferimento dell'alluminio.

COLLEGAMENTI

Filosofia · Aristotele e l'esattezza possibile

All'inizio dell'*Etica Nicomachea* Aristotele avverte il lettore che non si deve pretendere la stessa esattezza da ogni discorso:

πεπαιδευμένου γάρ ἐστιν ἐπὶ τοσοῦτον τἀκριβὲς ἐπιζητεῖν καθ' ἕκαστον γένος, ἐφ' ὅσον ἡ τοῦ πράγματος φύσις ἐπιδέχεται.

«È proprio di una persona istruita cercare in ciascun genere di cose tanta esattezza quanta ne consente la natura dell'argomento» (Aristotele, *Etica Nicomachea* I 3, 1094b 23–25; traduzione della redazione).

Aristotele pensa all'etica e alla politica, che non possono avere il rigore della matematica: non parla di strumenti. Eppure la frase descrive bene l'atteggiamento della fisica sperimentale. Chi scrive l'altezza di una persona al micrometro non è più rigoroso degli altri: la persona cambia altezza di qualche millimetro tra il mattino e la sera, e quelle cifre non hanno oggetto. Dichiarare l'incertezza significa dire quanta esattezza la cosa misurata, e lo strumento, consentono.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: il periodo di un pendolo, una oscillazione o dieci?

Obiettivo. Misurare il periodo T di un pendolo, cioè la durata di un'oscillazione completa (andata e ritorno), nel modo più preciso possibile con un cronometro azionato a mano.

Materiali. Un pendolo lungo circa 80 cm (un filo sottile e un dado o una pallina appesi a un sostegno stabile), un cronometro al centesimo di secondo (va bene quello del telefono), un metro a nastro.

Procedimento. 1) Sposta la pallina di pochi centimetri dalla verticale e lasciala andare. 2) Avvia il cronometro mentre la pallina passa per il punto più basso (segnalo con un nastro adesivo dietro il filo) e fermalo quando ci ripassa nello stesso verso: hai misurato un periodo. Ripeti cinque volte. 3) Ora misura il tempo di dieci oscillazioni complete, contando ad alta voce «zero» alla partenza; ripeti cinque volte. 4) Per ogni serie calcola valore medio e semidispersione.

Tabella 3.3 Dati di un gruppo (cronometro al centesimo di secondo; pendolo di circa 80 cm).

Serie	Misure (s)	Valore medio (s)	Semidispersione (s)	Risultato
una oscillazione, T	1,72 · 1,86 · 1,79 · 1,83 · 1,75	1,790	0,07	T = (1,79 ± 0,07) s
dieci oscillazioni, $10T$	17,96 · 17,88 · 18,03 · 17,92 · 17,99	17,956	0,075	$10T$ = (17,96 ± 0,08) s

Che cosa concludere. Dalla seconda serie, dividendo per il numero esatto 10, T = (1,796 ± 0,008) s. L'incertezza percentuale scende da circa il 4% (0,07/1,79) a circa lo 0,4% (0,008/1,796): dieci volte meno. L'errore di reazione all'avvio e all'arresto è lo stesso sia per una oscillazione sia per dieci, ma nel secondo caso si divide fra dieci periodi. I due risultati sono compatibili: l'intervallo da 1,788 a 1,804 s sta dentro quello da 1,72 a 1,86 s. Il metodo non elimina però gli errori sistematici: se conti male le oscillazioni (nove invece di dieci), il risultato è sbagliato del 10% e nessuna media se ne accorge.

Sicurezza. Fissa bene il sostegno e tieni il viso lontano dalla traiettoria della pallina.

Per la relazione. Riporta i dati in una tabella con le unità e la sensibilità del cronometro; per ciascuna serie scrivi valore medio, semidispersione e risultato con le cifre giuste; calcola le due incertezze percentuali e verifica la compatibilità dei due valori di T. Discuti quale errore domina e quali errori sistematici potrebbero restare. Il capitolo 4 organizza tutto questo in una relazione completa.

IN SINTESI

Risultato di una misura: $x = (\bar{x} \pm e_a)$ unità. Incertezza a una cifra significativa (due se comincia per 1), valore arrotondato alla stessa posizione decimale.

Misura singola: e_a = sensibilità dello strumento. **Misure ripetute:** $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$, la migliore stima; $e_a = (x_{max} - x_{min})/2$, la semidispersione massima (mai meno della sensibilità).

Incertezza relativa: $e_r = e_a/\bar{x}$, numero puro; **percentuale:** $e_{\%} = e_r \times 100$. Più è piccola, più la misura è precisa.

Propagazione: somme e differenze → si sommano le incertezze assolute; prodotti e quozienti → si sommano le incertezze relative; per un numero esatto k → $e_a(kx) = k \cdot e_a(x)$; quadrati e cubi → incertezza relativa moltiplicata per 2 o per 3.

Compatibilità: due misure sono compatibili se i loro intervalli si sovrappongono, cioè se $|x_1 - x_2| \leq e_{a1} + e_{a2}$.

SINTESI

- Uno strumento, analogico o digitale, è descritto da portata (valore massimo misurabile), sensibilità (minima variazione rilevabile) e prontezza (rapidità della risposta).
- Il calibro ventesimale ha un nonio di 20 divisioni in 39 mm e sensibilità 0,05 mm: alla parte intera indicata dallo zero del nonio si aggiungono 0,05 mm per ogni tacca fino a quella allineata.
- Ogni misura è incerta. Gli errori casuali variano in modo imprevedibile e si riducono facendo la media; gli errori sistematici spostano tutte le misure nello stesso verso e si scoprono con la taratura o con un metodo diverso.
- Una serie di misure è precisa se le misure sono vicine tra loro, accurata se il valore medio è vicino al valore vero.
- Le cifre significative sono le cifre certe più la prima incerta; gli zeri iniziali non contano, quelli finali dopo la virgola sì. Prodotti e quozienti: tante cifre significative quante il dato che ne ha meno; somme e differenze: tante cifre decimali quante il dato che ne ha meno.
- I numeri esatti (conteggi, definizioni, coefficienti) non hanno incertezza e non limitano le cifre del risultato.
- Per una misura singola l'incertezza è la sensibilità; per misure ripetute il valore medio è la migliore stima e la semidispersione massima l'incertezza, mai minore della sensibilità.
- Il risultato si scrive (valore ± incertezza) unità, con l'incertezza a una cifra significativa (due se comincia per 1) e il valore arrotondato alla stessa posizione decimale.
- L'incertezza relativa (numero puro) e quella percentuale misurano la qualità di una misura e permettono di confrontare misure diverse.
- Nelle somme e differenze si sommano le incertezze assolute; nei prodotti e quozienti quelle relative; per quadrati e cubi l'incertezza relativa si moltiplica per 2 e per 3.
- Due misure della stessa grandezza sono compatibili se i loro intervalli di incertezza si sovrappongono.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Un cronometro digitale mostra minuti, secondi e centesimi di secondo e arriva fino a 59 min 59,99 s. La sua sensibilità è:

   A. 59 min 59,99 s

   B. 0,01 s

   C. 1 s

   D. 0,1 s

2. ● Quale dei seguenti è un errore sistematico?
   A. il tempo di reazione di chi usa il cronometro, che a volte anticipa e a volte ritarda
   B. una corrente d'aria che fa oscillare il piatto della bilancia
   C. la posizione dell'occhio che cambia un poco da una lettura all'altra
   D. una bilancia che a piatto vuoto segna già 2 g

3. ● Quante cifre significative ha la misura 0,04080 kg?
   A. 2
   B. 3
   C. 4
   D. 5

4. ●● Con un righello di sensibilità 0,1 cm si ottengono le misure 12,4 cm; 12,7 cm; 12,5 cm; 12,6 cm. Il risultato corretto è:
   A. (12,55 ± 0,15) cm
   B. (12,6 ± 0,1) cm
   C. (12,55 ± 0,3) cm
   D. (12,5 ± 0,2) cm

5. ● Le frecce di un arciere finiscono tutte molto vicine tra loro, ma lontane dal centro del bersaglio. Come misure, i suoi tiri sono:
   A. precisi e accurati
   B. accurati ma non precisi
   C. precisi ma non accurati
   D. né precisi né accurati

6. ● Si calcola il quoziente di due misure. L'incertezza relativa del risultato è:
   A. la differenza delle incertezze relative
   B. il prodotto delle incertezze relative
   C. la somma delle incertezze assolute
   D. la somma delle incertezze relative

7. ●● Il lato di un quadrato misura (4,0 ± 0,1) cm. L'area, con la sua incertezza, è:
   A. (16 ± 0,1) cm^2
   B. (16,0 ± 0,8) cm^2
   C. (16,0 ± 0,4) cm^2
   D. (16 ± 0,2) cm^2

Vero o falso

8. ● Uno strumento digitale fornisce misure prive di incertezza. V / F

9. ● Facendo la media di molte misure si riduce l'effetto degli errori casuali, ma non quello degli errori sistematici. V / F

10. ● In fisica le scritture 2,50 m e 2,5 m danno la stessa informazione. V / F

11. ●● Se due misure sono compatibili, la differenza tra i loro valori non supera la somma delle loro incertezze assolute. V / F

12. ●● Nella differenza di due misure l'incertezza assoluta del risultato è la differenza delle incertezze assolute. V / F

Applicare

13. ● Indica quante cifre significative hanno le misure seguenti e scrivile in notazione scientifica: a) 0,00350 m; b) 1,020 kg; c) $3{,}0 \times 10^4$ m; d) 4500 s (che cosa ha di particolare quest'ultima?).

14. ● Arrotonda a tre cifre significative: a) 9,8065; b) 0,024 449; c) 1234,5; d) 2,995.

15. ●● In un calibro ventesimale lo zero del nonio ha superato la tacca dei 34 mm della scala fissa, e la tacca del nonio allineata con una tacca della scala fissa è la numero 13. Scrivi la misura con la sua incertezza e indica con quale tacca della scala fissa è allineata la tacca 13.

16. ● Esegui i calcoli e scrivi il risultato con il numero corretto di cifre: a) 12,4 cm + 3,25 cm + 0,118 cm; b) 4,56 m × 2,1 m; c) 7,25 g / 2,5 cm^3.

17. ●●● Scrivi correttamente, secondo la convenzione del libro, i risultati: a) 3,4562 m ± 0,0237 m; b) 128,7 s ± 12 s; c) 0,045 17 kg ± 0,000 083 kg; d) 9,81 m/s^2 ± 0,147 m/s^2.

18. ●● La lunghezza di una pista è (150 ± 2) m, quella di un tavolo (2,40 ± 0,05) m. Calcola le incertezze percentuali e stabilisci quale misura è più precisa.

19. ●● Osserva l'istogramma della Figura 3.4. a) Quale classe contiene più misure, e quante? b) Quante misure sono minori di 1,60 s? c) Quante misure cadono fuori dalla banda gialla, e perché può succedere anche se la semidispersione è calcolata proprio dalle misure estreme?

Problemi

20. ● Due tavoli lunghi (1,250 ± 0,002) m e (0,845 ± 0,002) m vengono accostati per il lato corto. Quanto è lunga la tavola che formano? Calcola anche l'incertezza percentuale.

21. ●●● Un ciclista percorre una distanza s = (100,0 ± 0,1) m in un tempo t = (12,4 ± 0,2) s. Calcola la sua velocità media $v = s/t$ con la sua incertezza.

22. ●● Una pila di 20 monete uguali è alta (44 ± 1) mm, misurata con un righello. Quanto è spessa una moneta, con la sua incertezza? Confronta l'incertezza percentuale con quella che avresti misurando una sola moneta con lo stesso righello.

23. ●●● Una sfera metallica ha diametro $D = (2{,}54 \pm 0{,}01)$ cm e massa $m = (67{,}4 \pm 0{,}1)$ g. Calcola il volume ($V = \pi D^3/6$) e la densità con le loro incertezze, e stabilisci se la sfera può essere di ferro (7,87 g/cm^3, capitolo 2).

24. ●●● Il gruppo A misura con una rotella metrica la lunghezza dell'aula: $(8{,}46 \pm 0{,}02)$ m. Il gruppo B conta le piastrelle lungo la parete: sono esattamente 34, ciascuna lunga $(25{,}0 \pm 0{,}2)$ cm. Calcola il risultato del gruppo B con la sua incertezza e stabilisci se le due misure sono compatibili.

25. ●● Un becher pieno d'acqua ha massa $(245{,}6 \pm 0{,}1)$ g, vuoto $(112{,}3 \pm 0{,}1)$ g. Calcola la massa dell'acqua con la sua incertezza assoluta e percentuale.

Ragionare e argomentare

26. ●●● Per misurare il periodo di un pendolo Lucia cronometra 20 oscillazioni invece di una. Spiega perché così l'incertezza relativa diminuisce, e indica un errore che questo metodo non riduce affatto.

27. ●●● Trova l'errore. Per la densità di un sasso uno studente ha misurato $m = (54{,}2 \pm 0{,}1)$ g e $V = (20{,}0 \pm 0{,}5)$ cm^3, e scrive: «$d = 2{,}71$ g/cm^3; incertezza $0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}6$, quindi $d = (2{,}71 \pm 0{,}6)$ g/cm^3». Individua gli errori e scrivi il risultato corretto.

28. ●● Commenta la fonte. Aristotele scrive che «è proprio di una persona istruita cercare in ciascun genere di cose tanta esattezza quanta ne consente la natura dell'argomento» (*Etica Nicomachea* I 3, traduzione della redazione). Che cosa afferma? Applica l'idea alla misura dello spessore di una pagina di questo libro e a quella della distanza fra Roma e Milano: quante cifre significative avrebbe senso dare in ciascun caso, e perché?

PER APPROFONDIRE

- [TAY] J.R. Taylor, *Introduzione all'analisi degli errori*: il testo di riferimento sulle incertezze di misura; i primi capitoli corrispondono a questo, i successivi introducono la deviazione standard e la curva di Gauss.
- [HRW] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica*: il capitolo iniziale sulla misura e sulle unità.
- [FEY] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. I: le pagine introduttive sul ruolo dell'esperimento come giudice delle idee.

Glossario del capitolo

Accuratezza
Qualità di una serie di misure il cui valore medio è vicino al valore vero; è limitata dagli errori sistematici.

Calibro ventesimale
Strumento per piccole lunghezze con un'asta millimetrata, un becco fisso, un cursore con becco mobile e un nonio di 20 divisioni in 39 mm; sensibilità 0,05 mm.

Cifre significative
Le cifre certe di una misura più la prima cifra incerta; gli zeri iniziali non sono significativi, quelli finali dopo la virgola sì.

Compatibilità
Accordo tra due misure della stessa grandezza: i loro intervalli di incertezza hanno almeno un punto in comune.

Errore casuale
Errore che fa variare in modo imprevedibile, in più o in meno, il risultato di misure ripetute; il suo effetto si riduce facendo la media.

Errore di parallasse
Errore di lettura dovuto all'occhio che non guarda la scala perpendicolarmente all'indice.

Errore sistematico
Errore che sposta tutte le misure nello stesso verso (errore di zero, strumento mal tarato, abitudine dell'operatore); la media non lo riduce.

Incertezza assoluta
Semiampiezza e_a dell'intervallo in cui si ritiene stia il valore vero; ha l'unità della grandezza.

Incertezza percentuale
L'incertezza relativa moltiplicata per 100.

Incertezza relativa
Rapporto $e_r = e_a/\bar{x}$ tra l'incertezza assoluta e il valore; numero puro che misura la qualità di una misura.

Nonio
Scala ausiliaria scorrevole lungo la scala principale di uno strumento, che permette di leggere frazioni della sua divisione.

Numero esatto
Numero privo di incertezza (un conteggio, un fattore di definizione, un coefficiente di una formula); non limita le cifre del risultato.

Portata
Valore massimo che uno strumento può misurare.

Precisione
Qualità di una serie di misure vicine tra loro; è limitata dagli errori casuali.

Prontezza
Rapidità con cui uno strumento raggiunge l'indicazione definitiva.

Propagazione delle incertezze
Calcolo dell'incertezza di una grandezza ricavata da altre misure: si sommano le incertezze assolute nelle somme e differenze, quelle relative nei prodotti e quozienti.

Semidispersione massima
Metà della differenza tra la misura più grande e la più piccola di una serie; si usa come incertezza delle misure ripetute, mai minore della sensibilità.

Sensibilità
Minima variazione della grandezza che uno strumento può rilevare: il valore di una divisione della scala o dell'ultima cifra del display.

Taratura
Controllo e regolazione di uno strumento per confronto con un campione noto.

Valore medio
Somma di una serie di misure divisa per il loro numero; è la migliore stima del valore della grandezza.

Soluzioni

1. B. La sensibilità è il valore di un'unità dell'ultima cifra, 0,01 s; A è la portata.

2. D. L'errore di zero sposta tutte le misure dello stesso valore; A, B e C variano in modo imprevedibile, sono casuali.

3. C. Gli zeri iniziali non contano; contano 4, 0, 8 e lo zero finale dopo la virgola: $4{,}080 \times 10^{-2}$ kg.

4. A. Media = (12,4 + 12,7 + 12,5 + 12,6)/4 = 12,55 cm; semidispersione = (12,7 − 12,4)/2 = 0,15 cm, maggiore della sensibilità; comincia per 1, quindi due cifre: (12,55 ± 0,15) cm.

5. C. Colpi raccolti = errori casuali piccoli (precisione); media lontana dal centro = errore sistematico (niente accuratezza).

6. D. Nei prodotti e nei quozienti si sommano le incertezze relative.

7. B. $A = 4{,}0^2 = 16{,}0$ cm^2; $e_r = 2 \times 0{,}1/4{,}0 = 0{,}05$; $e_a = 0{,}05 \times 16{,}0 = 0{,}8$ cm^2; (16,0 ± 0,8) cm^2.

8. F. Anche uno strumento digitale ha una sensibilità finita (l'ultima cifra) e può essere tarato male.

9. V. Gli errori casuali, in più e in meno, si compensano in parte nella media; quelli sistematici agiscono tutti nello stesso verso.

10. F. 2,50 m ha tre cifre significative (lunghezza nota al centimetro), 2,5 m due (nota al decimetro).

11. V. Se gli intervalli si sovrappongono, la distanza fra i due valori centrali è al massimo la somma delle due semiampiezze, cioè delle due incertezze.

12. F. Anche nelle differenze le incertezze assolute si sommano: nel caso peggiore un dato è in eccesso e l'altro in difetto.

13. a) 3 cifre, $3{,}50 \times 10^{-3}$ m; b) 4 cifre, 1,020 kg (in notazione scientifica $1{,}020 \times 10^{0}$ kg); c) 2 cifre, già in notazione scientifica; d) ambigua: gli zeri finali di un intero possono essere misurati o no, quindi 2, 3 o 4 cifre ($4{,}5 \times 10^{3}$ s, $4{,}50 \times 10^{3}$ s o $4{,}500 \times 10^{3}$ s secondo la precisione).

14. a) 9,81 (la prima cifra eliminata è 6); b) 0,0244 (si elimina un 4); c) $1{,}23 \times 10^{3}$ (si elimina un 4; la notazione scientifica evita gli zeri ambigui); d) 3,00 (si elimina un 5: 2,99 diventa 3,00, e gli zeri si scrivono).

15. 34 mm + 13 × 0,05 mm = 34,65 mm; risultato (34,65 ± 0,05) mm. La tacca 13 dista 13 × 1,95 mm = 25,35 mm dallo zero del nonio: 34,65 + 25,35 = 60,00 mm, cioè la tacca dei 60 mm (6 cm).

16. a) 15,768 cm → 15,8 cm (il primo dato ha una sola cifra decimale); b) 9,576 m^2 → 9,6 m^2 (2,1 ha due cifre significative); c) 2,9 g/cm^3 (2,5 ha due cifre significative).

17. a) 0,0237 → 0,02; (3,46 ± 0,02) m. b) 12 comincia per 1: due cifre, 12; il valore alle unità: (129 ± 12) s. c) 0,000 083 → 0,000 08; (0,045 17 ± 0,000 08) kg = $(4{,}517 \pm 0{,}008) \times 10^{-2}$ kg. d) 0,147 comincia per 1: 0,15; (9,81 ± 0,15) m/s^2.

18. Pista: $e_{\%} = 2/150 \times 100 \approx 1{,}3\%$; tavolo: $0{,}05/2{,}40 \times 100 \approx 2{,}1\%$. È più precisa la misura della pista, anche se la sua incertezza assoluta è 40 volte più grande.

19. a) La classe da 1,60 a 1,65 s, con 8 misure. b) 4 misure (1,55; 1,57; 1,58; 1,59 s). c) Una sola, 1,73 s: la banda va da 1,636 − 0,09 = 1,546 s a 1,636 + 0,09 = 1,726 s. È centrata sul valore medio, che non coincide con il punto di mezzo fra minimo e massimo (1,64 s); con il risultato arrotondato, (1,64 ± 0,09) s, l'intervallo va da 1,55 a 1,73 s e le comprende tutte.

20. L = 1,250 m + 0,845 m = 2,095 m; e_a = 0,002 + 0,002 = 0,004 m; L = (2,095 ± 0,004) m; $e_{\%}$ = 0,004/2,095 × 100 ≈ 0,2%.

21. v = 100,0 m / 12,4 s = 8,065 m/s; e_r = 0,1/100,0 + 0,2/12,4 = 0,0010 + 0,0161 = 0,0171; e_a = 0,0171 × 8,065

= 0,138 m/s → 0,14 m/s (comincia per 1); v = (8,06 ± 0,14) m/s. Il tempo domina l'incertezza.

22. Spessore = 44 mm / 20 = 2,2 mm; l'incertezza si divide per il numero esatto 20: 1 mm / 20 = 0,05 mm; (2,20 ± 0,05) mm. Incertezza percentuale ≈ 2,3%, la stessa della pila (1/44). Con una sola moneta: (2 ± 1) mm, 50%: venti volte peggio.

23. $V = \pi \times 2{,}54^3/6 = 8{,}580$ cm^3; $d = 67{,}4/8{,}580 = 7{,}855$ g/cm^3. $e_r(V) = 3 \times 0{,}01/2{,}54 = 0{,}0118$, quindi V = (8,58 ± 0,10) cm^3; $e_r(m) = 0{,}1/67{,}4 = 0{,}0015$; $e_r(d)$ = 0,0015 + 0,0118 = 0,0133; $e_a = 0{,}0133 \times 7{,}855 = 0{,}104$ → 0,10 g/cm^3; d = (7,86 ± 0,10) g/cm^3. L'intervallo 7,76–7,96 g/cm^3 contiene 7,87: compatibile con il ferro.

24. B: 34 × 25,0 cm = 850 cm; 34 è esatto, quindi e_a = 34 × 0,2 cm = 6,8 cm → 7 cm; L_B = (8,50 ± 0,07) m. Intervalli: A da 8,44 a 8,48 m, B da 8,43 a 8,57 m: si sovrappongono (differenza 0,04 m ≤ 0,02 + 0,07 = 0,09 m). Compatibili, ma la misura di A è molto più precisa (0,2% contro 0,8%).

25. m = 245,6 g − 112,3 g = 133,3 g; nella differenza le incertezze si sommano: 0,1 + 0,1 = 0,2 g; (133,3 ± 0,2) g; $e_{\%} = 0{,}2/133{,}3 \times 100 \approx 0{,}15\%$.

26. Traccia. L'errore di reazione all'avvio e all'arresto del cronometro è più o meno lo stesso qualunque sia la durata misurata; dividendo il tempo totale per il numero esatto 20, anche l'incertezza si divide per 20: l'incertezza relativa del periodo diventa così circa 20 volte più piccola di quella di un periodo cronometrato da solo. Non si riducono gli errori sistematici: per esempio un errore nel conteggio delle oscillazioni (19 invece di 20, un errore del 5%), un cronometro che va avanti o indietro, oscillazioni troppo ampie.

27. Errori: 1) ha sommato le incertezze assolute di una massa e di un volume, grandezze diverse, cosa priva di senso (e il risultato non è neppure in g/cm^3); in un quoziente si sommano le incertezze relative. 2) Il valore 2,71 ha i centesimi, l'incertezza solo i decimi. Corretto: $e_r = 0{,}1/54{,}2 + 0{,}5/20{,}0 = 0{,}0018 + 0{,}025 = 0{,}027$; $e_a = 0{,}027 \times 2{,}71 = 0{,}073$ → 0,07 g/cm^3; d = (2,71 ± 0,07) g/cm^3.

28. Traccia. Aristotele dice che il rigore va proporzionato all'oggetto: pretendere troppa esattezza dove la natura della cosa non la permette è segno di poca cultura, non di molta (nel testo parla dell'etica, non della fisica). Lo spessore di una pagina (circa un decimo di millimetro) ha senso darlo con una o due cifre significative, misurando un pacco di pagine; la distanza Roma–Milano dipende da che cosa si intende (in linea d'aria? lungo l'autostrada? da quale punto della città?), quindi due o tre cifre (circa 480 km in linea d'aria) bastano e altre cifre non avrebbero oggetto. In entrambi i casi l'esattezza è limitata dalla definizione della grandezza, prima ancora che dallo strumento.