CAPITOLO

2

Grandezze, unità di misura e ordini di grandezza

Misurare è chiedere quante volte una cosa ne contiene un'altra, scelta una volta per tutte e uguale per tutti.

OBIETTIVI

1. Spiegare che cosa significa misurare e perché una misura è sempre un numero con la sua unità.
2. Conoscere le grandezze fondamentali del Sistema Internazionale e l'idea delle definizioni del 2019.
3. Usare prefissi e fattori di conversione, anche per aree, volumi e velocità.
4. Trovare l'ordine di grandezza di una quantità e risolvere semplici problemi di stima.
5. Calcolare e usare la densità di una sostanza, anche da un grafico massa-volume.
6. Controllare l'omogeneità di una formula con l'analisi dimensionale.

INDICE DEL CAPITOLO

2.1 Misurare: grandezze e unità 2
2.2 Il Sistema Internazionale di unità 3
2.3 Multipli, sottomultipli e conversioni 6
2.4 Ordini di grandezza e stime 10
2.5 La densità 13
2.6 L'analisi dimensionale 18

Fisica 3 · Parte I · Il linguaggio della fisica · versione 1.0
Capitolo 2: Grandezze, unità di misura e ordini di grandezza · pagine 41–64 del volume completo · estratto per lo studio

Nel capitolo 1 hai visto che una grandezza fisica è una proprietà che si può misurare, purché si dica con precisione *come*. Resta da chiarire che cosa sia, esattamente, una misura. Una ricetta della nonna che chiede «un bicchiere di farina e un pizzico di sale» funziona in famiglia, ma non funzionerebbe in un laboratorio: quale bicchiere? Quanto è grande un pizzico? Lo stesso problema lo avevano i mercanti dell'antichità, che passando da una città all'altra trovavano piedi, cubiti e stadi di lunghezza diversa.

In questo capitolo costruiamo il vocabolario comune che permette a chiunque, ovunque, di confrontare i propri numeri con quelli degli altri: il Sistema Internazionale di unità, i prefissi e le conversioni, gli ordini di grandezza e le stime. Chiudono il capitolo due strumenti che userai in tutto il volume: la densità e l'analisi dimensionale.

2.1 Misurare: grandezze e unità

2.1.1 Misurare significa confrontare

Misurare una grandezza significa confrontarla con un'altra grandezza della stessa specie, scelta una volta per tutte come riferimento: l'**unità di misura**. Il risultato del confronto dice quante volte l'unità è contenuta nella grandezza. Se il piano del tuo banco contiene 120 volte il centimetro, la sua lunghezza è 120 cm; con il metro come unità la stessa lunghezza si scrive 1,20 m. Il numero cambia con l'unità, la lunghezza del banco no.

Per questo la **misura** di una grandezza è sempre la coppia **numero + unità di misura**. Scrivere «la lunghezza è 1,20» non vuol dire nulla: 1,20 metri, 1,20 chilometri o 1,20 piedi romani sono lunghezze molto diverse. L'oggetto fisico che materializza l'unità, come un'asta graduata o un pesetto tarato, si chiama **campione**.

Il confronto ha senso solo tra grandezze **omogenee**, cioè della stessa specie: una lunghezza con una lunghezza, un tempo con un tempo. Per la stessa ragione si possono sommare 3 m e 2 m, ma non 3 m e 2 s. Questa osservazione, che sembra banale, diventerà uno strumento di controllo potente alla fine del capitolo.

2.1.2 Grandezze fondamentali e derivate

Non serve inventare un'unità diversa per ogni grandezza. Si scelgono poche **grandezze fondamentali**, indipendenti l'una dall'altra, e per ciascuna si fissa un'unità; tutte le altre sono **grandezze derivate**, definite a partire dalle fondamentali mediante una formula, e la loro unità si ricava dalla stessa formula. L'area di un rettangolo è base × altezza, quindi si misura in metri ×

metri, cioè metri quadrati (m^2); il volume di un parallelepipedo si misura in metri cubi (m^3); la velocità, che è il rapporto tra uno spazio e un tempo, si misura in metri al secondo (m/s).

Quali grandezze considerare fondamentali è una scelta convenzionale, non una legge di natura: si potrebbe in linea di principio partire da altre. Conta che la scelta sia condivisa da tutti.

Fra le grandezze fondamentali c'è la **massa**, che per ora possiamo definire in modo operativo come la grandezza che si misura con una bilancia a bracci uguali, mettendo il corpo su un piatto e masse campione sull'altro finché i bracci restano orizzontali. Nel linguaggio di tutti i giorni si dice «peso 60 kg», ma in fisica la frase corretta è «la mia massa è 60 kg»: il **peso** è una forza, che studierai nel capitolo 6 e che si misura in un'altra unità, il newton (N). Massa e peso sono grandezze diverse, legate fra loro ma non uguali.

COLLEGAMENTI

Le misure degli antichi

Le unità più antiche venivano dal corpo umano: il dito, il palmo, il piede, il cubito (dal gomito alla punta delle dita). A Roma il *pes* misurava circa 29,6 cm; il *passus*, il passo doppio che riporta a terra lo stesso piede, valeva 5 piedi, circa 1,48 m; mille passi (*mille passus*) formavano il miglio, circa 1,48 km. Le pietre miliari lungo le strade consolari indicavano le distanze proprio in miglia: la parola «miglio» viene da *milia*, «migliaia» (di passi).

I Greci misuravano le distanze in stadi (στάδιον), pari a 600 piedi. Ma il piede non era lo stesso in tutte le città, e quindi neanche lo stadio: la pista dello stadio di Olimpia, per esempio, misura circa 192 m, mentre altrove lo stadio era più corto. Quando leggi che un autore antico ha misurato una distanza «in stadi», per tradurla in metri devi prima sapere *quale* stadio usava, e spesso non lo sappiamo con certezza. Anche le città italiane, fino all'Ottocento, avevano ciascuna le proprie unità: un sistema universale è nato per rimediare a questa confusione.

2.2 Il Sistema Internazionale di unità

2.2.1 Le sette grandezze fondamentali

Il sistema di unità adottato oggi in tutto il mondo per la scienza e per il commercio è il **Sistema Internazionale di unità** (SI), approvato nel 1960 dalla Conferenza generale dei pesi e delle misure. Il SI ha sette grandezze fondamentali, elencate nella Tabella 2.1. In questo volume ne userai soprattutto tre: la lunghezza, la massa e il tempo, che bastano per tutta la meccanica.

Tabella 2.1 Le sette grandezze fondamentali del SI.

Grandezza	Unità	Simbolo
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
tempo	secondo	s
intensità di corrente elettrica	ampere	A
temperatura termodinamica	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

2.2.2 Come sono definite oggi le unità

Un campione materiale ha un difetto: può rovinarsi, sporcarsi, cambiare con il tempo, e si trova in un solo posto. Per questo, dal 2019, tutte le unità del SI sono definite fissando il valore numerico esatto di alcune **costanti della natura**, che sono le stesse in ogni laboratorio e in ogni epoca. Per le tre unità della meccanica le definizioni, dette in parole semplici, sono queste.

- **Il secondo** (s) è legato alla radiazione emessa dagli atomi di cesio-133 in una particolare transizione: un secondo è la durata di 9 192 631 770 oscillazioni di quella radiazione. Gli orologi atomici costruiti su questo principio sono gli strumenti più precisi che l'uomo abbia mai realizzato.
- **Il metro** (m) è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792 458 di secondo. In altre parole, la velocità della luce nel vuoto è fissata, per definizione, a $c = 299\,792\,458$ m/s esatti.
- **Il chilogrammo** (kg) è definito fissando il valore della costante di Planck, $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J·s, una costante della fisica atomica. Con uno strumento chiamato bilancia di Kibble si può ricavare da questo valore la massa di un oggetto campione.

Non devi ricordare questi numeri, ma l'idea: il **secondo**, il metro e il chilogrammo non dipendono più da un oggetto custodito in un museo, ma da proprietà della natura che qualunque laboratorio può riprodurre.

APPROFONDIMENTO

Dal meridiano alle costanti

Il metro nacque in Francia negli anni Novanta del Settecento, durante la Rivoluzione. Gli scienziati dell'Académie des sciences vollero un'unità «per tutti i tempi e per tutti i popoli», non legata al piede di un re: il metro fu definito come la decimilionesima parte della distanza fra il Polo Nord e l'equatore, misurata lungo il meridiano che passa per Parigi. Due astronomi, Jean-Baptiste Delambre e Pierre Méchain, misurarono per anni con triangolazioni l'arco di meridiano tra Dunkerque e Barcellona; dai loro risultati fu costruita una sbarra di platino che divenne il campione del metro.

Nel 1875 diciassette Stati, fra cui l'Italia, firmarono a Parigi la Convenzione del metro, che affidò i campioni a un ufficio internazionale con sede a Sèvres, vicino a Parigi. Il metro restò legato a una sbarra (dal 1889 di platino e iridio) fino a quando le misure di lunghezza divennero più precise della sbarra stessa: allora lo si definì con la luce emessa da certi atomi e poi, dal 1983, con la velocità della luce. Il chilogrammo rimase invece legato fino al 2019 a un cilindretto di platino e iridio conservato a Sèvres: era l'ultima unità del SI definita da un oggetto.

2.2.3 Unità fuori dal SI e regole di scrittura

Nella vita quotidiana restano in uso alcune unità che non appartengono al SI ma sono ammesse accanto a esso (Tabella 2.2). La più comune è il **litro** (L), che è il volume di un cubo di 1 dm di lato: $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$.

Tabella 2.2 Alcune unità non SI di uso comune e la loro equivalenza.

Grandezza	Unità	Simbolo	Equivale a
tempo	minuto	min	60 s
tempo	ora	h	3600 s
tempo	giorno	d	86 400 s
volume	litro	L	$1\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$
massa	tonnellata	t	1000 kg
velocità	chilometro all'ora	km/h	1/3,6 m/s
temperatura	grado Celsius	°C	(si studia il prossimo anno)

Il SI fissa anche alcune regole di scrittura, che valgono in tutto il mondo:

- i simboli delle unità non sono abbreviazioni: si scrivono **senza punto** e **senza plurale** (5 kg, non «5 kg.» né «5 kgs»);

- le maiuscole contano: «kg» e non «Kg», «km» e non «Km» (K è il simbolo del kelvin); «s» è il secondo, «S» un'altra unità;
- fra il numero e il simbolo si lascia uno spazio (25 m, 30 kg), tranne che per i gradi di angolo (30°); in questo volume anche la percentuale si scrive senza spazio (30%);
- nei testi italiani la virgola separa i decimali e le migliaia si separano con uno spazio, non con un punto: 101 325, non «101.325»;
- il simbolo si usa dopo un numero; in una frase senza numero l'unità si scrive per esteso («pochi metri», non «pochi m»).

2.3 Multipli, sottomultipli e conversioni

2.3.1 I prefissi

Le grandezze della fisica vanno dal diametro di un atomo alla distanza delle galassie. Per non scrivere numeri lunghissimi, il SI usa dei **prefissi**: parole poste davanti all'unità che la moltiplicano per una potenza di 10. Un chilometro è mille metri, un millimetro un millesimo di metro. I prefissi più usati sono nella Tabella 2.3.

Tabella 2.3 I prefissi del SI più usati.

Prefisso	Simbolo	Fattore	Esempio
tera	T	10^{12}	1 TB (terabyte) = 10^{12} byte
giga	G	10^{9}	1 GHz = 10^{9} Hz
mega	M	10^{6}	1 Mm = 10^{6} m
chilo	k	10^{3}	1 km = 1000 m
etto	h	10^{2}	1 hg = 100 g
deca	da	10^{1}	1 dam = 10 m
deci	d	10^{-1}	1 dL = 0,1 L
centi	c	10^{-2}	1 cm = 0,01 m
milli	m	10^{-3}	1 mg = 0,001 g
micro	µ	10^{-6}	1 µm = 10^{-6} m
nano	n	10^{-9}	1 ns = 10^{-9} s
pico	p	10^{-12}	1 pm = 10^{-12} m

Fa eccezione il chilogrammo: è l'unità fondamentale della massa, ma contiene già un prefisso. Per questo i multipli e i sottomultipli della massa si formano a partire dal grammo: si scrive 1 mg, non «1 μkg».

COLLEGAMENTI

Le parole della fisica

Metro viene dal greco μέτρον, «misura»: la stessa radice di *termometro*, *cronometro*, *barometro* e della metrica dei versi, che «misura» le sillabe.

Molti **prefissi** sono parole greche: *chilo* da χίλιοι, «mille»; *mega* da μέγας, «grande»; *giga* da γίγας, «gigante»; *micro* da μικρός, «piccolo»; *nano* da νᾶνος, «nano», passato in latino come *nanus*. I sottomultipli *deci*, *centi* e *milli* vengono invece dal latino *decimus*, *centum* e *mille*.

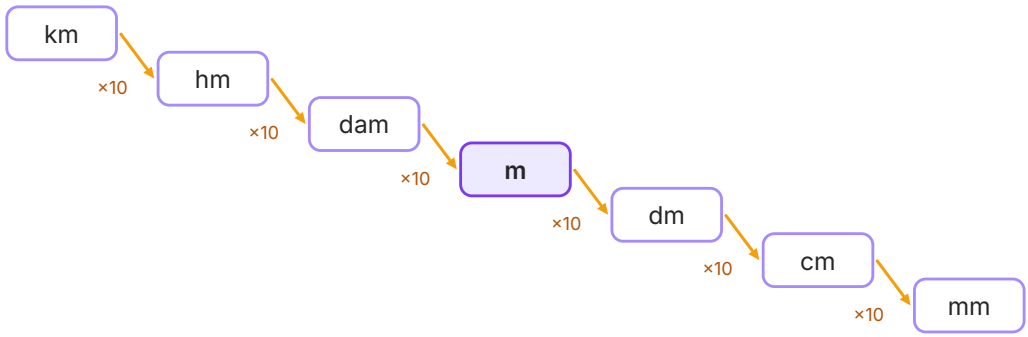
Densità viene dal latino *densitas*, da *densus*, «fitto, compatto»: un materiale denso ha molta massa stipata in poco volume.

2.3.2 Il fattore di conversione

Per passare da un'unità a un'altra conviene un metodo che non dipenda dalla memoria. Poiché 1 km = 1000 m, la frazione $\frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}}$ vale esattamente 1: numeratore e denominatore sono la stessa lunghezza scritta in due modi. Una frazione così si chiama **fattore di conversione**. Moltiplicare una misura per un fattore di conversione non la cambia (si moltiplica per 1), ma cambia l'unità in cui è scritta:

$$3{,}5\ \text{km} = 3{,}5\ \text{km} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 3500\ \text{m}$$

Le unità si trattano come lettere dell'algebra: «km» compare al numeratore e al denominatore e si semplifica. Si sceglie il fattore in modo che l'unità da eliminare stia al denominatore. Quando serve, i fattori si mettono in fila e formano una **catena**, come nella parte inferiore della Figura 2.1.



scendendo di un gradino il numero si moltiplica per 10; salendo si divide per 10

La catena di fattori di conversione

$$72\ \text{km/h} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

vale 1: km si semplifica — vale 1: h si semplifica

Figura 2.1 In alto: i multipli e i sottomultipli del metro; scendendo di un gradino l'unità è dieci volte più piccola e il numero che esprime la stessa lunghezza diventa dieci volte più grande. In basso: una catena di due fattori di conversione trasforma 72 km/h in 20 m/s.

2.3.3 Aree, volumi e velocità

Con le aree e i volumi bisogna fare attenzione: il fattore che vale per le lunghezze va elevato al quadrato o al cubo. Un quadrato di 1 dm di lato si divide in $10 \times 10 = 100$ quadratini di 1 cm di lato, quindi $1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$; un cubo di 1 dm di lato contiene $10 \times 10 \times 10 = 1000$ cubetti di 1 cm di lato, quindi $1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$ (Figura 2.2). Allo stesso modo $1\ \text{m}^2 = (100\ \text{cm})^2 = 10^4\ \text{cm}^2$ e $1\ \text{m}^3 = (10\ \text{dm})^3 = 1000\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{L}$. Ne segue un'equivalenza molto usata in laboratorio: $1\ \text{mL} = 1\ \text{cm}^3$.

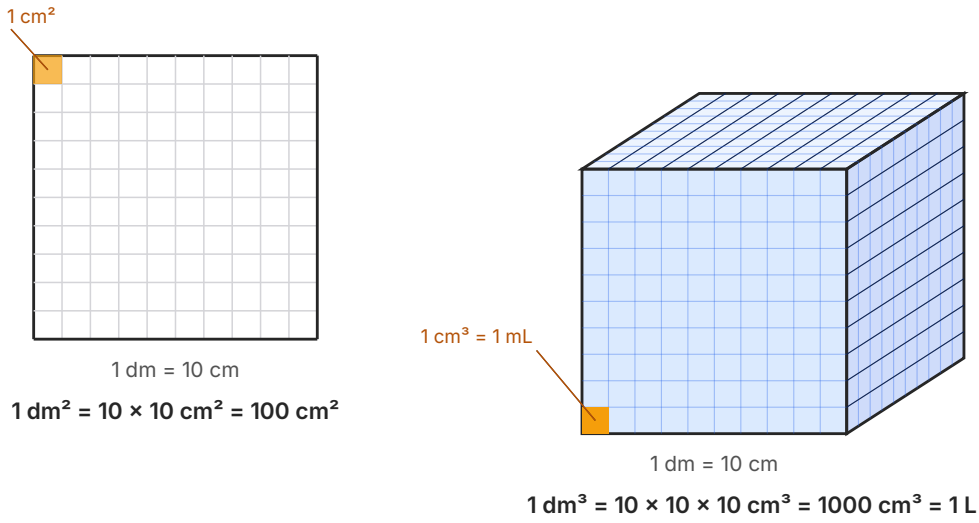


Figura 2.2 A sinistra un quadrato di 1 dm di lato, diviso in 100 quadratini da 1 cm^2; a destra un cubo di 1 dm di lato, che contiene 1000 cubetti da 1 cm^3: il suo volume è 1 L, e ogni cubetto ha il volume di 1 mL.

ERRORE FREQUENTE

«1 m = 100 cm, quindi 1 m^2 = 100 cm^2»: è sbagliato. L'esponente si applica anche al numero: 1 m^2 = $(100\ cm)^2$ = 100 × 100 cm^2 = 10 000 cm^2. Per le aree il fattore lineare va al quadrato, per i volumi al cubo: 1 m^3 = $(100\ cm)^3$ = 10^6 cm^3. Se hai un dubbio, disegna il quadrato o il cubo e conta i quadratini.

Le velocità si esprimono spesso in km/h, ma l'unità SI è il m/s. Poiché 1 km/h = 1000 m / 3600 s = 1/3,6 m/s, per passare da km/h a m/s si divide per 3,6 e per tornare indietro si moltiplica per 3,6.

ESEMPIO SVOLTO

Una catena di conversioni

a) Un'auto viaggia a 72 km/h. Quanto vale la velocità in m/s?

$72\ \text{km/h} = 72\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}} \times \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \dfrac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = \dfrac{72\,000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$. Si ottiene lo stesso risultato dividendo per 3,6: 72 / 3,6 = 20.

b) Una cisterna contiene 2,5 m^3 di acqua. Quanti litri sono?

$2{,}5\ \text{m}^3 \times \dfrac{1000\ \text{L}}{1\ \text{m}^3} = 2500\ \text{L}$.

c) Un foglio A4 ha un'area di 0,0624 m^2. Quanti cm^2 sono?

$0{,}0624\ \text{m}^2 \times \dfrac{10^4\ \text{cm}^2}{1\ \text{m}^2} = 624\ \text{cm}^2$: infatti un A4 misura 21,0 cm × 29,7 cm, e 21,0 × 29,7 = 623,7 cm^2, che arrotondato dà proprio 624 cm^2.

2.4 Ordini di grandezza e stime

2.4.1 La notazione scientifica

Dal corso di matematica conosci la **notazione scientifica**: un numero si scrive come $a \times 10^n$, con $1 \le a < 10$ e n intero. Il raggio della Terra, 6 371 000 m, diventa $6{,}371 \times 10^6$ m; il diametro di un globulo rosso, 0,000 007 5 m, diventa $7{,}5 \times 10^{-6}$ m. Per moltiplicare due numeri in notazione scientifica si moltiplicano i coefficienti e si sommano gli esponenti; per dividerli si dividono i coefficienti e si sottraggono gli esponenti. Sulla calcolatrice l'esponente si inserisce con il tasto EXP (o $\times 10^x$): $6{,}371 \times 10^6$ si digita 6,371 EXP 6.

2.4.2 L'ordine di grandezza

Spesso non serve il valore esatto di una grandezza, ma basta sapere «quanto è grande più o meno»: migliaia o milioni? millimetri o chilometri? L'**ordine di grandezza** di un numero è la potenza di 10 più vicina a esso. Per trovarlo si scrive il numero in notazione scientifica, $a \times 10^n$, e si applica la regola che useremo in tutto il volume:

- se $a < \sqrt{10} \approx 3{,}16$, l'ordine di grandezza è 10^n;
- se $a \ge \sqrt{10} \approx 3{,}16$, l'ordine di grandezza è 10^{n+1}.

Perché proprio $\sqrt{10}$ e non 5? Perché sulla scala delle potenze di 10 il «punto di mezzo» fra 10^n e 10^{n+1} non è a metà strada in senso aritmetico, ma il numero che sta nello stesso rapporto con i due estremi: $\sqrt{10} \times 10^n$ è 3,16 volte il primo e 3,16 volte più piccolo del secondo. Così il raggio della Terra ($6{,}37 \times 10^6$ m) ha ordine di grandezza 10^7 m, mentre la distanza Terra–Sole (1,50 ×

10^{11} m) ha ordine di grandezza 10^{11} m. Due grandezze che differiscono di un ordine di grandezza stanno fra loro all'incirca come 1 sta a 10.

La Tabella 2.4 e la Figura 2.3 mostrano le lunghezze della natura, dal protone ai confini dell'universo osservabile: più di quaranta ordini di grandezza. Su una scala come quella della figura, in cui ogni tacca vale un fattore 10, la persona umana sta più o meno a metà strada fra l'atomo e la distanza Terra–Sole.

Tabella 2.4 Alcune lunghezze della natura (valori arrotondati) e il loro ordine di grandezza.

Oggetto	Lunghezza (m)	Ordine di grandezza (m)
diametro di un protone	circa $1{,}7 \times 10^{-15}$	10^{-15}
diametro di un atomo	circa 1×10^{-10}	10^{-10}
diametro di un virus dell'influenza	circa 1×10^{-7}	10^{-7}
diametro di un globulo rosso	circa $7{,}5 \times 10^{-6}$	10^{-5}
spessore di un capello	circa 7×10^{-5}	10^{-4}
altezza di una persona	circa 1,7	10^{0}
altezza dell'Everest	$8{,}849 \times 10^{3}$	10^{4}
raggio medio della Terra	$6{,}371 \times 10^{6}$	10^{7}
distanza media Terra–Luna	$3{,}844 \times 10^{8}$	10^{9}
distanza media Terra–Sole	$1{,}496 \times 10^{11}$	10^{11}
anno luce (distanza percorsa dalla luce in un anno)	$9{,}461 \times 10^{15}$	10^{16}
diametro della Via Lattea	circa 1×10^{21}	10^{21}
diametro dell'universo osservabile	circa $8{,}8 \times 10^{26}$	10^{27}

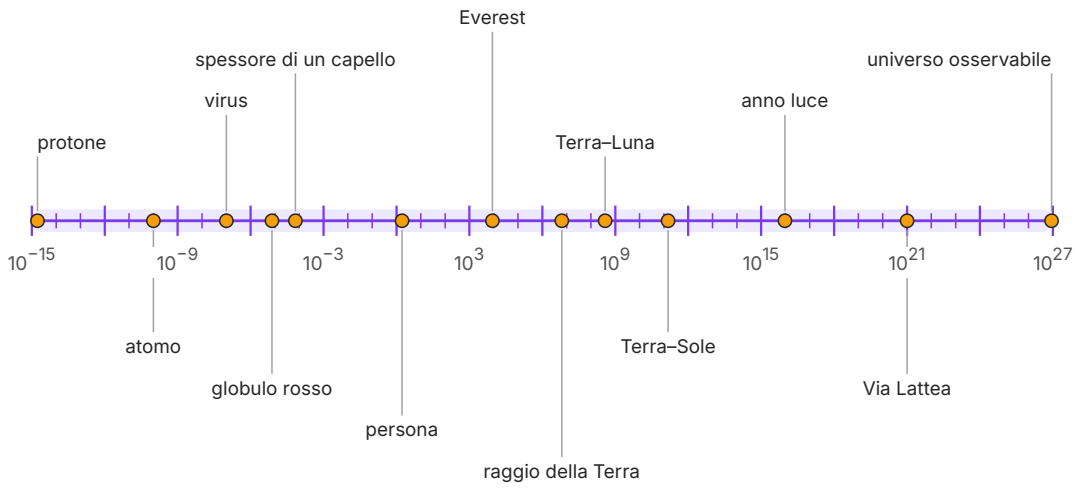


Figura 2.3 Le lunghezze della Tabella 2.4 su una scala logaritmica: ogni tacca corrisponde a un fattore 10, e la distanza fra due tacche è sempre la stessa. Su una scala lineare non sarebbe possibile disegnare insieme un atomo e la Via Lattea.

2.4.3 Le stime: i problemi di Fermi

Una **stima** è una valutazione approssimata, ottenuta ragionando con dati ragionevoli quando quelli esatti mancano. Il fisico italiano Enrico Fermi era famoso per la sua abilità nel ricavare in pochi minuti, con carta e matita, l'ordine di grandezza di quantità che sembrano impossibili da calcolare; da lui prendono il nome i **problemi di Fermi**. Il metodo è sempre lo stesso: si scompone la domanda in fattori più semplici, si stima ciascuno con un valore plausibile, si moltiplica e si dà come risposta solo l'ordine di grandezza. Gli errori dei singoli fattori tendono in parte a compensarsi.

ESEMPIO SVOLTO

Quante volte batte il cuore in una vita?

Fattori. A riposo il cuore di un adulto batte circa 70 volte al minuto; una vita lunga dura circa 80 anni.

Calcolo. Battiti in un anno: 70×60 min/h $\times$ 24 h/d $\times$ 365 d $\approx 3{,}7 \times 10^{7}$. In 80 anni: $3{,}7 \times 10^{7} \times 80 \approx 2{,}9 \times 10^{9}$.

Risultato. Poiché $2{,}9 < 3{,}16$, l'ordine di grandezza è 10^{9}: il cuore batte alcuni miliardi di volte. Che il battito rallenti nel sonno e acceleri nello sport cambia il coefficiente, non l'ordine di grandezza.

ESEMPIO SVOLTO

Quanta acqua usa una città per le docce?

Domanda. Stima il volume d'acqua usato in un giorno per le docce da una città di 100 000 abitanti, ed esprimilo in m^3.

Fattori. Supponiamo una doccia al giorno per persona (una stima per eccesso), lunga 8 minuti, con un getto di circa 10 L al minuto.

Calcolo. Una doccia: 8 min × 10 L/min = 80 L. Tutta la città: $1 \times 10^5 \times 80\ \text{L} = 8 \times 10^6$ L. Convertiamo: $8 \times 10^6\ \text{L} \times \dfrac{1\ \text{m}^3}{1000\ \text{L}} = 8 \times 10^3\ \text{m}^3$.

Risultato. L'ordine di grandezza è $10^4\ \text{m}^3$ ($8 \geq 3{,}16$). Per farsene un'idea: una piscina di 50 m × 25 m, profonda 2 m, contiene 2500 m^3; la città ne riempirebbe ogni giorno circa tre solo con le docce.

COLLEGAMENTI

Archimede e i granelli di sabbia

Il primo «problema di Fermi» della storia lo scrisse Archimede, nel III secolo a.C. Nell'*Arenario* (Ψαμμίτης), dedicato al re Gelone di Siracusa, si chiese quanti granelli di sabbia servirebbero per riempire l'intero cosmo, così grande come lo immaginavano gli astronomi del suo tempo. Alcuni pensavano che quel numero fosse infinito, o comunque impossibile da nominare. Archimede stimò le dimensioni di un granello e del cosmo, e mostrò che il numero era finito: nella nostra notazione, inferiore a 10^{63}.

Il problema vero era scriverlo. La numerazione greca arrivava comodamente fino alla miriade (μυριάς, 10 000) e alla «miriade di miriadi», 10^8. Archimede usò 10^8 come nuova unità per costruire numeri sempre più grandi: un'idea vicina, nello spirito, alla notazione scientifica.

2.5 La densità

2.5.1 Più massa nello stesso volume

Un cubetto di ferro e un cubetto di legno con lo stesso volume hanno masse molto diverse; per avere la stessa massa, il legno deve occupare molto più spazio. Per confrontare i materiali conviene allora considerare quanta massa sta in un'unità di volume. La **densità** di un corpo è il rapporto fra la sua massa e il suo volume:

$$d = \frac{m}{V}$$

L'unità SI è il chilogrammo al metro cubo (kg/m³); in laboratorio si usa spesso il grammo al centimetro cubo (g/cm³). Il fattore fra le due unità si ricava con una catena di conversioni:

$$1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} \times \frac{10^6\ \text{cm}^3}{1\ \text{m}^3} = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

L'acqua ha densità 1,00 g/cm³ = 1000 kg/m³: un litro d'acqua ha massa 1 kg. In molti testi la densità è indicata con la lettera greca ρ (*rho*); in questo volume la chiameremo sempre d.

La densità è una proprietà della **sostanza**, non del singolo oggetto: un chiodo di ferro e una trave di ferro hanno masse e volumi molto diversi, ma lo stesso rapporto m/V. Per questo la densità aiuta a riconoscere un materiale (Tabella 2.5; altri valori nella Tabella A.4 dell'Appendice). Varia un poco con la temperatura e, nei gas, molto con la pressione. Nota che il ghiaccio ha densità minore dell'acqua liquida: è per questo che galleggia, come vedrai nel capitolo 9.

Tabella 2.5 Densità di alcune sostanze a temperatura ambiente (valori indicativi; l'acqua a circa 4 °C).

Sostanza	d (kg/m³)	d (g/cm³)
aria (20 °C, pressione normale)	circa 1,20	circa 0,001 20
legno di abete	circa 450	circa 0,45
alcol etilico	789	0,789
ghiaccio	917	0,917
acqua dolce	1000	1,00
acqua di mare	circa 1025	circa 1,025
alluminio	2700	2,70
ferro	7870	7,87
piombo	11 340	11,34
mercurio (20 °C)	13 546	13,546
oro	19 300	19,3

Dalla definizione si ricavano le due formule inverse: la massa di un corpo di volume e densità noti è $m = d \cdot V$; il volume di un corpo di massa e densità note è $V = m/d$. Per esempio, 1,0 L = 1000 cm³ di olio d'oliva ($d \approx 0{,}92$ g/cm³) ha massa 0,92 g/cm³ × 1000 cm³ = 920 g: meno di un litro d'acqua, ed è per questo che l'olio sta sopra l'acqua.

2.5.2 Il grafico massa-volume

Se si misurano massa e volume di vari campioni della stessa sostanza e si riportano i punti su un grafico con il volume in ascissa e la massa in ordinata, i punti si dispongono su una retta che

passa per l'origine: la massa è **direttamente proporzionale** al volume, e il rapporto costante m/V è proprio la densità. Più la sostanza è densa, più la retta è ripida (Figura 2.4). Nel capitolo 4 riprenderai questo tipo di grafico in generale.

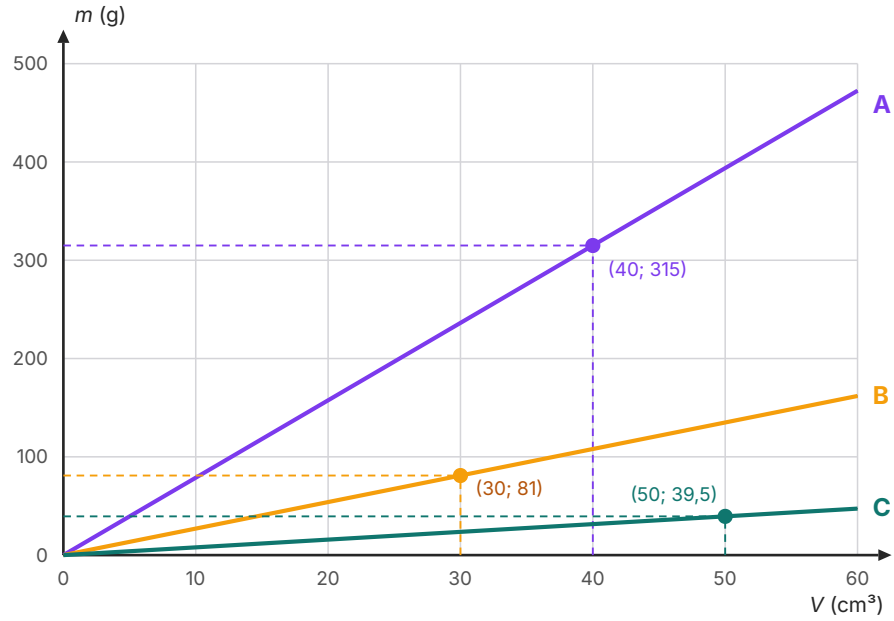


Figura 2.4 Massa in funzione del volume per tre sostanze, A, B e C. Le rette passano per l'origine: massa e volume sono direttamente proporzionali, e la pendenza di ogni retta è la densità. Per ogni sostanza è evidenziato un punto con le sue coordinate.

ESEMPIO SVOLTO

Riconoscere tre sostanze da un grafico

Domanda. Usando i punti evidenziati nella Figura 2.4 e la Tabella 2.5, riconosci le sostanze A, B e C.

Lettura e calcolo. Retta A: $d = 315\ \text{g} / 40\ \text{cm}^3 = 7{,}9\ \text{g/cm}^3$ → ferro (7,87 g/cm³). Retta B: $d = 81\ \text{g} / 30\ \text{cm}^3 = 2{,}7\ \text{g/cm}^3$ → alluminio. Retta C: $d = 39{,}5\ \text{g} / 50\ \text{cm}^3 = 0{,}79\ \text{g/cm}^3$ → alcol etilico.

Controllo. Conviene scegliere un punto lontano dall'origine e leggibile con precisione, come quelli evidenziati: il rapporto fra due numeri piccoli, letti male, può dare una densità molto sbagliata. L'ordine delle pendenze (A più ripida di B, B più ripida di C) conferma l'ordine delle densità.

2.5.3 Il volume dei corpi irregolari

Il volume di un cubo o di un cilindro si calcola misurandone le dimensioni; quello di un sasso no. Si usa allora il **metodo per immersione**: si versa acqua in un cilindro graduato, si legge il volume iniziale V_i, si immerge completamente il corpo e si legge il volume finale V_f. L'acqua sale di un volume uguale a quello del corpo: $V = V_f - V_i$ (Figura 2.5). Il livello si legge sul fondo del menisco, la superficie leggermente curva dell'acqua, con l'occhio alla stessa altezza.

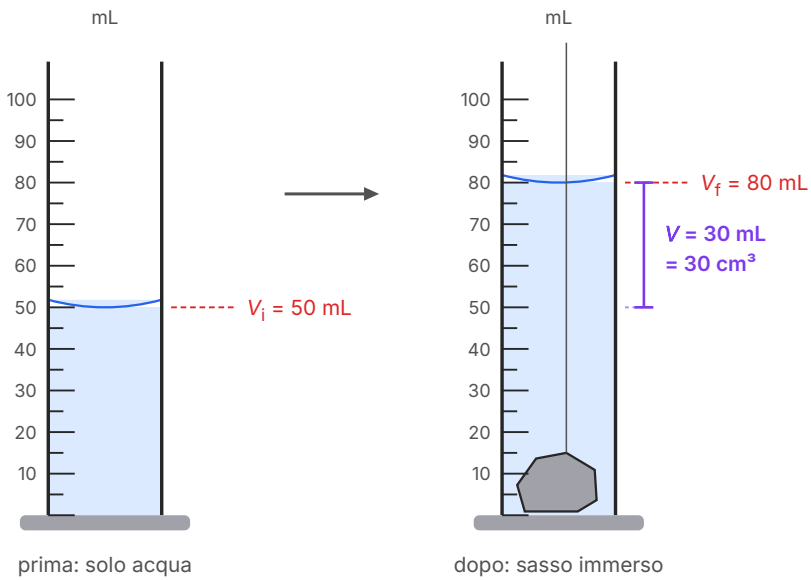


Figura 2.5 Il metodo per immersione. Il sasso, immerso completamente, fa salire l'acqua da 50 mL a 80 mL: il suo volume è 30 mL = 30 cm³. Il livello si legge sul fondo del menisco.

COLLEGAMENTI

In laboratorio: la densità di un corpo irregolare

Secondo un racconto riferito da Vitruvio nel *De architectura* (libro IX, prefazione), il re Ierone di Siracusa sospettava che l'orafo avesse sostituito parte dell'oro di una corona con argento. Archimede trovò la soluzione ai bagni: «*cum in solium descenderet, animadvertit quantum corporis sui in eo insideret tantum aquae extra solium effluere*», cioè «mentre scendeva nella vasca, si accorse che quanta parte del suo corpo vi si immergeva, tanta acqua traboccava fuori dalla vasca» (traduzione della redazione). Poi, sempre secondo Vitruvio, corse a casa nudo gridando εὕρηκα, εὕρηκα, «ho trovato!». Vitruvio scrive quasi due secoli dopo Archimede, e la storia è un aneddoto di cui non sappiamo se sia vero; il metodo, però, funziona, e lo puoi usare tu.

Materiali. Una bilancia elettronica (sensibilità 0,1 g), un cilindro graduato da 100 mL (sensibilità 1 mL), acqua, filo sottile, tre oggetti che entrino nel cilindro: un sasso, un pezzo di alluminio, un bullone d'acciaio.

Procedimento. 1) Misura la massa di ogni oggetto asciutto. 2) Versa nel cilindro circa 50 mL di acqua e leggi V_i sul fondo del menisco. 3) Lega l'oggetto al filo, calalo lentamente fino a immergerlo del tutto e leggi V_f. 4) Calcola $V = V_f - V_i$ e $d = m/V$.

Tabella 2.6 Dati tipici dell'esperienza (sensibilità: 0,1 g per la massa, 1 mL per i volumi).

Oggetto	m (g)	V_i (mL)	V_f (mL)	V (cm³)	d (g/cm³)
sasso	81,3	50	80	30	2,7
alluminio	54,2	50	70	20	2,7
bullone d'acciaio	62,4	50	58	8	7,8

Che cosa concludere. L'alluminio dà 2,7 g/cm³, in accordo con la Tabella 2.5. Il bullone dà 7,8 g/cm³, vicino al valore del ferro (l'acciaio è quasi tutto ferro). Il sasso ha una densità tipica delle rocce comuni. Osserva però il bullone: il suo volume, 8 mL, è letto su un cilindro che distingue solo il millilitro, e un errore di lettura di 1 mL cambierebbe la densità di più del 10%. Per gli oggetti piccoli il metodo è poco preciso: nel capitolo 3 imparerai a dire *quanto*.

Sicurezza. Non lasciare cadere l'oggetto nel cilindro: oltre a far schizzare l'acqua, può rompere il vetro.

Per la relazione. Riporta lo scopo, i materiali, il procedimento, la tabella dei dati con le unità, i calcoli della densità e il confronto con i valori della Tabella 2.5; indica quale misura ti sembra meno affidabile e perché. La struttura completa della relazione di laboratorio è presentata nel capitolo 4.

2.6 L'analisi dimensionale

2.6.1 Le dimensioni di una grandezza

Ogni grandezza della meccanica si può esprimere a partire dalle tre fondamentali: lunghezza, massa e tempo. Le loro **dimensioni** si indicano con [L], [M] e [T]. La **dimensione** di una grandezza derivata dice come essa è costruita dalle fondamentali, indipendentemente dall'unità scelta: un'area è il prodotto di due lunghezze, $[L^2]$, sia che la misuri in m^2 sia in cm^2; un volume ha dimensioni $[L^3]$; una velocità $[L][T]^{-1}$, cioè [L]/[T]; una densità $[M][L]^{-3}$. I numeri puri, come 2, ½ o π, non hanno dimensioni.

2.6.2 Controllare una formula

Come non si possono sommare 3 m e 2 s, così in una formula corretta tutti i termini sommati o sottratti devono avere le stesse dimensioni, e i due membri di un'uguaglianza devono avere le stesse dimensioni. Una formula che rispetta questa regola si dice **dimensionalmente omogenea**. L'**analisi dimensionale** consiste nel sostituire a ogni grandezza le sue dimensioni e controllare l'omogeneità: è un modo rapido per scoprire una formula ricordata male.

Il controllo ha però un limite: dice se una formula è *possibile*, non se è giusta. Una formula dimensionalmente omogenea può ancora avere un fattore numerico sbagliato, perché i numeri puri sono invisibili all'analisi dimensionale.

ESEMPIO SVOLTO

Superficie o volume?

Domanda. Per il volume di un cilindro di raggio r e altezza h uno studente scrive $V = 2\pi rh$, un altro $V = \pi r^2 h$. Quale formula può essere giusta?

Analisi. Il primo membro è un volume: $[L^3]$. Nella prima formula il secondo membro ha dimensioni $[L] \cdot [L] = [L^2]$: è un'area (infatti $2\pi rh$ è l'area della superficie laterale), non un volume. Nella seconda: $[L^2] \cdot [L] = [L^3]$. Solo la seconda è omogenea.

Attenzione. L'analisi dimensionale avrebbe accettato anche $V = 2\pi r^2 h$, che è sbagliata di un fattore 2: per essere sicuri della formula serve un ragionamento geometrico o una misura.

IN SINTESI

Misura = numero + unità: quante volte l'unità è contenuta nella grandezza.

SI: lunghezza in metri (m), massa in chilogrammi (kg), tempo in secondi (s); dal 2019 le unità sono definite fissando il valore di costanti della natura.

Conversioni: si moltiplica per un fattore di conversione, che vale 1. 1 m^2 = 10^4 cm^2; 1 m^3 = 10^6 cm^3 = 1000 L; 1 L = 1 dm^3; 1 mL = 1 cm^3; da km/h a m/s si divide per 3,6.

Ordine di grandezza di $a \times 10^n$: 10^n se $a < 3{,}16$, altrimenti 10^{n+1}.

Densità: $d = m/V$, la massa contenuta nell'unità di volume; $m = d \cdot V$; $V = m/d$. Unità: kg/m^3; 1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3.

Analisi dimensionale: i termini sommati e i due membri di un'uguaglianza devono avere le stesse dimensioni, costruite con [L], [M], [T].

SINTESI

- Misurare significa confrontare una grandezza con un'unità della stessa specie; la misura è sempre un numero accompagnato dall'unità.
- Le grandezze fondamentali sono scelte per convenzione; le derivate si definiscono con formule, da cui si ricavano anche le loro unità.
- La massa (in kg) non è il peso: il peso è una forza e si misura in newton.
- Il Sistema Internazionale ha sette grandezze fondamentali; la meccanica usa metro, chilogrammo e secondo, definiti dal 2019 tramite costanti della natura.
- I simboli delle unità si scrivono senza punto e senza plurale, con le maiuscole giuste e uno spazio dopo il numero.
- I prefissi moltiplicano l'unità per una potenza di 10; per convertire si moltiplica per uno o più fattori di conversione.
- Per le aree il fattore di conversione delle lunghezze va al quadrato, per i volumi al cubo; 1 L = 1 dm^3 e 1 mL = 1 cm^3.
- L'ordine di grandezza di $a \times 10^n$ è 10^n se $a < \sqrt{10} \approx 3{,}16$, altrimenti 10^{n+1}.
- Una stima di Fermi scompone una domanda in fattori stimabili e dà come risposta un ordine di grandezza.
- La densità $d = m/V$ è una proprietà della sostanza; 1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3; il volume di un corpo irregolare si misura per immersione.
- Una formula corretta è dimensionalmente omogenea, ma l'omogeneità non garantisce che i fattori numerici siano giusti.

ESERCIZI

Comprendere e ricordare

1. ● Quale di queste grandezze è **derivata**?
   - **A.** il tempo
   - **B.** la massa
   - **C.** il volume
   - **D.** la lunghezza

2. ● Quale scrittura rispetta le regole del SI?
   - **A.** 5 Kg
   - **B.** 5 kg.
   - **C.** 5 kgs
   - **D.** 5 kg

3. ● Un litro equivale a:
   - **A.** 1 m^3
   - **B.** 1 dm^3
   - **C.** 1 cm^3
   - **D.** 10 cm^3

4. ● Il prefisso micro (μ) corrisponde al fattore:
   - **A.** 10^{-6}
   - **B.** 10^{-3}
   - **C.** 10^{-9}
   - **D.** 10^{6}

5. ●● Quanti centimetri quadrati ci sono in 1 m^2?
   - **A.** 100
   - **B.** 1000
   - **C.** 10^4
   - **D.** 10^6

6. ●● Secondo la regola del capitolo, l'ordine di grandezza di $4{,}2 \times 10^5$ m è:
   - **A.** 10^5 m
   - **B.** 10^6 m
   - **C.** 10^4 m
   - **D.** 4×10^5 m

7. ●● Un cubetto di 2,0 cm di lato ha massa 21,6 g. La sua densità è:
   A. 2,7 g/cm³
   B. 10,8 g/cm³
   C. 5,4 g/cm³
   D. 21,6 g/cm³

8. ●● Le dimensioni della densità sono:
   A. $[M][L]^3$
   B. $[M][L]^{-2}$
   C. $[M][L][T]^{-1}$
   D. $[M][L]^{-3}$

Vero o falso

9. ● Il chilogrammo è oggi definito da un cilindro di platino e iridio conservato a Sèvres. V / F

10. ● Due grandezze si possono sommare solo se hanno le stesse dimensioni. V / F

11. ●● Se il lato di un cubo raddoppia, il suo volume raddoppia. V / F

12. ● Un chiodo di ferro e una trave di ferro hanno la stessa densità. V / F

13. ●● Se una formula è dimensionalmente omogenea, allora è sicuramente corretta. V / F

Applicare

14. ● Converti: 3,2 km in metri; 450 mm in metri; 0,75 h in minuti.

15. ●● Scrivi in notazione scientifica e indica l'ordine di grandezza: 0,000 82 m; 6 370 000 m; 299 792 458 m/s.

16. ●● Converti: 108 km/h in m/s; 15 m/s in km/h.

17. ●● Converti: 2,5 m^2 in cm^2; 350 cm^3 in litri e in m^3; 0,80 L in cm^3.

18. ● Converti 0,79 g/cm^3 in kg/m^3 e 1025 kg/m^3 in g/cm^3.

19. ●● Leggi la Figura 2.4: qual è la massa di 20 cm^3 della sostanza A? Quale volume occupano 100 g della sostanza B?

20. ● Completa: nel SI la massa si misura in _____ e il tempo in _____ ; il volume è una grandezza _____ e la sua unità SI è il _____ .

Problemi

21. ●● Un'aula misura 8,0 m × 6,5 m × 3,2 m. Calcola il volume dell'aula e la massa dell'aria che contiene (d_{aria} = 1,20 kg/m^3).

22. ● Una bottiglia contiene 0,75 L di olio d'oliva (d = 920 kg/m^3). Qual è la massa dell'olio? Quale volume, in litri, occupa 1,0 kg di olio?

23. ●●● Un lingotto d'oro ha massa 1,00 kg. Calcola il suo volume (usa la Tabella 2.5) e, se avesse la forma di un cubo, la lunghezza del suo spigolo.

24. ●●● Riprendiamo la corona di Ierone. Supponi che la corona abbia massa 1,00 kg e che l'orafo abbia sostituito il 30% della massa d'oro con argento (d_{argento} = 10,49 g/cm^3). Calcola: a) il volume di una corona d'oro puro da 1,00 kg; b) il volume della corona falsificata; c) quanta acqua in più traboccherebbe immergendo la corona falsa invece di un blocco d'oro di uguale massa; d) la densità della corona falsa.

25. ●●● Per verificare se la densità dipende dalla quantità di materiale, una studentessa misura massa e volume di quattro pezzi di plastilina della stessa confezione: (10 cm^3; 15,1 g), (20 cm^3; 30,4 g), (30 cm^3; 45,2 g), (40 cm^3; 60,6 g). a) Riprendendo il capitolo 1, indica la variabile indipendente, la variabile dipendente e almeno una variabile da tenere controllata. b) Calcola il rapporto m/V per ogni pezzo e il valore medio, in g/cm^3 e in kg/m^3. c) Prevedi la massa di un pezzo da 75 cm^3.

26. ●●● Una colonna miliare romana indica una distanza di 120 miglia. a) Esprimi la distanza in passi e in chilometri (1 miglio ≈ 1,48 km). b) Se un reparto di legionari in marcia percorre 20 miglia in 5 ore, quanto vale la sua velocità media in km/h? c) Quanti giorni di marcia servono, a 20 miglia al giorno?

Ragionare e argomentare

27. ●● *Trova l'errore.* Uno studente scrive: «0,5 m^3 = 0,5 × 100 cm^3 = 50 cm^3 = 0,05 L». Individua l'errore e scrivi la conversione corretta.

28. ●● *Stima.* A riposo una persona fa circa 15 respiri al minuto. Stima l'ordine di grandezza del numero di respiri in un anno, spiegando i passaggi.

29. ●●● *Commenta la fonte.* Vitruvio racconta che Archimede, immergendo un blocco d'oro, trovò che traboccava meno acqua che con un blocco d'argento, «*quanto minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quam argenti*», cioè «di quanto la massa d'oro, a parità di peso, era di volume minore di quella d'argento» (traduzione della redazione). Che cosa afferma la frase, in termini di densità? È corretta? Usando i risultati dell'esercizio sulla corona, spiega perché, già nel Cinquecento, Galileo giudicò poco credibile che Archimede avesse usato proprio il metodo del traboccamento.

30. ● Una compagna ricorda che l'area di un cerchio di raggio r è $2\pi r$. Con l'analisi dimensionale spiega perché la formula non può essere giusta.

PER APPROFONDIRE

- [ARC] Archimede, *Sui galleggianti*: il trattato in cui il problema della corona diventa una teoria; lo leggerai nel capitolo 9.
- [RUS] Lucio Russo, *La rivoluzione dimenticata*: la scienza ellenistica, da Archimede a Eratostene, e il suo modo di misurare il mondo.
- [FEY] *La fisica di Feynman*, vol. I: i capitoli su tempo e distanza, per vedere come un grande fisico ragiona sulle scale della natura.
- [HRW] Halliday, Resnick, Walker, *Fondamenti di fisica*: il primo capitolo, su misure, unità e conversioni.

Glossario del capitolo

Analisi dimensionale
Controllo che i termini di una formula abbiano le stesse dimensioni (omogeneità).

Campione
Oggetto o fenomeno che realizza materialmente un'unità di misura.

Chilogrammo
Unità SI di massa, definita dal 2019 fissando il valore della costante di Planck.

Densità
Rapporto fra massa e volume di un corpo, $d = m/V$; è una proprietà della sostanza. Unità SI $\mathrm{kg/m^3}$.

Dimensione
Espressione di una grandezza in funzione delle fondamentali [L], [M], [T], indipendente dall'unità scelta.

Fattore di conversione
Frazione uguale a 1, con la stessa grandezza espressa in due unità diverse, che serve a cambiare unità.

Grandezza derivata
Grandezza definita a partire dalle fondamentali mediante una formula, da cui si ricava anche la sua unità.

Grandezza fondamentale
Grandezza scelta come base di un sistema di unità, indipendente dalle altre (nel SI: lunghezza, massa, tempo e altre quattro).

Litro
Unità di volume non SI ammessa: $1\ \mathrm{L} = 1\ \mathrm{dm^3} = 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$.

Massa
Grandezza fondamentale che si misura con una bilancia a bracci uguali; unità SI il chilogrammo. Non va confusa con il peso, che è una forza.

Metodo per immersione
Misura del volume di un corpo irregolare come innalzamento del livello dell'acqua in cui il corpo è immerso.

Metro
Unità SI di lunghezza: distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792 458 di secondo.

Misura
Risultato del confronto di una grandezza con l'unità di misura: un numero accompagnato dall'unità.

Ordine di grandezza
Potenza di 10 più vicina a un numero: per $a \times 10^n$ è 10^n se $a < 3{,}16$, altrimenti 10^{n+1}.

Prefisso
Parola posta davanti a un'unità che la moltiplica per una potenza di 10 (chilo = 10^3, milli = 10^{-3}...).

Secondo
Unità SI di tempo, definita dalla frequenza di una radiazione dell'atomo di cesio-133.

Sistema Internazionale (SI)
Sistema di unità adottato nel 1960 e usato in tutto il mondo; ha sette grandezze fondamentali.

Stima
Valutazione approssimata di una grandezza, ottenuta con dati plausibili; un problema di Fermi ne dà l'ordine di grandezza.

Unità di misura
Grandezza di riferimento, della stessa specie di quella da misurare, scelta per convenzione.

Soluzioni

1. C. Il volume si definisce a partire dalla lunghezza (lato × lato × lato): è una grandezza derivata, con unità m^3.

2. D. Simbolo minuscolo, senza punto e senza plurale, separato dal numero da uno spazio.

3. B. 1 L è il volume di un cubo di 1 dm di lato: 1 L = 1 dm^3 = 1000 cm^3.

4. A. μ = 10^{-6}; 10^{-3} è milli, 10^{-9} nano, 10^6 mega.

5. C. 1 m^2 = $(100\ cm)^2$ = 10^4 cm^2.

6. B. 4,2 ≥ 3,16, quindi l'ordine di grandezza è 10^{5+1} m = 10^6 m.

7. A. $V = (2{,}0\ cm)^3 = 8{,}0\ cm^3$; d = 21,6 g / 8,0 cm^3 = 2,7 g/cm^3 (alluminio).

8. D. $d = m/V$: $[M]/[L^3] = [M][L]^{-3}$.

9. F. Dal 2019 il chilogrammo è definito fissando il valore della costante di Planck; il cilindro di Sèvres non è più il campione.

10. V. Si possono sommare solo grandezze omogenee: 3 m + 2 s non ha senso.

11. F. Il volume va con il cubo del lato: $(2l)^3 = 8l^3$, quindi diventa 8 volte maggiore.

12. V. La densità dipende dalla sostanza (e dalla temperatura), non dalla quantità di materiale.

13. F. L'omogeneità è necessaria ma non sufficiente: i fattori numerici (½, 2, π) sfuggono all'analisi dimensionale.

14. 3,2 km × 1000 m/km = 3200 m; 450 mm × (1 m / 1000 mm) = 0,450 m; 0,75 h × 60 min/h = 45 min.

15. 8,2 × 10^{-4} m, ordine 10^{-3} m (8,2 ≥ 3,16); 6,37 × 10^6 m, ordine 10^7 m; 2,997 924 58 × 10^8 m/s ≈ 3,00 × 10^8 m/s, ordine 10^8 m/s (3,00 < 3,16).

16. 108 km/h ÷ 3,6 = 30 m/s; 15 m/s × 3,6 = 54 km/h.

17. 2,5 m^2 × 10^4 cm^2/m^2 = 2,5 × 10^4 cm^2; 350 cm^3 = 0,350 L = 3,50 × 10^{-4} m^3 (1 L = 1000 cm^3; 1 m^3 = 10^6 cm^3); 0,80 L = 800 cm^3.

18. 0,79 g/cm^3 × 1000 = 790 kg/m^3; 1025 kg/m^3 ÷ 1000 = 1,025 g/cm^3.

19. Densità di A: 315 g / 40 cm^3 = 7,875 g/cm^3; m = 7,875 g/cm^3 × 20 cm^3 ≈ 1,6 × 10^2 g (sul grafico, a 20 cm^3 la retta A passa poco sopra 150 g). Densità di B: 81 g / 30 cm^3 = 2,7 g/cm^3; V = 100 g / 2,7 g/cm^3 ≈ 37 cm^3.

20. chilogrammi (kg); secondi (s); derivata; metro cubo (m^3).

21. V = 8,0 m × 6,5 m × 3,2 m = 166,4 m^3 ≈ 1,7 × 10^2 m^3; $m = d \cdot V$ = 1,20 kg/m^3 × 166,4 m^3 ≈ 2,0 × 10^2 kg. L'aria di un'aula ha una massa di circa 200 kg.

22. V = 0,75 L = 0,75 × 10^{-3} m^3; m = 920 kg/m^3 × 0,75 × 10^{-3} m^3 = 0,69 kg. $V = m/d$ = 1,0 kg / 920 kg/m^3 = 1,09 × 10^{-3} m^3 ≈ 1,1 L.

23. $V = m/d$ = 1000 g / 19,3 g/cm^3 = 51,8 cm^3. Spigolo: $l = \sqrt[3]{51{,}8\ cm^3} \approx 3{,}73$ cm. Un chilogrammo d'oro sta in un cubetto di meno di 4 cm di lato.

24. a) V_{oro} = 1000 g / 19,3 g/cm^3 = 51,8 cm^3. b) Oro 700 g, argento 300 g: V = 700 g / 19,3 g/cm^3 + 300 g / 10,49 g/cm^3 = 36,3 cm^3 + 28,6 cm^3 = 64,9 cm^3. c) 64,9 cm^3 − 51,8 cm^3 ≈ 13 cm^3 di acqua in più. d) d = 1000 g / 64,9 cm^3 = 15,4 g/cm^3, molto meno di 19,3 g/cm^3: la frode si scopre con la densità.

25. a) Variabile indipendente: il volume del pezzo; dipendente: la massa (e quindi il rapporto m/V); controllate: la sostanza (stessa confezione), la temperatura, la bilancia usata. b) m/V = 1,51; 1,52; 1,51; 1,52 g/cm^3 (valori esatti 1,510; 1,520; 1,507; 1,515); media ≈ 1,51 g/cm^3 = 1,51 × 10^3 kg/m^3. Il rapporto non dipende dalla quantità: la densità è una proprietà della sostanza. c) m = 1,51 g/cm^3 × 75 cm^3 ≈ 113 g.

26. a) 120 miglia × 1000 passi/miglio = 1,20 × 10^5 passi; 120 × 1,48 km = 177,6 km ≈ 178 km. b) 20 miglia = 29,6 km; v = 29,6 km / 5 h ≈ 5,9 km/h. c) 120 / 20 = 6 giorni.

27. L'errore è nel primo passaggio: $1\ m^3 = (100\ cm)^3 = 10^6\ cm^3$, non $100\ cm^3$. L'ultimo passaggio ($50\ cm^3 = 0{,}05\ L$) è giusto, ma parte da un numero sbagliato. Corretto: $0{,}5\ m^3 = 0{,}5 \times 10^6\ cm^3 = 5 \times 10^5\ cm^3 = 500\ L$ (oppure, direttamente, $0{,}5\ m^3 \times 1000\ L/m^3 = 500\ L$).

28. Respiri in un anno: $15 \times 60 \times 24 \times 365 \approx 7{,}9 \times 10^6$; poiché $7{,}9 \geq 3{,}16$, l'ordine di grandezza è 10^7. Nel sonno e sotto sforzo il ritmo cambia, ma non abbastanza da spostare l'ordine di grandezza.

29. Traccia: a parità di peso (cioè di massa) l'oro occupa meno volume dell'argento: ha densità maggiore (19,3 contro 10,49 g/cm^3). L'affermazione è corretta e si verifica pesando e misurando per immersione due blocchi di uguale massa. Ma la differenza è piccola: per una corona di 1 kg con il 30% di argento l'acqua traboccata in più è circa 13 cm^3, cioè un bicchierino, distribuito sul bordo di un vaso abbastanza largo da contenere una corona; misurarla raccogliendo l'acqua versata è difficile. Per questo Galileo, nello scritto giovanile *La bilancetta*, propose che Archimede avesse usato invece una bilancia con il corpo immerso nell'acqua, un metodo molto più sensibile che si basa sulla spinta di Archimede (capitolo 9).

30. L'area ha dimensioni $[L^2]$; $2\pi r$ ha dimensioni $[L]$ (2 e π sono numeri puri): è una lunghezza, e infatti è la circonferenza. La formula corretta è $A = \pi r^2$, che ha dimensioni $[L^2]$.